

Analyse asymptotique

Dans ce chapitre, on désignera par X, Y, Z des parties de $\mathbb{R}$, qui représentent les ensembles de définition des fonctions, comme $[0, 1]$, $] - 1, +\infty[$, ou $\mathbb{R}$ lui-même.

1 L'ASYMPTOTIQUE : DOMINÉES, NÉGLIGEABLES OU ÉQUIVALENTES

On rappelle qu'un élément est **adhérent** à X s'il est au "bord de X " ou dans X , dans $\overline{\mathbb{R}}$. Les endroits où X est ouvert, sont alors dans l'adhérence de X , y compris les infinis.

On rappelle qu'un **voisinage** $\mathcal{V}_a$ de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est défini par un intervalle ouvert

- $]a - r, a + r[$, avec $r > 0$, si $a \in \mathbb{R}$,
- $]M, +\infty[$, avec $M > 0$, si $a = +\infty$,
- $] - \infty, M[$, avec $M < 0$, si $a = -\infty$.

1.1 DÉFINITIONS

Définition 1 : Pour les fonctions

Soient $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à X , telles que g ne s'annule pas au voisinage de a .

- On dit que f est **négligeable devant** g au voisinage de a si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

On note cette relation $f = o(g)$ ou $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$. On lit " f est un petit o de g au voisinage de a ".

- On dit que f est **dominée par** g au voisinage de a si

$$\frac{f}{g} \text{ est bornée au voisinage de } a$$

On note cette relation $f = O(g)$ ou $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x))$. On lit " f est un grand o de g au voisinage de a ".

- On dit que f est **équivalente à** g au voisinage de a si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

On note cette relation $f \sim_a g$ ou $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$. On lit " f est équivalente à g au voisinage de a ".

Autres définitions

On dit que f est **négligeable devant** g au voisinage de a s'il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a et une fonction $\varepsilon : X \cap \mathcal{V}_a \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$f(x) = \varepsilon(x)g(x) \text{ pour tout } x \in X \cap \mathcal{V}_a \quad \text{et} \quad \lim_a \varepsilon = 0.$$

que l'on peut réécrire, en utilisant la définition de limite

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X \cap \mathcal{V}_a, \quad |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|.$$

On dit que f est **dominée par** g au voisinage de a si

$$\exists \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X \cap \mathcal{V}_a, \quad |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|.$$

On dit que f est **équivalente à** g au voisinage de a s'il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a et une fonction $\varepsilon : X \cap \mathcal{V}_a \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$f(x) = \varepsilon(x)g(x) \text{ pour tout } x \in D \cap \mathcal{V}_a \quad \text{et} \quad \lim_a \varepsilon = 1.$$

Avec ces définitions, on ne divise plus par g , donc on peut s'autoriser d'enlever l'hypothèse " g ne s'annule pas au voisinage de a ".

⚠ ATTENTION La relation $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} g(x) + o(h(x))$ n'est plus une égalité classique. C'est un abus de notation qui veut dire $f(x) - g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(h(x))$ et d'ailleurs.

Exemple 1

En pratique, si $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et a une borne ou un point de l'intervalle I , où g admet une limite finie ℓ .

- ① Si $f(x) \underset{a}{=} O(g(x))$, alors f est bornée au voisinage de a .
- ② Si $f(x) \underset{a}{=} o(g(x))$, alors f tend vers 0 en a .
- ③ Si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$, alors f tend vers ℓ en a .

Définition 2 : Pour les suites

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, telles que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang N .

- On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **négligeable devant** $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

On note cette relation $u_n = o(v_n)$ ou $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$. On lit " u_n est un petit o de v_n ".

- On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **dominée par** $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ au voisinage de a si

$$\frac{u_n}{v_n} \text{ est bornée au voisinage de } a$$

On note cette relation $u_n = O(v_n)$ ou $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$. On lit " $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un grand o de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ".

- On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **équivalente à** $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

On note cette relation $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ ou $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$. On lit " $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ".

Autres définitions

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **négligeable devant** $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'il existe un rang N et une suite $(\varepsilon_n)_{n \geq N}$ pour lesquels

$$u_n = \varepsilon_n v_n \text{ pour tout } n \geq N \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0.$$

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **dominée par** $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ au voisinage de a si

$$\exists \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \quad |u_n| \leq \varepsilon |v_n|.$$

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **équivalente à** $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

$$u_n = \varepsilon_n v_n \text{ pour tout } n > N \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 1.$$

Avec ces définitions, on ne divise plus par v_n , donc on peut s'autoriser d'enlever l'hypothèse " v_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang".

Croissances comparées et limites connues

Soient $\alpha > \gamma > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Soit P un polynôme unitaire.

Ancienne écriture	Nouvelle écriture
$\frac{x^\gamma}{x^\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$	$x^\gamma \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\alpha)$
$\frac{\ln^\beta(x)}{x^\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$	$\ln^\beta(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\alpha)$
$\frac{x^\alpha}{\exp(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$	$x^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(\exp(x))$
$\frac{x^\alpha}{x^\gamma} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$	$x^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^\gamma)$
$\frac{\gamma^x}{\alpha^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$	$\gamma^x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(\alpha^x)$

Ancienne écriture	Nouvelle écriture
$\lim_a f = \ell$	$f \underset{a}{=} \ell + o(1)$
$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a)$	$f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{=} f'(a)(x - a)$
$\frac{P}{x^{\deg P}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$	$P \underset{+\infty}{\sim} x^{\deg P}$
$\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$	$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x$
$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \alpha$	$(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$

1.2 PROPRIÉTÉS

Cette partie est écrite pour les fonctions, mais les propriétés qui suivent restent vraies pour les suites.

Proposition 1 : Liens

Soient f, g deux fonctions définies sur X .

- ① Si $f(x) = o(g(x))$ lorsque $x \rightarrow a$, alors $f \underset{a}{=} O(g)$.
- ② Si $f \sim g$ lorsque $x \rightarrow a$, alors $f \underset{a}{=} O(g)$.
- ③ Si $f = o(g)$ et $g \sim h$ lorsque $x \rightarrow a$, alors $f \underset{a}{=} o(h)$.
- ④ $f(x) - g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x)) \iff f \underset{a}{\sim} g$

⚠ ATTENTION Les réciproques non énoncées sont fausses !

Preuve. Attention, ici, on ne donne pas l'hypothèse de non nullité de g au voisinage de a , donc on ne peut pas utiliser la définition avec $\frac{f}{g}$.

- ① Immédiat. Il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a et une fonction $\varepsilon : X \cap \mathcal{V}_a \rightarrow \mathbb{R}$, qui tend vers 0, donc qui est bornée, tels que

$$f(x) = \varepsilon(x)g(x) \text{ pour tout } x \in X \cap \mathcal{V}_a$$

- ② Immédiat. Il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a et une fonction $\varepsilon : X \cap \mathcal{V}_a \rightarrow \mathbb{R}$, qui tend vers 1, donc qui est bornée, tels que

$$f(x) = \varepsilon(x)g(x) \text{ pour tout } x \in X \cap \mathcal{V}_a$$

- ③ Il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a et deux fonctions $\varepsilon_0 : X \cap \mathcal{V}_a \rightarrow \mathbb{R}$, qui tend vers 0, et $\varepsilon_1 : X \cap \mathcal{V}_a \rightarrow \mathbb{R}$, qui tend vers 1, tels que

$$f(x) = \varepsilon_0(x)g(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \varepsilon_1(x)h(x), \text{ pour tout } x \in X \cap \mathcal{V}_a$$

Donc, $\forall x \in X \cap \mathcal{V}_a$, $f(x) = \varepsilon_0(x)\varepsilon_1(x)h(x)$, avec $x \mapsto \varepsilon_0(x)\varepsilon_1(x)$ qui tend vers 0 quand x tend vers a .

- ④ On a $f(x) - g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x)) \iff$ Il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a et une fonction ε , tels que $X \cap \mathcal{V}_a \rightarrow \mathbb{R}$, qui tend vers 0 en a , tels que, $\forall x \in X \cap \mathcal{V}_a$, $f(x) - g(x) = \varepsilon(x)g(x)$.
 $\iff$ Il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a et une fonction ε , tels que $X \cap \mathcal{V}_a \rightarrow \mathbb{R}$, qui tend vers 0 en a , tels que, $\forall x \in X \cap \mathcal{V}_a$, $f(x) = (\varepsilon(x) + 1)g(x)$.
 $\iff f \underset{x \rightarrow a}{\sim} g$

□

Proposition 2 : Opérations sur les petits o

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$ et f, g, h, k trois fonctions définies sur X .

① Si $f \underset{a}{=} o(g)$, et $h \underset{a}{=} o(g)$, alors $\lambda f + \mu h \underset{a}{=} o(\lambda g)$ et $f \underset{a}{=} o(g)$.

② Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$, alors $f \underset{a}{=} o(h)$.

③ Si $f \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(g)$ et $k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(h)$, alors $fk \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(gh)$.

④ Si $f \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(g)$, alors $fh \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(gh)$.

⑤ Soient $b \in \mathbb{R}$ et φ une fonction définie au voisinage de b à valeurs dans I .
 Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $\lim_b \varphi = a$, alors $f \circ \varphi \underset{b}{=} o(g \circ \varphi)$.

⚠ ATTENTION Il est formellement **interdit** de composer une relation de négligeabilité par la gauche. Par exemple,

$$\ln x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x), \quad \text{MAIS} \quad \frac{1}{\ln x} \not\underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Preuve. Nous faisons les preuves pour $g, h \neq 0$ au voisinage de a pour ne pas alourdir. L'important est de comprendre ce qui se passe dans les exemples qui suivent.

① On a $\lim_a \frac{f}{g} = 0$ et $\lim_a \frac{h}{g} = 0 \implies \lim_a \frac{\lambda f + \mu h}{g} = 0$ et $\lim_a \frac{f}{\lambda g} = 0$.

② On a $\lim_a \frac{f}{g} = 0$ et $\lim_a \frac{g}{h} = 0 \implies \lim_a \frac{f}{h} = \lim_a \frac{f}{g} \cdot \frac{g}{h} = \lim_a \frac{f}{g} \cdot \lim_a \frac{g}{h} = 0$.

③ On a $\lim_a \frac{f}{g} = 0$ et $\lim_a \frac{k}{h} = 0 \implies \lim_a \frac{fk}{gh} = \lim_a \frac{f}{g} \cdot \frac{k}{h} = \lim_a \frac{f}{g} \cdot \lim_a \frac{k}{h} = 0$.

④ On a $\lim_a \frac{f}{g} = 0 \implies \lim_a \frac{fh}{gh} = \lim_a \frac{f}{g} = 0$.

⑤ On a $\lim_a \frac{f}{g} = 0 \implies \lim_b \frac{f \circ \varphi}{g \circ \varphi} = \lim_a \frac{f}{g} = 0$.

□

Exemple 2

On donne un exemple de chaque propriété

- ① On a $x^4 = o(x^2)$ et $x^3 = o(x^2)$, donc $5x^4 - 2x^3 = o(x^2)$.
- ② On a $\frac{1}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$. Donc $1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
- ③ $(1 + x + o(x)) \times (x + o(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x) + x^2 + 2x o(x) + o(x) \times o(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x) + x^2 + o(x^2) + o(x^2) = x + o(x)$.
- ④ $\frac{1}{n^3} \cdot \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)$.
- ⑤ Supposons que $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^2)$ et $\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^4)$ (Cela sera vu plus loin)

$$\begin{aligned}
 e^{\cos(x)} &= e \cdot e^{\cos(x)-1} \\
 &= e \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)} \\
 &= e \cdot \left[1 + \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \right)^2 + o(x^4) \right] \\
 &= e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + o(x^4).
 \end{aligned}$$

Égalité quand x tend vers a et abus de notation

Même si parfois les enseignants l'omettent, comme dans ce cours sûrement à certains endroits, je vous conseille, au moins au début, de toujours écrire $\underset{a}{=} \underset{x \rightarrow a}{}$, quand vous utiliser les o ou les O . Mais, ...

On tolère très largement l'abus de notation, $f(x) = g(x)$ au lieu de $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} g(x)$, si le contexte rend la limite absolument claire.

Exemples typiques acceptés :

- ① **Développements limités.** $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.
Comme on va le voir, on sous-entend $x \rightarrow 0$.
- ② **Calculs asymptotiques dans une même ligne.** $f(x) = x^2 + o(x^2) = o(x)$.
- ③ **Enchaînements rapides en calcul, avec passage à la limite,** sans ambiguïté possible sur la variable et le point de passage à la limite.

$$\frac{(e^x - 1)^2}{\cos(x) - 1} = \frac{\left(x + \frac{x^2}{2} + o(x^4)\right)^2}{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)} = \frac{x^2 + o(x^2)}{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = \frac{1 + o(1)}{-\frac{1}{2} + o(1)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -2,$$

d'après le dernier exemple.

⚠ ATTENTION Certains abus sont par contre sanctionnés. Il est mal vu d'écrire,

$$\ln(1+x) = x \quad \text{ou} \quad \sin(x) = x, \quad \text{au lieu de} \quad \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \quad \text{ou} \quad \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$$

On ne fait pas de physique ! ;)

2 DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Définition 3 : Développement limité

Soient $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \mathbb{R}$ adhérent à X et $n \in \mathbb{N}$.

On dit que f possède un **développement limité** à l'ordre n au voisinage de a , ou plus simplement qu'elle possède un $DL_n(a)$, s'il existe des réels $a_0, \dots, a_n$ tels que

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Proposition 3 : Unicité des coefficients d'un développement limité

En cas d'existence, le développement limité est unique.

Preuve. Effectuons la démonstration en 0. Si deux développements sont identiques, alors il existe P et Q , polynômes de degré au plus n tels que $P(x) = Q(x) + o(x^n)$, alors $\frac{P(x)-Q(x)}{x^n} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$ ce qui n'est possible que si $P - Q = 0$. D'où l'égalité des développements limités. $\square$

Fonction continue ou dérivable

Soient $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in X$. Si f est continue en a si et seulement si f possède un développement limité à l'ordre 0 au voisinage de a . Précisément, dans ce cas,

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + o(1).$$

Si f est dérivable en a si et seulement si f possède un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de a . Précisément, dans ce cas,

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a).$$

Donc, dans un développement limité de f au voisinage de a , le coefficient d'ordre 0 est toujours $f(a)$ et le coefficient d'ordre 1 toujours $f'(a)$.

Exemple 3

Pour tous $x \in]-1, 1[$, et $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

Or $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1-x} = 0$, donc $\frac{x}{1-x} = o(1)$ et on a $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + x^n \frac{x}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + x^n o(1) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n).$$

C'est votre premier développement limité !

Exemple 4

Si f admet un développement limité en 0 et que f est paire, alors la partie polynomiale du développement est paire.

Supposons que f est paire soit de développement limité $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$.

Alors, $f(x) = f(-x) = \sum_{k=0}^n a_k (-1)^k x^k + o(x^n)$ Par unicité du développement limité, on a $a_k = 0$ pour tout k impair.

Bien sûr, on a le même résultat pour les fonctions impaires.

En pratique

En général, on translate la fonction pour se ramener à l'étudier en 0 et pouvoir utiliser tous les développements limités de référence. Pour cela, on pose $x = a + h$ et on remarque que lorsque x est proche de a , h est proche de 0. Par exemple, si on veut le développement limité de $\exp$ en 1, il suffit d'écrire $\exp(1+h) = e \cdot \exp(h)$, et il suffit de faire le développement limité quand h tend vers 0.

2.1 PRIMITIVATION DES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Proposition 4 : Lemme de primitivation des développements limités

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. Soit g est une fonction dérivable sur I .

Si $g'(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o((x-a)^n)$, alors $g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} g(a) + o((x-a)^{n+1})$.

Preuve. Pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, g est continue sur $[a, x]$ (ou $[x, a]$) et dérivable sur $]a, x[$ (ou $]x, a[$), donc d'après le théorème des accroissements finis $\frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(c_x)$ pour un certain $c_x \in]a, x[$ (ou $]x, a[$).

On obtient donc une fonction $c : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$, telle que pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, $|c_x - a| < |x - a|$, donc $\lim_{x \rightarrow a} c_x = a$.

On obtient alors $\left| \frac{g(x) - g(a)}{(x-a)^{n+1}} \right| = \left| \frac{g'(c_x)}{(x-a)^n} \right| = \underbrace{\left| \frac{g'(c_x)}{(c_x - a)^n} \right|}_{\xrightarrow{x \rightarrow a} 0} \times \underbrace{\left| \frac{c_x - a}{x - a} \right|^n}_{\leq 1} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0. \quad \square$

Théorème 1 : Primitivation des développements limités

Soient I un intervalle, $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$. On suppose que f' possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de a . Avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, notons le

$$f'(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Alors f possède un développement limité à l'ordre $n+1$ au voisinage de a , donné par

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^n a_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + o((x-a)^{n+1}).$$

Preuve. Posons g la fonction $x \mapsto f(x) - f(a) - \sum_{k=0}^n a_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1}$.

Elle est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction $g' : x \mapsto f'(x) - \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k$.

Mais $g'(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o((x-a)^n)$, par hypothèse sur f' .

En utilisant le lemme précédent, $g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} g(a) + o((x-a)^{n+1})$, ce qui prouve le théorème. $\square$

Exemple 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a montré que $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} x^k + o(x^{n-1})$, donc en remplaçant x par $-x$, on obtient

$$\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + o(x^{n-1}).$$

Maintenant, en primitivant, on obtient notre deuxième développement limité

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

Exemple 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En remplaçant cette fois-ci x par $-x^2$, on obtient

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n}).$$

En primitivant, on obtient notre troisième développement limité

$$\operatorname{Arctan} x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}).$$

2.2 FORMULE DE TAYLOR

Théorème 2 : Formule de Taylor-Young

Soit n un entier naturel non nul. Soit f une application réelle définie sur un intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$. Soit a un point de I . On suppose que f est $n-1$ dérivable dans un voisinage de a et n fois dérivable en a . Alors, au voisinage de a ,

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (x-a)^n o(1).$$

où la notation $o(1)$ désigne une application de limite nulle en a .

Preuve. Nous faisons une récurrence sur l'entier naturel n . Pour $n=1$, comme f est dérivable au point a , alors $\frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a)$ tend vers 0 lorsque x tend vers a , $x \neq a$. Ainsi, dans un voisinage de a ,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)o(1).$$

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Supposons que le théorème est vérifié à l'ordre $n-1$ et que f est $n-1$ dérivable dans un voisinage de a et n fois dérivable en a . Alors f' est $n-2$ dérivable au voisinage de a et $n-1$ fois dérivable en a . Par hypothèse de récurrence, on a dans un voisinage de a

$$f'(x) = f'(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (x-a)^{n-1} o(1).$$

Soit g l'application définie dans un voisinage de a par

$$g(x) = f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Alors g est dérivable au voisinage de a (car $n \geq 2$ et f est $n-1$ dérivable sur un voisinage de a) et on a :

$$g'(x) = f'(x) - f'(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!} (x-a)^k = (x-a)^{n-1} o(1).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $g(a) = 0$, au voisinage de a , par le Théorème des accroissements finis, on a

$$|g(x)| = |g(x) - g(a)| = |x-a| |g'(c_x)| = |x-a| |c_x - a|^{n-1} |o(1)| \leq \varepsilon |x-a|^n.$$

Où c_x est un élément de l'intervalle ouvert d'extrémités a et x . Ainsi $g(x) = (x-a)^n o(1)$. Ceci prouve le théorème. $\square$

Conséquences

Une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ en a admet un développement limité à l'ordre n en a . Cette formule est donc très puissante et permet d'obtenir tous les développements limités, ... mais parfois dans un temps très long !

Exemple 7

L'exponentielle est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ donc possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 d'après la formule de Taylor-Young. Sa dérivée k -ième est $\exp$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. La formule donne donc

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

Cela permet aussi d'avoir, par exemple, la fonction $\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \frac{x^k}{k!} + o(x^{2n+1})$, d'où

$$\operatorname{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) .$$

Et cela fonctionne aussi pour $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(ix)^k}{k!} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \frac{(ix)^k}{k!} + o(x^{2n+1})$, d'où

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) .$$

On peut aussi trouver cette formule avec la formule de Taylor-Young, puisque, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} \sin^{(2k)}(0) = 0 \\ \sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k . \end{cases}$$

Dérivation des développements limités

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{C}^n(X, \mathbb{R})$ et $a \in X$. D'après la formule de Taylor-Young, f possède au voisinage de a un développement limité à l'ordre n et f' un développement à l'ordre $n-1$,

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n) \quad \text{et} \quad f'(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^{n-1}) .$$

Si on dérive terme à terme le développement limité de f , on obtient celui de f' . Donc cela fonctionne aussi dans ce sens. Par contre, on perd un ordre dans le procédé !

⚠ ATTENTION On peut dériver un développement limité à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathcal{C}^n$, mais on ne peut pas le faire en toute généralité, car on ne peut pas montrer l'existence du développement limité de la dérivée. Par contre, si on sait à l'avance que le DL existe, on peut l'intégrer, puis identifier par unicité les coefficients.

Exemple 8

Pour obtenir le développement limité de $\tan^2$ en 0, on peut dériver celui de $\tan$.

En effet, on a $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, donc $\tan^2(x) = \tan'(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 + o(x^2)$, que l'on peut vérifier en mettant au carré le développement limité de $\tan$.

Exemple 9

Pour obtenir le développement limité de $\frac{1}{(2-x)^3}$ en 0 à l'ordre n , on peut dériver celui de $\frac{1}{2-x}$. On va 2 ordres plus loin, comme on va dériver 2 fois. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-x/2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \dots + \frac{x^{n+2}}{2^{n+2}} + o(x^{n+2}) \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{2^3} + \dots + \frac{x^{n+2}}{2^{n+3}} + o(x^{n+2}) .$$

$$\text{Donc } -\frac{1}{(2-x)^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{4} + \frac{x}{4} + \dots + \frac{(n+2)x^{n+1}}{2^{n+3}} + o(x^{n+1}) .$$

$$\text{Et } \frac{2}{(2-x)^3} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{4} + \frac{3x}{2^3} + \frac{12x^2}{2^5} + \dots + \frac{(n+2)(n+1)x^n}{2^{n+3}} + o(x^n), \text{ d'où}$$

$$\frac{1}{(2-x)^3} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{8} + \frac{3x}{2^4} + \frac{12x^2}{2^6} + \dots + \frac{(n+2)(n+1)x^n}{2^{n+4}} + o(x^n) .$$

2.3 EN 0 C'EST À CONNAÎTRE !

$\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n) =$	$1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$
$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n) =$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o(x^n)$
$\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) =$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$
$(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n),$	$\alpha \in \mathbb{R}$
$\exp(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) =$	$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\text{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) =$	$1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
$\text{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) =$	$x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
$\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) =$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{24} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) =$	$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$	
$\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n) =$	$1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
$\frac{1}{1+x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n}) =$	$1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$
$\ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n \frac{-x^k}{k} + o(x^n) =$	$-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$

3 PROPRIÉTÉS DES ÉQUIVALENCES

Proposition 5 : Propriétés des équivalents

Soient f, g, h, k des fonctions de X dans $\mathbb{R}$. Soit a adhérent à X

- ① La relation $\sim_a$ est une relation d'équivalence, que ce soit sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ou sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- ② Si $f \sim_a g$ et $k \sim_a h$ alors $fk \sim_a gh$ et $\frac{f}{k} \sim_a \frac{g}{h}$, si k et h ne s'annulent pas au voisinage de a .
- ③ Si $f \sim_a g$ alors $f^\alpha \sim_a g^\alpha$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
- ④ Si $f \sim_a g$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.
- ⑤ Si $f \sim_a g$ et $g(x) > 0$ sur $]a - \alpha, a[$ (respectivement sur $]a, a + \alpha[$), alors il existe $\beta > 0$ tel que $f(x) > 0$ sur $]a - \beta, a[$ (respectivement sur $]a, a + \beta[$).
- ⑥ Soient $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et φ une fonction définie au voisinage de b à valeurs dans I , telle que $\lim_b \varphi = a$. Si $f \sim_a g$, alors $f \circ \varphi \sim_b g \circ \varphi$.

Preuve. C'est comme les petits o . A vous ! $\square$

⚠ ATTENTION Ne **jamais** faire de somme, différence ou combinaison linéaire d'équivalents.

Par exemple, $\cos(x) \underset{0}{\sim} 1 + x$, mais ~~$\cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} x$~~ .

⚠ ATTENTION On n'a pas de réciproque pour la limite !

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \quad \not\Rightarrow \quad u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n.$$

Exemple 10

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4$, mais ~~$\exp x \underset{+\infty}{\sim} x^4$~~ .

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^5$, mais ~~$x \underset{+\infty}{\sim} n^5$~~ .

Lien entre développement limité et équivalence

Soient $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \mathbb{R}$ adhérent à X , et $n, k \in \mathbb{N}$ avec $k \leq n$ et $a_k, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, où $a_k \neq 0$. Supposons que f admette le développement limité en a , $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_k(x-a)^k + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$, alors

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} a_k(x-a)^k.$$

Cela permet d'obtenir des équivalents simples des fonctions usuelles :

- | | | |
|--|--|---|
| • $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ | • $\operatorname{ch} x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ | • $\operatorname{Arctan} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ |
| • $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ | • $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ | • $\operatorname{Arcsin} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ |
| • $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$ | • $\cos x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ | • $\operatorname{Arccos} x - \frac{\pi}{2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x$ |
| • $\operatorname{sh} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ | • $\tan x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ | • $\operatorname{th} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ |

4 APPLICATIONS

4.1 CALCULS DE LIMITES

Exemple 11

Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{\alpha x} + e^{\beta x}}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$. Pour cela, calculons le développement limité de la fonction. On a

$$\begin{aligned} \left(\frac{e^{\alpha x} + e^{\beta x}}{2} \right)^{\frac{1}{x}} &= \left(1 + \frac{\alpha + \beta}{2} x + o(x) \right)^{\frac{1}{x}} \\ &= e^{\frac{1}{x} \ln(1 + \frac{\alpha + \beta}{2} x + o(x))} \\ &= e^{\frac{1}{x} (\frac{\alpha + \beta}{2} x + o(x))} \\ &= e^{\frac{\alpha + \beta}{2} + o(1)} \end{aligned}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{\alpha x} + e^{\beta x}}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\alpha + \beta}{2}}$.

Exemple 12

Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{\pi}{2} e^{\frac{1}{n}} - \operatorname{Arccos} \frac{1}{n} \right)$. Pour cela, calculons le développement limité de la suite. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a

$$\begin{aligned} n \left(\frac{\pi}{2} e^{\frac{1}{n}} - \operatorname{Arccos} \frac{1}{n} \right) &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \left(\frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \left(\frac{\pi}{2n} + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\pi}{2} + 1 + o(1). \end{aligned}$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{\pi}{2} e^{\frac{1}{n}} - \operatorname{Arccos} \frac{1}{n} \right) = \frac{\pi}{2} + 1$.

4.2 POSITION LOCALE D'UNE FONCTION PAR RAPPORT À SA TANGENTE

En pratique, vérifier qu'une tangente existe

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in X$. On suppose que f est définie au voisinage de a à gauche et à droite et admet un développement limité au voisinage de a .

Notons $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_k(x-a)^k + o((x-a)^k)$, où $k \geq 2$ et $a_k \neq 0$.

Alors $a_0 = f(a)$ et $a_1 = f'(a)$, donc $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} a_k(x-a)^k$.

Dans ces conditions,

f admet la droite d'équation $y = a_0 + a_1(x-a)$ pour tangente en a .

Proposition 6

Dans les conditions de la remarque précédente, f est au dessus ou dessous de sa tangente en x_0 si et seulement si k est pair.

Le signe de a_k donne la position relative de f par rapport à la tangente.

Preuve. Dans ces conditions, sur un voisinage de a , $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ est de même signe que $a_k(x-a)^k$.

- Si k est impair, $(x-a)^k$ est négatif à gauche de a et positif à droite de a . Cette quantité multipliée par a_k change de signe, et donc f ne présente pas d'extremum en a .

- Inversement si k est pair, cette quantité est de signe constant, donc $f(x) - f(a)$ est de signe constant, et f présente un extrémum local en a .

□

Exemple 13

La fonction $f : x \mapsto \frac{x \sin x}{1+x^2}$ possède un minimum local en 0.

En effet, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 + o(x^2)$, donc f est positive au voisinage de 0 et $f(0) = 0$, donc possède un minimum local en 0.

Exemple 14

La fonction $g : x \mapsto \frac{\ln(1-2x)}{1+x}$ possède en 0 un point d'inflexion de tangente la droite d'équation $y = -2x$.

En effet,

$$g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(-2x - 2x^2 - \frac{8x^3}{3} + o(x^3) \right) (1 - x + x^2 + o(x^2)) \underset{x \rightarrow 0}{=} -2x - \frac{8x^3}{3} + o(x^3).$$

Donc g admet $y = -2x$ comme tangente en 0. De plus, comme $g(x) + 2x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{8x^3}{3}$, le graphe de g est au-dessus de sa tangente en 0 au voisinage de 0 à gauche et en-dessous à droite.

4.3 CALCULS D'ASYMPTOTES EN $\pm\infty$ **Proposition 7**

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Supposons que $+\infty$ (ou $-\infty$) est adhérent à X . Pour $a, b \in \mathbb{R}$, f admet la droite d'équation $y = ax + b$ pour asymptote au voisinage de $\pm\infty$ si $f(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} ax + b + o(1)$.

En pratique

Pour étudier d'éventuelles asymptotes à la courbe représentative d'une fonction f au voisinage de $\pm\infty$, on a 2 méthodes

- Dans les cas simples on peut calculer $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ (ou parfois $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x)$) et $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax)$. On essaie alors d'exprimer f de la forme voulue, c'est à dire, $f(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} ax + b + o(1)$.
- Dans les autres cas, on introduit la fonction auxiliaire $t \mapsto f\left(\frac{1}{t}\right)$ que l'on développe au voisinage de 0 (voire en 0 par valeurs positives si on se limite à $+\infty$). On peut ainsi obtenir à la fois les asymptotes et la position par rapport à ces asymptotes en considérant les termes suivants.

Exemple 15

Étudions les asymptotes de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{x^3 + [x]^2}{x^2 + 2}$.

Comme $x \leq [x] < x + 1$, on a $[x] \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} x + O(1)$, donc $[x]^2 \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} x^2 + O(x)$. Donc

$$\frac{x^3 + [x]^2}{x^2 + 2} = \frac{x^3 + x^2 + O(x)}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)} \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} \left(x + 1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) \left(1 - \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} x + 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} x + 1 + o(1)$$

Donc la fonction $x \mapsto \frac{x^3 + [x]^2}{x^2 + 2}$ admet la droite d'équation $y = x + 1$ pour asymptote au voisinage de $\pm\infty$.

Exemple 16

Étudions les asymptotes de la courbe représentative de $x \mapsto x^2 \ln \frac{x}{x-1}$. Utilisons la deuxième méthode. Posons $t = \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned} x^2 \ln \frac{x}{x-1} &\underset{0}{=} t^{-2} \ln \frac{1}{1-t} = -t^{-2} \ln(1-t) \\ &\underset{0}{=} -t^{-2} \left(-t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + o(t^3) \right) \\ &\underset{0}{=} \frac{1}{t} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}t + o(t) \underset{\infty}{=} x + \frac{1}{2} + \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

On en déduit que l'asymptote est $y = x + \frac{1}{2}$ et qu'au voisinage de $+\infty$ la courbe est au-dessus de l'asymptote, car $\frac{1}{3x} > 0$.

Exemple 17

Étudions les asymptotes de la courbe représentative de $x \mapsto x \exp\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)$. Utilisons la deuxième méthode.

Posons $t = \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned} x \exp\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right) &\underset{0}{=} \frac{1}{t} \exp\left(\frac{t-t^2}{1+t^2}\right) \\ &\underset{0}{=} \frac{1}{t} \exp(t - t^2 + o(t^3)) \\ &\underset{0}{=} \frac{1}{t} \left(1 + t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) \\ &\underset{0}{=} \frac{1}{t} + 1 - \frac{1}{2}t + o(t) = x + 1 - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

On en déduit que l'asymptote est $y = x + 1$ et qu'au voisinage de $+\infty$ la courbe est en dessous de l'asymptote, car $-\frac{1}{2x} < 0$.

4.4 ETUDE ASYMPTOTIQUE DE SUITES

Le but de l'étude asymptotique de suites, est de trouver un équivalent simple d'une suite en $+\infty$. Essayons de voir comment faire avec quelques exemples.

Exemple 18

Étudions la suite $(u_n)_n$ avec

$$u_n = \frac{2n^2 + 1}{n - 1}$$

Alors, le numérateur est équivalent à $2n^2$ et le dénominateur est équivalent à n donc $u_n \sim 2n$. Poursuivons l'étude avec les termes suivants,

$$u_n - 2n = \frac{2n+1}{n-1} \sim \frac{2n}{n} = 2$$

puis

$$u_n - 2n - 2 = \frac{3}{n-1} \sim \frac{3}{n}$$

Ainsi, $u_n - 2n - 2 = \frac{3}{n} + o\left(\frac{3}{n}\right)$ donc $u_n - 2n - 2 = \frac{3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. En conclusion,

$$u_n = 2n + 2 + \frac{3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Poursuivons cet exemple avec la suite $(v_n)_n$ définie par $v_n = \frac{(2n^2+1)(n^2+1)}{(n-1)^2}$

$$v_n = \frac{2n^2+1}{n-1} \times \frac{n^2+1}{n-1} = \left(2n + 2 + \frac{3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \left(n + 1 + \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 2n^2 + 4n + 9 + o(1)$$

Tous les termes n'étant pas écrits sont négligeables par rapport à 1 donc incorporés au terme $o(1)$.

Exemple 19

Notons $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. On a déjà démontré, en comparaison à une intégrale, que cette somme est équivalente à $\ln n$.

Pour obtenir le terme suivant du développement, on pose $u_n = H_n - \ln n$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= H_{n+1} - H_n - (\ln(n+1) - \ln(n)) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ est convergente, ce qui par télescopage signifie que (u_n) converge vers un réel noté γ . On a ainsi établi le développement asymptotique à deux termes

$$H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

Exemple 20

Notons $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Celle-ci est convergente.

En effet, on a $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k+1)}$. En sommant, on obtient,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

or ces deux suites sont positives et on sait que la série de terme général $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ est convergente, car c'est une somme télescopique, donc S_n est convergente, car croissante majorée. Donc $S_n = l + o(1)$.

Proposition 8 : Intégrale de Wallis

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la n -ième intégrale de Wallis.

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt$$

La suite $(W_n)_n$ vérifie les propriétés suivantes

- | | |
|---|--|
| <p>① $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad W_{n+1} = \frac{n}{n+1} W_{n-1},$</p> <p>② $\forall p \in \mathbb{N}, \quad W_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2},$</p> | <p>③ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad n W_n W_{n-1} = \frac{\pi}{2},$</p> <p>④ $W_n \sim W_{n-1}.$</p> |
|---|--|

Preuve.

- ① Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt$. Calculons W_n à l'aide d'une intégration par parties. Pour tout entier n ,

$$\begin{aligned} W_n - W_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \cos^n t \sin^2 t \, dt \\ &= \left[\frac{-\cos^{n+1} t}{n+1} \sin t \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{-\cos^{n+1} t}{n+1} \cos t \, dt = \frac{1}{n+1} W_{n+2} \end{aligned}$$

D'où $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- ② Comme on a $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$W_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \cdots \frac{1}{2} W_0 = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad W_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} \cdots \frac{2}{3} W_1 = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$$

③ En utilisant la relation de récurrence, on obtient que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$nW_n W_{n-1} = nW_n \frac{n+1}{n} W_{n+1} = (n+1)W_{n+1} W_n$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $nW_n W_{n-1} = 1 \cdot W_1 W_0 = \frac{\pi}{2}$.

④ Remarquons tout d'abord que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \cos^{n+1} t \leq \cos^n t \leq \cos^{n-1} t$$

donc $W_{n+1} \leq W_n \leq W_{n-1}$ et, avec la relation de récurrence,

$$\frac{n}{n+1} = \frac{W_n W_{n+1}}{W_n W_{n-1}} \leq \frac{W_n}{W_{n-1}} \leq 1$$

Par encadrement, $\frac{W_n}{W_{n-1}} \rightarrow 1$, c'est-à-dire $W_n \underset{+\infty}{\sim} W_{n-1}$.

□

Proposition 9 : Formule de Stirling

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Preuve. Cherchons la limite de la suite $\left(\frac{\sqrt{n} \cdot n^n}{n! e^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Pour montrer la convergence de cette suite, il suffit d'étudier, grâce à la continuité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, la suite $\left(u_n = \ln \frac{\sqrt{n} \cdot n^n}{n! e^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) - 1 \\ &= \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{12n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

Donc, au voisinage de $+\infty$, on obtient d'une pierre, deux coups

- **La croissance de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$** $u_{n+1} - u_n \sim \frac{1}{12n^2}$. Donc, par conservation du signe $u_{n+1} - u_n > 0$.
- **La majoration de u_n** $u_{n+1} - u_n - \frac{1}{12n^2} \sim -\frac{1}{12n^3}$. Donc, par conservation du signe, $u_{n+1} - u_n < \frac{1}{12n^2}$, pour n assez grand, disons supérieur à un entier N fixé. En passant à la somme, on remarque que

$$\sum_{n=N}^{+\infty} u_{n+1} - u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - u_N < \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{12n^2} < +\infty.$$

Ainsi, u_n converge, comme suite croissante majorée. On en déduit que la suite $\left(\frac{\sqrt{n} \cdot n^n}{n! e^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite notée ℓ .

D'après les points ③ et ④ de la proposition précédente, $2pW_{2p}^2 \sim \frac{\pi}{2}$.

Or, d'après ② de la proposition précédente, et comme $n! \sim \left(\frac{\sqrt{n} \cdot n^n}{l e^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$,

$$2pW_{2p}^2 = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{2p(2p)!^2}{(2^p p!)^4} \underset{0}{=} \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{p}{2^{4p}} \left(\frac{\sqrt{2p} \cdot (2p)^{2p}}{l e^{2p}}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{p} \cdot p^p}{l e^p}\right)^{-4} \underset{0}{=} \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{p}{2^{4p}} \frac{2p \cdot (2p)^{4p}}{l^2 e^{4p}} \cdot \frac{l^4 e^{4p}}{p^2 \cdot p^{4p}} \rightarrow \ell^2 \pi^2.$$

En comparant ces deux équivalents, on obtient $\ell^2 = \frac{1}{2\pi}$ et donc la formule de Stirling en reportant dans le premier lemme.

□