

Le corps des réels

1 AXIOMES DES NOMBRES RÉELS

Dans ce chapitre, on va déduire les propriétés des nombres réels à partir d'un certain nombre de propositions prises comme axiomes, alors qu'en fait ces propositions peuvent être démontrées en construisant $\mathbb{R}$ rigoureusement (à partir des axiomes de la théorie des ensembles, par exemple). Il existe aujourd'hui plusieurs constructions du corps des réels équivalentes. Ces démonstrations ont un grand intérêt logique, mais elles n'ont pas grande utilité en analyse, et je n'ai pas ~~trouvé nécessaire~~ le temps de vous les donner, et c'est hors programme. Si vous êtes intéressé, je vous conseille de passer d'abord vos concours, et de vous intéresser à ces preuves de théorie des ensembles et de logique quand vous serez plus vieux.

1.1 ADDITION ET MULTIPLICATION

Ce sont les propriétés que vous avez toujours pratiquées.

Pour a, b et c dans $\mathbb{R}$ on a :

Addition

- ① Associativité : $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- ② Élément neutre : $a + 0 = 0 + a = a$;
- ③ Opposé : $a + (-a) = (-a) + a = 0$;
- ④ Commutativité : $a + b = b + a$.

Multipliation

- ① Associativité : $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.
- ② Élément neutre : $a \times 1 = 1 \times a = a$.
- ③ Symétrie : $\forall a \in \mathbb{R}^*, a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1$.
- ④ Commutativité : $a \times b = b \times a$.

On dit que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un *corps commutatif*. On verra sa définition dans un chapitre ultérieur. Il est à remarquer que $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est aussi un corps commutatif contenu dans $\mathbb{R}$.

1.2 ORDRE SUR $\mathbb{R}$

Définition 1 : Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

On définit sur $\mathbb{R}$ la relation notée " $\leq$ " par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad x \leq y \iff y - x \geq 0.$$

La relation $\leq$ définie sur $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre total.

Preuve.

A vous ! $\square$

Exemple 1

La relation $\leq$ définie sur $\mathbb{R}$ est dite une **relation d'ordre total**. On dit que $\mathbb{R}$ est **totalelement ordonné**. On le reverra, mais les propriétés d'une relation d'ordre total sont les suivantes.

- ① Elle doit être **Réflexive** : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leq x$.
- ② Elle doit être **Transitive** : Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, $[x \leq y \text{ et } y \leq z] \implies x \leq z$.

③ Elle doit être **Antisymétrique** : Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, $[x \leq y \text{ et } y \leq x] \implies x = y$.

④ Enfin, pour être d'ordre total, elle doit vérifier :

Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Règles de calculs dans $\mathbb{R}$: **Ultime rappel**

Soient x et y deux nombres réels.

① Si $x \leq y$, alors pour tout nombre réel z , $x + z \leq y + z$.

② Si $x \leq y$, alors pour tout nombre réel $z \geq 0$, $xz \leq yz$.

③ Si $x \leq y$, alors pour tout nombre réel $z \leq 0$, $xz \geq yz$.

1.3 PROPRIÉTÉ D'ARCHIMÈDE ET INTERVALLES EMBOÎTÉS

Proposition 1 : Propriété d'Archimède

$\mathbb{R}$ est **archimédien**, c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, nx > y.$$

On rappelle qu'une **suite** d'éléments de $\mathbb{R}$ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, souvent notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposition 2 : Axiome des intervalles emboîtés (Hors programme)

Étant donnée deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que $a_n \leq b_n$, $a_n \leq a_{n+1}$ et $b_n \geq b_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors l'intersection des intervalles $[a_n, b_n]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ n'est pas vide.

1.4 INTERVALLE DE $\mathbb{R}$

On rappelle qu'une partie A de $\mathbb{R}$, notée $A \subset \mathbb{R}$, est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$:

Pour tout $a \in A$, $a \in \mathbb{R}$.

Définition 2

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit A est un **intervalle** de $\mathbb{R}$ si

$$\forall x, y \in A \text{ et } \forall z \in \mathbb{R}, (x \leq z \leq y) \implies z \in A.$$

Exemple 2

① L'ensemble vide est un intervalle. En effet, la proposition $a \leq x \leq b$ avec $a \in \emptyset$ et $b \in \emptyset$ est fausse, donc l'implication $(a \leq x \leq b) \implies x \in \emptyset$ est vraie. On rappelle que pour 2 propositions A et B , $(A \Rightarrow B) \iff (\text{non}(A) \text{ ou } B)$.

② $\mathbb{R}$ est un intervalle.

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont :

- ① $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$; $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Intervalle **fermé**.
- ② $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$; $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \bar{\mathbb{R}}$. Intervalle **semi-ouvert**.
- ③ $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$; $a \in \bar{\mathbb{R}}$ et $b \in \mathbb{R}$. Intervalle **semi-ouvert**.
- ④ $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$; $a \in \bar{\mathbb{R}}$ et $b \in \bar{\mathbb{R}}$. Intervalle **ouvert**.

Appartenance à un intervalle

Pour tous les réels x et a et pour tout réel $r \geq 0$, il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

- ① $|x - a| \leq r$; | ② $-r \leq x - a \leq r$; | ③ $a - r \leq x \leq a + r$; | ④ $x \in [a - r, a + r]$.

Proposition 3

Tout intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant un réel a , contient un intervalle ouvert centré en a . C'est-à-dire un intervalle de la forme $]a - r, a + r[$ avec $r > 0$.

En effet :

- Si $I = \mathbb{R}$, n'importe quel réel $r > 0$ convient.
- Si $I =]\alpha, +\infty[$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, on peut prendre $r = a - \alpha$.
- Si $I =]-\infty, \beta[$ avec $\beta \in \mathbb{R}$, on peut prendre $r = \beta - a$.
- Si $I =]\alpha, \beta[$ avec α et β dans $\mathbb{R}$, on peut prendre $r = \min(a - \alpha, \beta - a)$.

1.5 PARTIE MAJORÉE, PARTIE MINORÉE, PARTIE BORNÉE DANS $\mathbb{R}$

Définition 3 : Majorant, Minorant

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit qu'un réel M est un **majorant** de A dans $\mathbb{R}$ si

$$\forall x \in A, \quad x \leq M.$$

Si M est un élément de A , on dit que M est le **plus grand élément** de A . On le note $\max A$.

On dit qu'un réel m est un **minorant** de A dans $\mathbb{R}$ si

$$\forall x \in A, \quad m \leq x.$$

Si m est un élément de A , on dit que m est le **plus petit élément** de A . On le note $\min A$.

⚠ ATTENTION On ne parle jamais du majorant d'une partie majorée de $\mathbb{R}$. Si par exemple M en est un majorant, $M + 1$ en est aussi un majorant.
Le plus grand ou plus petit élément n'existe pas toujours !

Exemple 3

L'intervalle $]3, 5[$ admet 3 pour plus petit élément mais n'a pas de plus grand élément.

Unicité du plus grand ou plus petit élément

On a un peu triché dans la définition. On a écrit "le" plus grand élément et "le" plus petit élément, sans rien démontrer. *Ce n'est pas bien !* On va remédier à cela.

Supposons qu'il y ait $M, M' \in \mathbb{R}$ deux plus grands éléments de A . Alors comme

- M majore A et $M' \in A$, on a $M' \leq M$,
- M' majore A et $M \in A$, on a $M \leq M'$.

Donc $M = M'$.

Le plus grand et le plus petit élément sont donc uniques, **s'ils existent !**

Définition 4

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

On dit que A est **majorée** dans $\mathbb{R}$ si A admet un majorant dans $\mathbb{R}$.

On dit que A est **minorée** dans $\mathbb{R}$ si A admet un minorant dans $\mathbb{R}$.

On dit que A est **bornée** dans $\mathbb{R}$ si A est à la fois majorée et minorée dans $\mathbb{R}$.

Proposition 4

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Alors A est bornée si et seulement si

$$\exists K \in \mathbb{R}_+, \forall x \in A, |x| \leq K.$$

Preuve. Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}$. Par définition, il existe deux nombres réels α et β tels que

$$\forall x \in A, \alpha \leq x \leq \beta.$$

Soit $\delta = \max(|\alpha|, |\beta|)$. Alors $\forall x \in A, x \leq \beta \leq |\beta| \leq \delta$ et $-x \leq -\alpha \leq |\alpha| \leq \delta$.

On en déduit que $\forall x \in A, |x| \leq \delta$.

Réciproquement, s'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in A, |x| \leq K$ alors $x \leq |x| \leq K$ et $-x \leq |x| \leq K$ et donc

$$\forall x \in A, -K \leq x \leq K$$

et A est bornée dans $\mathbb{R}$. $\square$

1.6 PLUS PETIT ÉLÉMENT DANS $\mathbb{N}$

Théorème 1

- ① Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.
- ② Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.

Preuve.

- ① Soit A une partie non vide de $\mathbb{N}$. Supposons par l'absurde que A ne possède pas de plus petit élément.

Mais A est minorée par 0 car $A \subset \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons A minorée par n , et $n \notin A$ par hypothèse.

Donc, pour tout $a \in A$, on a $a > n$. Et comme a et n sont entiers, $a \geq n + 1$. Donc A est minorée par $n + 1$.

Par récurrence, on a démontré que A est minoré par les entiers naturels, ce qui est absurde car A est non-vide et contient au moins un entier naturel.

- ② Soit M un majorant entier de A . Posons

$$B := M - A = \{M - a \mid a \in A\}.$$

Or, comme M un majorant entier de A , pour tout $a \in A$, $M - a$ est un entier positif, donc $B \subset \mathbb{N}$.

D'après ①, B admet un plus petit élément, que l'on notera m_0 . Le nombre m_0 étant dans B , il existe $a_0 \in A$, tel que $m_0 = M - a_0$. Mais on a aussi, pour tout $a \in A$,

$$m_0 \leq M - a \iff a_0 \geq a,$$

donc que a_0 est un majorant de A qui appartient à A , donc c'est le plus grand élément de A .

$\square$

2 BORNE SUPÉRIEURE, BORNE INFÉRIEURE

Définition 5

Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- ① On appelle **borne supérieure** de A , le plus petit des majorants de A , s'il existe. On le note $\sup(A)$.
- ② On appelle **borne inférieure** de A , le plus grand des minorants de A , s'il existe. On le note $\inf(A)$.

Proposition 5 : Caractérisation des borne supérieures et inférieure

Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et α et β un nombre réel.

α est la borne supérieure de A si et seulement si

$$\left[\forall a \in A, a \leq \alpha \right] \wedge \left[\forall \varepsilon > 0, \exists b \in A, \alpha - \varepsilon < b \right].$$

β est la borne inférieure de A si et seulement si

$$\left[\forall a \in A, \beta \leq a \right] \wedge \left[\forall \varepsilon > 0, \exists b \in A, b < \beta + \varepsilon \right].$$

Preuve.

C'est juste l'écriture de la définition en quantificateurs. Pour la borne supérieure, c'est "un majorant de A " ET "tous les nombres plus petits ne sont pas des majorants". $\square$

Mais quelles parties de $\mathbb{R}$ ont une borne supérieure ?

Il est clair que les parties non majorées n'ont pas de borne supérieure, sinon, elle serait infini... On aimerait donc que toutes les parties majorées aient une borne supérieure. Aller... Il ne faut pas rêver. ET POURTANT ! On a bien le résultat tant espéré, appelé le **Théorème de la borne supérieure**.

On arrive au théorème qui fait tout fonctionner LE théorème de l'analyse. Tous les théorèmes en découlent : théorème de la limite monotone, théorème des suites adjacentes, théorème de Bolzano-Weierstrass, théorème des valeurs intermédiaires, théorème des bornes atteintes, théorème de Heine, théorème de Rolle, théorème des accroissements finis et construction de l'intégrale.

Théorème 2 : Théorème de la borne supérieure/inférieure

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$.

Preuve.

Evidemment, on ne le démontre que pour la borne supérieure. Soit $a \in A$ et M un majorant de A . Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, pour tout entier n , il existe un entier m tel que $M - a \leq m \cdot 2^{-n}$. Pour n fixé, l'ensemble

$$\{m \in \mathbb{N} \mid M \leq a + m \cdot 2^{-n}\}$$

est une partie de $\mathbb{N}$, donc admet un plus petit élément, que l'on notera p_n (et oui, cet élément dépend de n !).

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n := a + (p_n - 1) \cdot 2^{-n}$ et $y_n = a + p_n \cdot 2^{-n}$ et

$$I_n := [a + (p_n - 1) \cdot 2^{-n}, a + p_n \cdot 2^{-n}] = [x_n, y_n].$$

Or, par définition de p_n , le nombre x_n n'est plus un majorant de A et donc

il existe des éléments de A dans l'intervalle I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Faisons une disjonction de cas pour p_{n+1} .

- Si $p_{n+1} < 2p_n - 2$, alors $y_{n+1} = a + p_{n+1} \cdot 2^{-n-1} < a + (p_n - 1) \cdot 2^{-n} = x_n$, ce qui contredit le fait que y_{n+1} soit un majorant de A .
- Si $p_{n+1} > 2p_n$, alors $y_{n+1} = a + p_{n+1} \cdot 2^{-n-1} > a + p_n \cdot 2^{-n} = y_n$, ce qui contredit la définition de p_{n+1} , car on a trouvé un majorant plus petit.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $p_{n+1} = 2p_n$ ou $p_{n+1} = 2p_n - 1$. On a alors

$$\begin{array}{l|l}
p_{n+1} \leq 2p_n & 2p_n - 1 \leq p_{n+1} \\
\Leftrightarrow p_{n+1} 2^{-n-1} \leq p_n 2^{-n} & \Leftrightarrow (2p_n - 2)2^{-n-1} \leq (p_{n+1} - 1)2^{-n-1} \\
\Leftrightarrow a + p_{n+1} 2^{-n-1} \leq a + p_n 2^{-n} & \Leftrightarrow a + (p_n - 1)2^{-n} \leq a + (p_{n+1} - 1) 2^{-n-1} \\
\Leftrightarrow y_{n+1} \leq y_n & \Leftrightarrow x_n \leq x_{n+1}
\end{array}$$

Cela nous permet de déduire que $I_{n+1} \subset I_n$.

D'après l'axiome des intervalles emboîtés, les intervalles I_n ont une intersection non vide J .

Par l'absurde, supposons que J contient au moins deux éléments distincts $\alpha < \beta$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $[\alpha, \beta] \subset I_n$. Mais la taille de l'intervalle I_n est 2^{-n} et celle de $[\alpha, \beta]$ est $\beta - \alpha$. Donc

$$2^{-n} \geq \beta - \alpha, \text{ donc } 1 \geq 2^n(\beta - \alpha),$$

ce qui contredit la propriété d'Archimède, puisque $2^n \geq n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc $J = \{\gamma\}$ est un singleton, avec $\gamma \in \mathbb{R}$.

Par l'absurde, supposons que γ n'est pas un majorant de A . Alors il existe un élément $\exists x \in A$ tel que $x > \gamma$.

Donc $\exists n \in \mathbb{N}$, $2^{-n} < x - \gamma$. Mais $\gamma \in I_n$, nous aurions $a + p_n 2^{-n} < x$, ce qui est contraire à la définition de p_n , puisque $a + p_n 2^{-n}$ doit être un majorant de A . Donc γ est un majorant de A .

Par l'absurde, supposons maintenant que γ n'est pas le plus petit des majorants de A . Alors il existe un majorant M plus grand que γ . De même, pour une certain $n \in \mathbb{N}$, on a $2^{-n} < \gamma - M$.

Comme précédemment, $\gamma \in I_n$, donc on aurait $a + (p_n - 1) 2^{-n} > M$, c'est à dire $a + (p_n - 1) 2^{-n}$ est un majorant de A . Ceci est de nouveau contraire à la définition de p_n (il doit être le plus petit nombre entier tel que $a + p_n 2^{-n}$ soit un majorant). Ainsi le nombre γ est le plus petit des majorants. OUF ! $\square$

3 DROITE NUMÉRIQUE ACHEVÉE

Définition 6

On appelle **droite numérique achevée**, l'ensemble

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}.$$

Extension des opérations sur $\overline{\mathbb{R}}$

L'addition et la multiplication, définies sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, sont partiellement prolongées à la droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$:

Ordre : Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
 $-\infty < x < +\infty$.

Addition : Pour tout nombre réel x

- $x + (+\infty) = +\infty$.
- $x + (-\infty) = -\infty$.
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.
- $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.

Multiplication :

- $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$.
- $(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$.
- $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$.
- $\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$

Pour tout réel x **strictement positif** :

- $x \times (\pm\infty) = \pm\infty$.

Pour tout réel x **strictement négatif** :

- $x \times (\pm\infty) = \mp\infty$.

⚠ ATTENTION Les expressions suivantes n'ont pas de sens :

$$(+\infty) + (-\infty), \quad (+\infty) - (+\infty), \quad (-\infty) - (-\infty), \quad 0 \times (\pm\infty), \quad (\pm\infty) \times 0 \quad \text{et} \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

4 PARTIE ENTIÈRE

Proposition 6

Pour tout x dans $\mathbb{R}$, il existe un unique entier appelé, la **partie entière** de x , notée $\lfloor x \rfloor$, tel que

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Preuve. **Existence.** Soit x dans $\mathbb{R}$.

- ① Si x est un entier, alors $x = \lfloor x \rfloor$.
- ② Si x est un élément strictement positif de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on pose $E_x = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$. Alors E_x est une partie non vide (contient 0) majorée de $\mathbb{Z}$. E_x admet donc un plus grand élément k , d'après le Théorème 1. Alors $k < x < k + 1$.
- ③ Si x est un élément strictement négatif de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Alors $-x$ est un élément strictement positif de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Par le point précédent, il existe un entier n tel que

$$n < -x < n + 1$$

et donc

$$-n - 1 < x < -n.$$

Unicité. On suppose qu'il existe deux entiers k et ℓ tels que

$$k \leq x < k + 1 \quad \text{et} \quad \ell \leq x < \ell + 1.$$

Alors $k < \ell + 1$ et $\ell < k + 1$. D'où $k \leq \ell$ et $\ell \leq k$. Ainsi $k = \ell$. $\square$

Exemple 4

$$\lfloor 27 \rfloor = 27, \quad \lfloor -5 \rfloor = -5, \quad \lfloor 1, 2 \rfloor = 1, \quad \text{Mais } \lfloor -2, 3 \rfloor = -3.$$

Proposition 7

Soient x et y dans $\mathbb{R}$. Soit n un entier. Alors

- ① $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
- ② $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$.

Preuve.

- ① Soit x dans $\mathbb{R}$ et n un entier.

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \implies \lfloor x \rfloor + n \leq x + n < \lfloor x \rfloor + n + 1 \implies \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n.$$

- ② Soient x et y dans $\mathbb{R}$.

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2 \implies \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor.$$

$\square$

Exemple 5

$x = -1, 2$ et $y = 1, 3$. Alors $x + y = 0, 1$. $\lfloor x + y \rfloor = 0$, alors que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = -1$.

5 DENSITÉ DE $\mathbb{Q}$ DANS $\mathbb{R}$

Définition 7 : Partie dense dans $\mathbb{R}$

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est **dense** dans $\mathbb{R}$, si tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient (au moins) un élément de A .

Et alors intuitivement ?

Une partie dense est une partie qui est partout. C'est du français. Intuitivement, près de n'importe quel réel, vous trouverez un élément A .

Bien sûr $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$, mais il n'y a pas vraiment d'intérêt parce qu'il est égal.

Intuitivement, les nombres entiers ne peuvent pas être denses dans $\mathbb{R}$, parce que 0,5, par exemple, n'a pas d'entier "proche" de lui.

Théorème 3

① $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$,

② $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Preuve. Soit I un intervalle ouvert, non vide de $\mathbb{R}$. Alors $I =]a, b[$ avec a et b deux éléments $\overline{\mathbb{R}}$, $a < b$. On fait une disjonction de cas sur a et b .

- ① • On suppose que a et b sont deux nombres réels. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe un entier naturel n tel que $\frac{1}{b-a} < n$. Soit $m = \lfloor an \rfloor$. Alors

$$\frac{m}{n} \leq a < \frac{m}{n} + \frac{1}{n} < \frac{m}{n} + b - a = \frac{m}{n} - a + b \leq b.$$

Le nombre rationnel $\frac{m+1}{n}$ est dans I . Ce qui montre que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

- Si $a = -\infty$ et $b \in \mathbb{R}$: $\lfloor b \rfloor - 1 \in I$;
- Si $a \in \mathbb{R}$ et $b = +\infty$: $\lfloor a \rfloor + 1 \in I$;
- Si $a = -\infty$, $b = +\infty$: $0 \in I$.

- ② • On suppose que a et b sont deux nombres réels. Soit $I =]a, b[$. Par le point (1), l'intervalle ouvert non vide $J =]a - \sqrt{2}, b - \sqrt{2}[$ contient (au moins) un nombre rationnel r . Ainsi $r + \sqrt{2} \in I$. Or $r + \sqrt{2}$ est un nombre irrationnel, car sinon, $\sqrt{2}$ serait un nombre rationnel (Montrer que ce n'est pas possible !).
- Si $a = -\infty$ et $b \in \mathbb{R}$: Il existe un nombre irrationnel $x \in]b - 1, b[\subset I$;
 - Si $a \in \mathbb{R}$ et $b = +\infty$: Il existe un nombre irrationnel $x \in]a, a + 1[\subset I$;
 - Si $a = -\infty$, $b = +\infty$: $\sqrt{2} \in I$.

□

Proposition 8

L'ensemble des nombres rationnels ne possède pas la propriété de la borne supérieure.

Preuve. Soit

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}.$$

A est une partie non vide et majorée dans $\mathbb{Q}$. Supposons que A admette une borne supérieure $r \in \mathbb{Q}$. On applique le raisonnement par disjonction des cas.

- ① $r \neq \sqrt{2}$, puisque $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.
- ② Si $r > \sqrt{2}$. D'après le Théorème 3, il existe un rationnel y tel que $\sqrt{2} < y < r$. Ainsi y est un majorant de A dans $\mathbb{Q}$, plus petit que r . Cela signifie que r n'est pas la borne supérieure de A dans $\mathbb{Q}$. Contradiction.
- ③ Si $r < \sqrt{2}$, alors il existe un rationnel z tel que $r < z < \sqrt{2}$, toujours par le Théorème 3. Mais $z \in A$. Ceci contredit le fait que r est un majorant de A .

On a ainsi montré que l'ensemble A ne peut pas admettre de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$. Ainsi $\mathbb{Q}$ ne possède pas la propriété de la borne supérieure. □