

**Resolução de Exame de Matemática – 12ª.
Classe
Ano: 2016/ 1ª Época**



Conceitos Básicos**Operações sobre proposições lógicas**

Na lógica matemática estdaa – se as seguintes operações sobre proposições:

1. Negação de uma proposição ($\sim$)
2. Conjuncão de proposições ($\wedge$)
3. Disjunção de proposições ($\vee$)
4. Implicação material ($\Rightarrow$)
5. Equivalência materail ($\Leftrightarrow$)

Expressão proposicional

Uma expressão diz – se proposicional ou condição à uma expressao quando substituída a sua variável transforma – se numa proposição.

Exemplo:

$$p(x) : x - 7 \geq 0$$

Expressão algébrica

Uma expressão algébrica diz – se **irracional** quando a variável aparece sob forma de um radicando.

Repare qu a expressão do número 3, a variável aparece dentro do radical com índice 3, e a varável aparece também sob forma de denominador, visto que não existem um número real que pode anular o denominador, razão pelo qual todo número real define a expressão dada.

Equação

Já foi dito que uma equação é a comparação de duas expressões designatórias por meio de símbolo de igualdade.

Equação quadrática

Diz – se equacao quadratica a toda equacao que por meio de manipulacoes algebricas reduz – se a forma padrao

$$ax^2 + bx + c = 0, a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$$

O conjunto solução desta equação geralmente é encontrado pela fórmula:

$$x_1; x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}, \text{ onde,}$$

Exame de Matemática – 12ª classe, Ano: 2016/ 1ª Época**Resoluções****1. Resposta:**

A tradução para a linguagem simbólica da proposição «Maria não estudante e Joana não é professora» segue,

Já foi considerado que:

p : Maria é estudante; então $\sim p$: Maria não é estudante.

q : Joana é professora; então $\sim q$: Joana não é professora.

A proposição «Maria não é estudante e Joana não é professora» simbolicamente fica:

$$\sim p \wedge \sim q \Leftrightarrow \sim (p \vee q).$$

2. Resposta:

A negação da expressão proposicional $x \geq 2$ é:

$$\text{Seja } p(x) : x \geq 2 \Rightarrow \sim p(x) : \sim (x \geq 2) \Leftrightarrow \sim p(x) : x < 2.$$

3. Resposta:

Expressão algébrica racional fraccionaria é uma expressão em que a variável aparece sub

forma de denominador; logo nas 4 alternativas, a resposta certa é: $\frac{x-2}{x}$.

4. Resposta:

Determinado o domínio de existência da expressão $\frac{x-1}{x^2+1}$, teremos: seja

$$A(x) = \frac{x-1}{x^2+1};$$

$D_A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \neq 0\}$. $\Leftrightarrow x^2 + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq -1$; repare que qualquer número real, o seu quadrado é sempre diferente de -1 ; logo $D_A = \mathbb{R}$.

5. Resposta:

Vamos resolver a equação (quadrática), $2x^3 - x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(2x^2 - x - 1) = 0$,

aplicando a lei de anulamento de produto, teremos: $x = 0 \vee 2x^2 - x - 1 = 0$, o

factor $2x^2 - x - 1$ é quadrático, produto $2x^2 - x - 1 = 0$, vamos resolver esse

$$2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 2; b = -1; c = -1$$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

equação aplicando a fórmula resolvente: $\Delta = (-1)^2 - 4.(+2).(-1)$

$$\Delta = 1 + 8$$

$$\Delta = 9$$

$$x_1; x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} \Leftrightarrow x_1; x_2 = \frac{1 \pm 3}{4} \Leftrightarrow x_1 = \frac{1-3}{4} \vee x_2 = \frac{1+3}{4} \Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{2} \vee x_2 = 1$$

; a equação $2x^3 - x^2 - x = 0$, tem como raízes: $\left\{-\frac{1}{2}; 0; 1\right\}$

6. Resposta:

$$\Delta = b^2 - 4.ac$$

Equação exponencial: é toda equação em que a incógnita aparece sob forma de um expoente de base a , sendo a positivo e diferente de unidade.

Determinantes de sistemas de equações lineares

A representação da forma

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ chama-se}$$

determinante proveniente de uma matriz de 3 por 3

Razões trigonométricas de alguns arcos

x	0	30	45	60	90
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tag	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	0
ctg	ND	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	ND

Fórmula fundamental da trigonometria

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Outras relações trigonométricas

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\operatorname{ctg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Módulo ou valor absoluto de um número real

Chama-se módulo ou valor

Resolvendo a equação $3^x + 3^{x+1} = 12$, em IR, teremos:

$$3^x + 3^{x+1} = 12 \Leftrightarrow 3^x + 3 \cdot 3^x = 12 \Leftrightarrow 3^x(1+3) = 12 \Leftrightarrow 3^x \cdot 4 = 12 \Leftrightarrow 3^x = \frac{12}{4} \Leftrightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1.$$

7. Resposta:

Resolvendo a equação $\log_2(\log_3^{(x-1)}) = 1$, no seu domínio de existência, teremos:

Pela definição do logaritmo: $\log_a^b = x \Leftrightarrow ax = b$;

$$2^{-1} = \log_3^{(x-1)} \Leftrightarrow \log_3^{(x-1)} = 2 \Leftrightarrow 3^2 = (\log - 1) \Leftrightarrow x - 1 = 3^2 \Leftrightarrow x - 1 = 9 \Leftrightarrow x = 10.$$

8. Resposta:

$$2\operatorname{sen}(x) = 1; \text{ para } x \in [0; \frac{\pi}{2}].$$

$$2\operatorname{sen}(x) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

9. Resposta:

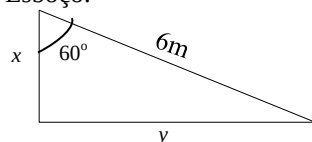
$$\theta \in IIQ, \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \theta < \pi, \text{ Portanto, } \operatorname{sen}(\theta) > 0 \text{ para } \theta \in IIQ, \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \theta < \pi, \text{ e}$$

$$\cos(\theta) < 0 \text{ } \theta \in IIQ, \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \theta < \pi. \text{ Sabe-se que o produto entre dois factores com}$$

signais contrario resulta um número menor que zero, logo no segundo quadrante é valida a afirmação $\operatorname{sen}(\theta) \cdot \cos(\theta) < 0$

10. Resposta:

Esboço:



$$\operatorname{sen}(60^\circ) = \frac{y}{6} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{6} \Leftrightarrow 6 \cdot \sqrt{3} = 2y \Leftrightarrow 2y = 6\sqrt{3} \Leftrightarrow y = \frac{6\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = 3\sqrt{3}$$

$$\cos(60^\circ) = \frac{x}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{6} \Leftrightarrow 6 \cdot 1 = 2x \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{2} \Rightarrow x = 3$$

11. Resposta:

A distância entre os pontos da recta numérica cuja as abscissas são x e 3 escreve-se

$$d = |x - 3|$$

12. Resposta:

Para determinar o produto das raízes da equação $\left| \frac{x-3}{2} \right| = \frac{1}{3}$, temos que encontrar as

raízes em primeiro lugar; assim,



absoluto de um número real x ao próprio número se este for não negativo ou ao seu simétrico se este for negativo.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Equação modular: é toda equação que por meio de princípios de equivalência é redutível a forma:

$$|x| = a$$

A solução da equação acima segue:

$$|x| = a \Leftrightarrow x = a \vee x = -a$$

Factorial de um número natural

O factorial de um número natural n é dado por:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$$

Exemplo:

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$5! = 120$$

Permutação

A permutação de n elementos tomados p a p , é dado por:

$$P_n = n! \text{ ou}$$

$$P_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$$

$$n \equiv p$$

Exemplo:

$$p_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$p_4 = 24$$

Aranjos Simples

Aranjos simples de n elementos tomados p a p é dado por:

$$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!}, \quad n > p$$

Exemplo:

$$A_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} \Leftrightarrow A_2^4 = \frac{4!}{2!}$$

$$A_2^4 = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} \Leftrightarrow A_2^4 = 12$$

Combinação simples

Combinação simples de n elementos tomados p a p é dado por:

$$C_p^n = \frac{n!}{(n-p)! \times p!}, \quad n > p$$

$$\left| \frac{x-3}{2} \right| = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{x-3}{2} = \frac{1}{3} \vee \frac{x-3}{2} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3(x-3) = 2.1 \vee 3(x-3) = -2 \Leftrightarrow 3x-9 = 2 \vee$$

$$\Leftrightarrow 3x = 2+9 \vee 3x = -2+9 \Leftrightarrow 3x = 11 \vee 3x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{11}{3} \vee x = \frac{7}{3} \Rightarrow P = \frac{11}{3} \times \frac{7}{3} = \frac{77}{9}$$

13. Resposta:

Aplicando os conhecimentos do binómio de Newton, o desenvolvimento de $(x+y)^{18}$

tem

18+1 Termos que são 19.

14. Resposta:

Simplificando a expressão dada teremos:

$$\frac{(n+2)!(n+1)!}{(n+1)!} \Leftrightarrow \frac{(n+2)(n+1)!(n+1)!}{(n+1)!} \Leftrightarrow \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{(n+1)!} = (n+1+1) = n+2$$

15. Resposta:

Este é um problema de arranjo simples sem repetição, repare que neste problema o número de elementos não é igual a número de posição por outro lado a ordem aqui é relevante, sendo assim teremos:

$$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!}, \quad n = 5 \wedge n = 3 \Rightarrow A_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

Os três produtos no frigorífico, podem ser guardados em 60 maneiras diferentes.

16. Resposta:

Podemos aplicar a fórmula de Simon Laplace para resolver este problema, sabe-se que

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}, \quad n(A) = 3 \wedge n(S) = 10 \Rightarrow P(A) = \frac{3}{10} = 0.3 = 30\%$$

A probabilidade de ser verde é de 30%

17. Resposta:

Diz-se Progressão aritmética (PA) à uma função real de variável natural (sucessão) em que a diferença entre o n -ésimo primeiro termo e o n -ésimo termo é constante ($d = a_{n+1} - a_n$)

$$d = a_{n+1} - a_n$$

$$a_1 = 6, a_2 = 25, a_3 = 44, \dots \Rightarrow a_3 - a_2 = a_2 - a_1 \Leftrightarrow 44 - 25 = 25 - 6 \Leftrightarrow 19 = 19$$

Logo a sucessão 6, 25, 44, ... é uma progressão aritmética (PA)

18. Resposta:

Seja $a_n = q^n$; para que a sucessão dada seja infinitamente grande é necessário que

$$\lim(a_n) = \lim(q^n) = \infty; \Rightarrow |q| > 1$$

19. Resposta:

$$\text{Dado o termo geral } b_n = \frac{3n}{n+1}; b_{11} = ? \Rightarrow b_{11} = \frac{3.11}{11+1} = \frac{33}{12}, \text{ o termo de ordem}$$

$$11 \text{ é igual a } \frac{33}{12}$$

20. Resposta:

$$\text{Começamos } b_n = \frac{3n}{n+1}; b_{11} = ? \Rightarrow b_{11} = \frac{3.11}{11+1} = \frac{33}{12} \text{ por escrever os múltiplos de}$$

2 com dois algarismos:

10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, ..., 98

Fica claro que a sequência de números acima é uma P.A com primeiro termo igual a 10



Exemplo:

$$C_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!2!} \Leftrightarrow C_2^4 = \frac{4!}{2! \times 2!}$$

$$C_2^4 = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2 \times 1 \times 2!} \Leftrightarrow C_2^4 = \frac{12}{2}$$

$$C_2^4 = 6$$

Binómio de Newton

Binómio de Newton é uma expressão que envolve combinação simples, essa expressão é usada para desenvolver os polinómios que aparecem sob forma de binómios potenciais

$$(x+y)^n = C_0^n x^n + \dots + C_n^n y^n$$

Definição clássica de Probabilidade

Se os acontecimentos elementares forem equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento A é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimento e o número de casos possíveis.

$$P(A) = \frac{n(C.F)}{n(C.P)}, n(C.F) \geq n(C.P)$$

Límite de uma sucessão**Sucessão convergente**

Diz-se que uma sucessão (a_n) converge para um número real L (escreve-se $\lim a_n = L$)

Se, por muito pequeno que seja o número positivo δ se existir uma ordem p a partir da qual se tem

$|a_n - L| < \delta$, isto é, $|a_n - L|$ torna-se tão pequena quando se queira.

Progressão aritmética (PA)

Uma sucessão (a_n) é uma progressão aritmética (P.A) se existe um número real r , tal que

$$a_{n+1} - a_n = r, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ao número r chama-se diferença da progressão aritmética.

Termo geral de P.A:

$$a_n = a_1 + (n-1) \times r$$

A soma de n termos consecutivos de uma progressão aritmética é dada por:

e diferença igual a 2 unidades. Portanto
 $u_n = u_1 + (n-1) \times d \Rightarrow u_n = 10 + (n-1)2 \Leftrightarrow u_n = 2n + 8$ Fazendo

$$u_n = 98 \Rightarrow 2n + 8 = 98 \Leftrightarrow 2n = 98 - 8 \Leftrightarrow 2n = 90 \Leftrightarrow n = \frac{90}{2} \Rightarrow n = 45,$$

portanto são 45 múltiplos de 2 que podem ser escritos com dois algarismos.

21. Resposta:

- i. No primeiro dia o empregado recebeu 200.00MT
- ii. No segundo dia o empregado recebeu 400.00 MT
- iii. No terceiro dia o empregado recebeu 800.00Mt, portanto,

$$u_1 = 200, u_2 = 400, u_3 = 800, ..$$

$$\frac{u_3}{u_2} = \frac{u_2}{u_1} \Rightarrow \frac{800}{400} = \frac{400}{200} = 2 \Rightarrow q = 2$$

Trata-se de uma progressão geométrica, sendo assim teremos a soma de 10 termos de uma P.A,

$$S_n = u_1 \frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow S_{10} = 200 \frac{1-2^{10}}{1-2} \Leftrightarrow S_{10} = 200 \frac{1-1024}{-1} \Leftrightarrow S_{10} = 200 \frac{-1023}{-1} = 204600$$

22. Resposta:

Uma função diz-se **par** quando objectos simétricos do mesmo domínio correspondem a imagens simétricas do mesmo contradomínio. Geometricamente o gráfico de uma função **par** é simétrico em relação ao eixo das ordenadas.

23. Resposta:

Observando atentamente o gráfico da função, fica claro que o ponto de descontinuidade é de abscissa $x = 2$.

24. Resposta:

O gráfico intersecta no eixo das abcissas no ponto com abscissa $x = 2$, logo o conjunto solução da equação é $\{2\}$.

25. Resposta:

O contradomínio da função é dado por $D'_f =]-\infty; 0] \cup \{3\}$

26. Resposta:

A função $f(x)$ é positiva se $x \in]2, +\infty[$ ou se $x > 2$

27. Resposta:

Calculando o valor de $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x - 1} \right)$, teremos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x - 1} \right) = \frac{\infty^2 + 1}{\infty - 1} = \frac{\infty \times \infty + 1}{\infty - 1} = \frac{\infty + 1}{\infty} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right], \text{ Este resultado não}$$

é um número real, chama-se indeterminação. Normalmente quando se chega a este tipo de resultado levanta-se a indeterminação resolvendo o limite, assim:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x \left(x + \frac{1}{x} \right)}{x \left(1 - \frac{1}{x} \right)} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \right) = \frac{\infty + \frac{1}{\infty}}{1 - \frac{1}{\infty}} = \frac{\infty + 0}{1 - 0} = \frac{\infty}{1} = \infty$$

28. Resposta:

Vamos determinar o valor de $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 - 1}{x^3 + 1} \right)$, assim,



$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \times r}{2} \times n$$

Progressão geométrica (PG)

Uma sucessão (a_n) é uma progressão geométrica (P.G) se existem um número real r , tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ao número r chama-se diferença da progressão aritmética.

Termo geral de P.G:

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

A soma de n termos consecutivos de uma progressão geométrica é dada por:

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$$

Algumas operações com infinitos

$$k \times \infty = \infty$$

$$\infty^k = \infty$$

$$\infty \times \infty = \infty$$

$$k + \infty = \infty$$

$$k - \infty = -\infty$$

$$\frac{\infty}{k} = \infty$$

$$\frac{k}{\infty} = 0$$

Limite de uma função real de variável real

Dada uma função $f(x)$ definida no domínio D_f , a , L são números reais. Diz-se, L é o limite da função $f(x)$ quando x tende para a (a não necessariamente pertencente ao domínio de $f(x)$) sse:

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0: 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$

e escreve-se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Conheça alguns limites notáveis

- Limites Neperianos**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{f(x)}\right)^{f(x)} = e^k$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 - 1}{x^3 + 1} \right) = \frac{(-1)^2 - 1}{(-1)^3 + 1} = \frac{1-1}{-1+1} = \left[\frac{0}{0} \right]. \text{ Este resultado não é um}$$

número real, chama-se indeterminação. Normalmente quando se chega a este tipo de resultado levanta-se a indeterminação resolvendo o limite, assim:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 - 1}{x^3 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x-1}{x^2 - x + 1} \right) \text{ por concretização}$$

$$\text{da variável } x \text{ por número } -1 \text{ tem-se: } \frac{-1-1}{(-1)^2 - (-1) + 1} = \frac{-2}{1+1+1} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$$

29. Resposta:

Vamos determinar o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(3x)}{3x^3 + 3x} \right)$, assim

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(3x)}{3x^3 + 3x} \right) = \frac{\sin(3 \cdot 0)}{3 \cdot 0^3 + 3 \cdot 0} = \frac{\sin(0)}{3 \cdot 0 + 0} = \left[\frac{0}{0} \right], \text{ levantando a indeterminação}$$

teremos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(3x)}{3x^3 + 3x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(3x)}{3x(x^2 + 1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(3x)}{3x} \right) \times \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2 + 1} \right) = 1 \times \frac{1}{0^2 + 1} = 1 \times \frac{1}{1} = 1$$

30. Resposta:

Consideremos a função real de variável real definido por troços ou ramos:

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{se } x < k \\ x+3, & \text{se } x \geq k \end{cases} \quad \text{Para que a função } f(x) \text{ seja continua em conjunto de}$$

números reais é necessário que se cumpra a seguinte condição:

$$\lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k). \text{ Neste caso para, a condição}$$

$$\lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^+} f(x) \text{ equivale afirmar que existem o limite de } f(x) \text{ no ponto de abscissa } x=k, \text{ então podemos escrever}$$

$$\lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^+} f(x) \Rightarrow 2k-1 = k+3 \Leftrightarrow 2k-k = 3+1 \Rightarrow k = 4$$

31. Resposta:

A função não é derivável no ponto de onde ela não é definida, ou seja uma função real de variável real não é definida $f(x) = x+3 \Rightarrow f(k) = k+3$ no ponto onde não é possível traçar uma recta tangente, portanto no ponto $x=1$

32. Resposta:

A função admite primeira derivada em todo $\mathbb{R}$, excepto no ponto de abscissa $x=1$, isto é em $x \in]-\infty, 1[\cup]1; +\infty[$, visto que traçando uma recta tangente em qualquer abscissa deste intervalo, a recta forma um ângulo com o sentido positivo de eixo das abscissas maior que 90° .

33. Resposta:

Dada a função $f(x) = \cos(2x - \pi)$, derivando-a teremos:

$$f(x) = \cos(2x - \pi) \Rightarrow f'(x) = [\cos(2x - \pi)]' = (2x - \pi)' \cdot (-\sin(2x - \pi)) = -2\sin(2x - \pi),$$

$$\text{Logo: } f'(x) = -2\sin(2x - \pi)$$

34. Resposta:

Dada a função $f(x) = 2x^4 + x^3 - x$, vamos determinar a primeira derivada desta função:

$$f'(x) = (2x^4 + x^3 - x)' \Leftrightarrow f'(x) = 2 \cdot 4x^3 + 3x^2 - 1 \Leftrightarrow f'(x) = 8x^3 + 3x^2 - 1$$

, Vamos determinar a segunda derivada,



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

• **Limites trigonométricos**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Continuidade de funções reais de variáveis reais

Uma função real de variável real é contínua num ponto de abscissa $x = a$ sse,

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

Se existir a diferença entre os membros dessa igualdade, a função é descontínua no ponto de abscissa a

Cálculo diferencial

• **Definição da derivada de uma função**

Dada uma função $F(x)$ definida no domínio D_F , sendo a abscissa de um ponto P , tal que $a \in D_F$. A derivada da função $F(x)$ no ponto P é dada pela expressão:

$$F'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{a-h} \quad \text{ou}$$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{x-h} = f'(x)$$

A função $f(x)$ chama-se a primeira derivada.

Regras de derivação imediata

Função constante

$$f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0$$

Função potência

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

Função polinomial

Função composta

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \Rightarrow$$

$$f''(x) = (8x^3 + 3x^2 - 1) \Leftrightarrow f''(x) = 3.8x^2 + 2.3x - 0$$

$$\Leftrightarrow f''(x) = 24x^2 + 6x$$

35. Resposta:

Seja $f(x) = x^3 - 12x$, $f'(x) = (x^3 - 12x) \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 - 12$, vamos anular a primeira (igualar a zero a primeira derivada) derivada, assim,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 = \frac{12}{3} \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x_1 =$$

vamos determinar a imagem de -2 e 2 pela função $f(x)$, assim,

$$f(x) = x^3 - 12x, \text{ se } x = -2 \Rightarrow f(-2) = (-2)^3 - 12.(-2) = -8 + 24 = 16$$

$$f(x) = x^3 - 12x, \text{ se } x = 2 \Rightarrow f(2) = 2^3 - 12.2 = 8 - 24 = -16$$

Logo o extremo máximo da função é igual a 16 e extremo mínimo da função é igual a -16.

• **Somente para secção de Letras**

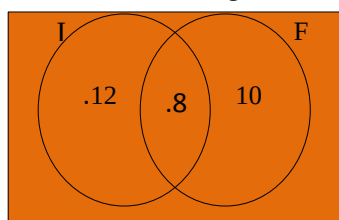
36. Resposta:

$$\frac{P(x)}{x^2 + 1} = 2x - 1 \wedge R(x) = x + 1, \Rightarrow P(x) = (x^2 + 1)(2x - 1) + (x + 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(x) = 2x^3 + 2x - x^2 - 1 + x + 1 \Leftrightarrow P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x$$

37. Resposta:

Vamos construir um diagrama de Venn:



$$n(I) = x - n(I \cap F) \Rightarrow 12 = x - 8 \Leftrightarrow x = 12 + 8 \Rightarrow x = 20. \text{ São 20 turistas que falam, inglês.}$$

38. Resposta:

Fazendo uma leitura rigorosa no gráfico podemos concluir que $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 0$

39. Resposta:

Seja $f(x) = x^2 + 3x$, vamos determinar o valor de $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \right)$,

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{(x^2 + 3x) - (3^2 + 3.3)}{x - 3} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{(x^2 + 3x - 18)}{x - 3} \right) = \frac{3^2 + 3.3 - 18}{3 - 3} = \frac{18 - 18}{0} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

Levantando a indeterminação teremos,

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 + 3x - 18}{x - 3} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{(x - 3)(x + 6)}{x - 3} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 6) = 3 + 6 = 9$$

40. Resposta:

Vamos chamar desses números por x e y , então teremos:

$$x + y = 5 \wedge P = xy \Rightarrow y = 5 - x \Rightarrow P(x) = x(5 - x) \Leftrightarrow P(x) = -x^2 + 5x,$$

no problema foi dito que o produto entre x e y é um máximo, então:

• **Somente Para Secção de Ciências**

36. Resposta:



$$f'(x) = (a_0 x^n)' + (a_1 x^{n-1})' + \dots + (a_n)'$$

Derivada da soma

$$f(x) = u \pm v \Rightarrow f'(x) = u' \pm v'$$

Função afim

$$f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) = a$$

Função produto

$$f(x) = u \times v \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$$

Função quociente

$$f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Função composta

$$f(x) = u^n \Rightarrow f'(x) = nu^{n-1}u'$$

Derivada da função exponencial**Função exponencial de base e**

$$f(x) = e^u \Rightarrow f'(x) = u'e^u$$

Função exponencial de base a

$$f(x) = a^u \Rightarrow f'(x) = u'a^u \ln(a)$$

Derivada da função logarítmica**Função logarítmica de base e**

$$f(x) = \ln(u) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{u}$$

Função logarítmica de base a

$$f(x) = \log_a(u) \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{u'}{u \ln(a)}$$

Derivada da função trigonométrica**Função seno**

$$f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$$

$$f(x) = \sin(u) \Rightarrow f'(x) = u' \cos(u)$$

Função co-seno

$$f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x)$$

$$f(x) = \cos(u) \Rightarrow f'(x) = -u' \sin(u)$$

Intervalos de monotonia e primeira derivada de uma função**Teorema**

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$.

- Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in]a, b[$, então f é estritamente crescente

Seja $f(x) = \cos(kx)$, $T = 5\pi$; $k = ?$ com $k \in \mathbb{R}^+$

A fórmula para determinar o período da função trigonométrica seno e co-seno é:

$$T = \frac{2\pi}{|k|},$$

$$T = \frac{2\pi}{|k|} \Rightarrow 5\pi = \frac{2\pi}{|k|} \Leftrightarrow 5 = \frac{2}{|k|} \Leftrightarrow 5|k| = 2 \Leftrightarrow |k| = \frac{2}{5} \Leftrightarrow k = \frac{2}{5} \vee k = -\frac{2}{5},$$

Tendo em consideração que k é um número real positivo, então $k = \frac{2}{5}$

Os dois números procurados são: $\frac{5}{2}$ e $\frac{5}{2}$

• **Somente Para Secção de Ciências**

36. Resposta:

Seja $f(x) = \cos(kx)$, $T = 5\pi$; $k = ?$ com $k \in \mathbb{R}^+$

A fórmula para determinar o período da função trigonométrica seno e co-seno é:

$$T = \frac{2\pi}{|k|},$$

$$T = \frac{2\pi}{|k|} \Rightarrow 5\pi = \frac{2\pi}{|k|} \Leftrightarrow 5 = \frac{2}{|k|} \Leftrightarrow 5|k| = 2 \Leftrightarrow |k| = \frac{2}{5} \Leftrightarrow k = \frac{2}{5} \vee k = -\frac{2}{5},$$

Tendo em consideração que k é um número real positivo, então $k = \frac{2}{5}$

37. Resposta:

Dado que :

$$P(-3; -1) \wedge Q(0; 2)$$

$$(x_M; y_M) = \left(\frac{0 - (-3)}{2}; \frac{2 - (-1)}{2} \right) \Leftrightarrow (x_M; y_M) = \left(\frac{0+3}{2}; \frac{2+1}{2} \right) \Rightarrow (x_M; y_M) = \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right)$$

38. Resposta:

Dada a função $f(x) = \frac{2}{x-3}$, a equação da assíntota vertical dessa função é

$x = 3$, o valor de abcissa que anula o denominador.

39. Resposta:

Vamos determinar a função inversa de $f(x) = 2^x - 1$, seja $f(x) = y$, isso implica que

$$y = 2^x - 1 \Leftrightarrow 2^x - 1 = y \Leftrightarrow 2^x = y + 1 \Leftrightarrow x = \log_2(y+1) \Leftrightarrow y^{-1} = \log_2(x+1) \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_2(x+1)$$



em $[a, b]$

- Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in]a, b[$, então f é estritamente decrescente em $[a, b]$

Máximos e mínimos absolutos e primeira derivada de uma função

Teorema

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e tem um máximo ou um mínimo em c do intervalo $]a, b[$, então $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Um elemento c do domínio de uma função f é um ponto crítico de f se então $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Álgebra

Polinómios

É uma soma de monómios não semelhantes

Um polinómio de uma variável tem a seguinte fórmula geral:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

Onde

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N}$$

Regra de Ruffin

É uma regra que é usada para determinar o quociente entre o polinómio de grau n e um binómio linear $x - a$.

Teoria de Conjunto

Conjunto é uma colecção de objectos da mesma espécie.

Operações sobre conjuntos

Reunião de conjuntos

Intersecção de conjuntos

Diferença de conjuntos

Complementar de conjuntos

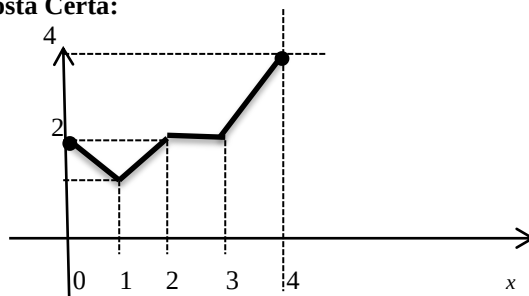
Geometria analítica

Dado um ponto $P(x_0, y_0)$ e recta r :

$Ax + Bx + C = 0$ no plano, a distância entre o ponto P e a recta r representada por $d(P, r)$ é dada por:

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

40. Resposta Certa:



FIM

