UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

GUSTAVO BARBOSA DE ALBUQUERQUE

# COSMOLOGIA DE BRANAS

FORTALEZA

2014

**GUSTAVO BARBOSA DE ALBUQUERQUE**

# COSMOLOGIA DE BRANAS

Monografia submetida à coordenação do curso de graduação em Física da Universidade Federal do Ceará como requisito parcial para obtenção do grau de bacharel em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida

**FORTALEZA**

**2014**

**GUSTAVO BARBOSA DE ALBUQUERQUE**

# COSMOLOGIA DE BRANAS

Monografia submetida à coordenação do curso de graduação em Física da Universidade Federal do Ceará como requisito parcial para obtenção do grau de bacharel em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 03/01/2014

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida
(Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. José Ramos Gonçalves
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Dr. José Euclides Gomes da Silva
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Física

A31c de Albuquerque, Gustavo Barbosa.
Cosmologia de Branas / Gustavo Barbosa de Albuquerque. – 2014.
51 f. : il. color., enc. ; 30 cm.

Monografia (Graduação) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Física, Programa de Graduação em Física, Fortaleza, 2014.
Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.
Orientação: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida

1. Cosmologia. 2. Teoria Quântica de Campos. 3. . Cosmology. 5. Quantum Field Theory. I.

CDD:523.1

*Ad Majorem Dei*
*Gloriam...*

# AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo amor e graça, incomensuráveis, dedicados a mim, e pelo belo e majestoso Universo criado, nosso lar. Agradeço a Maria Santíssima, pela presença contínua ao meu lado, e a todos os santos e anjos pela incessante intercessão. Agradeço ao meu pai( in memoriam), pelo exemplo de vida e por fornecer a mim contínuo impulso aos estudos, e agradeço a minha mãe, pelo apoio e dedicação incondicionais. Agradeço ao Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida, pela orientação, confiança e auxílio dados. Agradeço a todos do LASSCO que prestaram auxílio e colaboraram com discussões, sugestões ou retirando dúvidas, especialmente Euclides.

# RESUMO

Nesse trabalho fez-se inicialmente uma abordagem geral de cosmologia, focando-se na descrição e utilização das equações fundamentais da cosmologia para gerar os modelos usando a métrica proposta por Friedmann, Robertson e Walker, comumente chamada métrica FRW. Foram também esclarecidas as limitações do modelo do Big Bang de forma a motivar a apresentação de outros modelos cosmológicos, alguns bastante novos, que pretendem implementá-lo. Os modelos cosmológicos alternativos apresentados nesse trabalho foram:o modelo inflacionário, o equipirótico e o cíclico com fase equipirótica. Foram apresentados também os últimos dados observacionais oferecidos pelo satélite Planck em 2013 e sua repercussão nesses modelos cosmológicos mais atuais. Por fim, são explicados os primeiros passos necessários para trabalhar com modelos cosmológicos de branas e são propostas algumas perspectivas de trabalhos a serem feitos utilizando tais modelos para explicar problemas como o da hierarquia e questões como a da singularidade do Big Bang.

**Palavras-chave**: Cosmologia. Teoria Quântica de Campos.

# ABSTRACT

This work performed initially a general approach to cosmology, focusing on the description and usage of the fundamental cosmology equations aiming to generate models using the metric proposed by Friedmann, Robertson and Walker, generally called FRW metric. It also clarified the limitations of the Big Bang model in order to motivate the presentation of other cosmological models, some brand new, which intend to implement them. Alternative cosmological models presented in this work were: the inflationary model, the ekpyrotic model and the cyclic model with ekypirotic phase. Recent observation data provided by the Planck satellite in 2013 and its impact on the most current cosmological models were also presented. Finally, it explained the first steps needed to work with branes cosmological models. It also proposed some perspectives of works using those models to explain problems such as the hierarchy problem and issues as well as the singularity of the Big Bang.

**Keywords**: . . . . .

# LISTA DE FIGURAS


1 Ondas gravitacionais produzidas por um pulsar binário.[29] . . . . . p. 16

2 Sistema de coordenadas comóveis em expansão.[30] . . . . . p. 18

3 Esboço da depência do fator de escala com a curvatura.[30] . . . . . p. 32

4 Gráfico de densidade da constante cosmológico por densidade de matéria no tempo presente.[30] . . . . . p. 34

5 As várias fases pertencentes a um ciclo.[31] . . . . . p. 42

6 Representação de um espaço 5D formado por uma brana 4D, representada pelo traço, e mais uma dimensão extra. A superfície ondulada que se vê nessa figura representa a hipersuperfície 5D. . . . . p. 44

# SUMÁRIO

**Introdução** p. 10

**1 ALGUNS TÓPICOS DE COSMOLOGIA** p. 13

1.1 Dados observacionais . . . . . p. 13

1.2 Equações fundamentais da Cosmologia . . . . . p. 16

1.3 As geometrias do Universo. . . . . p. 25

1.4 Parâmetros Observacionais . . . . . p. 26

**2 MODELO COSMOLÓGICO PADRÃO E MODELOS ALTERNATIVOS COM PLANCK 2013** p. 29

2.1 Modelos cosmológicos usando métrica FRW . . . . . p. 29

2.2 As limitações do modelo cosmológico padrão . . . . . p. 35

2.3 Modelo inflacionário . . . . . p. 36

2.4 Modelo equipirótico . . . . . p. 38

2.5 Modelo cíclico . . . . . p. 40

**3 CONCLUSÕES, DISCUSSÕES E PERSPECTIVAS** p. 43

3.1 Contexto histórico e físico . . . . . p. 43

3.2 O Problema da hierarquia . . . . . p. 44

3.3 A questão da singularidade . . . . . p. 46

**REFERÊNCIAS** p. 49

# Introdução

Desde as primeiras civilizações, o Universo tem sido fonte de inspiração para a religião, para as artes assim como também para a filosofia e para a ciência. A jornada humana em busca de conhecer o mundo que nos cerca, que aqui significa todo o Universo, iniciou-se na forma de um misticismo que ao longo do tempo se tornou pensamento, vertendo-se primeiramente em religião, depois tomando outro formato, o da filosofia, e por último transformando-se em ciência, tendo passado ainda pelas artes[1].

Toda civilização tem alguma resposta para a pergunta sobre a estrutura do Universo e, começando da civilização helênica, o homem foi se aproximando de uma resposta a partir da observação dos céus, uma resposta que andava na direção do racional. Pode-se dizer que a Mitologia tenha sido o início da ciência, como vemos nos pitagóricos, que foram o elo de ligação entre o Orfismo e uma proto-ciência. O orfismo, por sua vez, foi um movimento de reforma dos mitos dionisíacos. Pitágoras fez portanto uma ligação entre o místico e o racional, uma dicotomia que sempre permeou a história do pensamento humano.

Apesar de, como dito acima, a ciência grega ser uma proto-ciência, pois conhecia-se muito mas os conceitos estavam, dentro do aspecto da ciência moderna, equivocados, ela foi essencial para o posterior desenvolvimento do pensamento humano. O conhecimento dos céus, primeiramente através da antiga crença astrológica, e posteriormente através da observação direta dos céus, foi bastante grande. Podemos citar como principal contribuição da ciência grega o modelo de Universo de Ptolomeu, que adotava a terra como centro do Universo. Esse modelo previa que o movimento dos planetas e do sol eram formados por uma combinação de duas diferentes naturezas de movimentos circulares: os deferentes e os epiciclos. O deferente caracteriza uma órbita circular com centro num ponto que está localizado no ponto mediano da reta que liga a terra a um outro ponto, chamado equante. O epiciclo é uma órbita circular, seguida pelo planeta, cujo centro se localiza em pontos dentro do traçado da órbita do deferente.

A ciência moderna teve início com a revolução de Copérnico. A Igreja Católica encomendou ao sacerdote polonês Nicolau Copérnico um estudo detalhado sobre o cosmos para resolver o problema que havia com o calendário Juliano. Copérnico corrigiu o ca-

lendário eliminando 10 dias, e além disso os anos bissextos múltiplos de 100, mas não de 400, foram eliminados. O estudos de Copérnico basearam-se num modelo cosmológico que tinha o Sol no centro do sistema solar, fato que foi considerado como hipótese fisicamente válida.

Outro nome importante para se citar, em se tratando de cosmologia, é o de Galileu Galilei. Ele foi o primeiro a utilizar a invenção do telescópio como ferramenta para analisar os céus. Descobriu que a superfície da lua possuía cavidades e era cheia de vales e montanhas assim como a superfície da Terra. Descobriu também 4 luas de Júpiter, descoberta que ele próprio considerava como a mais importante. Galileu foi um ativo defensor do modelo de Copérnico, questionando e pondo em xeque as idéias do modelo de Ptolomeu, especialmente o fato de esse modelo considerar a Terra como o centro do Universo.

Tycho Brahe, um astrônomo dinamarquês, teve um importante papel realizando precisas e metódicas medições celestes, tendo a disposição um caríssimo observatório para a época, chamado Uranienborg, que no entanto necessitou posteriormente ser substituído por outro que não fosse tão abalado pelo vento. A partir das medições feitas por Tycho Brahe, Johannes Kepler construiu suas três leis sobre o movimento planetário. Ficaram famosas as três leis em que se baseiam o modelo cosmológico de Kepler: os planetas descrevem órbitas eliptica em torno do sol com o sol em um dos focos, o raio vetor que liga um planeta ao sol descreve áreas iguais em tempos iguais, o quadrado do período de revolução de um planeta é proporcionai ao cubo da distância média entre esse planeta e o sol.

Algumas poucas décadas depois de Kepler ter descrito o movimento dos planetas em suas três leis, Isaac Newton formula a sua mecânica celeste, na qual a gravidade é a força responsável por manter todos os corpos celestes em movimento. A lei da gravitação de Newton foi um dos modelos físicos mais bem sucedidos e até os tempos atuais é suficiente para explicar muitos fenômenos celestes. Ao longo dos 200 anos seguintes se tornou continuamente maior a compreensão sobre como as estrelas estão distribuídas ao nosso redor, e a conclusão a que se chegou foi que elas estão distribuídas em um formato de disco, que hoje nós conhecemos como Via Láctea. Os Herschels, no final do século XVII, foram capazes de identificar a estrutura em forma de disco em que está inserida o nosso sistema solar.

Em 1920 um astrônomo americano, de nome Edwin Hubble, descobriu que todas as galáxias ao nosso redor parecem se afastar de nós, e que a velocidade com que elas se

afastam de nós é proporcional a distância que elas estão da Terra.

Chegando na cosmologia moderna, tem-se que o modelo que melhor descreve a evolução do Universo, até o presente momento e de forma quase consensual, é o modelo do Big Bang. Esse modelo tem como uma de suas principais colunas o princípio cosmológico, que considera que nenhum ponto do Universo e nenhuma direção do Universo é privilegiada. Tal princípio é uma grande quebra de paradigma com toda a linha de pensamento mais ou menos geral que haviam nos modelos cosmológicos anteriores, de que alguém tinha um referencial privilegiado, de alguma forma. Esse pensamento continuou vivo ainda até o início do século XX, como pode-se ver na consideração dos Herschels,que achavam que o sistema solar ocupava o centro da nossa galáxia, e depois nas considerações de Shapley, que acreditava que a nossa galáxia ocupava o centro do Universo. O princípio cosmológico só teve suas bases firmemente estabelecidas a partir de 1952 quando foi demonstrado por Baade que a nossa galáxia é uma típica galáxia em meio as outras no Universo. O modelo padrão é apoiado pela observação do desvio da luz, emitida por distantes objetos, para o vermelho, pela captação da radiação cósmica de fundo e pela abundância dos elementos D,$^3He$, $^4He$, e $^7Li$, no Universo.

# 1 ALGUNS TÓPICOS DE COSMOLOGIA

## 1.1 Dados observacionais

A exploração do Universo pelos astrônomos no século XX sofreu uma grande revolução, pois até anteriormente só se obtinham dados observacionais acerca do Universo através da parte visível do espectro eletromagnético. No entanto, no século XX se desenvolveram ferramentas capazes de analisar o Universo levando em conta toda a gama de frequências eletromagnéticas. Além disso, foi possível também analisar os raios cósmicos que chegam até a Terra. Uma terceira ferramenta observacional vem sendo desenvolvida para analisar as ondas gravitacionais, oscilações do próprio espaço-tempo devido a efeitos gravitacionais.

As informações que a parte visível do espectro eletromagnético nos permitiram obter do Universo levaram-nos a descobrir certas estruturas suas. O sistema de medidas usado para trabalhar com as distâncias entre esses objetos é o parsec(pc). Um parsec é a distância que um objeto celeste deve estar da Terra para que sua posição, observada da terra, gire um segundo de arco quando a Terra alcançar posições diametralmente opostas em sua órbita ao redor do sol. Um pc equivale a 3261 anos-luz(1 ano-luz equivale ao espaço percorrido pela luz em 1 ano). A unidade de volume em que se costuma trabalhar é o $Mpc^3$, onde $1Mpc = 10^6 pc$.

Um dos objetos celestes mais conhecidos são as estrelas, como o sol. Elas são responsáveis pela geração da maior parte da luz visível no Universo, graças a fusão nuclear que ocorre no centro delas. As estrelas se agrupam em aglomerados ainda maiores, podendo conter centenas de trilhões de estrelas, que são chamados de galáxias. As galáxias, em geral, possuem um diâmetro que varia de alguns poucos kpc a algumas dezenas de kpc. Por sua vez as galáxias se agrupam em grupos locais, que contém algumas galáxias e que ocupam um volume de cerca de alguns Mpc. Continuando a subir de escala chegam-se

as maiores estruturas conhecidas até hoje: os superclusters de galáxias e os vazios dentro deles. Os superclusters são formados pelo agrupamento de alguns clusters, que por sua vez são agrupamentos bastante densos de, por exemplo, dezenas de milhares de galáxias e que possuem um tamanho da ordem de dezenas de Mpc. Os clusters são a maior estrutura do Universo formada por atração gravitacional e, para formar os superclusters, eles são "ligados"entre si por filamentos de galáxias. Por fim, dentro dos superclusters existem grandes espaços vazios.[3] Acima da escala de 100Mpc, mais ou menos, a distribuição dos corpos celestes pelo Universo aparenta ser feita de forma homogênea, de forma contínua, no sentido de que não existem mais grandes espaços com pouquíssima matéria cósmica, como ocorre nos superclusters, mas sim uma distribuição quase igualitária dessa matéria em todos as regiões do Cosmos. Esse fato é uma grande evidência para apoiar o princípio cosmológico.

O princípio cosmológico, como dito antes, é o pilar central da cosmologia moderna. Ele diz que nós não ocupamos no Universo um lugar privilegiado. Mais precisamente: nenhum local no Universo é privilegiado. Esse princípio, no entanto, é uma aproximação e só é válido se tomarmos regiões muito grandes, como mostrado acima. O princípio cosmológico é uma propriedade do Universo como um todo, sendo quebrada quando se observam fenômenos locais. Ele tem como consequências a homogeneidade e a isotropia do Universo.

A homogeneidade significa que a mesma evidência observacional de algo(densidade de matéria ou energia, por exemplo) pode ser obtida por experimentos feitos em qualquer região do Universo. A isotropia significa que a mesma evidência observacional de algo(densidade de matéria ou energia, por exemplo) pode ser obtida por experimentos feitos analisando qualquer direção do Universo.

Para tornar claro a diferença entre homogeneidade e isotropia note que uma casca esférica possui uma distribuição de massa não homogênea, pois seu interior não contém matéria enquanto que sua superfície contém, mas possui uma distribuição de matéria isotrópica, vista de seu centro, pois todas as direções apresentam a mesma quantidade de massa. Note ainda que uma folha de papel retangular possui uma distribuição de massa homogênea, pois a densidade do papel não muda com a região da folha analisada, mas não possui uma distribuição isotrópica, vista do centro do papel, pois o tamanho e a largura da folha são diferentes.

Na parte do espectro não visível, pode-se citar, como sendo frequências do espectro que são ferramentas importantes para descobertas a respeito da estrutura do Universo:

as microondas, que possibilitaram a descoberta da radiação cósmica de fundo e, assim, a principal evidência que dá suporte ao modelo do Big Bang; as ondas de rádio, úteis para aumentar a resolução de mapas de galáxias muito distantes; a radiação infravermelho, útil para captar informações de galáxias jovens e para captar informações do espectro eletromagnético que conseguem atravessar as nuvens de poeira da nossa galáxia; os raios-x, que são vitais para provar a existência de cluters de galáxias.

Com relação aos raios cósmicos, como fonte de evidências sobre o universo, tem-se que eles são partículas de alta-energia provenientes do espaço, em sua grande maioria prótons, não se sabendo ainda origem deles. Quando tais partículas de alta energia chegam a atmosfera, colidem com átomos presentes nela e então, dessa colisão, se originam uma chuva de partículas secundárias, a maioria múons e neutrinos. Essa ferramenta observacional tem duas grandes virtudes:é um experimento "gratuito"e as energias das partículas que vem do espaço são muito altas, de maneira que não foi conseguido obter tais partículas com tão alta energia aqui na terra com experimentos. No entanto, existem também dois grandes problemas: a taxa com que as partículas atingem os detectores é muito baixa e o experimento é incontrolável, no sentido de que não se pode controlar quando, onde e quais partículas irão ser captadas.[4] Como exemplo do êxito dessa ferramenta, em 1987 uma supernova, a SN1987A, foi descoberta observando os neutrinos, num laboratório em Tóquio.[2]

Por fim, há ainda a possibilidade de se obter informações acerca do cosmos a partir das ondas gravitacionais. Elas são produzidas por massas aceleradas de maneira não esfericamente simétrica, transportando energia. Quando a radiação gravitacional, ou onda gravitacional, se propaga, ela gera deformações na curvatura do espaço-tempo, através de um movimento oscilatório alongando e espremendo o mesmo, de uma maneira análoga ao que acontece no efeito Tidal lunar. As ondas gravitacionais viajam a velocidade da luz e atravessam inalteradas a matéria. A detecção das ondas gravitacionais é buscada hoje em dia por vários laboratórios espalhados pelo mundo, como por exemplo o Virgo na Itália e o LIGO nos E.U.A. Esses dois laboratórios procuram perceber as ondas gravitacionais medindo diferenças de frequência existentes entre feixes de laser inicialmente coerentes partindo de uma mesma posição mas sendo atirados em direções ortogonais que contém no final espelhos que refletirão esses raios de volta para o mesmo ponto inicial. A mudança de frequência desses feixes de laser indicaria o esticamento da trajetória de um e a respectiva contração da trajetória do outro, que seriam explicadas pela passagem de uma onda gravitacional [5]. Evidências observacionais da perda de energia de um pulsar binário apoiam a existência dessas ondas, que ainda permanecem sem evidência experimental.

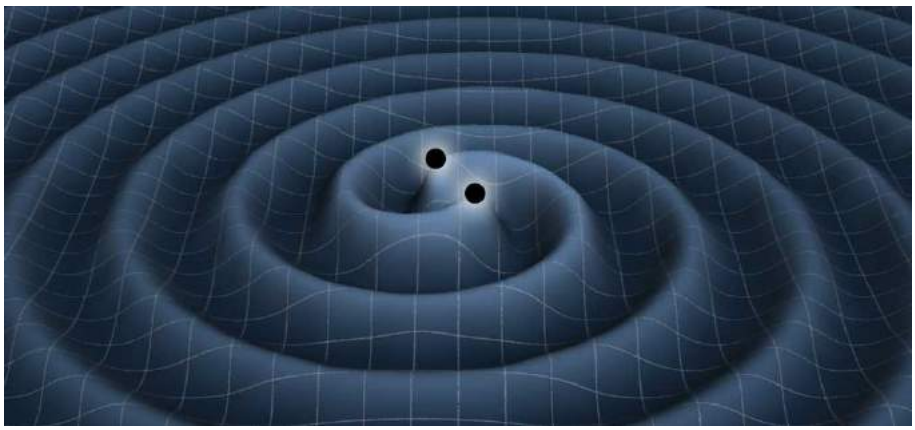

Figura 1: Ondas gravitacionais produzidas por um pulsar binário.[29]

A detecção de ondas gravitacionais é uma forma que temos de acessar informações a respeito do Universo quando havia-se passado somente alguns instantes após o Big Bang, coisa que a análise do espectro eletromagnético não nos permite fazer, dado que a radiação eltromagnética que chega até nós hoje só foi gerado após cerca de 300.000 anos após o Big Bang, devido aos efeitos do período da recombinação.

## 1.2 Equações fundamentais da Cosmologia

A principal equação da cosmologia é a chamada equação de Friedmann, que relaciona a taxa de expansão do Univero com a sua curvatura e com o material existente no mesmo. A dedução dessa equação de maneira rigorosa precisa ser feita utilizando a relatividade geral. No entanto, é bastante interessante ver que, embora não totalmente rigorosa, há uma dedução dessa equação utilizando apenas a gravitação de Newton. Será feita então então essa dedução, que é mais acessível aos leitores que estiverem fazendo uma primeira leitura sobre o tema.Posteriormente será esboçado a dedução usando relatividade geral.

Para deduzir a equação de Friedmann precisaremos achar o valor da energia cinética e da energia potencial de uma partícula teste dentro de um fluido infinito com densidade de massa $\rho$, usar a conservação da energia e, por fim, mudar para as coordenadas comóveis.

Calculemos então, a força de atração existente entre uma partícula de teste contida no fluido, de massa m, distante uma distância r de um ponto fixo P. Pela hipótese da homogeneidade e da isotropia, o Universo se parece o mesmo não importa para onde olhemos, então se pode tomar qualquer ponto como sendo o centro do Universo. Nesse caso, tomemos o ponto P como o centro. Pelo teorema de Newton, a força atrativa que a partícula teste irá sofrer é devido somente a parte do fluido que está contida dentro de

uma esfera de raio r centrada no ponto P. Logo, a força de atração sofrida pela partícula teste de massa m é dada por:

$$(F) = (\frac{GMm}{(r)^2}) = \frac{G(\frac{4\pi(r^3)}{3})m}{r^2} = \frac{4\pi G\rho rm}{3}.$$

A energia potencial gravitacional da partícula teste é dada por:

$$V = -(\frac{GMm}{r}) = -(\frac{4\pi G\rho r^2 m}{3}).$$

A energia cinética da partícula de teste, é dada facilmente por:

$$T = \frac{m((\dot{r})^2)}{2}.$$

A energia total da partícula teste é dada por:

$$U = T + V = \frac{m(\dot{r})^2}{2} - \frac{4\pi G\rho(r^2)m}{3}.$$

Agora é necessário fazer a substituição de coordenadas. Existem dois sistemas de coordenadas que precisam ser explicados agora: as coordenadas comóveis e as coordenadas físicas. O Universo está em expansão, portanto dois pontos que distam uma certa distância agora, no futuro estarão mais afastados. É então conveniente definir um sistema de coordenadas em que as posições dos corpos dentro do Universo não sejam afetadas por causa da expansão. A esse sistema de coordenadas damos o nome de comóveis. As coordenadas físicas são o sistema de coordenadas de um observador situado fora do Universo, que observa o movimento dos corpos celestes. Ele mede portanto a distância real entre os corpos. O sistema de coordenadas utilizado até agora foi o físico. É importante agora relacionar os dois sistemas de coordenadas para que possamos reescrever a equação da energia total da partícula de teste em função das coordenadas comóveis. A relação entre os dois sistemas, sendo $\vec{r}$ a distância real e sendo $\vec{x}$ a distância comóvel, é dada por:

$$\vec{r} = a(t)\vec{x}. \tag{1.1}$$

O termo $a(t)$ é chamado **fator de escala do Universo**. Ele mede a taxa de expansão Universal, e é um parâmetro dependente somente do tempo devido a hipótese da homogeneidade. Ele nos dá a informação de quanto a separação física ,real, entre dois corpos está aumentando, coisa que não podemos obter observando as coordenadas comóveis pois nelas os corpos ocupam posições fixas.

Para assegurar a compreensão da distinção entre coordenadas físicas e comóveis, basta dizer que as coordenadas comóveis são como que uma grade na qual são marcadas as posições dos corpos celestes. Imaginemos agora que essa grade é feita de elástico e possa se distender. Se marcamos dois pontos separados por um quadrado apenas da grade, mesmo que a grade seja esticada, e consequentemente a distância real(coordenadas físicas) desses dois pontos aumente, eles permanecerão separados por apenas um quadrado da grade. O que aconteceu foi que o tamanho do quadrado aumentou, mas como o que importa para as coordenadas comóveis é o número de quadrados, a distância será a mesma.

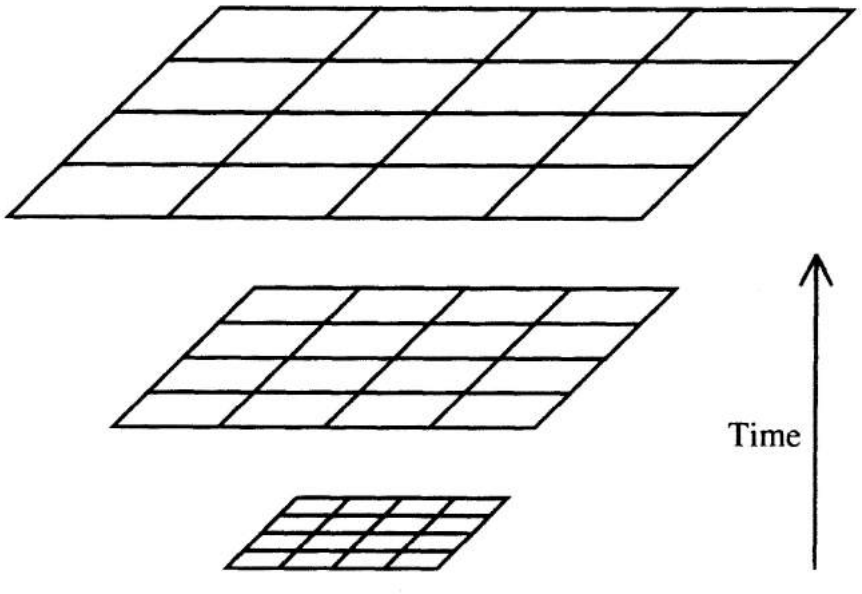


Figura 2: Sistema de coordenadas comóveis em expansão.[30]

Voltando as contas, nos atentemos ao fato de que os objetos celestes descritos nas coordenadas comóveis são fixos e portanto: $\vec{\dot{x}} = 0$. Logo:

$$r = ax \Longrightarrow \dot{r} = \dot{a}x.$$

Fazendo a substituição de $r$ por $x$ na equação da energia total, e multiplicando tudo por $\frac{2U}{m(a^2)(x^2)}$, temos:

$$\frac{2U}{m(a^2)(x^2)} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{8\pi G\rho}{3}.$$

Chamando $k = \frac{-2U}{mc^2x^2}$ podemos reescrever a **equação de Friedmann** como:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{a^2}. \tag{1.2}$$

A constante $k$ é muito importante em Cosmologia. Ela se chama constante de curvatura, e nos dá informações acerca da geometria do Universo.

Convém refletir agora um pouco mais sobre o significado da expansão do Universo. A expansão do Universo só é sentida em larguíssima escala, na dos Mpc, pois a hipótese teórica assumida para construir a equação que possibilita descrever a expansão foi a de um Universo que é um fluido com uma distribuição de massa contínua, e somente em muito larga escala a distribuição de massa no Universo se aproxima dessa hipótese(a da homogeneidade). Com isso, vemos que não faz sentido afirmar que a distância entre dois objetos na Terra está aumentando porque o Universo está em expansão; pois estaríamos extrapolando o regime em que falar de expansão é válido.

Ainda continuando nossa reflexão, temos que a expansão, em larga escala, é interpretada como uma expansão do próprio espaço. Um conhecido resultado, de que se falará mais adiante, diz que a velocidade de afastamento das galáxias do Universo com relação a nós é proporcional a distância que nos separa. Com isso, se tomarmos galáxias muito distantes de nós elas pareceriam se afastar mais rápido do que a velocidade da luz, violando a relatividade especial. É verdade que elas parecerão se mover para longe de nós com uma velocidade superior a da luz. No entanto, o que causa isso não é a velocidade relativa de afastamento entre elas, que poderíamos obter considerando as coordenadas comóveis, mas é a expansão do próprio espaço que pode gerar a impressão de uma velocidade superior a da luz.

Existe uma segunda equação muito importante na cosmologia que iremos, sem tanto rigor, deduzir: é a equação do fluido. Ela é a responsável por nos informar como a densidade de matéria contida no Universo se comporta com o tempo. É somente com essa informação que a equação de Friedmann pode ser resolvida.

Aplicando a primeira lei da termodinâmica a um volume V, com raio unitário nas coordenadas comóveis, mas que pode se expandir, temos:

$$dE + pdV = TdS.$$

Se o volume V tem raio unitário ans coordenadas comóveis, então terá raio a nas coordenadas físicas. Logo a energia armazenada no volume V, é:

$$E = mc^2.$$

Derivando com relação ao tempo e usando a regra da cadeia, temos:

$$\frac{dE}{dt} = 4\pi a^2 \rho c^2 (\frac{da}{dt}) + (\frac{4}{3})\pi a^3 c^2 (\frac{d\rho}{dt}).$$

A variação do volume dessa esfera nas coordenadas físicas é:

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi a^2 (\frac{da}{dt}).$$

Derivando com relação ao tempo, a equação da primeira lei, $dE + pdV = TdS$, temos:

$$\frac{dE}{dt} + \frac{dp}{dt}dV + p\frac{dV}{dt} = \frac{dT}{dt}dS + T\frac{dS}{dt}.$$

Usando que $p$ é constante no tempo, só dependendo do tipo de material que preencherá aquele volume, e usando que a expansão é reversível, portanto $dS = 0$ e então $\frac{dS}{dt} = 0$, temos:

$$\frac{dE}{dt} + p\frac{dV}{dt} = T\frac{dS}{dt} = 0.$$

Substituindo os resultados obtidos para $\frac{dE}{dt}$ e para $\frac{dV}{dt}$ na última equação e abrindo as contas, tem-se:

$$\dot{\rho} + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0. \tag{1.3}$$

que é a **equação do fluido**.

Essa dedução merece um comentário extra. O fato de se ter podido deduzir a equação do fluido somente a partir da primeira lei da termodinâmica mostra que a entropia é conservada nos modelos de universo que assumem como válido o princípio cosmológico, ou seja, assumem como válidas as hipóteses da perfeita homogeneidade e isotropia do Universo. Mas se sabe, pela segunda lei da termodinâmica, que a entropia do Universo aumenta; então em que a realidade difere desse modelo para gerar esse aumento de entropia? Ela difere nas pequenas flutuações que o Universo tem para deixar de ser perfeitamente isotrópico e homogêneo.

Para se estar apto a resolver a equação de Friedmann, ainda é necessário mais uma informação: qual é a pressão p gerada pelo material do qual o Universo é composto? Para se ter essa resposta é necessária uma **equação de estado**, ou seja, uma equação que relacione p com $\rho$. Isso é feito especificando o tipo de material com o qual o modelo de Universo considerado será preenchido.

Há uma terceira equação que é deduzida diretamente a partir da equação de Friedmann e da equação do fluido e que permite calcular mais diretamente o fator de escala. Derivando a equação de Friedmann com relação ao tempo:

$$2(\tfrac{\dot{a}}{a})(\tfrac{\ddot{a}}{a} - \tfrac{\dot{a}}{a}^2) = \tfrac{8\pi G}{3}(-3(\tfrac{\dot{a}}{a})(\rho + \tfrac{p}{c^2})) + 2kc^2(\tfrac{\dot{a}}{a})(\tfrac{1}{a^2})$$

$$(\tfrac{\ddot{a}}{a} - (\tfrac{\dot{a}}{a})) = -4\pi G(\rho + \tfrac{p}{c^2}) + \tfrac{kc^2}{a^2}$$

Usando novamente a equação de Friedmann, mas desta vez apenas para substituir o termo $\frac{\dot{a}}{a}$:

$$((\tfrac{\ddot{a}}{a}) - \tfrac{8\pi G\rho}{3} + \tfrac{k}{c^2}) = -4\pi G(\rho + \tfrac{p}{c^2} + \tfrac{kc^2}{a^2});$$

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right). \tag{1.4}$$

A última equação é a **equação da aceleração**. Observando essa equação pode-se ver com maior clareza que a ausência de pressão aumenta a força de atração efetiva(na direção de conter a expansão) e, portanto, diminui a taxa de expansão.

Será demonstrado agora a equação do fluido de maneira rigorosa, utilizando a relatividade geral. Posteriormente será apenas esboçada, por ser muito extensa, a dedução da equação de Friedmann e da aceleração partindo das equações de Einstein usando a métrica de FRW(sobre o significado de métrica ver explicação adiante).

A relatividade geral é uma teoria cujo ferramental matemático se baseia no cálculo tensorial. Tensores são quantidades matemáticas que são invariantes sob mundanças de coordenadas. É extremamente importante para uma teoria física que os resultados previstos por ela independam do sistema de coordenadas utilizado para fazer a análise do fenômeno físico. O cálculo tensorial nos dá essa possibilidade. Para que um objeto matemático seja um tensor, é preciso que cada elemento desse objeto se transforme, segundo uma regra bem determinada, sob uma mudança de coordenadas. Existem tensores contravariantes, covariante e mistos, conforme a maneira de os elementos desse tensor dado se transformar. Vetores são tensores de rank 1, e escalares são tensores de rank 0.

Outro conceito importante é o de métrica. Comecemos então com o seguinte: sabe-se que um espaço vetorial é definido como o conjunto de vetores que obedecem a determinadas regras bem definidas. Um espaço vetorial, ou tensorial, que possue também uma regra que assinala distâncias entre pares de pontos vizinhos, não necessariamente infinitesimalmente próximos, é chamado também de espaço métrico. Dá-se o nome de métrica a regra que assinala o valor da distância entre dois dados pontos. Se chama espaço pseudo-Riemanniano um espaço onde existe uma forma quadrática diferencial $ds^2$ que obedeça a regra: $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ onde cada fator $g$ da soma que está implícita é uma função geral da

posição e está sujeito somente a restrição de que o determinante da matriz formada pelos elementos $g_{ij}$ , onde i é a linha e j a coluna, seja não nulo. Se impormos a condição de que $ds^2 > 0$, então esse espaço é chamado estritamente Riemanniano. Um espaço Euclideano, aquele com o qual a nossa intuição está acostumada, possui por exemplo a métrica, para o caso com N dimensões espacias: $ds^2 = (dx^1)^2 + ... + (dx^N)^2$. Impondo a condição de que $ds^2$ deve ser invariante sob uma mudança de coordenadas e usando álgebra tensorial básica, se estivermos falando de um espaço tensorial, se chega a conclusão de que a matriz formada pelos elemetos $g_{ij}$ é um tensor, ou seja, cada um desses elementos se transforma sob uma mudança de coordenadas segundo uma regra bem definida, coerente com a definição de tensor. Chamamos $g_{ij}$ de tensor métrico. Por fim, cada superfície, incluindo também as variedades, possui uma métrica que a caracteriza.

Para finalizar essa introdução matemática, deixando que outras ferramentas sejam apresentadas conforme seu uso, mensionemos o que é uma variedade. A idéia de variedade é uma generalização da idéia de superfície, onde pode-se agora falar de "superfície"sem necessitar fazer alusão alguma ao espaço ambiente em que aquela variedade poderia vir a estar, e portanto dispensando totalmente a necessidade existir algum espaço ambiente. Pode-se representar uma superfície independente do espaço ambiente como uma variedade, mas nem toda variedade pode ser vista como uma superfície, pois existem variedades de mais ou menos dimensões, como a linhas que são variedades unidimensionais.

Voltando a física, temos que os possíveis constituintes do Universo que serão contabilizados nos modelos cosmológicos aqui, são todos exemplos de um fluido perfeito, pois não há viscosidade e nem fluxo de calor no fluido. Para fluidos perfeitos o **tensor momento-energia** $T^{\mu}_{\nu}$, que contém as informações a respeito das fontes de campo gravitacional, é:

$$T^{\mu}_{\nu} = diag(-\rho, p, p, p); \tag{1.5}$$

onde $\rho$ é a densidade de massa e $p$ a pressão. Usando o a **conservação da energia na relatividade geral**, temos:

$$T^{\mu}_{\nu;\mu} = 0; \tag{1.6}$$

que corresponde a:

$$T^{\mu}_{\nu,\mu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha,\mu} T^{\alpha}_{\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} = 0; \tag{1.7}$$

para $\nu = 0, 1, 2, 3$.

Na relatividade geral proposta por Einstein, os espaços não possuem torção, e portanto a **conexão é simétrica**. A conexão é um coeficiente que incorpora informações a respeito

da curvatura do espaço e surge quando se deseja realizar um deslocamento paralelo, ir de um ponto a outro de uma superfície andando sobre a superfície seguindo a curva que liga esses dois pontos e possui menor comprimento. A fórmula da conexão simétrica, também chamada de símbolos de Cristoffel, é dada por[25]:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(g_{\beta\nu,\mu} + g_{\mu\beta,\nu} - g_{\mu\nu,\beta}); \tag{1.8}$$

onde $g$ é a métrica do espaço-tempo.

O espaço-tempo da relatividade tanto geral quanto especial é descrito por uma variedade quadridimensional. Deseja-se, no entanto, descobrir qual dessas variedades podem comportar a hipótese da homogeneidade e da isotropia do espaço. Friedmann, Robertson e Walker propuseram um conjunto de variedades, isto é, propuseram uma métrica, que é capaz disso. A formulação mais geral da métrica que está de acordo o princípio cosmológico é:

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a^2(t)[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d(\theta)^2 + sin^2(\theta)d(\phi)^2)]. \tag{1.9}$$

Ela pode ser escrita também como:

$$g_{\mu\nu} = diag(-c^2, \frac{a^2}{1-kr^2}, a^2r^2, a^2r^2sen^2\theta). \tag{1.10}$$

Precisa-se achar também a métrica contravariante. Ela é simplesmente a matriz inversa da matriz correspondente a métrica covariante. Como a matriz da métrica covariante é diagonal, a matriz inversa é uma matriz também diagonal cujos elementos da diagonal principal são o inverso dos elementos da matriz original. Logo:

$$g^{\mu\nu} = diag(-\tfrac{1}{c^2}, \tfrac{1-kr^2}{a^2}, \tfrac{1}{a^2r^2}, \tfrac{1}{a^2r^2sen^2\theta}).$$

Voltando a equação da conservação da energia, temos que nela estão contidas 4 equações, uma para cada valor de $\nu(\nu = 0, 1, 2, 3)$. No entanto, somente $\nu = 0$ nos leva a uma equação não trivial, isto é, diferente de $0 = 0$. Então, desenvolvendo essa equação para $\nu = 0$, tem-se:

$$T^{\mu}_{0,\mu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha,\mu}T^{\alpha}_{0} - \Gamma^{\alpha}_{0\mu}T^{\mu}_{\alpha} = 0.$$

Note que dois índices repetidos indicam soma sobre eles, indo de 0 a 3. Abrindo um pouco o somatório, tem-se:

$$T^{0}_{0,0} + (T^{1}_{0,1} + T^{2}_{0,2} + T^{3}_{0,3}) + \Gamma^{\mu}_{0\mu}T^{0}_{0} - \Gamma^{\mu}_{0\mu}T^{\mu}_{\mu} = 0.$$

Os termos entre parênteses são todos nulos, pois o tensor momento-energia é diagonal. Logo,tem-se

$$T^0_{0,0} + \Gamma^\mu_{0\mu} T^0_0 - \Gamma^\mu_{0\mu} T^\mu_\mu = 0.$$

Então precisa-se calcular as seguintes conexões: $\Gamma^0_{00}$, $\Gamma^1_{01}$, $\Gamma^2_{02}$, $\Gamma^3_{03}$;

$$\Gamma^1_{01} = \tfrac{1}{2} g^{1\beta}(g_{\beta 1,0} + g_{0\beta,1} - g_{01,\beta});$$

$g_{01,\beta}$; que é zero, pois a métrica é diagonal. Então: $\Gamma^1_{01} = \frac{1}{2} g^{1(\beta)}(g_{(\beta)1,0} + g_{0\beta,1})$. Na soma em $\beta$ apenas os termos com $\beta = 1$ serão não nulos pois a métrica é diagonal. Logo:

$$\Gamma^1_{01} = \tfrac{1}{2} g^{11}(g_{11,0} + g_{01,1}) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1-kr^2}{a^2}) \tfrac{\partial(\frac{a^2}{1-kr^2})}{\partial t} = \tfrac{\dot{a}}{a}.$$

De maneira semelhante, tem-se:

$$\Gamma^2_{02} = \tfrac{1}{2} g^{2\beta}(g_{\beta 2,0} + g_{0\beta,2} - g_{02,\beta});$$
$$\Gamma^2_{02} = \tfrac{1}{2} g^{22}(g_{22,0} + g_{02,2} - g_{02,2});$$
$$\Gamma^2_{02} = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{a^2 r^2}(\tfrac{\partial(a^2 r^2)}{\partial t})) = \tfrac{\dot{a}}{a};$$

$$\Gamma^3_{03} = \tfrac{1}{2} g^{3\beta}(g_{\beta 3,0} + g_{0\beta,3} - g_{03,\beta});$$
$$\Gamma^3_{03} = \tfrac{1}{2} g^{33}(g_{33,0} + g_{03,3} - g_{03,3});$$
$$\Gamma^3_{03} = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{a^2 r^2 sen^2\theta}) \tfrac{\partial(a^2 r^2 sen^2\theta)}{\partial t} = \tfrac{\dot{a}}{a};$$

$$\Gamma^0_{00} = \tfrac{1}{2} g^{0(\beta)}(g_{\beta 0,0} + g_{0\beta,0} - g_{00,\beta});$$

$$\Gamma^0_{00} = \tfrac{1}{2} g^{00}(g_{00,0} + g_{00,0} - g_{00,0}) = 0.$$

Então, substituindo na equação da conservação da energia as variáveis encontradas:

$$T^0_{0,0} + 3\tfrac{\dot{a}}{a}[T^0_0] - \tfrac{\dot{a}}{a}[T^1_1 + T^2_2 + T^3_3] = 0;$$
$$\tfrac{\partial(-(\rho)c^2)}{\partial t} + 3\tfrac{\dot{a}}{a}[-(\rho)c^2] - (\tfrac{\dot{a}}{a})(3p) = 0;$$
$$\dot{\rho} + 3\tfrac{\dot{a}}{a}[\rho + \tfrac{3p}{c^2}] = 0;$$

que é a equação do fluido.

A equação de campo de Einstein é dada por:

$$R^\mu_\nu - \frac{1}{2} g^\mu_\nu R = \frac{8(\pi G)}{c^4} T^\mu_\nu; \tag{1.11}$$

onde $R^{\mu}_{\nu}$ é chamado **tensor de Ricci**, e $R$ é chamado **escalar de Ricci**. Ambas são quantidades que carregam informações sobre a geometria do espaço. O tensor de Ricci é dado, em função da métrica, por:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda,\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\sigma}; \tag{1.12}$$

O escalar chamado escalar de Ricci também guarda informações a respeito da geometria. Ele é dado por:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \tag{1.13}$$

Podemos baixar ou levantar índices através da relação:

$$R^{\mu}_{\nu} = R_{\lambda\nu}g^{\mu\lambda}. \tag{1.14}$$

Temos também que, com a métrica de FRW:

$$g^{\mu}_{\nu} = g_{\nu\lambda}g^{\nu\lambda} = g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}; \tag{1.15}$$

que é a matriz identidade. Para achar as equações de Friedmann e da aceleração, basta agora substituir o escalar de curvatura, o tensor de Ricci, a métrica FRW e o tensor energia-momento, considerando que ele é diagonal, na equação de campo de Einstein. A parte temporal resultará exatamente na equaçao de Friedmann. A parte espacial resultará em uma expressão que, após alguns rearranjos, resultará na equação da aceleração.

## 1.3 As geometrias do Universo.

Como comentado anteriormente, a constante $k$ presente na equação de Friedmann, está relacionada com a geometria do Universo. Existem três possíveis valores para a constante $k$: positivo, nulo negativo. Todos esses valores resultam em geometrias consistentes com a hipótese da isotropia e homogeneidade.

Se $k$ for nulo, a geometria da malha espaço-tempo será **plana**. Essa geometria de Universo possui as seguintes propriedades: a soma dos ângulos de um triângulo é 180º, a circunferência de um círculo de raio r mede $2\pi r$. Nesse caso o Universo deve ser infinito em extensão, para não violar o princípio cosmológico. Caso a topologia do Universo seja não-trivial, e a malha espaço-tempo tenha a forma de, por exemplo, um toro, o Universo pode ser finito em volume embora os habitantes da superfície possam andar extensões infinitas dando voltas sobre uma curva no toro. Um Universo assim é chamado de Universo plano.

Se $k$ for positivo, o universo possuirá uma **geometria esférica**. A soma dos ângulos de um triângulo desenhado sobre uma superfície esférica é maior que 180º. A circunferência de um círculo de raio $r$ é menor que $2\pi r$. Esse Universo possui tamanho finito porém sem bordas. Uma pessoa viajando sobre ele em linha reta irá, eventualmente, voltar ao seu ponto de partida vindo na direção oposta a direção de partida, da mesma forma que uma pessoa saindo do polo norte retornará a ele pela direção contrária a que saiu.

Para se compreender o efeito disso, é preciso pensar o Universo como uma hipersuperfície tridimensional que se curva num espaço quadridimensional, da mesma forma que uma superfície bidimensional se curva dentro do espaço tridimensional. Um Universo assim é chamado de Universo fechado.

Se $k$ for negativo , a geometria será **hiperbólica**. Nela a soma dos ângulos de um triângulo valem menos que 180º e a circunferência de um círculo de raio $r$ vale menos que $2\pi r$. Nessa geometria, a noção de retas paralelas leva em retas divergentes, que nunca se encontram, ou seja o axioma de Euclides sobre as retas paralelas, a de que elas se encontram no infinito, é quebrado. Esse Universo é também infinito em extensão, sendo conhecido como Universo aberto.

## 1.4 Parâmetros Observacionais

É uma prática comum em cosmologia definir qual modelo descreve melhor o nosso Universo observando o quão capazes esses modelos são de prever com exatidão certas constantes ou parâmetros que podem-se observar no Universo. Nessa seção são apresentados alguns desses parâmetros. O primeiro parâmetro que deve se obter de um modelo para ser comparado com os dados observacionais é a **constante de Hubble**. Edwin Hubble descobriu no início do século XX que quanto mais uma objeto celeste está longe da Terra, mais rápido ele se afasta da mesma. A equação que descreve isso é a **Lei de Hubble**:

$$v = H_0 r; \tag{1.16}$$

onde $H_0$ é a chamada constante de Hubble. Essa constante diz o quanto o Universo está se expandindo; quanto maior o valor da constante, maior a taxa de expansão, e vice-versa. A obtenção do valor dessa constante observacionalmente possui dificuldades. As galáxias estão se afastando de nós com uma velocidade dada pela Lei de Hubble, mas como o Universo não é perfeitamente homogêneo e isotrópico as galáxias possuem também velocidades extras, além da velocidade prevista pela Lei de Hubble:as velocidades

típicas. Para se calcular a constante de Hubble é necessário saber o valor da velocidade típica da galáxia observada, no entanto essa informação não é acessível. Então observam-se galáxias muito distante de maneira que a velocidade devido a Lei de Hubble torne a velocidade típica, que possui um valor randomicamente distribuído entre as galáxias, se torne desprezível. Entretanto, a observação de galáxias muito distante é problemática pois os métodos que se possuem para observá-las não permitem ainda resultados com uma grande precisão. O valor obtido para a constante de Hubble pelo satélite Planck, nesse ano, é de:$67 \pm 1,2 Kms^{-1}Mpc^{-1}$ [15]. A velocidade de afastamento das galáxias, $v$, pode ser escrita como: $v = \frac{d\vec{r}}{dt}$, onde $\vec{r}$ são as coordenadas físicas. A mesma expressão pode ser reescrita como:

$$v = \frac{|\dot{\vec{r}}|}{|\vec{r}|}\vec{r} = \frac{\dot{a}\vec{x}}{a\vec{x}}\vec{r} = \frac{\dot{a}}{a}\vec{r}.$$

Então a constante de Hubble pode ser identificada como: $H = \frac{\dot{a}}{a}$. O valor da constante de Hubble pode variar com o tempo. Outro parâmetro importante é o **parâmetro de densidade**. Ele mede o quanto a densidade do Universo está acima, abaixo ou é igual a **densidade crítica**:

$$\Omega(t) \equiv \frac{\rho}{\rho_c}. \tag{1.17}$$

A densidade crítica é a densidade que o Universo precisaria ter para tornar sua geometria plana. Usando a equação de Friedmann, temos:

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{a^2};$$

fazendo $k = 0$, descobre-se a densidade crítica:

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2}{8\pi G}. \tag{1.18}$$

O valor da densidade crítica, em $kgm^{-3}$, usando um valor aproximado do valor da constante de Hubble obtida atualmente, é:$\rho_c(t_0) = 1,88h^2.10^{-26}$. Esse valor parece pequeno comparado a densidade da água por exemplo($10^3 kgm^{-3}$), mas se reescrito em unidades mais adequadas a análise cosmológica, torna-se:

$$\rho_c(t_0) = 2,78h^{-1}.10^{11}M_{\odot}/(h^{-1}Mpc)^3;$$

onde $M_{\odot}$ representa a massa do sol. Agora essa densidade demonstra-se ser uma densidade razoável em termos cosmológicos, já que $10^{11}$ ou $10^{12}$ massas solares é a massa de

uma típica galáxia e 1Mpc é a típica separação entre uma galáxia e outra. Reescrevendo agora a equação de Friedmann com as novas variáveis tem-se:

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}. \tag{1.19}$$

Pode-se definir ainda, para simplificar ainda mais a equação de Friedmann um **parâmetro de curvatura** dado por:

$$\Omega_k \equiv -\frac{k}{a^2 H^2}. \tag{1.20}$$

Assim a equação de Friedmann, torna-se:

$$\Omega + \Omega_k = 1. \tag{1.21}$$

O caso $\Omega = 1$ é muito importante e é chamado de **Universo de densidade crítica**. Nesse caso o valor de $k$ é nulo e portanto o Universo é plano. Mas como $k$ é um número constante fixo, 0 nesse caso específico, então k não irá variar com o tempo. Logo, uma vez que $\Omega = 1$ ela sempre permanecerá igual a 1, independente do tipo de constituinte desse universo.

Através dessa equação vê-se também que, com as hipóteses da homogeneidade e da isotropia adotadas, que fazem com que as fontes de curvatura do espaço se comportem como um fluido perfeito [24], no caso $\Omega$ diferente de 1, a constante $k$ irá mudar com o tempo, pois $H$ e $a$ são funções do tempo. Em outras palavras, um Universo com geometria esférica poderia tornar-se plano com o tempo, ou vice-versa. No entanto, se assumirmos outras hipóteses a respeito dos constituintes do universo, se obterá um outro tensor $T$ e se gerará uma outra equação, análoga a de Friedmann, na qual a dependência do $k$ com o tempo ainda precisará ser analisada.

Há também um parâmetro que descreve ainda a taxa de variação da velocidade de expansão do Universo. Ele é chamado de **parâmetro de desaceleração** e é definido, para o tempo presente, por:

$$q_0 = -\frac{\ddot{a}(t_0)}{a(t_0)}\frac{1}{H_0^2} = -\frac{a(t_0)\ddot{a}(t_o)}{\dot{a}^2(t_0)}. \tag{1.22}$$

O parâmetro de desaceleração está relacionado, pela equação da aceleração, com o parâmetro de densidade, com o parâmetro de Hubble e com o tipo de matéria que se postulará como sendo os componentes do Universo. Dessa maneira, pode-se avaliar as hipóteses sobre os componentes do universo(matéria, radiação) avaliando esses três parâmetros.

# 2 MODELO COSMOLÓGICO PADRÃO E MODELOS ALTERNATIVOS COM PLANCK 2013

## 2.1 Modelos cosmológicos usando métrica FRW

A equação de Friedmann e a equação do fluido ainda não são suficientes para se obter uma expressão de $\rho(t)$ e de $a(t)$. É necessário mais uma informação. Essa informação vem de uma **equação de estado**: uma equação que relaciona $\rho$ com $p$.

Será assumido que o Universo é composto somente de matéria(ou poeira) e radiação. Por matéria(ou poeira) entende-se qualquer tipo de material que não exerça pressão. A matéria que será tratada aqui é **não-relativística**, não está se movendo com velocidades próximas a da luz. Por radiação, entendem-se as partículas de luz ou qualquer partícula que se mova próximo da velocidade da luz. A radiação exerce uma pressão, devido a energia cinética das partículas, dada por:

$$p = \frac{\rho c^2}{3}. \tag{2.1}$$

Resolvendo agora a equação do fluido para um Universo composto somente por matéria, tem-se:

$$\dot{\rho} + 3(\tfrac{\dot{a}}{a})(\rho + \tfrac{p}{c^2}) = 0;\ \dot{\rho} + 3(\tfrac{\dot{a}}{a})(\rho) = 0.$$

Essa equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\tfrac{1}{a^3}\tfrac{d(\rho a^3)}{dt};\ \tfrac{d(\rho a^3)}{dt} = 0.$$

Então, temos que:$\rho \propto \frac{1}{a^3}$. Reescalonando a(t) para que $a(t_0) = 1$, onde $a(t_0)$ é o fator de escala no tempo atual, tem-se: $\rho = \frac{\rho_0}{a^3}$. O fato de a densidade de matéria diminuir com

o cubo do fator de escala é esperado, pois a densidade de matéria depende do volume, logo é previsível que se cada direção aumente por um fator x, o volume aumentará por um fator $x^3$ e consequentemente a densidade diminuirá por um fator $\frac{1}{x^3}$.

Agora precisa-se inserir a expressão de $\rho$ em função de $a$, que foi e encontrada, na equação de Friedmann, para se achar $a(t)$ e posteriormente substituir-se novamente $a(t)$ na equação $\rho = \frac{\rho_0}{a^3}$, para encontrar $\rho(t)$. Inserindo $\rho = \frac{\rho_0}{a^3}$, na equação de Friedmann, e considerando o caso, $k = 0$:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G\rho_0}{3}\frac{1}{a}.$$

Resolvendo essa equação diferencial, por exemplo, chutando uma solução do tipo $t^q$, tem-se:

$$a(t) = (\frac{t}{t_0})^{\frac{2}{3}} \qquad ; \qquad \rho(t) = \frac{\rho_0 t_0^2}{t^2}$$

Por fim, para este modelo, a taxa de expansão do Universo é dada por:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t}. \tag{2.2}$$

Então, nesse modelo o Universo se expande para sempre, mas com uma expansão se tornando cada vez menor com o tempo.

Resolvendo agora a equação do fluido para um universo composto somente de radiação, usando $p = \frac{\rho c^2}{3}$, tem-se:

$$\dot{\rho} + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0.$$

Multiplicando tudo por $a^4$, e usando a mesma técnica utilizada anteriormente para achar $\rho$ em função de $a(t)$, tem-se:

$$\rho \propto \frac{1}{a^4} \longrightarrow \rho(t) = \frac{\rho_0}{a^4} = \frac{\rho_0 t_0^2}{t^2}.$$

A expansão do Universo nesse modelo é menos acelerada que no modelo de Universo preenchido somente por matéria. Isso se deve ao efeito da pressão que aumenta a desaceleração. O fato de a densidade de energia cair com a quarta potência de $a$ é devido devido a ela cair com a terceira potência devido ao aumento do volume, e também ser inversamente proporcional ao aumento do comprimento de onda, pois $E = \frac{hc}{\lambda}$.

Tratando agora de um modelo de Universo que seja composto tanto por matéria quanto por radiação, existirão duas equações do fluido, uma somente envolvendo densidade

de matéria, e a outra somente envolvendo densidade de energia. No entanto só há uma equação de Friedmann, na qual $\rho$ será dado como: $\rho = \rho_{mat} + \rho_{rad}$. Esse sistema de equações pode ser resolvido, no entanto, considerarei que apenas uma das densidades é relevante na equação de Friedmann, ou seja, considerarei os casos:$\rho_{mat} \gg \rho_{rad}$ e $\rho_{rad} \gg \rho_{mat}$.

Para o primeiro caso, tem-se que as relações entre $\rho_{mat}$ ,$\rho_{rad}$ com $a(t)$ são: $\rho_{rad} \propto \frac{1}{a^4}$ ; $\rho_{mat} \propto \frac{1}{a^3}$. Da equação de Friedmann, considerando apenas a densidade de matéria, obtém-se: $a(t) \propto t^{\frac{2}{3}}$, logo:

$$\rho_{mat} \propto \frac{1}{a^3} \propto \frac{1}{t^2};$$
$$\rho_{rad} \propto \frac{1}{a^4} \propto \frac{1}{t^{\frac{8}{3}}}.$$

Para o segundo caso, tem-se que as relações entre $\rho_{mat}$ ,$\rho_{rad}$ com $a(t)$ são: $\rho_{rad} \propto \frac{1}{a^4}$ ; $\rho_{mat} \propto \frac{1}{a^3}$, pois afinal, nas duas equações do fluido, só se considera uma densidade por vez. Da equação de Friedmann, considerando apenas a densidade de radiação, obtém-se: $a(t) \propto t^{\frac{1}{2}}$, logo:

$$\rho_{mat} \propto \frac{1}{a^3} \propto \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}};$$
$$\rho_{rad} \propto \frac{1}{a^4} \propto \frac{1}{t^2}.$$

Uma coisa importante a notar é que no caso de radiação dominante a densidade de radiação diminui mais rápido do que a densidade de matéria. Isso significa que um Universo dominado por radiação é instável, pois haverá um tempo a partir do qual a densidade de matéria se tornará superior, e consequentemente, com o passar do tempo, dominante. A situação de matéria dominante é portanto estável.

Será analisado agora, o efeito da curvatura do universo, sobre o destino final de cada modelo. Será considerado somente modelos de Universo dominados pela matéria, e isso não acarreta perda de generalidade, uma vez que com o passar do tempo todos os modelos de universo terminarão num estado dominado por matéria. Já foi visto que se $k = 0$ e o Universo é dominado por matéria a expansão é regida por: $a(t) = t^{\frac{2}{3}}$, o que significa que a taxa de expansão chega praticamente a zero em tempos muito grandes. Se $k < 0$, então, observando a equação de Friedmann: $(\frac{\dot{a}}{a})^2 = \frac{8\pi G}{3} - \frac{kc^2}{a^2}$, vemos que é impossível que a expansão pare, pois isso só aconteceria se $H = 0$ mas se $k < 0$ isso não pode ocorrer na equação. Algo interessante de ver é que para tempos muito grandes, com $k < 0$, o fator $\frac{8\pi G\rho}{3}$ se torna desprezível em relação ao fator $\frac{k}{a^2}$. Isso porque $\rho \propto \frac{1}{a^3}$ enquanto os termo $\frac{k}{a^2}$ é proporcinal somente a $\frac{1}{a^2}$. Nesse regime, a equação de Friedmann se torna: $(\frac{\dot{a}}{a})^2 = -\frac{kc^2}{a^2}$

que tem como solução $a(t) \propto t$. Isso significa que para tempos grandes, num Universo com $k < 0$ a taxa de expansão fica ainda maior. Caso $k > 0$, observando novamente a equação de Friedmann, vê-se que com o passar do tempo, é inevitável que os dois fatores do lado direito da equação se cancelem, e em seguida o fator $\frac{k}{a^2}$ leve a uma recolapso do Universo.

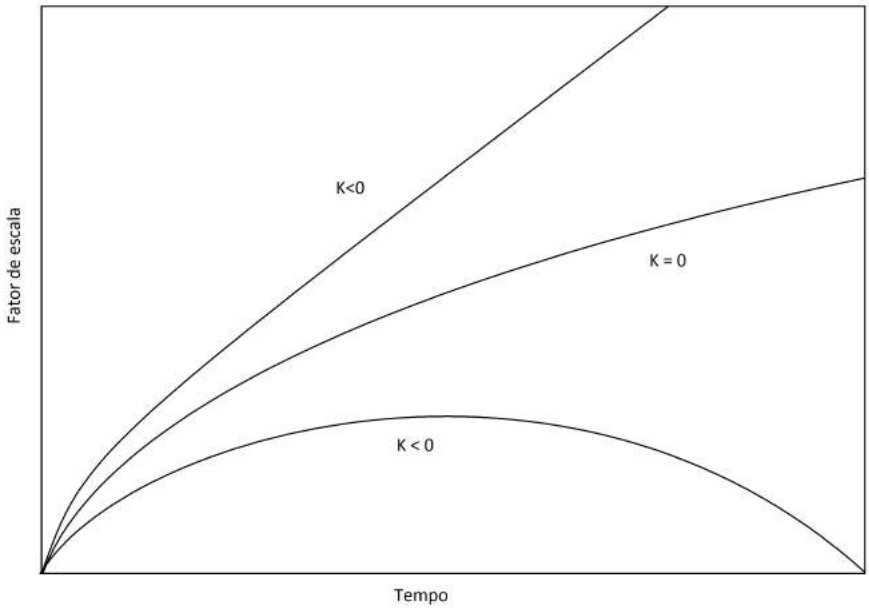


Figura 3: Esboço da depência do fator de escala com a curvatura.[30]

Todos os modelos anteriormente discutidos são apenas modelos utilizados para se ganhar uma maior familiaridade com as equações da cosmologia, pois para torná-los realísticos faz-se necessária a introdução de um termo chamado **constante cosmológica**($\Lambda$) na equação de Friedmann. A introdução desse termo é permitida pela relatividade geral. A **nova equação de Friedmann** com a constante cosmológica, que é positiva, fica dada por:

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}. \tag{2.3}$$

Nessa equação, fez-se $c = 1$, para ilustrar as **unidades naturais**. Nessas unidades faz-se $c = 1$ e portanto, a unidade de massa torna-se idêntica a unidade de comprimento. Nesse caso, $\Lambda$ possui unidade $t^-2$. No entanto, o fator c continuará a ser considerado. A equação da aceleração fica também modificada. A **nova equação da aceleração** é dada por:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right). \tag{2.4}$$

Como depreendido da equação acima, a constante cosmológica positiva age como uma força repulsiva. Se ela for suficientemente grande, essa força repulsiva pode superar

a atração gravitacional, representada na equação da aceleração como $\rho$, e gerar uma acelerada expansão do Universo independente da geometria do mesmo.

Convém definir um **parâmetro de densidade para a constante cosmológica**. A definição é:

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}. \tag{2.5}$$

Reescrevendo então a equação de Friedmann com a constante cosmológica em função do parâmetro de densidade e do parâmetro da constante cosmológica, tem-se:

$$\Omega + \Omega_\Lambda - 1 = \frac{k}{a^2H^2}. \tag{2.6}$$

Agora pode-se listar as condições para que o Universo tenha cada tipo específico de geometria, como sendo:

· Universo aberto: $0 < \Omega + \Omega_\Lambda < 1.$

· Universo plano: $\Omega + \Omega_\Lambda = 1.$

· Universo fechado: $\Omega + \Omega_\Lambda > 1.$

Ao se trabalhar com a constante cosmológica é útil descrevê-la como um fluido com densidade $\boldsymbol{\rho_\Lambda}$ e pressão $\boldsymbol{p_\Lambda}$. Essas variáveis serão definidas por conveniência. Para que a equação de Friedmann possua dentro do termo de densidades a densidade ordinária de matéria somada a suposta densidade da constante cosmológica e para que $\Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c}$, onde $\rho_c$ é a densidade crítica, se definirá:

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}; \tag{2.7}$$

como sendo a densidade da constante cosmológica. Com relação a pressão, pode-se achá-la resolvendo a equação do fluido para esse "fluido". Lembrando que $\dot{\rho_\Lambda} = 0$, por definição, e usando a equaçao do fluido tem-se:

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2. \tag{2.8}$$

A constante cosmológica tem uma pressão efetiva negativa.

A introdução da constante cosmológica nas equações de Friedmann aumentou consideravelmente as possibilidades de comportamento do Universo ao longo do tempo. Agora

é possível que um universo com $k > 0$ não entre em colapso,ou também que um Universo com $k < 0$ não se expanda mais indefinidamente. Tudo dependerá do qual forte for a constante cosmológica. A figura abaixo representa diversos modelos cosmológicos, para um universo com $p = 0$, no gráfico dependendo do valor dos parâmetros da densidade e da constante cosmológica.

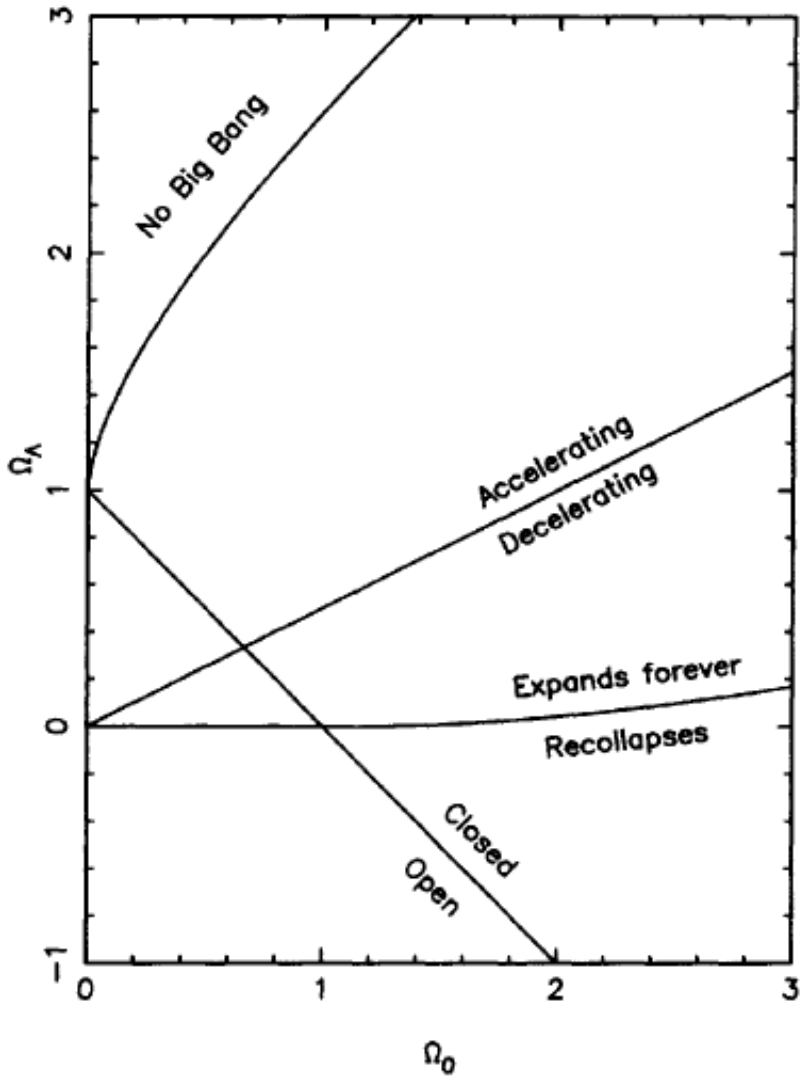


Figura 4: Gráfico de densidade da constante cosmológico por densidade de matéria no tempo presente.[30]

Esse gráfico deixa claro as diversas possibilidades existentes de evolução do Universo dependendo dos parâmetros. Um exemplo presente no gráfico e comentado anteriormente é a equação $\Omega_0 + \Omega_\Lambda = 1$, que é condição para um Universo plano e cuja reta no gráfico separa os modelos que geram Universos abertos dos que geram Universos fechados.

## 2.2 As limitações do modelo cosmológico padrão

O modelo do Big Bang, o modelo padrão, nos fornece precisas informações a respeito de como se deu a evolução do nosso universo desde o momento da nucleossíntese, Universo primordial, até os tempos atuais. No entanto, ele não nos responde questionamentos teóricos chave, envolvendo a estrutura e a formação do universo, tais como:

· O problema do horizonte.

Quando se observa a temperatura de regiões de direções diferentes do Universo através do espectro da radiação cósmica de fundo, vê-se que os espectros tem um altíssimo grau de semelhança, são iguais até uma precisão de $10^{-}5$. Isso implica que o Universo tem praticamente a mesma temperatura em todas as direções, o que aparentemente viola o princípio da causalidade. Para que duas regiões tenham temperatura semelhantes é necessário haver a troca de informação entre elas. No entanto, pela relatividade, sabe-se que a maior velocidade com que uma informação pode viajar é a velocidade da luz, então a maior distância que a luz pode percorrer é $ct$, onde $t$ é a idade do Universo. Existem no Universo regiões tão distantes entre si, que superam essa distância. Porém, mesmo assim, elas possuem temperaturas praticamente idênticas. O que justificaria isso?

· O problema do achatamento do universo.

O problema do achatamento do Universo na verdade não é exatamente um problema, pois não viola nenhuma lei. Mas a questão é explicar, por meio de algum princípio físico, a motivação de o Universo possuir geometria plana, ao invés das outras duas possíveis geometrias:esférica e hiperbólica.

· O problema da não-homogeneidade.

Um modelo cosmológico deve ser capaz de explicar as não isotropias, mesmo que pequenas, da radiação cósmica de fundo obtidas do tempo logo após a recombinação. Em outras palavras, deve haver alguma motivação para que o Universo não seja perfeitamente homogêneo e isotrópico, como o princípio cosmológico supõe que seja. Há também uma questão ligada a essa que é a origem das estruturas de larga escala observadas no Universo. Em outras palavras, qual a motivação para se gerarem amontoados de estrelas que formam as galáxias, amontoados de galáxias que formam os clusters e amaontoados de clusters que formam os superclusters? Por que, em vez dessa, distribuição o Universo não seria totalmente homogêneo em todas as escalas, como parece ser homogêneo em escalas acima de 100 Mpc?

· O problema do monopólo.

Nas teorias de Grande Unificação são previstas a geração de defeitos topológicos como monopólos, cordas cósmics e paredes de domínio, quando ocorrem transições de fase em altas energias. De acordo com a teoria do Big Bang, a densidade de energia no universo primordial é alta o suficiente para gerar tais defeitos topológicos. No entanto, nenhum deles foi observado até hoje, no Universo.

As respostas para essas perguntas necessitam de um modelo que possa trabalhar com o período de tempo anterior ao da nucleossíntese, anterior ao período de geração da radiação cósmica de fundo que chega até nós hoje.

O modelo cosmológico que hoje aparece como o mais cotado para responder a essas perguntas é o modelo inflacionário. No entanto recentes resultados obtido pelo satélite Planck nesse ano[16][17][18]reavivam o debate sobre a prevalência desse modelo sobre outros modelos alternativos, em especial os modelos cíclicos/equipiróticos.

## 2.3 Modelo inflacionário

O modelo inflacionário consiste de um cenário cosmológico no qual o universo primordial, portanto num tempo antes do decaimento do neutrino e a partir de cerca de $10^{-35}s$ depois do Big Bang, começou a expandir-se aceleradamente, indo de um volume muito pequeno até um volume comparável ao de hoje. O fator causador dessa expansão, de acordo com as variantes do modelo inflacionário, podem ser diversos como a energia potencial de um ou mais campos escalares, associados a alguma partícula fundamental, ou a energia do vácuo ou ainda termos de curvatura de ordens altas devido a campos quânticos.

A explicação dos 4 problemas colocados anteriormente, pelo modelo inflacionário, é a seguinte:

· O problema do horizonte.

Antes do período inflacionário ocorrer, uma pequena região do Universo, pequena o suficiente para atingir a termalização, pode se expandir para um tamanho superior ao tamanho do Universo visível, devido a inflação do Universo.

· O problema do achatamento do universo. A equação de Friedmann pode ser reescrita como:

$$|\Omega_{tot} - 1| = \frac{|k|}{a^2 H^2}; \tag{2.9}$$

onde $\Omega_{tot} = \Omega_0 + \Omega_\Lambda$, sendo $\Omega_0$ a densidade de matéria convencional(matéria ou radiação) no tempo atual. Foi visto que se $\Omega_{tot} = 1$, o Universo terá geometria plana permanentemente. Tendo isso em vista, considerando a situação de um Universo convencional, dominado por matéria ou energia, cujo termo ordinário de massa é mais importante que o termo de curvatura ou do que o termo da constante cosmológica, tem-se que o termo $H^2a^2$ sempre diminui com tempo, fazendo com que o fator $|\Omega_{tot} - 1|$ sempre cresça com o tempo e consequentemente $\Omega_{tot}$ se afaste de 1. No entanto o modelo inflacionário resolve esse problema impondo a condição, necessária para haver inflação, que:

$$\ddot{a} > 0. \tag{2.10}$$

Isso implica que $\frac{d(\dot{a})}{dt} = \frac{d(aH)}{dt} > 0$, e portanto que, sob as condições impostas pela inflação, $\Omega_{tot}$ se aproxime de 1, o que faz com que o Universo seja "planificado"durante o período da inflação. Então, ocorre que a inflação é tal que o termo $\Omega_{tot}$ torna-se tão próximo de 1, durante o período inflacionário, que mesmo todo o tempo passado após a inflação, afastando continuamente $\Omega_{tot}$ do valor 1, ainda não é grande o suficiente para que observemos o espaço curvado.

· O problema da não-homogeneidade. As inomogeneidades da RCF e a formação das estruturas de larga escala são explicadas devido as flutuações quânticas. Dependendo do agente causador da inflação, a flutuação pode ser a de um ou mais campos escalares,no caso do gerador ser um campo escalar, a da métrica quantizada do espaço-tempo, no caso do gerador ser a energia de vácuo, ou a da curvatura do espaço tempo, no caso do gerador serem os termos de curvatura de ordem alta. Essas flutuações levam a uma definitiva impressão desses efeitos sobre um pano de fundo homogêneo e isotrópico, efeitos que crescem e se tornam as anisotropias da RCF e as sementes para a formação das estruturas de larga escala.

· O problema do monopólo. Os defeitos topológicos são diluídos durante o período da expansão, pois a densidade desses defeitos se reduz com a inflação mais rapidamente do que ocorre a transformação da constante cosmológica em matéria comum, que determina o fim da inflação. Por fim, é necessário menos expansão aqui do que a requerida para "planificar"o Universo.

De acordo com os recentes dados obtidos pelo satélite Planck em 2013, somente alguns modelos do cenário inflacionário foram favorecidos pelos dados, e todos eles podem ser reformulados como sendo modelos com um único campo escalar e tendo um potencial do tipo plateau. Mas isso coloca o cenário inflacionário diante de problemas significativos

,pois esses modelos possuem severos problemas de condições iniciais, são menos genéricos, geram inflação para um menor escopo de potenciais e são exponencialmente improváveis comparados a potenciais mais genéricos de lei de potência.[10].

## 2.4 Modelo equipirótico

O cenário equipirótico parte de uma teoria fundamental de unificação. A diferença conceitual chave deste cenário para o inflacionário é a forma de o universo começar[13]. No cenário inflacionário o universo começa como uma singularidade cosmológica, que gera em seguida um estado de alta energia sem nenhuma simetria particular e onde há uma rápida expansão. Entretanto no equipirótico o universo começa em um estado infinito, vazio, não-singular e quase-estático de alta simetria.

O universo equipirótico, em sua nova versão, parte da teoria M heterótica cinco-dimensional onde a quinta dimensão tem como extremidades duas branas, onde uma delas é identificada como o universo visível. Como foi dito acima, o estado inicial é suposto muito próximo do estado de vácuo, onde as branas são planas, paralelas e vazias. Surge então uma pequena quebra da supersimetria que gera um potencial, suposto atrativo, entre as branas.

Então as branas são atraídas entre si por esse potencial até que se choquem e assim aqueçam o universo visível a uma temperatura finita. A esse momento dá-se o nome de equipirose, e é nesse momento que surge, na brana que é identificada como o universo visível, o big bang. Após o choque as branas voltam a se afastar.

A idéia de que se está vivendo em uma fatia do espaço-tempo, que possui mais dimensões do que se pode perceber pelos sentidos, é uma idéia sugerida pela teoria de cordas.[1] Uma mesa gigante em área, e com uma profundidade muito pequena, é um exemplo de uma brana bidimensional(nesse exemplo o Universo visível seria bidimensional) mergulhada em um espaço maior, tridimensional que possuiria uma dimensão compactificada, conforme se verá adiante.

A teoria de cordas visa unificar a relatividade geral, que se aplica muito bem aos fenômenos de escala macroscópica e em seus pressupostos teóricos assume a continuidade das medidas, a quântica, que se aplica muito bem aos fenômenos de escala microscópica e em seus pressupostos teóricos assume a discretização das medidas. Para que essa unificação aconteça a teoria de cordas usa o postulado que diz que todo o Universo e todos os seus componentes são formados e suas interações são regidas pela oscilação de cordas

muito pequenas, com um tamanho da ordem da escala de Planck $10^{-33}$cm o que fez com que elas ainda hoje não possam ser detectadas por falta de sensibilidade nos instrumentos.

A teoria de cordas prevê a existência de dois tipos de cordas: cordas abertas com extremidades abertas, livres, e cordas com extremidades fechadas. As cordas com extremidades fechadas podem se mover livremente entre uma dimensão e outra.

Tomando como apoio os trabalhos de Kaluza-Klein, foi visto que haveriam maiores possibilidades de se conseguir a unificação entre quântica e relatividade geral se existissem dimensões extras. Usando-se de simetrias somente em algumas dimensões, ou seja, descartando as teorias de cordas que são anômalas, e usando imposições vindo da mecanica quântica, restaram-se 5 tipos de teorias de cordas candidatas a conseguir a unificação. David Witten, em 1995, observou que as teorias que se chamam tipo I e V, juntamente com a II e IV, e também com a III e seu "inverso"apresentam simetrias que o fizeram poder reescrever os 5 tipos de teorias em uma só: a teoria M, M de matriz ou de mãe.

No entanto, quando se aumentou a dimensionalidade, para que sejam evitadas modificações na expressão da Lei da Gravitação Newtoniana, afirmou-se que todas as outras dimensões estariam compactificadas, de maneira que efetivamente a lei da gravitação de Newton só sentiria a existência de 4 dimensões. Mas quando se compactificam as dimensões, as cordas abertas ficam com suas extremidades fixas nas 4 dimensões visíveis. Então a hipersuperfície de 4 dimensões em que estão contidas todas as extremidades das cordas abertas lembra algo parecido com uma membrana.

Então, é inspirado nessa visão de membrana, que surgiu o modelo equipirótico. No caso do modelo equipirótico, como ele se baseia na teoria M heterótica, só existem 2 branas(abreviação de membrana) em todo o Universo, que, como visto, se aproximam e se chocam gerando o Big Bang. Essas duas branas, que são dois universos paralelos, só podem se comunicar entre si através da partícula mediadora da força gravitacional, o grávitron, pois ele é uma partícula formada por cordas com extremidades fechadas.

Até o presente, no entanto, ainda não foram detectadas nenhuma partícula que pudesse ser o grávitron. É interessante ver que uma forma de detectar as dimensões extras seria através da observação de certas alterações no espectro da radiação cósmica de fundo(RCF) do Universo primordial, quando os efeitos das dimensões extras seriam macroscópicos, pois como o Universo estaria ocupando um volume muito pequeno, o tamanho das dimensões normalmente perceptíveis seria comparável ao tamanho das dimensões compactadas. Isso imprimiria no espectro do RCF vindo desse tempo informações a respeito das dimensões extras.

A explicação dos 4 problemas colocados anteriormente, pelo modelo equipirótico, é a seguinte:

· O problema do horizonte. Devido as duas branas serem praticamente paralelas, devido as branas estarem praticamente no vácuo, elas irão colidir praticamente ao mesmo tempo em todos os pontos, produzindo uma densidade de energia constante praticamente igual em todos os pontos da superfície da brana. Isso justifica porque observa-se praticamente a mesma temperatura em todos as regiões do Universo.

· O problema do achatamento do universo. O achatamento do Universo segue direto das hipóteses assumidas pelo modelo, pois a hipótese de que as branas estão muito próximas de um estado BPS[20], quase vácuo, implica que elas sejam planas.

· O problema da não-homogeneidade. Durante o trajeto que as duas branas fazem na quinta dimensão para se chocar, elas sofrem flutuações quânticas, que geram ondulações em toda a brana. Por causa dessas ondulações alguns pontos das branas colidem um pouco antes e outros um pouco depois, resultando temperaturas, após a termalização, um pouco abaixo ou um pouco acima da média em diferentes pontos da brana. Essas diferenças geram as anisotropias da RCF e são as sementes das estruturas de larga escala.

· O problema do monopólo. Não haverá produção de defeitos topológicos no Universo se a temperatura equipirótica, temperatura no momento da colisão das branas, for menor que a temperatura necessária para gerar tais defeitos. E em contraste com o modelo inflacionário, em nenhum momento a temperatura do Universo será maior que a temperatura equipirótica.

## 2.5 Modelo cíclico

Existe ainda outro cenário cosmológico que se candidata a disputa: os chamados modelos cíclicos. São chamados de cíclicos pois as quantidades locais, tais como a constante local de Hubble, temperatura e densidade, retornam ao mesmo valor depois de cada ciclo. Tais modelos são considerados uma extensão do cenário equipirótico pois os eventos chave para esse novo modelo funcionar se encontram em sua fase de energia escura dominante e de contração equipirótica ultralenta. Nesse modelo o big bang é entendido como um grande salto entre uma fase de contração para uma fase de expansão. O meio mais conhecido para gerarmos as perturbações de curvatura invariantes em escala, durante o período de contração, é usando o mecanismo entrópico padrão[19] que requer a interação de dois

campos $\sigma$ e $s$ dentro do potencial atrativo entre as branas[10]:

$$V = -V_0 e^{\sqrt{2\epsilon}\sigma}[1 + k_2\epsilon s^2 + \frac{k_3}{3!}\epsilon^{\frac{3}{2}}s^3 + \frac{k_4}{4!}\epsilon^2 s^4 + ...]. \tag{2.11}$$

Poderíamos citar duas principais diferenças entre o cenário equipirótico e o cíclico[12]. A primeira é que no cenário equipirótico há apenas um momento onde ocorre a equipirose, enquanto no outro ela ocorre uma vez por ciclo, e portanto um número indeterminado de vezes. A segunda diferença é que o cenário equipirótico é obtido por primeiros princípios, baseando-se na teoria M heterótica, enquanto que os modelos cíclicos , embora motivados também por ela, ainda não são obtidos por primeiros princípios a partir dela, deixando esperançosamente que essa tarefa seja concretizada no futuro[14].

No contexto atual, após os dados fornecidos pelo satélite Planck neste ano, os modelos mais simples de universo cíclico, contendo uma fase equipirótica e usando o mecanismo entrópico padrão para gerar perturbações na curvatura, se adequam bem a todos os parâmetros cosmológicos fornecidos por Planck 2013.

Os problemas sugeridos inicialmente são resolvidos da seguinte maneira[21][22]:

· O problema do horizonte e do achatamento do Universo. Esses dois problemas são resolvidos pelo fato de as duas branas que se aproximam para colidirem serem planas e paralelas. O que, então, tornaria as branas planas e paralelas, nesse modelo, são a homogeneidade e a isotropia do Universo juntamente com a baixíssima densidade, geradas pela fase de lenta expansão cósmica com energia escura dominante que duraria trilhões de anos ou mais.

· O problema da não-homogeneidade. No modelo cíclico as inomogeneidades do Universo são geradas durante a fase de contração(fase de aproximação entre as branas) quando o fator de escala é quase estático e as forças gravitacionais são fracas. Elas são geradas devido a flutuações quânticas no campo escalar $\phi$ quando $V(\phi)$, que representa o potencial entre as branas, é próximo de zero mas rapidamente torna-se cada vez mais negativo, o que faz com que essas flutuações em $\phi$ sejam amplificadas. O surgimento, e a subsequente amplificação, das flutuações em $\phi$ justifica a formação de,algo como, ondas na superfície da brana que se tornarão, após a colisão, nas inomogeneidades da RCF e nas sementes das estruturas de larga escala.

· O problema do monopólo. O problema do monopólo é resolvido da mesma maneira que no modelo equipirótico. Na colisão entre as branas a temperatura da equipirose seria menor que a temperatura mínima necessária para produzir os defeitos topológicos.

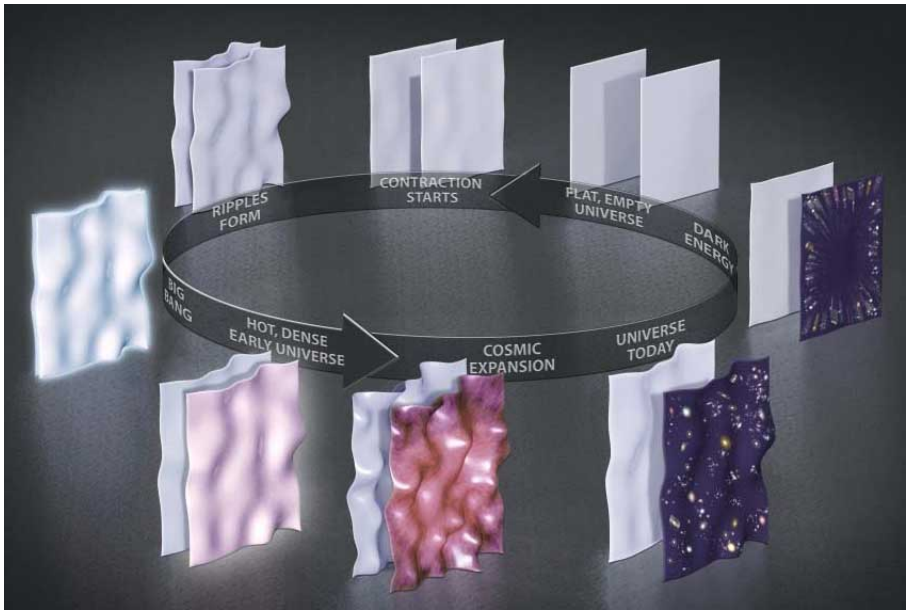


Figura 5: As várias fases pertencentes a um ciclo.[31]

Os modelos simples do cenário cíclico predizem dois resultados que podem ser comprovados, ou não, com novos experimentos em breve. As duas previsões são: a polarização primordial do modo B deve ser observável, e não existem ondas gravitacionais primordiais detectáveis em escalas de interesse cosmológico. Recentemente se propôs uma terceira previsão[10]: o parâmetro triespectro local,$g_{NL}$ , deve ser negativo e com magnitude menor que cerca de 1700.

# 3 CONCLUSÕES, DISCUSSÕES E PERSPECTIVAS

## 3.1 Contexto histórico e físico

O modelo do Big Bang é o atual modelo padrão para cosmologia. Ele foi um grande avanço para a cosmologia no século XX, no entanto para o século XXI se fazem necessários novos modelos que incluam o Big Bang, de forma a não perder nada de todos os avanços trazidos por ele, mas que possam ir além dele na capacidade de descrever o Universo. Afinal, devido a grande precisão dos instrumentos de medidas, estamos entrando na era da cosmologia precisa; era em que os parâmetros que descrevem o nosso Universo serão obtidos com a maior precisão possível nos permitindo almejar responder a questões mais fundamentais não respondidas pelo modelo do Big Bang. Atualmente, segundo os resultados de Plack 2013, dois fortes candidatos a serem esse passo adiante, com relação ao modelo do Big Bang, são o modelo inflacionário e o modelo cíclico com fase equipirótica, conforme visto no capítulo anterior.

O foco desse trabalho é dar início ao aprendizado dos modelos cíclicos com fase equipirótica. Para então começar a estudá-los é conveniente iniciar analisando qualitativamente e, até certo ponto, quantitativamente a influência das dimensões extras dentro da física como um todo e especialmente dentro da cosmologia, sondando, por exemplo, suas implicações no problema da hierarquia e na questão da singularidade do Big Bang.

O problema da hierarquia é a grande diferença existente entre a escala da gravidade $M_{Pl}$ $10^{18}Gev$ e a escala de energia em que ocorrem as interações eletrofracas $100Gev$. Em outras palavras, porque a força eletrofraca é tão mais forte que a força gravitacional?

A questão da singularidade é a seguinte. No modelo do Big Bang, como citado anteriormente, o Universo começou confinado num ponto que possuía temperatura infinita. A questão que se coloca é se seria possível contruir modelos cosmológicos em que, o que se chama hoje de Big Bang, seja na verdade apenas um momento em que o Universo

ocupava um volume mínimo, com uma temperatura finita, e que esse momento não fosse a origem do tempo e espaço, havendo a possibilidade de retroceder-se no tempo a instantes anteriores ao Big Bang, em que o Universo ocuparia volumes maiores. Tais modelos cosmológicos apresentariam um "bounce"(pulo,transição) no lugar do Big Bang.

## 3.2 O Problema da hierarquia

Para introduzir as dimensões extras no modelo cosmológico, precisamos mudar a métrica de FRW adicionando a influência das dimensões extras, que dependerá também do número de dimensões extras que se colocará, que nesse caso analisado será apenas uma. A métrica de FRW será representada por: $g_{\mu\nu}$. O espaço que será utilizado é o espaço em cinco-dimensões( 3 espaciais ordinárias, 1 temporal, 1 dimensão extra). Na figura abaixo representa-se esse espaço em um gráfico bidimensional: as curvas desenhadas na figura representam 4 dimensões(3 espaciais, 1 temporal) e o eixo $y$ representa a dimensão extra.

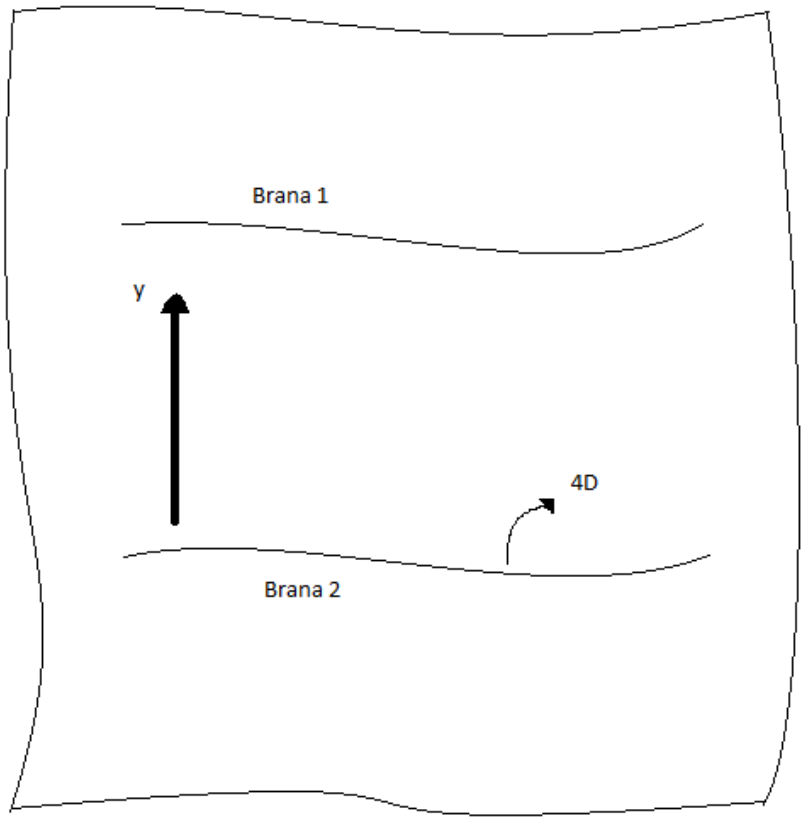


Figura 6: Representação de um espaço 5D formado por uma brana 4D, representada pelo traço, e mais uma dimensão extra. A superfície ondulada que se vê nessa figura representa a hipersuperfície 5D.

Mergulhando a métrica de FRW dentro da dimensão extra obtemos a seguinte métrica:

$$ds_5^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dy^2. \tag{3.1}$$

Precisa-se modificar essa métrica de tal forma que a posição da brana 4-D na quinta dimensão afete a geometria do espaço naquela brana, assim como acontece com os pontos dentro de um espaço-tempo 4D, afinal o espaço não é o mesmo independente do ponto que se escolha analisar, pois a geometria do espaço em cada ponto pode mudar devido a presença de matéria, por exemplo. Para introduzir essa informação na equação da métrica basta introduzir um fator $A(y)$ multiplicando $g_{\mu\nu}$, pois assim, se forem analisados o comprimento de uma curva entre os pontos A e B, que possuem a mesma coordenada $y$, na brana 1 e o comprimento entre outros dois pontos C e D, também possuindo coordenadas $y$ iguais entre si mas diferentes da coordenada $y$ dos pontos A e B, na brana 2; o comprimento dessas curvas não devem ser necessariamente iguais pois as curvas possuem coordenadas da dimensão extra diferentes. Introduzir esse termo $A(y)$ ao lado de $dy^2$ na métrica não faria o efeito desejado, pois as duas curvas possuem $dy = 0$.

Precisa-se também impor que o comprimento das curvas anteriores possam mudar com o tempo, contraindo ou se alongando, mesmo se os pontos A e B, ou C e D, permanecerem fixos nas 4 coordenadas espaciais(as 3 ordinárias e a extra). Isso é necessário para permitir, por exemplo, que esse modelo cosmológico permita a expansão do Universo. Então, a métrica, até aqui tem a forma:

$$ds_5^2 = A(y,t)g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dy^2. \tag{3.2}$$

A rigor não seria necessário impor que $A$ fosse dependente do tempo para que o comprimento das duas curvas pudesse variar com o tempo, pois dentro do termo $g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ há o termo que envolve $dt^2$, de maneira que o tempo já está incluído. No entanto, será deixado o fator $A$ como dependente explícito do tempo para seguir a linha de alguns trabalhos feitos nessa área que utilizam $A(y,t)$ [23].

Serão utilizados agora argumentos semelhantes aos anteriores para justificar a introdução de um outro fator multiplicativo, B, na frente de $dy^2$. Tome-se agora, pontos A' e B', possuindo as três coordenadas espaciais ordinárias e a coordenada temporal iguais, mas com coordenadas da dimensão extra diferentes, $y'_A$ e $y'_B$ . Tome-se também pontos C' e D', com as mesmas coordenadas espaciais ordinárias e temporais que A' e B', mas com coordenadas da dimensão extra $y'_C$ e $y'_D$. Calculando a distância entre A' e B' vê-se que os termos diferenciais da métrica na forma imediatamente anterior se anulam,

sobrando apenas $dy$. Porém, mesmo que, por exemplo, a diferença entre $y'_D$ e $y'_C$ seja a mesma que $y'_A$ e $y'_B$, como A',B',C' e D' são todos pontos distintos, essa distância não será necessariamente a mesma, já que o espaço entre os pontos $y'_D$ e $y'_C$, chamado de Bulk, pode, por exemplo, ser mais curvado que o espaço entre $y'_A$ e $y'_B$, resultando numa maior distância. Então, faz-se necessário introduzir um fator multiplicativo na frente de $dy^2$, que seja função de $y$. Por fim, a dependência de $B$ em relação ao tempo será adotada com objetivo de generalizar o máximo possível a métrica, e seguir de perto a métrica usada no paper que será abordado logo em seguida. A métrica final fica sendo então:

$$ds_5^2 = A(y,t)g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + B(y,t)dy^2. \tag{3.3}$$

Uma perspectiva de trabalho é buscar uma solução para o problema da hierarquia descobrindo quem seriam esses fatores A(y,t) e B(y,t) relacionados com os fatores $a(t,y)$, $b(t,y)$ e $n(t,y)$ achados no trabalho de P. Binétruy, C. Deffayet, U. Ellwanger e D. Langlois [23]. Se eles forem exponenciais isso poderia explicar o problema da hierarquia:a gravidade é forte numa brana mas decai exponencialmente ao longo do trajeto que percorre para chegar a brana na qual está o Universo vísivel.

## 3.3 A questão da singularidade

A partir da expressão da métrica em cinco dimensões, pode-se atacar o seguinte problema: será que existe um fator de Warp( A(y,t) e B(y,t)) tal que a singularidade do Big Bang, analisada pela singularidade do fator de escala, seja evitada?

No trabalho citado anteriormente [23], P. Binétruy et al. fazem uso de uma métrica um pouco mais específica para procurar as influências da dimensão extra na Cosmologia. A métrica é dada por:

$$ds_5^2 = n(t,y)^2dt^2 + \gamma_{ij}dx^i dx^j a(t,y)^2 + b(t,y)^2dy^2; \tag{3.4}$$

onde $i,j$ variam de 1 a 3, e $\gamma_{ij}$ é uma métrica tridimensional com máxima simetria.

Um importante resultado que P. Binétruy et al. encontram, é que jogando a métrica, modificada para conter a quinta dimensão, nas equações de Einstein e usando que:
$\longrightarrow$ o tensor momento energia do Bulk é dado por $diag(-\rho_B, P_B, P_B, P_B, P_T)$, ou seja, a matéria presente no Bulk é um análogo a um fluido perfeito em cinco dimensões .
$\longrightarrow$ a geometria dentro da brana é estritamente homogênea e isotrópica.
$\longrightarrow$ nas condições de junção ao redor da brana, que relacionam os saltos da métrica

atravessando a brana com o tensor momento-energia da brana [27], vale a simetria $y \longleftrightarrow -y$, ou seja, o que existe na parte positiva da dimensão extra existe também na parte negativa. $\longrightarrow n_0 = 1$, onde o 0 que acompanha n indica que estamos tratando da métrica do espaço em $y = 0$, para que o tempo usado seja o tempo cósmico dentro da brana.

Obtém-se uma equação análoga a equação de Friedmann, e que depende somente da geometria e da matéria contidas na brana,a menos de um parâmetro livre($\xi$), relacionado a escolha das condições iniciais sobre todo o espaço tempo. A equação é:

$$\frac{(\dot{a_0})^2}{a_0^2} = \frac{k^2}{6}\rho_B + \frac{k^4}{36}\rho_b^2 + \frac{\xi}{a_0^4} - \frac{k}{a_0}^2 . \tag{3.5}$$

onde as derivadas temporais são em relação ao **tempo cósmico** na brana, $\rho_b$ é a densidade de matéria na brana e $\rho_B$ é a densidade de matéria no Bulk. O tempo cósmico é o tempo próprio de observadores que estão em referenciais que se movem juntamente com o fluido cósmico. Se um dado observador desejar saber se ele mede o tempo cósmico ou não,em seu próprio referencial, basta que ele confira se a forma da métrica que ele possui em seu referencial é a mais simples possível. Somente como ilustração, a equação padrão de Friedmann é, fazendo $c = 1$:

$$(\tfrac{\dot{a}}{a})^2 = \tfrac{8\pi G}{3} - \tfrac{k}{a^2}.$$

O termo $\xi$ pode ser interpretado como um fator representando uma radiação. Essa nova equação é linear com relação a densidade de energia do Bulk, e é quadrática com relação a densidade de energia da brana. Então, com esse resultado pode-se estudar a evolução do Universo dentro da brana.

Um outro resultado importante é que se for usado como hipótese que a brana está parada, ou seja, $\dot{b} = 0$ com relação ao tempo cósmico na brana; a métrica descrevendo todo o espaço-tempo pode(brana + bulk) pode ser achada. Voltando aos cálculos: resolvendo a nova equação de Friedmann e a antiga equação do fluido(que continua válida dentro da brana), incluindo também as equações de estado a serem especificadas, pode-se achar $a_0(t)$ e $\rho_b(t)$ restritas a brana. E com essas duas funções podem-se achar $n(t, y), a(t, y)$ que juntamente com a hipótese $b = 1$, achado pela hipótese $\dot{b} = 0$, completam as três funções necessárias para se descrever toda a métrica do espaço-tempo. As equações achadas para $n(t, y), a(t, y)$ são:

$$n(t, y) = \frac{\dot{a}(t, y)}{\dot{a_0}(t)}; \tag{3.6}$$

$$a(t,y) = [\tfrac{1}{2}(1+\tfrac{k^2\rho_b^2}{6\rho_B})a_0^2 + \tfrac{3\xi}{k^2\rho_B a_0^2} + [\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{k^2\rho_b^2}{6\rho_B})a_0^2 - \tfrac{3\xi}{k^2\rho_B a_0^2}]cosh(\mu y)$$

$$-\frac{k\rho_b}{\sqrt{-6\rho_B}}a_0^2 senh(\mu|y|)]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.7}$$

Se investigará agora o processo para obtenção de soluções analíticas para $a_0(t)$. A dependência quadrática da nova equação de Friedmann com relação a densidade de energia da brana($\rho_b$) leva a cosmologias não convencionais sobre o Universo[28]. No entanto, é possível recuperar os resultados da cosmologia padrão para tempos grandes grandes, deixando resultados que geram uma cosmologia não convencional apenas para o Universo primitivo. Para que isso seja feito são necessárias as seguintes hipóteses:

$\longrightarrow$ a densidade de energia da brana será dada por: $\rho_b = \rho_\Lambda + \rho$, onde $\rho_\Lambda$ é um termo de massa que corresponde na verdade a uma tensão intrínseca a brana, e $\rho$ corresponde a massa ordinária dentro da brana.

$\longrightarrow$ escolhe-se $\rho_\Lambda$ tal que $\frac{k^2}{6}\rho_B + \frac{k^4}{36}\rho_\Lambda^2 = 0$. [26]

$\longrightarrow$ faz-se a seguinte identificação: $8\pi G \cong \frac{k^4\rho_\Lambda}{6}$.

$\longrightarrow$ $\rho \ll \rho_\Lambda$.

Agora, suponhamos que a seguinte equação de estado é válida: $p = w\rho$. Joga-se essa equação de estado dentro da equação do fluido, obtém-se que: $\rho = \rho_*(\frac{a_0}{a_*})^{-q}$, onde $q = 3(1+w)$, $\rho_*$ e $a_*$ são constantes. Analisando então o caso particular, $\xi = 0$, $k = 0$, a usando nova equação de Friedmann, fazendo $\lambda^2 = \frac{\rho_B}{6k^2} + \frac{\rho_\Lambda^2}{36}$, resulta que:

$\longrightarrow$ $\lambda > 0$;

$$a_0 = a_*\rho_{\frac{1}{q}}[\frac{\rho_\Lambda}{36\lambda^2}[cosh(qk^2\lambda t) - 1] + \frac{1}{6\lambda}senh(qk^2\lambda t)]^{\frac{1}{q}}; \tag{3.8}$$

$\longrightarrow$ $\lambda = 0$;

$$a_0 = a_*(k^2\rho_*)\frac{1}{q}(\frac{q^2k^2\rho t^2}{72} + \frac{qt}{6})\frac{1}{q}. \tag{3.9}$$

No entanto, esses dois resultados foram obtidos assumindo-se a hipótese que $a_0(0) = 0$, ou seja, que no princípio havia a singularidade do Big Bang. Uma outra perspectiva de trabalho é eliminar essa singularidade, assumindo por exemplo, $a_0(0) = l$ onde $l$ é uma constante, e verificar se assim as soluções ainda geram uma cosmologia aceitável para tempos grandes.

# REFERÊNCIAS


[1] E. Abdalla, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **27**(2005)

[2] Hirata, K. and Kajita, T. and Koshiba, M. and Nakahata, M. and Oyama, Y. and Sato, N. and Suzuki, A. and Takita, M. and Totsuka, Y. and Kifune, T. and Suda, T. and Takahashi, K. and Tanimori, T. and Miyano, K. and Yamada, M. and Beier, E. W. and Feldscher, L. R. and Kim, S. B. and Mann, A. K. and Newcomer, F. M. and Van, R. and Zhang, W. and Cortez, B. G., Phys. Rev. Lett. **58**, 1490–1493 (1987)

[3] An Introduction to Modern Cosmology, A. Liddle, Wiley, 2003(2 ed.)

[4] Introduction to Elementary Particles,D. Griffths, Wiley, 2008(2 ed.)

[5] Introduction to Cosmology, M. Roos, Wiley,2003(3 ed.)

[6] S. Weinberg, *Cosmology*, Oxford University Press Inc., New York (2008)

[7] rindler) Introduction to Special Relativity, W. Rindler, Oxford, 1991 (2 ed.)

[8] Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies, M. Perdigão do Carmo, Textos Universitários, 2008 (3 ed.)

[9] Modern Geometry-Methods and Applications, B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Noviko, Springer,1992 (2 ed.)

[10] J.-L. Lehners and P.J.Steinhardt, Phys. Rev. D **87**, 123533 (2013)

[11] A.Ijjas,P. J. Steinhardt, e A. loeb, Phys. Lett. B **723**, 261 (2013)

[12] Syksy Rasanen. A primer on the ekpyrotic scenario. Astro-ph/0208282v2(2002)

[13] J. Khoury, B. A. Ovrut, P.J. Steinhardt e N. Turok, Phys. Rev. D **64**, 123522(2001)

[14] ]J.-L. Lehners. Ekpyrotic and Cyclic Cosmology. Astro-ph/0806.1245v2(2009)

[15] P. Ade et al (Planck Collaboration), arXiv:1303.5062v1

[16] P. Ade et al (Planck Collaboration), arXiv:1303.5076.(2013)

[17] P. Ade et al (Planck Collaboration), arXiv:1303.5082.(2013)

[18] P. Ade et al (Planck Collaboration), arXiv:1303.5084.(2013)

[19] J.-L. Lehners , P. McFadden, N. Turok, e P. J. Steinhardt, Phys. Rev. D **76**, 103501(2007)

[20] E.B. Bogomol'nyi, Sov. J. Nucl. Phys. 24 (1976) 449; M.K. Prasad and C.M. Sommerfield, Phys. Rev. Lett. **35** (1975) 760.

[21] P. J. Steinhardt, N. Turok, arXiv:hep-th/0111030

[22] P. J. Steinhardt, N. Turok, Phys. Rev. D **65** 126003 (2002)

[23] P. Binétruy, C. Deffayet, U. Ellwanger e D. Langlois, Phys. Lett. B **477**, 285-291 (2000)

[24] D. Soares, Revista Brasileira de Ensino de Física,v. **35**, n. 3, 3302 (2013)

[25] Matemática para físicos com aplicações,J. Barcelos Neto,L F Editorial,2010(1 ed.)

[26] L. Randall, R. Sundrum, Phys.Rev.Lett. **83**, 3370-3373 (1999)

[27] W. Israel, Nuovo Cimento B **44** 1966

[28] P. Binétruy, C. Defayet, D. Langlois, Nuclear Physics B, **565**, 269-287 (2000)

[29] http://www.fromquarkstoquasars.com/the-value-of-scientific-errors/; acessado em 30/12/13

[30] An Introduction to Modern Cosmology, A. Liddle, Wiley,2003(2 ed.)

[31] http://foro.sondasespaciales.com/index.php?topic=8207.0; acessado em 30/12/13