

TD

Calcul matriciel

EXERCICES D'APPLICATION DU COURS

EXERCICE 1 ☐☐☐ Comment multiplie-t-on ? (1) _____

Nous considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} ; D = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} ; E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Calculer toutes les multiplications possibles de 2 matrices. ▶ Indication ▶ Correction

EXERCICE 2 ☐☐☐ Comment multiplie-t-on ? (2) _____

Effectuer le produit des deux matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} \text{le} & \text{a} & \text{le} \\ \text{un} & \text{a} & \text{un} \\ \text{le} & \text{avait} & \text{un} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{chat} & \text{rat} & \text{lion} \\ \text{mangé} & \text{dégusté} & \text{dévoré} \\ \text{poisson} & \text{fromage} & \text{touriste} \end{pmatrix}$$

▶ Indication ▶ Correction

EXERCICE 3 ☒☐☐ _____

Soit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- ① Calculer A^2 .
- ② En déduire, $\frac{1}{2}(A - I_3) \cdot A$.
- ③ Que peut-on en déduire pour la matrice A ?

▶ Indication ▶ Correction

EXERCICE 4 ☒ A ☒ _____

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^2 . En déduire A^{-1} . ▶ Indication ▶ Correction

EXERCICE 5 ☒☐☐ _____

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux matrices symétriques soit encore une matrice symétrique. ▶ Indication ▶ Correction

EXERCICE 6 ☒☐☐ _____

Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Comparez les matrices $(A+B)^2$, $A^2+2AB+B^2$ et $A^2+AB+BA+B^2$. ▶ Indication ▶ Correction

EXERCICE 7 ☒☐☐ _____

Montrez que l'inverse de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

est la matrice

$$B = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -5 & 1 & 9 \\ 0 & 4 & 6 \\ -5 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

En déduire les solutions du système

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ -3x + y + 3z = 2 \\ 2x + y - 2z = -2 \end{cases}$$

▶ Indication ▶ Correction

EXERCICES TECHNIQUES

EXERCICE 8 ■ ■ □ **Entrainement 1 pour calculer l'inverse de matrices** —

Calculer l'inverse des matrices suivantes

Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, vous devez trouver $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Pour $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, vous devez trouver $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Pour $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, vous devez trouver $C^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 7 & 9 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 9 ■ ■ □ **Entrainement 2 pour calculer l'inverse de matrices** —

Calculer l'inverse des matrices suivantes

Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, vous devez trouver $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, vous devez trouver $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Pour $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, vous devez trouver $C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 10 ■ (A) ■ —

Soit $A \in \text{Mat}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - 5A + 6I_3 = 0$. Montrer que A est inversible et donner l'expression de son inverse. ► Indication ► Correction

EXERCICE 11 ■ ■ □ **Entrainement 3 pour calculer l'inverse de matrices** —

Montrer que les matrices carrées d'ordre $n \geq 2$ suivantes sont inversibles, et déterminer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & (0) \\ & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & -a \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 2 \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & & (1) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}.$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 12 ■ ■ □ —

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\sigma(A)$ la somme des termes de A . On pose

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Vérifier $JAJ = \sigma(A) \cdot J$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 13 ■ □ □ —

Soit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculez A^n . ► Indication ► Correction

EXERCICE 14 ■ □ □ —

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes linéaires homogènes suivants

$$(\mathcal{S}_1) : \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \quad (\mathcal{S}_2) : \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ x + 11y - z = 0 \end{cases} \quad (\mathcal{S}_3) : \begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 0 \\ 6x + 8y + 2z + 6t = 0 \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 0 \end{cases}$$

► Indication ► Correction

EXERCICES "COMME EN COLLE"

EXERCICE 15 ■ ■ □ □

- ① Soit A une matrice carrée de taille n , telle que $A^2 = A$ et $A \neq I$. Montrer que A n'est pas inversible.
- ② Trouver toutes les matrices carrées de taille 2, autres que I_n et la matrice nulle, telles que $A^2 = A$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 16 ■ ■ □ □

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avec $0 \leq d \leq c \leq b \leq a$ et $b + c \leq a + d$.
Pour tout $n \geq 2$, on note

$$M^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$$

Démontrer que, pour tout $n \geq 2$, $b_n + c_n \leq a_n + d_n$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 17 ■ ■ ■ ■

Soient M une matrice 3×2 et N une matrice 2×3 telles que

$$MN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que $NM = I_2$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 18 ■ ■ □ □

Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une équation $A^2 = -\text{Id}$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 19 ■ ■ □ □

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

une matrice carrée de taille n .

- ① Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Majorer les coefficients de A^k .
- ② Calculer A^{-1} .
- ③ Calculer $(A^{-1})^k$ pour $k \in \mathbb{N}$.

► Indication

► Correction

EXERCICE 20 ■ ■ □ □

Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

On suppose que les matrices A, D et M sont inversibles. Exprimer M^{-1} .

► Indication

► Correction

EXERCICE 21 ■ ■ □ □

On considère l'ensemble suivant, appelé le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\mathcal{Z}_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), A \times M = M \times A\}$$

- ① Proposer deux matrices appartenant à $\mathcal{Z}_n$.
- ② La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ appartient-elle à $\mathcal{Z}_2$?
- ③ On souhaite déterminer l'ensemble $\mathcal{Z}_n$. Considérons pour cela une matrice M appartenant à $\mathcal{Z}_n$.
- 3.a Pour tout $1 \leq i, j \leq n$, calculer $E_{i,j} \times M$ et $M \times E_{i,j}$.
- 3.b En déduire que M est une matrice scalaire, c'est à dire de la forme $\lambda \cdot I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
- 3.c Conclure.

► Indication

► Correction

EXERCICE 22 ■ ■ □ □

Soit E l'ensemble des matrices de la forme

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Notre objectif est d'établir que l'inverse d'une matrice inversible de E appartient encore à E , sans pour autant calculer cet inverse.

- ① Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel dont on précisera la dimension.
- ② Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif.

- ③ À quelle condition sur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, la matrice $A = M(a, b, c)$ est-elle inversible dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? On suppose cette condition vérifiée. En considérant l'application $f : E \rightarrow E$ définie par $f(X) = AX$, montrer que $A^{-1} \in E$.

► Indication

► Correction

EXERCICE 23 ■ ■ □ Trigonalisation et puissances d'une matrice

Dans tout le problème, on considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- ① ①.a Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
- ①.b Simplifier $T = P^{-1}AP$ puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$.
- ② ②.a On définit la matrice $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ en écrivant $T = I_3 + N$. Calculer N^2 et N^3 . En déduire N^k pour tout $k \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket$.
- ②.b Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer T^n en fonction de n et N puis de n uniquement.
- ②.c Montrer que $PNP^{-1} = A - I_3$ et que $PN^2P^{-1} = A^2 - 2A + I_3$.
- ②.d Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner une expression de A^n comme combinaison linéaire de I_3 , A et A^2 dont les coefficients dépendent de n .

► Indication

► Correction

Indications

EXERCICES D'APPLICATION DU COURS

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 **Comment multiplie-t-on ? (1)** _____

[↩ retour à l'EXERCICE 1](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 **Comment multiplie-t-on ? (2)** _____

[↩ retour à l'EXERCICE 2](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 _____

Un inverse ?

[↩ retour à l'EXERCICE 3](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 _____

On essaie de remodeler l'équation obtenue pour obtenir $AB = I$, avec B une matrice connue.

[↩ retour à l'EXERCICE 4](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 _____

On ne stresse pas et on pose 2 matrices qui vérifient l'équation donnée.

[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 _____

On fait les calculs. L'identité remarquable subsiste ?

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 7 _____

On réécrit le système sous la forme matricielle.

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

EXERCICES TECHNIQUES

INDICATION POUR L'EXERCICE 8 **Entrainement 1 pour calculer l'inverse de matrices**

On applique la méthode. Faites le honnêtement (comme un DS), le plus vite possible !

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 9 **Entrainement 2 pour calculer l'inverse de matrices**

On applique la méthode. Faites le honnêtement (comme un DS), le plus vite possible !

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 10

On a pas peur de l'abstraction et on cherche une matrice B telle que $AB = I_3$.

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 11 **Entrainement 3 pour calculer l'inverse de matrices**

Il faut trouver une stratégie par opérations sur les lignes et les colonnes.

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 12

C'est un calcul d'une multiplication. Essayer au rang 2 ou 3 pour comprendre. La preuve doit se faire avec la formule du produit matriciel.

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 13

Trouvez une récurrence.

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 14

Exprimer ces systèmes sous forme matricielle puis calculer les inverses.

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)

EXERCICES "COMME EN COLLE"

INDICATION POUR L'EXERCICE 15

- ① Raisonner par l'absurde.
- ② Résoudre l'équation en posant A une matrice carré quelconque.

[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 16

A faire par récurrence.

[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 17

A faire "à la main".

[↩ retour à l'EXERCICE 17](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 18

Résoudre en posant $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

[↩ retour à l'EXERCICE 18](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 19

[↩ retour à l'EXERCICE 19](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 20

[↩ retour à l'EXERCICE 20](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 21

[↩ retour à l'EXERCICE 21](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 22

[↩ retour à l'EXERCICE 22](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 23 **Trigonalisation et puissances d'une matrice**

[↩ retour à l'EXERCICE 23](#)

Corrections

EXERCICES D'APPLICATION DU COURS

Correction de l'EXERCICE 1 Comment multiplie-t-on ? (1) _____

↩ retour à l'EXERCICE 1

Correction de l'EXERCICE 2 Comment multiplie-t-on ? (2) _____

↩ retour à l'EXERCICE 2

Correction de l'EXERCICE 3 _____

$$\textcircled{1} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{1}{2} (A - I_3) \cdot A = I_3.$$

$$\textcircled{3} \quad \text{On a donc } A^{-1} = \frac{1}{2} (A - I_3).$$

↩ retour à l'EXERCICE 3

Correction de l'EXERCICE 4 _____

On a $A^2 = I_3$, donc $A^{-1} = A$. On dit que la matrice A est involutive.

↩ retour à l'EXERCICE 4

Correction de l'EXERCICE 5 _____

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Sachant

$${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$$

on a

$${}^t(AB) = AB \iff BA = AB$$

Le produit de deux matrices symétriques est une matrice symétrique si, et seulement si, les deux matrices commutent.

↩ retour à l'EXERCICE 5

Correction de l'EXERCICE 6 _____

$$(A + B)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + AB + BA + B^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Il n'y a plus d'identité remarquable car A et B ne commutent pas.

↩ retour à l'EXERCICE 6

Correction de l'EXERCICE 7 _____

On a $AB = I_3$. De plus,

$$\begin{cases} x + 2y - 3z &= 1 \\ -3x + y + 3z &= 2 \\ 2x + y - 2z &= -2 \end{cases} \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

donc en multipliant par B , on obtient $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21/10 \\ -2/5 \\ -13/10 \end{pmatrix}$

↩ retour à l'EXERCICE 7

EXERCICES TECHNIQUES

Correction de l'EXERCICE 8 **Entrainement 1 pour calculer l'inverse de matrices**

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

Correction de l'EXERCICE 9 **Entrainement 2 pour calculer l'inverse de matrices**

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

Correction de l'EXERCICE 10

$A^2 - 5A + 6I_3 = 0 \iff A \cdot \frac{1}{6}(A - 5I_3) = I_3$.
Donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{6}(A - 5I_3)$.

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

Correction de l'EXERCICE 11 **Entrainement 3 pour calculer l'inverse de matrices**

Pour A : En effectuant successivement les opérations élémentaires : $C_2 \leftarrow C_2 + aC_1, C_3 \leftarrow C_3 + aC_2, \dots, C_n \leftarrow C_n + aC_{n-1}$ on obtient

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ 0 & 1 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a^2 \\ \vdots & & \ddots & 1 & a \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour B : En effectuant successivement les opérations élémentaires

$C_n \leftarrow C_n - C_{n-1}, C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - C_{n-2}, \dots, C_2 \leftarrow C_2 - C_1$, on obtient :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$$

Pour C : En effectuant successivement les opérations élémentaires

$$C_n \leftarrow C_n - C_{n-1}, C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - C_{n-2}, \dots, C_2 \leftarrow C_2 - C_1$$

puis encore $C_n \leftarrow C_n - C_{n-1}, C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - C_{n-2}, \dots, C_2 \leftarrow C_2 - C_1$, on obtient

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & & (0) \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & -2 \\ (0) & & & & 1 \end{pmatrix}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

Correction de l'EXERCICE 12

Notons $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$\sigma(A) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n a_{k,\ell}$$

Par produit $B = AJ = (b_{i,j})$ avec $b_{i,j} = \sum_{\ell=1}^n a_{i,\ell} 1$ et $C = JAJ = JB = (c_{i,j})$ avec

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n 1 \cdot b_{k,j} = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n a_{k,\ell} = \sigma(A)$$

Ainsi $C = \sigma(A)J$.

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

Correction de l'EXERCICE 13

On montre par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $A^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^0 = I_2$.

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

Correction de l'EXERCICE 14

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)

EXERCICES "COMME EN COLLE"

Correction de l'EXERCICE 15

- ① Si A est inversible, alors $A^2 = A$, nous donne, en multipliant par son inverse, $A = I$, ce qui est absurde.
- ② En posant $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on obtient $d = 1 - a$ et $a(1 - a) = bc$.

↪ retour à l'EXERCICE 15

Correction de l'EXERCICE 16

Pour $n \geq 1$, en exploitant $M^{n+1} = M \times M^n$, on a

$$\begin{cases} a_{n+1} = aa_n + bc_n \\ b_{n+1} = ab_n + bd_n \\ c_{n+1} = ca_n + dc_n \\ d_{n+1} = cb_n + dd_n \end{cases}$$

Donc $a_{n+1} + d_{n+1} - (b_{n+1} + c_{n+1}) = (a - c)(a_n - b_n) + (b - d)(c_n - d_n)$.
Sachant $a \geq c$ et $b \geq d$, il suffit d'établir $a_n \geq b_n$ et $c_n \geq d_n$ pour conclure. Dans le cas $n = 1$, la propriété est vérifiée. Dans le cas $n \geq 2$, on a $M^n = M^{n-1} \times M$, donc

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1}a + b_{n-1}c \\ b_n = a_{n-1}b + b_{n-1}d \\ c_n = c_{n-1}a + d_{n-1}c \\ d_n = c_{n-1}b + d_{n-1}d \end{cases}$$

D'où $a_n - b_n = a_{n-1}(a - b) + b_{n-1}(c - d)$ et $c_n - d_n = c_{n-1}(a - b) + d_{n-1}(c - d)$. On montre par récurrence que $a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}, d_{n-1} \geq 0$, et on obtient sachant $a - b \geq 0$ et $c - d \geq 0$ les inégalités permettant de conclure.

Notons que l'hypothèse $b + c \leq a + d$ ne nous a pas été utile.

↪ retour à l'EXERCICE 16

Correction de l'EXERCICE 17

↪ retour à l'EXERCICE 17

Correction de l'EXERCICE 18

En posant $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on obtient $a^2 + bc = d^2 + bc = -1$ et $b(a + d) = 0 = c(a + d)$.

- ① Si $a + d = 0$ et $b \neq 0$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ (-a^2 - 1)/b & -a \end{pmatrix}$
- ② Si $a + d = 0$ et $b = 0$, alors il n'y a pas de solutions.
- ③ Si $a + d \neq 0$, alors $b = c = 0$ et donc il n'y a pas de solutions.

↪ retour à l'EXERCICE 18

Correction de l'EXERCICE 19

- ① Si M_k majore les coefficients de A^k alors nM_k majore les coefficients de A^{k+1} . On en déduit que les coefficients de A^k sont majorés par n^{k-1} .
- ② Posons T la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de coefficients $(i, i + 1)$ qui valent 1. On remarque

$$A = I_n + T + \dots + T^{n-1}$$

On en déduit

$$(I - T)A = I_n - T^n$$

et puisque $T^n = O_n$, on obtient

$$A^{-1} = I - T$$

- ③ Le calcul des puissances de A^{-1} est immédiat

$$(A^{-1})^k = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} T^j$$

et donc le coefficient d'indice (i, j) de $(A^{-1})^k$ est

$$a_{i,j}^{-k} = (-1)^{j-i} \binom{k}{j-i} = (-1)^{j-i} \frac{k(k-1)\dots(k-j+i+1)}{(j-i)(j-i-1)\dots 1}$$

Cette formule laisse présumer que le coefficient d'indice (i, j) de A^k est

$$a_{i,j}^k = (-1)^{j-i} \frac{(-k)(-k-1)\dots(-k-j+i+1)}{(j-i)(j-i-1)\dots 1} = \binom{k+j-i-1}{j-i}$$

ce que l'on démontre en raisonnant par récurrence.

[↩ retour à l'EXERCICE 19](#)

Correction de l'EXERCICE 20

On peut écrire la matrice M^{-1} sous la forme

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$$

La relation $MM^{-1} = I_{2n}$ donne alors le système

$$\begin{cases} AA' + BC' = I_n \\ CA' + DC' = O_n \\ AB' + BD' = O_n \\ CB' + DD' = I_n \end{cases}$$

qui entraîne

$$\begin{cases} (A - BD^{-1}C) A' = I_n \\ C' = -D^{-1}CA' \\ B' = -A^{-1}BD' \\ (D - CA^{-1}B) D' = I_n \end{cases}$$

On en déduit que les matrices $A - BD^{-1}C$ et $D - CA^{-1}B$ sont nécessairement inversibles et A' et D' sont leurs inverses respectifs. Au final

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & A^{-1}B(CA^{-1}B - D)^{-1} \\ D^{-1}C(BD^{-1}C - A)^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 20](#)

Correction de l'EXERCICE 21

- ① On peut proposer 0_n ou I_n . Plus globalement, toute matrice scalaire, c'est-à-dire de la forme λI_n pour $\lambda \in \mathbb{K}$, est dans $\mathcal{Z}_n$. Le but de la suite de l'exercice est de montrer qu'il n'y en a pas d'autres.

- ② On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times E_{1,2} = E_{1,2} \neq E_{1,2} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2E_{1,2}$$

Donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas dans le centre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

- ③ On souhaite déterminer l'ensemble $\mathcal{Z}_n$. Considérons pour cela une matrice M appartenant à $\mathcal{Z}_n$.

- ③.a On utilise pour cela le résultat du cours qui dit

$$E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \begin{cases} E_{i,\ell} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a ici pour tout $1 \leq i, j \leq n$

$$\begin{aligned} E_{i,j} \times M &= E_{i,j} \times \left(\sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n m_{k,\ell} E_{k,\ell} \right) = \sum_{k=1}^n \underbrace{\sum_{\ell=1}^n m_{k,\ell} E_{i,j} \times E_{k,\ell}}_{=0 \text{ si } k \neq j} \\ &= \sum_{\ell=1}^n m_{j,\ell} E_{i,\ell} \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} M \times E_{i,j} &= \left(\sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n m_{k,\ell} E_{k,\ell} \right) \times E_{i,j} = \sum_{\ell=1}^n \underbrace{\sum_{k=1}^n m_{k,\ell} E_{k,\ell} E_{i,j}}_{=0 \text{ si } \ell \neq i} \\ &= \sum_{k=1}^n m_{k,i} E_{k,j} \end{aligned}$$

- ③.b Puisque $M \in \mathcal{Z}_n$, on a $M \times E_{i,j} = E_{i,j} \times M$, d'où

$$\sum_{\ell=1}^n m_{j,\ell} E_{i,\ell} = \sum_{k=1}^n m_{k,i} E_{k,j}$$

En identifiant alors les coefficients de chacune de ces matrices (on utilise ici la liberté de la famille $(E_{i,j})$ qui est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$), on a

$$\begin{cases} m_{j,\ell} = 0 & \text{pour tout } \ell \neq j \\ m_{k,i} = 0 & \text{pour tout } k \neq i \\ m_{j,j} = m_{i,i} & (\text{cas } \ell = j \text{ et } k = i) \end{cases}$$

Ceci étant vrai pour tout $1 \leq i, j \leq n$, on en déduit que

$$\begin{cases} m_{i,j} = 0 & \text{pour tout } i \neq j \\ m_{i,i} = m_{j,j} & \text{pour tout } i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket. \end{cases}$$

La matrice M est donc égale à $M = m_{1,1}I_n$. C'est donc bien une matrice scalaire.

- 3.c) Réciproquement, les matrices scalaires appartiennent bien à $\mathcal{Z}_n$. On a donc bien montré (par double inclusion) que

$$\mathcal{Z}_n = \{\lambda I_n, \lambda \in \mathbb{R}\} (= \text{Vect}(I_n)).$$

↪ retour à l'EXERCICE 21

Correction de l'EXERCICE 22

- ① On montre que c'est une sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- ② De plus $I \in E, M(a, b, c) - M(a', b', c') = M(a - a', b - b', c - c') \in E$ et $M(a, b, c)M(a', b', c') = (aI + bJ + cK)(a'I + b'J + c'K)$.

$$= aa'I + (ab' + a'b)J + (ac' + bb' + ca')K \in E$$
Donc E est un sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
De plus $M(a, b, c)M(a', b', c') = M(a', b', c')M(a, b, c)$, donc E est un anneau commutatif.
- ③ A est inversible si, et seulement si, $a \neq 0$ (ici A est triangulaire supérieure)
 $f(\lambda \cdot X + \mu \cdot Y) = A(\lambda \cdot X + \mu \cdot Y) = \lambda \cdot AX + \mu \cdot AY = \lambda \cdot f(X) + \mu \cdot f(Y)$.
 f est un endomorphisme de E . Soit $X \in E$, si $X \in \ker f$ alors $AX = O$ puis $A^{-1}AX = O$ d'où $X = O$. Par suite $\ker f = \{0\}$ f est un endomorphisme injectif d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, c'est donc un automorphisme. Par suite il existe $B \in E$ telle que $f(B) = AB = I$. En multipliant par A^{-1} , on conclut $A^{-1} = B \in E$.

↪ retour à l'EXERCICE 22

Correction de l'EXERCICE 23 Trigonalisation et puissances d'une matrice —

① 1.a) $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$

1.b) $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

② 2.a) $T = I_3 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et donc $N^3 = 0$.

2.b) Avec la formule du binôme $T^n = (I_3 + N)^n = I_3 + nN + \binom{n}{2}N^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & \binom{n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.c) Calculs directs.

2.d) $A^n = PT^nP^{-1} = P \left(I_3 + nN + \binom{n}{2}N^2 \right) P^{-1}$

$$= I_3 + n(A - I_3) + \binom{n}{2}(A^2 - 2A + I_3)$$

$$= \binom{n}{2}A^2 + (n - n(n-1))A + \left(1 - n + \binom{n}{2}\right)I_3.$$

↪ retour à l'EXERCICE 23