

Théorie des ensembles

Premiers pas

Dans tout ce chapitre, E et F sont des ensembles.

1 DÉFINITIONS

Vous connaissez déjà la définition et vous avez déjà une intuition de ce qu'est un ensemble. Je la rappelle.

Définition 1 : Ensemble

Un **ensemble** est une collection ou un groupement d'objets distincts.

Intuition

Un ensemble peut être vu "une multitude qui peut être comprise comme une totalité" (Georg Cantor) ou comme une sorte de sac virtuel entourant ses éléments. Par exemple, vous pouvez voir les éléments comme des billes, et l'ensemble comme le sac contenant ces billes.

Vous connaissez déjà les ensembles des nombres réels, naturels mais aussi l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On dit que x **appartient** à E et on note $x \in E$, lorsque l'**élément** x est dans l'**ensemble** E .

On dit que x **n'appartient pas** à E et on note $x \notin E$, lorsque l'**élément** x n'est pas dans l'**ensemble** E .

En pratique, comment on définit un ensemble ?

Un ensemble peut être défini de deux manières : en **extension** ou en **compréhension**.

- Définir un ensemble en **extension**, c'est donner la liste complète explicite de tous ses éléments. On note cette liste entre accolades et l'ordre des éléments listés n'a aucune importance.

Exemple : $\{0, 1, 2\}$ est un ensemble, et $\{0, 1, 2\} = \{2, 1, 0\}$.

On appelle **singleton**, un ensemble de la forme $\{x\}$.

On appelle **paire**, un ensemble de la forme $\{x, y\}$, avec $x \neq y$.

- Définir un ensemble en **compréhension**, c'est le définir par une propriété P que ses éléments vérifient et sont seuls à vérifier. On note alors

$$\{x \mid P(x)\}$$

l'ensemble des objets qui satisfont la propriété P . En pratique, la propriété d'appartenance à l'ensemble ambiant est notée dans la première partie. On écrit donc

$$\{x \in E \mid P(x)\}$$

l'ensemble des éléments de E qui satisfont P .

Exemple : Pour noter l'ensemble des carrés d'entiers on pourrait écrire

$$\{x \mid \exists n \in \mathbb{N}, x = n^2\} ,$$

mais en pratique on préfère

$$\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\} .$$

⚠ ATTENTION Il est bien évident qu'on ne peut définir en extension que des ensembles avec un nombre **fini** d'éléments. On ne peut pas écrire une liste infinie de symboles...

Mais, il n'y a pas deux sortes d'ensembles en mathématiques, seulement deux manières de les définir. Un même ensemble peut être présenté en extension ou en compréhension, comme par exemple

$$\{1, 5\} = \left\{ k \in \mathbb{N}^* \mid \binom{5}{k} = \frac{5}{k} \right\}.$$

On ne confondra pas

$$\{1, 5\} \neq [1, 5] \neq \llbracket 1, 5 \rrbracket.$$

Définition 2 : Ensemble fini, cardinal, ensemble vide

Un ensemble E est dit **fini** s'il contient un nombre fini d'éléments.

Dans ce cas, on appelle **cardinal de E** , le nombre d'éléments de E . On le note $|E|$ (ou $\text{card}(E)$, ou $\#E$).

Il existe un et un seul ensemble sans aucun élément, appelé l'ensemble vide et noté $\emptyset$.

Exemple 1

Le cardinal de $\llbracket 1, 5 \rrbracket$ est 5. Le cardinal de $\emptyset$ est 0.

Définition 3 : Égalité, inclusion

Égalité E et F sont égaux s'ils ont exactement les mêmes éléments, c'est à dire, si

$$\forall x, \quad (x \in E \iff x \in F).$$

Inclusion On dit que E est inclus dans F , ou que F contient E , ou que E est une partie de F , ce qu'on note $E \subset F$, si tout élément de E est élément de F , c'est à dire, si

$$\forall x \in E, \quad x \in F.$$

Double inclusion

Par définitions, $E = F \iff E \subset F$ et $F \subset E$. Donc, pour prouver que deux ensembles sont égaux, on peut montrer que l'un est inclus dans l'autre, puis inversement !

Exemple 2

C'est la **méthode** du chapitre. On veut montrer que $A \subset B$, alors "on prend un élément a de A et on montre qu'il appartient à B ".

Par exemple, montrons que $\{(k, k^2) \mid k \in \mathbb{N}\} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$.

Soit $a \in \{(k, k^2) \mid k \in \mathbb{N}\}$. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que $a = (k, k^2)$.

Or $k, k^2 \in \mathbb{R}^2$, et $0 \leq k \implies 1 \leq k \implies k \leq k^2$.

Donc $a \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$.

On a donc montré que $\{(k, k^2) \mid k \in \mathbb{N}\} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$.

Que pensez vous de l'inclusion inverse ?

Exemple 3

Montrons que l'image de la fonction racine carrée est $\mathbb{R}_+$. Soit f la fonction racine carrée.

Soit $y \in f(\mathbb{R})$. Alors, par définition, il existe un $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x) = \sqrt{x} = y$. Donc $y \geq 0$. Donc $y \in \mathbb{R}_+$. On a

donc montré que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+$.

De plus, pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, on peut poser $x = y^2$, et on obtient alors $f(x) = \sqrt{y^2} = y$, car si $y \geq 0$, d'où $y \in f(\mathbb{R})$.

On a donc montré que $\mathbb{R}_+ \subset f(\mathbb{R})$.

Par double inclusion, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$.

⚠ ATTENTION Il ne faut pas confondre appartenance et inclusion ! On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ mais pas $\mathbb{N} \notin \mathbb{Z}$. Ici $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont 2 "sacs".

On a $-1 \in \mathbb{Z}$ mais $-1 \notin \mathbb{N}$. Par rapport à $\mathbb{Z}$, -1 est une bille dans un sac et non un sac dans un sac.

Définition 4 : Ensemble des parties d'un ensemble

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .

$$\mathcal{P}(E) = \{A \mid A \subset E\}.$$

Ainsi, pour tout ensemble A $A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E$.

Exemple 4

Considérons l'ensemble $\{3, 4, 0\}$ de cardinal 3. L'ensemble

$$\mathcal{P}(\{3, 4, 0\}) = \left\{ \underbrace{\emptyset}_{0 \text{ élément}}, \underbrace{\{3\}, \{4\}, \{0\}}_{1 \text{ élément}}, \underbrace{\{3, 4\}, \{3, 0\}, \{4, 0\}}_{2 \text{ éléments}}, \underbrace{\{3, 4, 0\}}_{3 \text{ éléments}} \right\}.$$

On rappelle que le nombre d'ensembles à k éléments parmi les 3 éléments de $\{3, 4, 0\}$ est $\binom{3}{k}$. Cela nous permet d'être sûr de ne pas oublier des éléments. Ce la nous permet aussi de connaître le nombre d'éléments de $\mathcal{P}(E)$! C'est

$$\sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} = 2^3 = 8.$$

Trouver l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$ est un bon exercice.

Il y a deux éléments de $\mathcal{P}(E)$ qui sont toujours présents : E et $\emptyset$.

En effet,

- $E \in \mathcal{P}(E) \iff E \subset E$,
Or $\forall x \in E, x \in E$!
- $\emptyset \in \mathcal{P}(E) \iff \emptyset \subset E$,
Or $\forall x, \underbrace{(x \in \emptyset \implies x \in E)}_{\text{FAUX}}$. Comme la proposition de départ est fausse, l'implication est vraie.

⚠ ATTENTION Dire que A appartient à $\mathcal{P}(E)$ équivaut à dire que A est **include** dans E . Il faut ici bien comprendre la différence entre appartenance et inclusion.

Exemple 5

On a alors $1 \in \mathbb{R}$, $\{1\} \subset \mathbb{R}$ et $\{1\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, mais pas $\{1\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$, ni $\{1\} \in \mathbb{R}$.

2 OPÉRATIONS SUR LES ENSEMBLES

Jouons aux LEGOs. Faisons des imbrications entre les ensembles.

Définition 5 : Union et intersection

Soient $A, B \subset E$. Soit I un ensemble d'indices.

Union $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$

Intersection $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$.

Union multiple On appelle union ou réunion des A_i , i décrivant I , l'ensemble

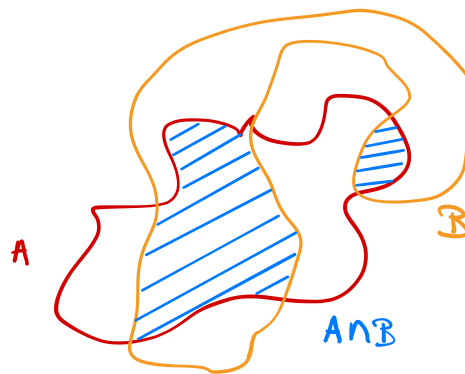
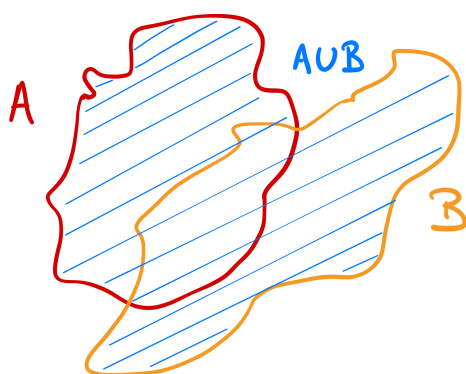
$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I, \quad x \in A_i\},$$

c'est à dire, l'ensemble des objets qui appartiennent à l'un des A_i .

Intersection multiple On appelle intersection des A_i , i décrivant I , l'ensemble

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I, \quad x \in A_i\},$$

c'est à dire, l'ensemble des objets qui appartiennent à tous les A_i .



Cas particulier des ensembles inclus les uns dans les autres

Si $A \subset B$, alors

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\} = \{x \in E \mid x \in B\} = B$$

et

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\} = \{x \in E \mid x \in A\} = A.$$

Un dessin permet de s'en rendre compte rapidement.

⚠ ATTENTION On fait seulement des réunions d'ensembles donc, pour tout $x, y \in E$,

~~$x \cup y$~~

n'a aucun sens !

Liens $\forall/\vee/\cup$ et $\exists/\wedge/\cap$

Par définitions

$$x \in \bigcup_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} A_i \iff (x \in A_1) \vee (x \in A_2) \vee \dots \vee (x \in A_n) \iff \exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x \in A_i,$$

et

$$x \in \bigcap_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} A_i \iff (x \in A_1) \wedge (x \in A_2) \wedge \dots \wedge (x \in A_n) \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x \in A_i.$$

On dit que deux ensembles E et F sont **disjoints** si $E \cap F = \emptyset$.

Dans ce cas, on pourra écrire l'union disjointe avec $\sqcup$.

Définition 6 : Différence, complémentaire

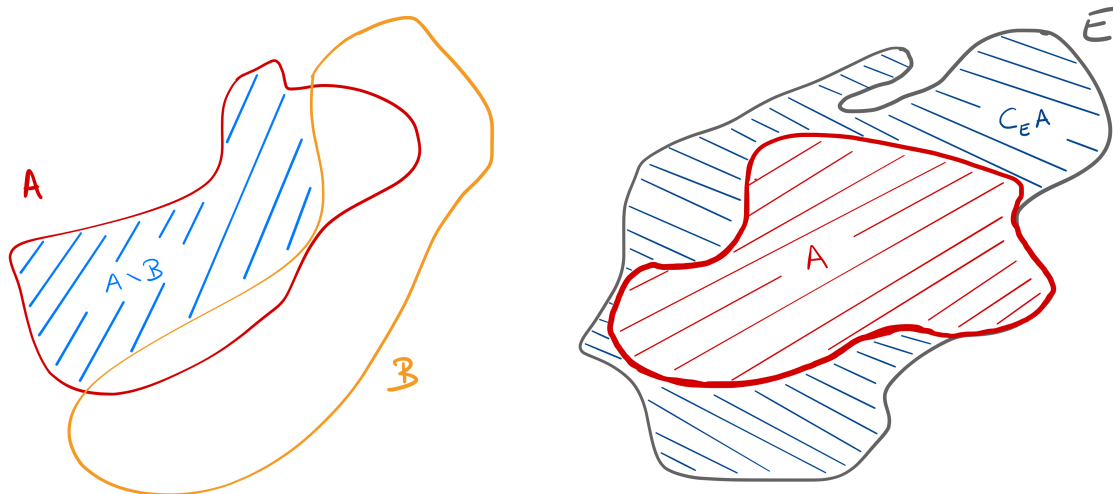
Soient A et B deux sous-ensembles (ou parties) de E .

- **Différence** On appelle différence de B dans A l'ensemble

$$A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

On lit " A privé de B ".

- **Complémentaire** L'ensemble $E \setminus A$ est appelé le complémentaire de A dans E . Il est noté $\bar{A}$ ou A^c quand il n'y a pas l'ensemble E est fixé sans ambiguïté. Sinon, on le note $\mathcal{C}_E A$ ou $\mathcal{C}_E^A$.

**Exemple 6**

Le complémentaire de $\{0, 1, 2\}$ dans $\mathbb{N}$ est

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n > 2\}.$$

L'ensemble des nombre négatif est $\mathbb{R} \setminus]0, +\infty[$.

Logique vs Ensembles

La logique et la théorie des ensembles sont très proche car l'une est définie à partir de l'autre. Posons n proposition $P_1, \dots, P_n$ et

$$A_i = \{x \in E \mid P_i(x)\},$$

pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a alors une relation directe entre

$x \in \dots$	$A_1 \cup A_2$	$A_1 \cap A_2$	$\bar{A}_1$	$\bigcup_{i \in I} A_i$	$\bigcap_{i \in I} A_i$
x vérifie	P_1 ou P_2	P_1 et P_2	non P_1	$\exists i \in I, P_i$	$\forall i \in I, P_i$

De plus, $A_1 = A_2$ si et seulement si $P_1 \iff P_2$, et $A_1 \cup A_2$ si et seulement si $P_1 \implies P_2$.

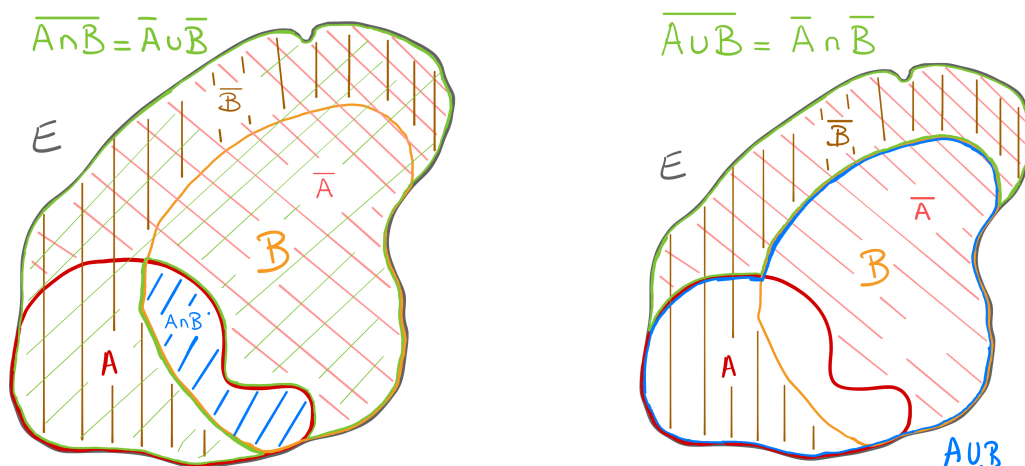
Proposition 1 : Règles de calculs entre opérations sur les ensembles

Soient $B \subset E$ et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles de E . On a

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B) \quad \text{et} \quad \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \cup B = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B)$$

et

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \bar{A}_i \quad \text{et} \quad \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \bar{A}_i.$$



Preuve. La preuve est un bon exercice. Il suffit de montrer des égalités d'ensembles ! Par exemple, démontrons la relation $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ de deux façons différentes.

- Par double inclusion.

($\subset$) Montrons l'inclusion $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Soit $x \in A \cap (B \cup C)$. Alors $x \in A$ et $x \in B \cup C$. Distinguons deux cas

- ▷ si $x \in B$, alors $x \in A \cap B$ donc $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
- ▷ si $x \in C$, alors $x \in A \cap C$ donc $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Dans les deux cas, on a $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. D'où l'inclusion $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

($\supset$) Montrons l'autre inclusion. On a $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B \cup C$, donc $A \cap B \subset A \cap (B \cup C)$. La même preuve montre que $A \cap C \subset A \cap (B \cup C)$.

D'où l'inclusion $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$.

Par double inclusion, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

- En utilisant les propriétés des connecteurs logiques. On a

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\iff x \in A \quad \text{et} \quad (x \in B \quad \text{ou} \quad x \in C) \\ &\iff (x \in A \quad \text{et} \quad x \in B) \quad \text{ou} \quad (x \in A \quad \text{et} \quad x \in C) \\ &\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

D'où l'égalité $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

□

Définition 7 : Produit cartésien

Soient $E_1, \dots, E_n$ des ensembles. On appelle produit (cartésien) de $E_1, \dots, E_n$ l'ensemble

$$E_1 \times \dots \times E_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \in E_i\}.$$

Dans le cas où $E_1 = \dots = E_n = E$, ce produit est plutôt noté E^n .

Quantificateur $\forall$

On a déjà vu que deux quantificateurs $\forall$ sont interchangeables. On peut donc écrire de manière équivalente

$$\forall x \in E, \forall y \in F \quad \text{ou} \quad \forall (x, y) \in E \times F,$$

et si $E = F$,

$$\forall x, y \in E.$$

On rappelle qu'une **famille** de E , est une suite d'éléments de E qui peut être finie. Elle se note le plus souvent $(a_1, \dots, a_n) \in E^n$ ou $(a_1, \dots, a_n)$ tels que $a_1, \dots, a_n \in E$.

⚠ ATTENTION

$$(a_1, \dots, a_n) \not= \{a_1, \dots, a_n\}.$$

Le premier est une famille d'éléments et le second est un ensemble !

Dans une famille l'ordre compte et la répétition n'entraîne pas l'exclusion : $(1, 2, 2) \neq (1, 2) \neq (2, 1)$. Les opérations sur les ensembles **n'ont aucun sens avec les familles** !

$$(a_1, \dots, a_n) \not= (b_1, \dots, b_n)$$

Dans un ensemble, l'ordre est insignifiant. Tous les éléments, quelque soit leur place, ont la même importance. Un élément qui apparaît 2 fois peut être enlevé : $\{1, 2, 2\} = \{1, 2\} = \{2, 1\}$.

Donc l'assertion $(x, y) \neq (0, 0)$ n'équivaut pas à $((x \neq 0) \text{ et } (y \neq 0))$. En effet, si $(x, y) = (1, 0)$, alors la première est vraie mais pas la seconde. On dispose simplement de l'implication suivante

$$((x \neq 0) \quad \text{et} \quad (y \neq 0)) \implies (x, y) \neq (0, 0).$$

Exemple 7

Vous savez déjà que $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des n -uplet de nombres réels.

Le produit cartésien $\{a, b, c\} \times \{1, 2, 3\} = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (c, 2), (c, 3)\}$.

3 RECOUVREMENTS, PARTITIONS**Définition 8 : Recouvrement**

Une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de E est un recouvrement de E si $\bigcup_{i \in I} A_i = E$.

Recouvrement disjoint et partition

Si on ajoute la condition que les ensembles $(A_i)_{i \in I}$ sont deux à deux disjoints, c'est à dire que

$$\forall (i, j) \in I^2 \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$$

alors on dit que le recouvrement est **disjoint**. Si on ajoute encore la condition que tous les $(A_i)_{i \in I}$ sont non-vides, alors on dit que les $(A_i)_{i \in I}$ forment une **partition** de E . Ce n'est rien d'autre qu'un découpage de E en différents sacs qui n'ont rien en commun.

Exemple 8

La famille composée par les ensembles $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ est un recouvrement de $\mathbb{R}$.

La famille composée par les ensembles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-$ est une partition de $\mathbb{R}$.

L'ensemble des nombres pairs et l'ensemble des nombres impairs forment une partition de l'ensemble des entiers.

4 RELATION BINAIRE

Définition 9

Une **relation binaire** $\mathcal{R}$ entre E et F est définie par une partie G du produit cartésien $E \times F$. Si un couple (x, y) est un élément de G , on dit que x est en relation avec y (**dans cet ordre**) et on écrit $x\mathcal{R}y$. L'ensemble G est appelé le **graphe** de la relation $\mathcal{R}$.

Idée intuitive

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Son graphe $\mathcal{C}_f$ est l'ensemble des points du plan tels que $y = f(x)$, où $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On peut définir la relation $x\mathcal{R}y \iff y = f(x)$. Alors on voit bien que cette relation s'applique seulement aux éléments du graphe $\mathcal{C}_f$ et est fausse pour tous les autres éléments de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Vous connaissez donc tous déjà au moins une relation binaire !... Et bien d'autres :

- Les relations $\geq, <$ et $=$ sur $\mathbb{R}$.
- La relation de divisibilité sur les nombres entiers.
- La relation d'inclusion $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$.
- La congruence modulo $a \in \mathbb{R}$, c'est à dire $x \equiv y[a]$ si et seulement si $\exists k \in \mathbb{Z}, x - y = ka$.

Elles sont partout !

Exemple 9

- ① Soit E un ensemble non vide et $F = \mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E . On définit la relation $\mathcal{R}$ suivante entre E et F par

$$\forall x \in E, \forall A \in \mathcal{P}(E), \quad x\mathcal{R}A \iff x \in A.$$

- ② Soit E un ensemble non vide et $F = \mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E . On définit la relation $\mathcal{R}$ suivante entre F et lui même par

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \forall B \in \mathcal{P}(E), \quad A\mathcal{R}B \iff A \subset B.$$

Définition 10

Soit $\mathcal{R}$ une relation définie sur E . On dit que $\mathcal{R}$ est

- ① **Réflexive**, si $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$.
- ② **Symétrique**, si $\forall x \in E, \forall y \in E, x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$.
- ③ **Transitive**, si $\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E, [x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z] \implies x\mathcal{R}z$.
- ④ **Antisymétrique**, si $\forall x \in E, \forall y \in E, [x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x] \implies x = y$.

Exemple 10

- La relation d'égalité $=$ sur E est réflexive, transitive, symétrique et antisymétrique.
- Les relations $\leq$ sur $\mathbb{R}$ sont réflexives, transitives et antisymétriques. Elles ne sont pas symétriques.
- La relation $<$ sur $\mathbb{R}$ est transitive et antisymétrique, mais elle n'est ni réflexive, ni symétrique.
- La relation d'inclusion $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$ est réflexive, transitive et antisymétrique.
- La relation de divisibilité sur $\mathbb{Z}$ est réflexive et transitive, mais elle n'est pas antisymétrique car par exemple $-4 \mid 4$ et $4 \mid -4$ alors que $-4 \neq 4$.

Définition 11 : Éléments comparables, relation binaire totale/partielle

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E .

- Deux éléments $x \in E$ et $y \in E$ sont dits **comparables** par $\mathcal{R}$ si $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$.
- On dit que la relation $\mathcal{R}$ est **totale** si deux éléments quelconques de E sont toujours comparables par $\mathcal{R}$, c'est à dire si

$$\forall x, y \in E, \quad x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x.$$

Une relation non totale est dite **partielle**.

Exemple 11

- La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est totale.
- La relation de divisibilité sur $\mathbb{Z}$ est partielle car 2 et 3 ne sont comparables. En effet, on n'a ni $2 \mid 3$, ni $3 \mid 2$.
- La relation d'inclusion $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$ est partielle dès que E contient au moins deux éléments. En effet, pour tous a et b éléments distincts de E : $\{a\} \not\subset \{b\}$ et $\{b\} \not\subset \{a\}$.

Dans le reste du chapitre, on ne regardera que les relation sur un seul ensemble, donc entre E et $F = E$.

4.1 RELATION D'ORDRE

Définition 12 : Relation d'ordre

Soit $\mathcal{R}$ une relation définie sur E . On dit que $\mathcal{R}$ est

- ① **une relation d'ordre** si $\mathcal{R}$ est réflexive, antisymétrique et transitive.
- ② **une relation d'ordre total** si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E et que,

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x.$$

Le couple $(E, \mathcal{R})$ est alors appelé un **ensemble ordonné**.

Les relations d'ordre sont généralement notées $\leq$ ou $\cup$, $\preceq$,
 $\lesssim$ ou $\lesssim \dots$

Exemple 12

Toutes les relations d'ordre ne sont pas d'ordre total ! Hormis ceux déjà vus précédemment,

- La relation définie en ②. de l'exemple 1 est une relation d'ordre **partiel** (n'est pas total).
- Soit $\mathcal{F} := \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit sur cet ensemble la relation, pour tout $f, g \in \mathcal{F}$,

$$f \leq g \iff \text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x).$$

On peut montrer que cette relation est une relation d'ordre partiel.

4.2 RELATION D'ÉQUIVALENCE

Définition 13 : Relation d'équivalence

On appelle relation d'équivalence sur E toute relation binaire sur E qui est à la fois réflexive, transitive et symétrique.

Les relations d'équivalence sont généralement notées $\sim$
ou $\simeq$ ou $\approx$ ou $\equiv \dots$

Exemple 13

La relation d'égalité $=$ sur $\mathbb{R}$ est une relation d'équivalence.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la relation $\equiv [\alpha]$ de congruence modulo α sur $\mathbb{R}$ est une relation d'équivalence.

Proposition 2 : Classes d'équivalence

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur E .

- Pour tout $x \in E$, l'ensemble $\text{cl}(x) := \{y \in E \mid x \sim y\}$ est appelé la **classe d'équivalence** de x pour $\sim$.
- Pour tout $x, y \in E$, on a $x \sim y \iff \text{cl}(x) = \text{cl}(y)$.
- Les classes d'équivalences pour $\sim$ forment une partition de E .
- L'ensemble des classes d'équivalences de E pour $\sim$ est appelé l'ensemble quotient de E par $\sim$ et souvent noté $E/\sim$.

Preuve.

- Montrons d'abord le deuxième point de la proposition.

- ▷ Supposons $x \sim y$, et montrons que $\text{cl}(x) = \text{cl}(y)$ par double inclusion.
 - * Soit $z \in \text{cl}(x)$, alors on a $x \sim z$ et, comme $x \sim y$, par symétrie et transitivité, on en déduit $z \sim y$, c'est à dire que $z \in \text{cl}(y)$. On a donc l'inclusion $\text{cl}(x) \subset \text{cl}(y)$.
 - * Comme x et y jouent des rôles symétriques, on a aussi $\text{cl}(y) \subset \text{cl}(x)$.
- ▷ Réciproquement, supposons $\text{cl}(y) = \text{cl}(x)$. Comme $x \in \text{cl}(x)$, par définition, on a $x \in \text{cl}(y)$, c'est-à-dire $x \sim y$.
- Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E .
 - ▷ Étant donné que, pour tout $x \in E$, on a $x \in \text{cl}(x)$, on en déduit qu'aucune classe d'équivalence n'est vide et que la réunion de toutes ces classes est égale à E .
 - ▷ Si A et B sont deux classes d'équivalence non disjointes, alors on peut trouver $x \in E$ tel que $x \in A$ et $x \in B$. D'après le point précédent, $A = \text{cl}(x) = B$. Par contraposition, on a obtenu que $A \neq B \implies A \cap B = \emptyset$.

Les classes d'équivalence forment donc une partition de E .

□