Matemática I - Polimodal

Proyecto pedagógico con modalidad a distancia para la terminalidad de estudios de EGB3 y Educación Polimodal EDITEP

Cristina Adunka, Gabriela Mattiello,
Adriana Moreno, Ana Repetto

Este libro se edita como material de aprendizaje destinado al personal de seguridad pública de la Provincia de Mendoza. Su finalidad es la de orientar los procesos educativos desarrollados en el marco del proyecto pedagógico con modalidad a distancia para la terminalidad de estudios de EGB3 y Educación Polimodal –EDITEP–, implementado a partir de la firma del Convenio entre la Universidad Nacional de Cuyo y el Gobierno de la Provincia de Mendoza, en octubre de 2003.

CICUNC
Centro de Información y Comunicación de la Universidad Nacional de Cuyo

EDIUNC
Editorial de la Universidad Nacional de Cuyo

REUN

ISBN 950-39-0204-5

Educación a Distancia

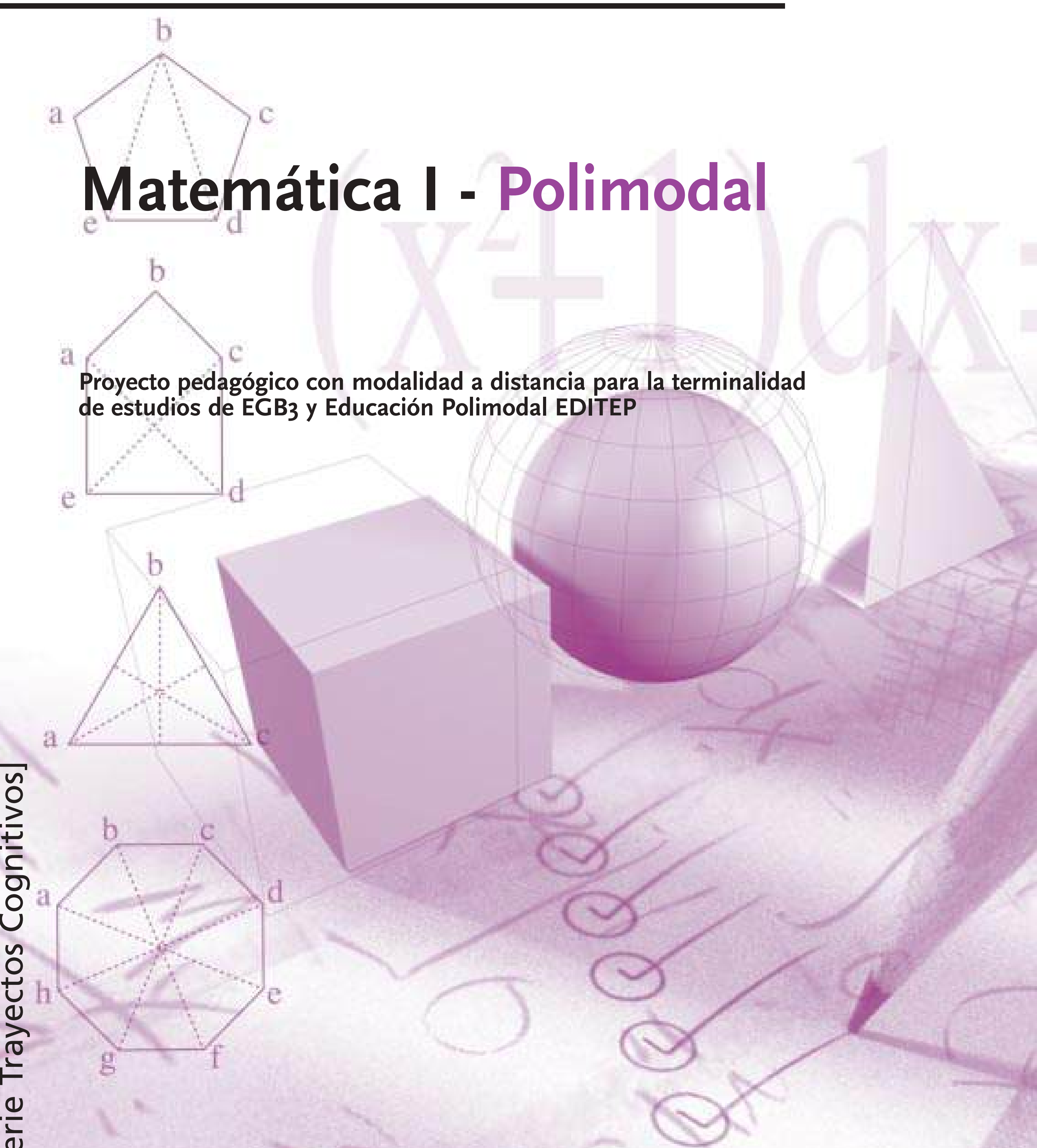
Matemática I - Polimodal

[Serie Trayectos Cognitivos]

EDIUNC

Cristina Adunka, Gabriela Mattiello, Adriana Moreno, Ana Repetto

Matemática I - Polimodal



Proyecto pedagógico con modalidad a distancia para la terminalidad de estudios de EGB3 y Educación Polimodal EDITEP

GOBIERNO DE MENDOZA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

Matemática I • Polimodal

Proyecto pedagógico con modalidad a distancia para la terminalidad de estudios de ECB3 y Educación Polimodal EDITEP

Universidad Nacional de Cuyo (Mendoza, República Argentina)

Rectora: Dra. María Victoria Gómez de Erice
Vicerrector: Ing. Arturo Somoza
Secretaria de Extensión Universitaria: Mgter. Rosa Fader de Guiñazú
Directora General del CICUNC: Lic. Martina Funes
Directora de Educación a Distancia: Mgter. María Fernanda Ozollo
Director de Nuevas Tecnologías: Mgter. Ornar Arancibia

Gobierno de Mendoza

Gobernador: Ing. Julio Cobos
Ministro de Justicia y Seguridad Social: Dr. Miguel Ángel Bondino
Directora General de Escuelas: Lic. Emma Cunietti
Secretario de Relaciones con la Comunidad, MJyS: Lic. Raúl Levrino
Subsecretario de Administración y Gestión Educativa, -DGE: Lic. Flavio Antonio Arjona

Proyecto EDITEP

Responsables del Proyecto
Responsable Institucional: Mgter. Rosa Fader de Guiñazú
Directora del Proyecto: Mgter. María Fernanda Ozollo
Coordinadora General del Proyecto: Lic. Mónica Matilla
Coordinador Tecnológico: Mgter. Ornar Arancibia

Comité Estratégico del Proyecto
Gobierno de Mendoza - Ministerio de Seguridad y Justicia - : Lic. Luis Romero
Gobierno de Mendoza - Dirección General de Escuelas-: Prof. Eduardo Andrade
Universidad Nacional de Cuyo: Lic. Mónica Matilla, Mgter. María Fernanda Ozollo

EDIUNC

Editorial de la Universidad Nacional de Cuyo
Director: Prof. René Gotthelf

CICUNC
EDIUNC Editorial de la Universidad Nacional de Cuyo
REUN
Dirección General de Escuelas Gobierno de Mendoza
Ministerio de Justicia y Seguridad Gobierno de Mendoza

Universidad Nacional de Cuyo
Secretaría de Extensión Universitaria

Matemática I - Polimodal

Proyecto pedagógico con modalidad a distancia para la terminalidad de estudios de EGB3 y Educación Polimodal EDITEP

Cristina Adunka, Gabriela Mattieilo,
Adriana Moreno, Ana Repetto

EDIUNC
Mendoza, 2006

Matemática I - Polimodal

Coordinación de la elaboración del libro
Claudia Restiffo

Asesora experta
Norma Pacheco

Producción de textos y procesamiento didáctico
Cristina Adunka, Gabriela Mattiello,
Adriana Moreno, Ana Repetto

Procesamiento didáctico final
Cristina Adunka, Gabriela Mattiello,
Adriana Moreno, Ana Repetto

Corrección de estilo
Gonzalo Casas

Diseño de cubierta e interior
Coordinador
Claudio E. Cicchinelli
Diseñadores
Carolina Chiconi, Fabricio de la Vega, Natalia Lobarbo,
Lorena Pelegrina

Primera edición. Mendoza, 2006

Publicación de la Secretaría Académica de la Universidad Nacional de Cuyo
Serie Trayectos Cognitivos, N° 31

Impreso en Argentina - Printed in Argentina
ISBN 10: 950-39-0204-05 - ISBN 13: 978-950-39-0204-2
Queda hecho el depósito que marca la ley 11.723
EDIUNC, 2006
Centro Universitario, 5500 Mendoza
República Argentina

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En este curso, nosotros le proponemos profundizar lo que sabe y avanzar en el aprendizaje de nuevos conceptos y procedimientos que le sirvan de herramientas para su trabajo y su vida cotidiana y, a su vez, que le permitan resolver con más seguridad las situaciones que se presentan en los contenidos propios de esta área de estudio.

¿Qué esperamos que logre cuando termine este curso?

Al final de este curso esperamos que pueda:

- Identificar e interpretar los conocimientos referidos a números reales y a sus operaciones, reconociendo los algoritmos y los procedimientos relacionados vinculándolos al cálculo de distintas medidas.

- Comprender y saber resolver problemas, seleccionando el tipo de razonamiento o argumentación que requiera la situación, pudiendo, además, estimar los resultados, alcanzarlos, interpretarlos y analizar su coherencia.

- Emplear sistemas de ecuaciones e inecuaciones para modelizar y resolver situaciones reales del entorno cotidiano, usando un lenguaje matemático adecuado.

- Identificar, definir, graficar, describir e interpretar distintos tipos de funciones asociándolas a situaciones reales.

¿Qué vamos a estudiar? ¿Cómo vamos a hacerlo?

El curso se ha organizado en 5 ejes de contenidos: el primero se denomina Números Reales. En el segundo trabajaremos las Matices, en el tercero nos abocaremos a Expresiones algebraicas, en el cuarto Funciones y en el quinto Ecuaciones

Esperamos que con este curso pueda descubrir los porqué de algunos procedimientos matemáticos. Generalmente, será usted el que, a través de algunas actividades o propuestas, construirá distintas nociones y conceptos. Por ello, es muy importante que siga, paso a paso, las indicaciones de este material, para que pueda construir, junto con sus compañeros y profesores, cada uno de los aprendizajes.

Las actividades que se proponen tienen dos funciones principales: que usted pueda aplicar y relacionar lo que sabe o ha estudiado anteriormente y que pueda construir nuevos aprendizajes de contenidos que probablemente desconoce. Le recomendamos que no saltee partes del material porque las necesitará para poder avanzar con lo que se encuentra más adelante.

En algunos casos trabajaremos con nociones que por su complejidad o por su origen no vamos a comprobar; las aceptaremos como verdaderas. Por último, le queremos decir que en matemática, como en muchas materias, el error es parte del aprendizaje. Necesitará, para avanzar en el material, hacer algunas "pruebas" de lo que está estudiando. Realice todos los intentos necesarios, pero nunca baje los brazos.

¿Cómo está organizado este material?

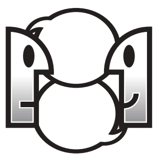
El material, entonces, está organizado en 5 capítulos, uno para cada eje de contenidos, según señalábamos anteriormente:

Eje I. Número reales
Eje II. Matices
Eje III. Expresiones algebraicas
Eje IV. Funciones
Eje V. Ecuaciones

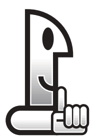
Recuerde que todas las actividades que usted realizará se presentan con un ícono. Estos íconos son:

PENSAR. Este ícono indica que tiene que detenerse un momento a analizar detenidamente lo que ha leído. En el caso de Matemática, es fundamental que lea la información que indica este ícono y la memorice también, porque en ella se incluye la "formalización" de lo trabajado, es decir, su conceptualización en términos matemáticos.

TRABAJAR EN FORMA INDIVIDUAL. Le indica que la actividad de aprendizaje propuesta la realizará usted solo.



TRABAJAR EN FORMA GRUPAL. Significa que la actividad de aprendizaje propuesta, en este caso, la realizará con sus compañeros.



RECORDAR. Este ícono presenta información resumida e importante. Puede tratarse de algo que usted ya aprendió antes, en este curso o en otros anteriores, y que ahora va a necesitar usar nuevamente. También puede tratarse de algo que aprenderá en este curso y que deberá recordar en su desarrollo.

LEER. Indica la lectura de otros textos especiales para comprender los temas. Son textos obtenidos de otros materiales y que se citan en este trabajo porque son necesarios para comprender los temas.

Le recordamos también que usted, dentro del material, dispone de espacios en blanco en cada hoja donde puede realizar los cálculos que necesite para resolver los ejercicios. También encontrará, al finalizar cada eje, hojas con líneas de punto para tomar apuntes de las explicaciones de su profesor. Puede anotar también allí sus dudas, preguntas: las ideas que vayan apareciendo a medida que lee el material; justamente para esto está reservado el espacio de NOTAS.

¿Cómo trabajaremos?

Este curso que hoy comienza está pensado para trabajar con **modalidad a distancia**. Usted se preguntará: ¿qué características tiene esta modalidad? Pues bien, esto significa que no asistirá todos los días a clases durante cuatro o cinco horas, sino que irá realizando el curso con el apoyo de tres ayudas valiosas que le sugerimos aproveche al máximo:

a) Por un lado, las **clases** con su profesor y su grupo de compañeros, donde recibirá las explicaciones de los contenidos y se realizarán las actividades previstas. En estos encuentros podrá preguntar todo lo que no entiende. No dude en hacerlo, su profesor está para ayudarlo en su proceso.

b) Por otro lado, tendrá a su disposición este **material**, para que lo lea y vaya siguiendo el curso, tanto en las clases como en las horas de estudio que deberá dedicarle diariamente. Este curso le demandará entre 4 y 6 horas de estudio por semana. Comience a organizar sus tiempos para llevarlo al día.

c) Y de ahora en adelante aparece una nueva figura en su proceso de aprendizaje: EL TUTOR. El tutor es un profesional que lo acompañará en todo su proceso de aprendizaje, tanto en este curso como en todos los que realice dentro del **primer año de Polimodal**. Seguramente usted se preguntará: ¿cómo hago para estudiar?, ¿cómo organizo mi tiempo para llevar al día el estudio de los cinco cursos que forman el primer año de Polimodal?, ¿de qué se trata esto de una modalidad a distancia?, ¿qué hago si tengo dudas sobre los textos del material o alguna de sus actividades y falta tiempo hasta que vea al profesor en las clases? Seguramente estas y otras cuestiones pueden aparecer a medida que vaya realizando el material. Es justamente el tutor el que estará para solucionar esto. Usted se comunicará con él a través del "campus virtual" que la Universidad Nacional de Cuyo ha creado especialmente para este proyecto. No dude en consultar a su tutor; él será su compañero en este camino y tiene la tarea de colaborar con usted para que tenga la menor cantidad de inconvenientes posibles y pueda resolver sus dudas.

?

primer año del Polimodal

En el primer año del Nivel Polimodal usted desarrollará los siguientes cursos: Matemática I, Ciencias Naturales I, Historia Argentina, Democracia y Derechos de Primera Generación, Problemáticas y Políticas Sociales, Lengua: Comprensión y Producción I.

¿Cómo vamos a evaluar este curso?

En este curso vamos a tener dos tipos de evaluaciones:

a) de proceso
b) de resultado

a) Evaluaciones de proceso

Como usted sabe, cada curso se organiza en ejes de contenidos dentro de los cuales hay distintas actividades de aprendizaje. Por cada eje de contenidos tendrá que realizar "trabajos prácticos" que entregará a su tutor a través del campus virtual. Él le indicará cuáles son y en qué momentos se los debe entregar. Es por eso que resulta importantísimo que no pierda el contacto con él y entre al campus periódicamente. Estos trabajos prácticos serán corregidos y se les asignará una nota numérica.

A su vez, para cada eje de contenidos le propondremos una evaluación sobre todo lo desarrollado dentro del mismo y que usted ha ido estudiando con el material. Según el eje, usted deberá resolver esta evaluación de una de estas dos formas posibles:

• Con el profesor, durante las clases.

• O bien en su casa. En este caso, su tutor le enviará a través del campus virtual la evaluación y usted la resolverá y entregará en papel a su profesor durante las clases.

Tanto su profesor como el tutor le irán indicando las fechas y cuál de estas dos formas se utilizará para realizar las evaluaciones. Estas evaluaciones de eje serán corregidas y también se les asignará una nota numérica.

RECORDAR

Con las notas de los trabajos prácticos y la de la evaluación de eje se hará un promedio numérico y así se obtendrá la calificación que le corresponde a ese eje de contenidos. De la misma manera se procederá con todos los ejes previstos para el curso.

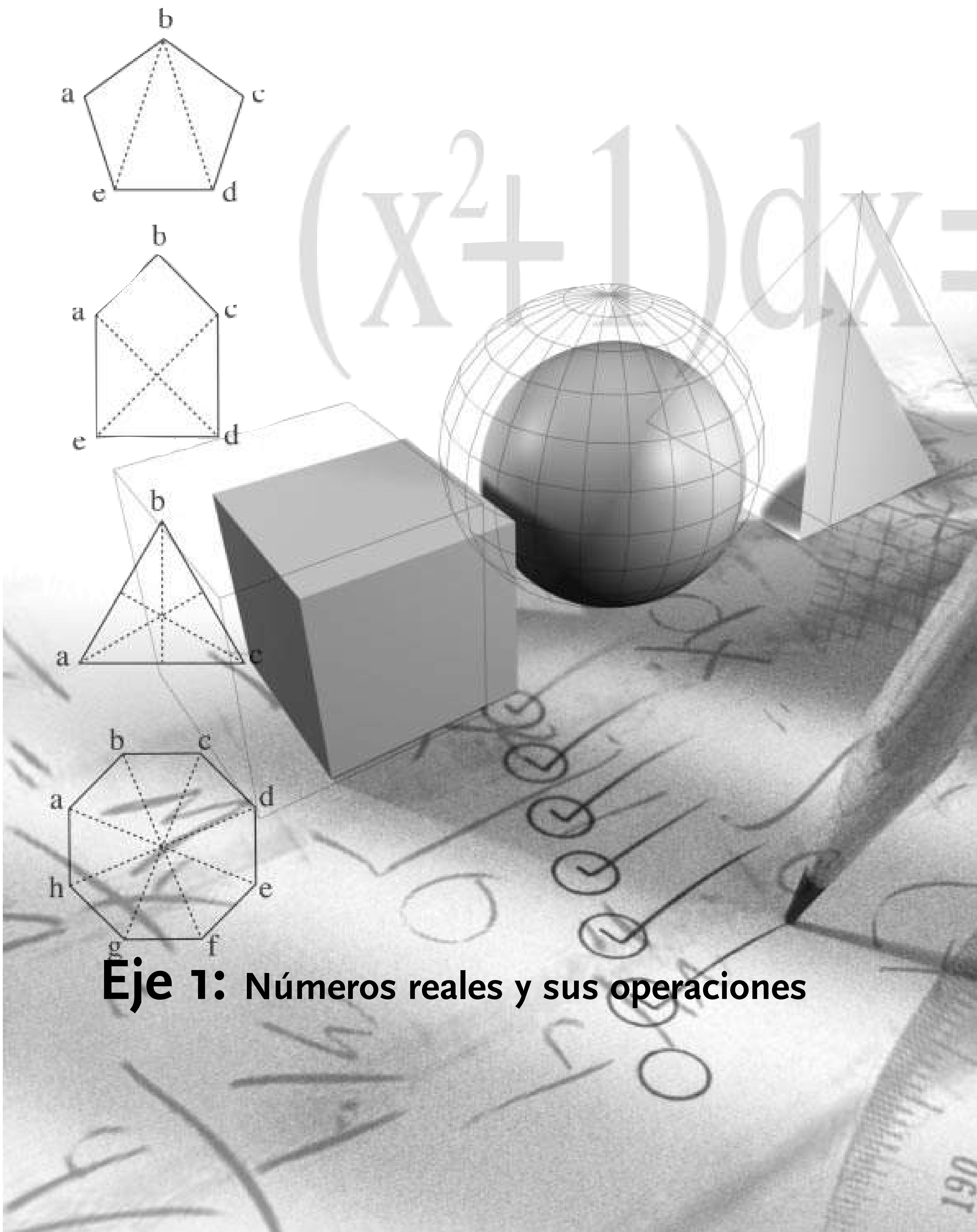
b) Evaluación de resultado

Al finalizar el curso se realizará una evaluación integradora, es decir, una evaluación que nos permita conocer cómo ha sido su proceso en el aprendizaje de todos los contenidos del curso. Esta evaluación se hará siempre en las clases con su profesor y también será corregida con una calificación numérica.

RECORDAR

La calificación definitiva del curso resultará de promediar las notas que obtuvo en cada eje de contenidos con la que obtuvo en la evaluación integradora.

En todos los casos, para calificar utilizaremos una escala numérica del 1 al 10. Usted deberá obtener como mínimo un 7 para aprobar el curso. En caso de no aprobar en esta instancia, tendrá derecho a una "evaluación recuperatoria", es decir que tendrá tiempo para volver a estudiar el material antes de ser evaluado nuevamente. Esto también se lo informará su tutor.



Eje 1: Números reales y sus operaciones

LOS CONJUNTOS NUMÉRICOS

NOTAS

Un pequeño comentario acerca de lo que usted va a realizar en este comienzo. Trabajaremos con los distintos conjuntos de números o **conjuntos numéricos**. Lo que buscamos es que conozca e identifique con claridad los números reales. Para referirnos al conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) consideraremos situaciones que implican medidas de temperaturas, porcentajes, el cálculo de gastos, medidas de la longitud de lados de polígonos, situaciones todas que requieren de números.

El conjunto de los números reales es un conjunto formado por reunión de otros conjuntos numéricos y para referirnos a cada uno de esos conjuntos utilizaremos letras mayúsculas. Así por ejemplo usaremos $\mathbb{N}$ para designar el conjunto de números naturales, es decir el conjunto formado por los números: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; ....., que son los números que generalmente se emplean para contar.

Por tratarse, el contar, de una necesidad del hombre desde sus primeras incursiones en lo numérico es que comenzamos identificando el conjunto de los números naturales, distinguiendo sus diferentes usos.

NÚMEROS NATURALES ($\mathbb{N}$)

ACTIVIDADES

Situación 1

Juan Gonzáles	*$50*
Martín Segura	*$50*
Nicolás Arenas	*$50*
Sergio Bustamante	*$50*
Daniel Casas	*$50*
Néstor Domínguez	*$50*

Andrea es la tesorera de un grupo de amigos que comparten salidas a la montaña. Después de una reunión registró el aporte de cada uno de los integrantes.

Como Andrea es una persona muy ordenada para llevar las finanzas, hace el registro de los aportes en una lista, numerando y ordenando cada integrante por orden alfabético a partir de la primera letra del apellido.

1. Complete la siguiente tabla teniendo en cuenta el modo en que Andrea confecciona la tabla.

Nº de orden	*Apellido y nombre*	*Aporte*
1	*Arenas Nicolás*	*$ 50*

2. ¿Qué lugar de la lista ocupa Néstor Domínguez?

3. ¿Cuántos integrantes tiene este grupo?

Al resolver esta situación usted ha utilizado números: para responder a la primera pregunta tuvo que ordenar y numerar a los integrantes ordenados alfabéticamente y para contestar a la segunda pregunta, después de contar a los integrantes, indicó el número de integrantes que tiene el grupo. Pues bien, los números que se utilizan para contar - enumerar -es decir para responder a la pregunta ¿cuántos?- y para numerar -es decir para responder a la pregunta ¿en qué lugar?- son los números naturales.

PENSAR

El conjunto de los números naturales se simboliza con la letra $\mathbb{N}$, *y su notación es:*

$\mathbb{N}$= *{0, 1, 2, 3, 4…} Se lee: el conjunto* $\mathbb{N}$ *es igual al conjunto formado por los elementos 0, 1, 2,….*

Los puntos suspensivos indican que se pueden seguir escribiendo más elementos, es decir que el conjunto tiene infinitos elementos.

NÚMEROS ENTEROS ($\mathbb{Z}$)

ACTIVIDADES

Situación 1

Seguimos con las inquietudes de este grupo de amigos andinistas. Durante la misma reunión propusieron realizar una salida que, de acuerdo a los cálculos que hicieron, tiene un costo aproximado de $400 para el grupo. ¿Le parece que con lo recaudado pueden realizar esta salida? ¿Por qué?

1. Exprese ahora su respuesta con un número que muestre la situación en que se encuentra el grupo con relación a lo recaudado y el costo aproximado de la salida.

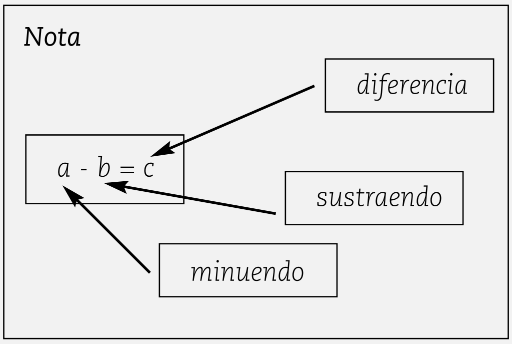
Probablemente su respuesta ha sido negativa, ya que les faltan $100.

Numéricamente se expresa: – 100.

Es más, si deseamos realizar el cálculo que nos permite conocer si les alcanza o falta dinero para realizar la salida se presenta esta situación:

$$300 - 400 = -100$$

Esta diferencia no es un número natural, porque para restar con números naturales es necesario que el minuendo sea mayor o igual que el sustraendo.



Situación 2

Podemos pensar otras situaciones en las que al quererlas expresar numéricamente los números naturales no bastan y que en algunas de ellas sea necesario usar otros números. Por ejemplo, no en todas las siguientes situaciones es posible usar números naturales para expresarlas numéricamente:

*"Se ha **sumergido 10 m**".*

*"Hoy hacen **15° C bajo cero**".*

*Tengo un **saldo deudor de $350**.*

*El Aconcagua está aproximadamente a **7000m sobre el nivel del mar**.*

Para expresar numéricamente situaciones como las anteriores es necesario ampliar el conjunto de los números naturales. ¿Cómo se lleva a cabo esta ampliación? Para cada número natural distinto de cero, se considera **un número llamado "opuesto"**. Entonces el conjunto formado por los números naturales y todos los números opuestos a ellos forman el conjunto de los números enteros.

números opuestos

Los números opuestos son pares de números que están a la misma distancia del cero y tienen distinto signo.

RECORDAR

El conjunto de los números enteros se simboliza con la letra $\mathbb{Z}$, cuya notación es:

$\mathbb{Z} = \{ \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}$

Se lee: el conjunto de los números enteros es igual al conjunto formado por los elementos …-3, -2, -1, 0, 1, …

En el conjunto de los números enteros se pueden considerar dos subconjuntos:

• El conjunto de los números **enteros positivos** ($\mathbb{Z}+$) formado por los números 0, 1, 2, 3, ..

El conjunto de los números enteros positivos coincide con el

NOTAS

conjunto de los números naturales, es decir $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$.

• El conjunto de los números **enteros negativos** ($\mathbb{Z}^-$) formado por los números 0, -1, -2, -3, -4, ..., es decir por los números opuestos a los números naturales.

En símbolos se define el conjunto de los números enteros:

$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{Z}^-$ $\cup$: se lee unión

se lee: el conjunto de los números enteros es igual a la unión del conjunto de los números enteros positivos o naturales y el conjunto de los números enteros negativos.

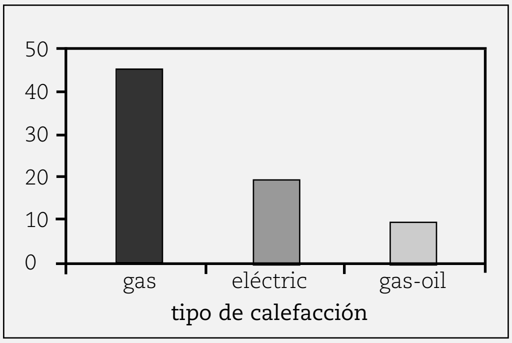
NÚMEROS RACIONALES ($\mathbb{Q}$)

Observará usted que con el conjunto de los números naturales y enteros hemos solucionado problemas propios del quehacer cotidiano como ordenar, interpretar con números negativos situaciones como medidas de temperatura bajo cero, profundidad y altura con respecto al nivel del mar o indicar un saldo deudor, por nombrar algunas. Y además es posible resolver restas entre dos números enteros cualesquiera obteniendo otro número entero. Como verá ahora, a partir del análisis de las siguientes situaciones, será necesario ampliar el conjunto de los números enteros.

ACTIVIDADES

Situación 1

En un pequeño poblado de 75 casas se ha realizado una encuesta acerca del tipo de calefacción que se utiliza. El resultado de la misma se ha interpretado mediante el siguiente gráfico:



1. A partir de los datos del gráfico y teniendo presente la cantidad del total de casas complete:

a) ¿Qué parte del total de las casas se calefaccionan con gas?

....

b) ¿Qué parte del total de las casas se calefaccionan con gas-oil?

....

A continuación se presenta el análisis de las respuestas para que pueda compararlas con las suyas.

Se observa que de las 75 viviendas del poblado, 45 se calefaccionan con gas; es decir que de las 75 casas 45 se calefaccionan con gas, o lo que es equivalente, las $\frac{45}{75}$ partes del total de casas se calefaccionan con gas. Esta *última expresión se lee "las cuarenta y cinco, setenta y cinco avas partes del total de casas del poblado se calefaccionan con gas".*

Haciendo un análisis similar al anterior pero con respecto a la calefacción con gas-oil, se puede asegurar que de las 75 viviendas solamente 10 utilizan el gas-oil como combustible para la calefacción, expresión que es equivalente a $\frac{10}{75}$ (diez setenta y cinco avas) partes del total de las casas se calefaccionan con gas-oil.

Situación 2

1. Analice las siguientes expresiones e indique si es posible interpretarlas mediante un número entero.

*a) Hay un **70%** de probabilidades de que corra viento Zonda en la ciudad de Mendoza.*

....

*b) La temperatura exterior es de **25 grados y medio bajo cero.***

....

c) Martín quiere repartir sus 27 galletas entre sus cinco amigos de manera que cada uno reciba la misma cantidad y no le sobre ninguna.

....

Nuevamente se presentan, a continuación, la interpretación de los puntos de la situación 2, para que usted compare con las expresiones que obtuvo.

En la expresión a),el 70% es posible expresarlo en escritura fraccionaria empleando una fracción con denominador cien, es decir:

$70\% = \frac{70}{100}$

Y este número se interpreta: "después de haber llevado el registro de las condiciones meteorológicas que se presentan, se observa que sobre 100 días con posibilidades de que corriera viento Zonda, solamente corrió viento en 70 oportunidades.

Nota.
Si calcula el cociente de $\frac{70}{100}$ resulta la expresión decimal exacta 0,7 = 0, 70 o sea $\frac{70}{100} = 0,7$

En b) se indica que al pretender medir la cantidad de temperatura indicada el registro que se lee sobre el termómetro está entre los -26ºC y los -25ºC e indica que la cantidad de temperatura es de -25,5ºC y la medida de la temperatura puede escribirse con el número:

- 25,5

Nota.
*25,5 °C es una **cantidad de temperatura**, donde el 25,5 es la **medida** de dicha cantidad (el número), y °C (grados centígrados) es la **unidad** usada **para medir** la temperatura.*

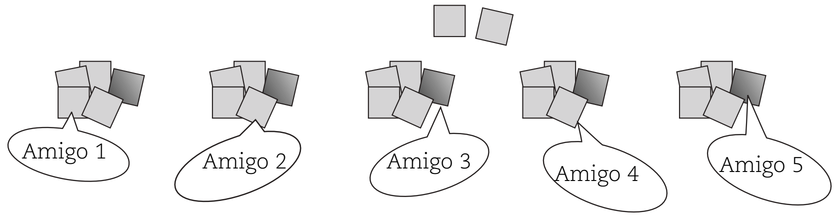
Con respecto al punto c), referido al reparto de las 27 galletas entre 5 amigos, se muestra en la siguiente representación las galletas ya repartidas y dos galletas que sobran. Para terminar

NOTAS

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

NOTAS

de repartir las galletas hay que fraccionar las dos galletas que sobran y repartir las partes obtenidas del fraccionamiento:



Aritméticamente esta acción de repartir implica el cálculo de una división, en este caso:

$27 \div 5 =$

Y advertirá que no existe ningún número entero que al multiplicarlo por 5 le dé como resultado 27.

Usted observará, a través de los ejemplos abordados, que no siempre es posible expresar con los números enteros medidas de cantidades de temperatura, partes de un todo o el cociente exacto entre dos números enteros. En realidad los números que se emplean para resolver estas situaciones son números racionales. Estos números pertenecen al conjunto de los números racionales que se simboliza con la letra $\mathbb{Q}$.

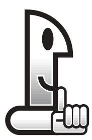
En las situaciones antes analizadas aparecen números racionales expresados con escritura fraccionaria y también con notación o escritura decimal.

Hasta el momento sólo se han analizado situaciones que hacen necesario el empleo de números racionales positivos. Pero otro sería el caso si deseara indicar, por ejemplo, que la temperatura descendió a 3º C y medio por debajo del cero grado centígrado.

Esta cantidad le indica que la cantidad de temperatura está entre los -4º C y los -3º C; exactamente en la mitad.

Numéricamente y de acuerdo a la lectura sobre el termómetro la medida de la temperatura se indica: $-3\frac{1}{2} = -3 + (-\frac{1}{2}) = -\frac{7}{2}$

Y si calcula el cociente indicado $-\frac{7}{2} = -3{,}5$ y con este número se interpreta que la temperatura es de 3,5º C bajo cero, está claro que -3,5 no es un número entero.



RECORDAR

Un número racional escrito en forma fraccionaria es el cociente exacto de dos números enteros con la condición de que el divisor o denominador sea distinto de cero.

NOTAS

¿Los números enteros son racionales?

Para dar respuesta a este interrogante debemos pensar si es posible que un número entero cumpla con la definición de número racional anteriormente recuadrada, para lo cual analizaremos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1

El número entero 3 se puede expresar como el cociente exacto de dos números enteros con denominador distinto de cero como se muestra a continuación:

$3=\frac{3}{1}=\frac{6}{2}=\frac{-9}{-3}$ .. Los puntos suspensivos le indican que se pueden pensar infinitos cocientes exactos entre números enteros que equivalen al número entero 3.

Ejemplo 2

El número entero – 15 se puede expresar como el cociente exacto de dos enteros con denominador distinto de cero como se muestra a continuación:

$-15=-\frac{15}{1}=\frac{30}{-2}=\frac{-60}{15}$ … Los puntos suspensivos le indican que se pueden pensar infinitos cocientes exactos entre números enteros que equivalen a -15.

Proponga usted otros ejemplos.

....

....

....

Fácil es ver que cualquiera sea el número entero que se tome, siempre será posible expresarlo como cociente exacto de dos números enteros, con el denominador distinto de cero. Puntualmente **todo** número entero se puede escribir como una **fracción cuyo numerador es dicho número y cuyo denominador es el número uno**.

Inclusive el número cero es posible expresarlo de esta forma:

$0=\frac{0}{1}$

Entonces, ¿todo número entero es racional?

Efectivamente, todo número entero es un número racional. Por ello se dice que $\mathbb{Z}$ es una parte o un subconjunto de $\mathbb{Q}$.

Y suele expresarse $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ para indicar justamente que $\mathbb{Z}$ está incluido en $\mathbb{Q}$, o es un subconjunto de $\mathbb{Q}$.

NOTAS

Formas de escritura (fraccionaria, decimal). Expresiones decimales finitas y periódicas

Es común escuchar o leer expresiones como las siguientes:

"7 de cada 15 personas todavía no han decidido qué candidato presidencial van a votar".

"40 de los 100 habitantes de una región son analfabetos"

"3 de cada 20 alumnos que asisten a esta escuela viajan en medios de transporte público".

"7 de cada 24 personas es alérgica a los plátanos".

Estas expresiones pueden escribirse empleando una razón o cociente exacto entre dos números enteros, es decir, con escritura fraccionaria:

$\frac{7}{15}$ del total de los encuestados no han decidido a quién votar.

$\frac{40}{100}$ de los habitantes son analfabetos.

$\frac{3}{20}$ de los alumnos se trasladan con medios de transporte público.

$\frac{7}{24}$ de las personas es alérgica a los plátanos.

Pero a su vez cada una de estas expresiones fraccionarias de números racionales son cocientes, por lo que puede, empleando calculadora si lo prefiere, encontrar las expresiones decimales de dichos cocientes, obteniendo:

$\frac{7}{15} = 0,46666666666666666666666666666...$ $\qquad$ $\frac{3}{20} = 0,15$

$\frac{40}{100} = 0,4$ $\qquad$ $\frac{7}{24} = 0,2916666.....$

Estas expresiones que aparecen en el visor de la calculadora son expresiones llamadas decimales, otra forma de escribir un número racional.

RECORDAR

Si se considera que la forma de escribir un número se llama notación del mismo, entonces puede decirse que: **un número racional admite dos notaciones: una notación o escritura fraccionaria y una notación o escritura decimal.**

Notación decimal de un número racional

ACTIVIDADES

1. Con la calculadora realice los siguientes cocientes indicados en forma fraccionaria y registre la expresión decimal que aparece en el visor:

Número racional en notación fraccionaria	*Número racional en notación decimal*
$\frac{3}{2}$	1,5
$\frac{1}{3}$	
$\frac{2}{33}$	
$\frac{2}{15}$	
$\frac{2}{10}$	
$\frac{37}{30}$	
$\frac{5}{1}$	

2. Observe las expresiones decimales que ha obtenido y escriba:

a) Las expresiones decimales de los números racionales cuyas cifras decimales cubren todo el visor de su calculadora.

....

....

....

Estos números, que tienen infinitas cifras decimales periódicas (que se repiten), se pueden expresar de esta forma:

$$\frac{1}{3} = 0,333... = 0,\overset{\frown}{3}$$

$$\frac{37}{30} = 1,23333.... = 1,2\overset{\frown}{3}$$

→ *Se emplea un arco en la parte superior de los números que se repiten infinitas veces colocándolos de esta manera sólo una vez.*

Si usted calcula el cociente 1:3 *o* 2:33*, por mencionar algunos ejemplos, sin calculadora observará que nunca obtendrá un resto cero y el cociente será una expresión decimal de infinitas cifras decimales que recibe el nombre de* ***expresión decimal periódica****.*

b) Las expresiones decimales de los números racionales cuyas cifras decimales no cubren todo el visor de su calculadora.

....

....

....

NOTAS

Estas expresiones decimales, que tienen finitas (se pueden contar) o no tienen cifras decimales, corresponden a números racionales decimales o simplemente números decimales.

Si usted calcula el cociente **3:2** o **2:10** llegará a obtener un resto cero y el cociente es una expresión decimal que recibe el nombre de **expresión decimal exacta**.

PENSAR

Todo número racional puede escribirse en notación fraccionaria mediante una fracción o en notación decimal. La notación decimal de un número racional puede ser una notación decimal exacta o periódica.

NÚMEROS IRRACIONALES $\mathbb{I}$

Para identificar a los números irracionales previamente revisaremos la noción de **raíz de índice natural de un número racional**.

ACTIVIDADES

1. Resuelva cada una de las siguientes raíces de ***índice par****, para lo cual deberá pensar en un* ***número racional positivo*** *que elevado a la potencia que indica el índice de la raíz dé por resultado el número del radicando.*

$\sqrt{4} =$ .... $\sqrt[4]{16} =$ .... $\sqrt{25} =$ ....

De esta manera, por ejemplo: $\sqrt{4} = 2$ *porque* $2^2 = 4$.

2. Resuelva las siguientes raíces de ***índice impar****, para lo cual deberá pensar en un número racional que elevado a la potencia que indica el índice de la raíz dé por resultado el número del radicando.*

$0\sqrt[3]{27} =$ ...... $\sqrt[3]{-8} =$ .... $\sqrt[5]{32} =$ ......

Así, por ejemplo: $\sqrt[3]{-8} = -2$ *, porque* $(-2)^3 = -8$.

PENSAR

• *Si n (índice de la raíz) es* ***par****, la raíz está definida para números racionales positivos así:*

$\sqrt[n]{a} = b$ si $b^n = a$ *; siendo a y b números racionales mayores o iguales a cero*

• *Si n (índice de la raíz) es **impar**, la raíz está definida así:*

$\sqrt[n]{a} = b$ si $b^n = a$ *; siendo a y b números racionales.*

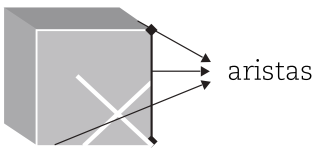
Ahora analicemos las siguientes situaciones:

Situación 1

Si un contenedor cúbico tiene una cantidad de volumen de $8m^3$, ¿cuánto mide la arista de dicho contenedor? Antes de resolver la situación propuesta revisemos sus nociones previas y para ello responda las siguientes preguntas.

• ¿Qué es un cubo?
• ¿Qué es la arista de un cubo?
• ¿Existe alguna relación entre la medida de la cantidad de volumen de un cubo y la medida de la longitud de la arista del mismo? ¿Cuál?

Recuerde que un cubo es un cuerpo poliedro limitado por caras todas planas con forma de cuadrado. Su representación gráfica es:



Observe que en el cubo representado se resalta una arista y se señalan otras. Para calcular la medida de la longitud de la arista, a partir de la medida de la cantidad de volumen del cubo, recordará que:

Cantidad de volumen del cubo es igual a: $|a|^3 \cdot u^3$

Nota. |a| significa la medida de la longitud de la arista a u^3: es la unidad para medir volumen empleado (m^3, dm^3,....)

La medida de la cantidad de volumen de esta figura es 8, entonces : $8 = |a|^3$

A partir de esta igualdad es fácil preguntarse: ¿qué número entero multiplicado tres veces por sí mismo es igual a 8?
....

O bien escribir la igualdad como:

$\sqrt[3]{8} = a$

$\sqrt[3]{8} = 2$ por que $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$

Luego la medida buscada es 2 y $|a| = 2$

NOTAS

NOTAS

Verifique este resultado calculando el volumen de un cubo cuya arista mida 2 y compare si el resultado que obtiene es 8.

Situación 2

María Eugenia está preparando la tierra de su jardín en un sector de forma cuadrada que tiene una superficie de $2m^2$ con una temperatura exterior de 6,7ºC. En el contorno quiere sembrar semillas de petunias, pero para ello necesita saber cuál es la medida de la cantidad de longitud de cada lado del cuadrado.

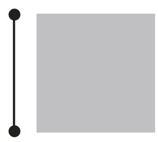
a) Señale las expresiones que reconozca como datos útiles para resolver la situación. Interprete mediante un dibujo esta misma situación.

b) Resuelva la situación.

A continuación compare su respuesta con la siguiente, para lo cual debe completar las líneas de puntos.

Al interpretar la situación mediante un dibujo se tiene:

X m



La forma del sector del jardín que está preparando María Eugenia tiene forma de ……………… Y lo que pide el problema es encontrar la medida de la longitud de un .... de dicho cuadrado.

La expresión que permite calcular la cantidad de superficie de un cuadrado es: $|l|^2 \cdot u^2$ donde $|l|$ es la medida de la longitud del lado y u^2 la unidad para medir superficie empleada.

Si la cantidad de superficie del sector del jardín es de $2m^2$, resulta que al considerar las medidas puede expresarse: $2 = |l|^2$.

De esta expresión obtenida, ¿qué dato no se conoce? ....

¿Cómo hace para encontrar dicha medida? ....

Seguramente, palabras más o palabras menos, para responder a este último interrogante se habrá preguntado qué número multiplicado dos veces por sí mismo es igual a 2

O quizás pensó que $|l| = \sqrt{2}$

Pero ahora nos debemos preguntar concretamente cuál es la $\sqrt{2}$ o qué número racional positivo multiplicado dos veces por sí mismo es igual a 2.

• Si se piensa en el número 1 se tiene que:
$1^2 = 1 . 1 = 1$

• Si se piensa en el número natural siguiente de 1, en el número 2, se tiene:
$2^2 =$ …….. $= 4$

Bueno, tanto el número 1 como el 2 son números enteros. Obviamente no existe ningún número entero positivo que multiplicado dos veces por sí mismo dé por resultado el número 2.

• Descartados los números enteros, podemos pensar en números racionales no enteros que estén comprendidos entre 1 y 2.

Simbólicamente, esta última apreciación se indica:

$1 < x < 2$ y se lee: " x es mayor que 1 y menor que 2".

Por ejemplo, al comprobar con los números 1,1 y 1,5.

$1{,}1^2 =$ ……. $= 1{,}21$
$1{,}5^2 = 1{,}5 . 1{,}5 = 2{,}25$

Es decir que $1{,}1 < \sqrt{2} < 1{,}5$

• El número buscado está entre 1,1 y 1,5.

Por ejemplo, si se piensa en los números 1,41 y 1,42 y buscamos sus cuadrados se obtiene:

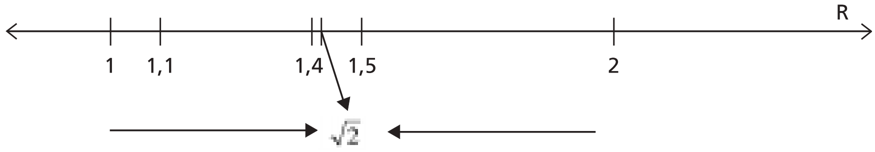
$1{,}41^2 = 1{,}9881$
$1{,}42^2 = 2{,}0164$

Si observan estos resultados verá que cada vez nos estamos aproximando más al número que elevado al cuadrado dé por resultado el número 2.

Para que se visualice mejor este análisis se ha representado la situación sobre la recta numérica.

NOTAS

NOTAS



Como observará, cada vez nos aproximamos más a $\sqrt{2}$ pero en realidad podríamos seguir probando y no llegaríamos a encontrar un número racional que elevado al cuadrado dé como resultado 2, porque en realidad no se trata de un número racional.

El número $\sqrt{2}$ no es un número racional, y si usa la calculadora para encontrar la $\sqrt{2}$, obtendrá una expresión decimal como la siguiente:

$\sqrt{2}$ = 1,4142135623730950488016887242097…

Si observa la parte decimal de dicha expresión tiene infinitas cifras decimales. Pero hay una característica más para tener en cuenta y es que las cifras decimales **no son periódicas**. Este número $\sqrt{2}$ es un número no racional; es un **número irracional**.

Retomando ahora la situación planteada y si considera que la medida de la longitud del lado del sector que María Eugenia va a destinar para sembrar es el número $\sqrt{2}$ verá que tiene poco sentido práctico considerar el valor $\sqrt{2}$ para indicar la medida de la longitud del lado del cuadrado. Si bien el valor exacto de dicha medida es $\sqrt{2}$, suele tomarse un valor aproximado para indicar la medida de la longitud del lado del cantero. Así es suficiente considerar sólo una o dos cifras de la parte decimal de la expresión decimal de la raíz cuadrada de dos.

De esta manera, por ejemplo, se puede expresar que el lado del cantero mide aproximadamente 1,4, es decir que la cantidad de longitud del lado es de 1,4 m.

De esta manera queda resuelta la situación 2 planteada.

La expresión decimal de la $\sqrt{2}$ encontrada con la calculadora tiene infinitas cifras decimales y no son periódicas.

$\sqrt{2}$ = 1,4142135623730950488016887242097…

Ahora podríamos pensar si la raíz cuadrada o de otro índice, distinto de cero y uno, de un número racional es siempre un número racional. Está visto que no. La pregunta es ahora: ¿en qué casos una raíz no es un número racional?

ACTIVIDADES

1. Para la siguiente actividad use la calculadora para encontrar el resultado de las siguientes raíces:

a) $\sqrt{5} =$ ....

b) $\sqrt{3} =$ ....

c) $\sqrt{13} =$ ....

d) $\sqrt{4} =$ ....

e) $\sqrt{0,25} =$ ....

f) $\sqrt{\frac{9}{16}} =$ ....

A continuación se escriben las raíces que usted ha obtenido, probablemente con un menor número de cifras decimales.

a) $\sqrt{5} =$ 2,2360679774997896964091736687313...

b) $\sqrt{3} =$ 1,7320508075688772935274463415059…

c) $\sqrt{13} =$ 3,6055512754639892931192212674705...

Las expresiones decimales obtenidas si bien tienen infinitas cifras decimales éstas no son periódicas. Es más, no son la expresión decimal del cociente de dos números enteros.

En los puntos:

d) $\sqrt{4} = 2$ por que $2^2 = 4$

e) $\sqrt{0,25} =$ 0,5 por que $0,5^2 = 0,25$

f) $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4} = 0,75$ por que $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

Pues bien, se puede concluir entonces que la raíz de un número racional no siempre es un número racional. Esta situación también se repite cuando se calculan raíces cúbicas o con cualquier otro índice natural distinto de cero y uno.

De todos modos hay otros números que tienen esta misma característica -la de presentar una expresión decimal de infinitas cifras decimales no periódicas- como el conocido número pi (π), utilizado para calcular la medida de la longitud de la circunferencia (π . d, donde d es el diámetro de la circunferencia) y la medida de la cantidad de superficie de un círculo ($\pi . r^2$, donde r es el radio del círculo).

El número pi (π) es igual a un número de infinitas cifras decimales no periódicas, como usted puede ver a continuación:

π = 3,141592653558979323846264338 33279…

NOTAS

NOTAS

Estos números cuyas expresiones decimales tienen infinitas cifras no periódicas pertenecen al conjunto de los números irracionales.

PENSAR

El conjunto de los números irracionales se simboliza $\mathbb{I}$.

Los elementos de este conjunto son raíces no exactas (raíces cuyos resultados no son números racionales) o bien números que expresados en notación decimal tienen infinitas cifras decimales que no son periódicas.

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

Si se reúne el conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales se obtiene un nuevo conjunto de números llamado conjunto de los números reales, que se simboliza $\mathbb{R}$.

ACTIVIDADES

1. Resuelva la siguiente situación. Para cada caso justifique su respuesta.

a) ¿Es posible realizar el siguiente cálculo con números naturales?

100 – 200=

b) ¿Es posible realizar el siguiente cálculo con números enteros?

25: 3 =

c) ¿Es posible realizar el siguiente cálculo con números racionales?

$\sqrt{3} =$

Para responder cada una de las preguntas -a) b) y c)- se emplearon números que pertenecen a los distintos conjuntos numéricos que hemos abordado hasta ahora. Observe y analice el camino seguido leyendo los siguientes cuadros:

El primer conjunto numérico estudiado es el conjunto de los números naturales. Dichos números se emplean para contar - enumerar y numerar.

$\mathbb{N}$ 1 15
0 3 …

Para expresar cantidades negativas y positivas y para resolver restas considerando cualquier par de números naturales hubo que ampliar el conjunto de los números naturales definiendo así el conjunto de los números enteros.

$\mathbb{Z}$ -8 -9 -11 …..
$\mathbb{N}$ 1 15
0 3 …

Para expresar las partes de un todo y encontrar el cociente exacto de dos números enteros cualesquiera con divisor distinto de cero, hubo que ampliar el conjunto de los números enteros.

$\mathbb{Q}$ -0,5 $\frac{5}{3}$ -2,3 $-\frac{1}{5}$…
$\mathbb{Z}$ -8 -9 -11 …..
$\mathbb{N}$ 1 15
0 3 …

Para resolver cálculos cuyas raíces no son racionales y expresar números cuyas expresiones decimales tienen infinitas cifras decimales no periódicas hubo que ampliar el conjunto de los números racionales y considerar el conjunto de los números irracionales.

Los números racionales junto con los números irracionales forman el conjunto de los números reales. De modo que el diagrama queda.

$\mathbb{Q}$ -0,5 -2,3 …
$\mathbb{Z}$ -8 -9 -11 …..
$\mathbb{N}$ 1 15
0 3 …

$\mathbb{I}$
$\sqrt{5}$
$-\sqrt[4]{4}$

PENSAR

El conjunto de los números reales se simboliza con $\mathbb{R}$ *y se define simbólicamente como:*

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Se lee: el conjunto de los números reales es igual al conjunto de los números racionales unido el conjunto de los números irracionales.

RECORDAR

• Un **número real** es un número **racional** (se puede expresar como el cociente de dos números enteros con el denominador

NOTAS

distinto de cero) o es un número **irracional** (número que expresado en notación decimal tiene infinitas cifras decimales no periódicas).

• No existe un número que sea racional e irracional a la vez. Es por ello que el conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales no tienen elementos en común.

• En adelante cada vez que se haga referencia a un **número** y no se especifique si es un número natural, número entero, número racional o un número irracional es porque se hace referencia a un **número real**.

LA RECTA REAL

LA RECTA Y LOS NÚMEROS NATURALES

ACTIVIDADES

1. Antes de comenzar le sugiero que retome el conjunto de los números naturales, lea nuevamente el tema y escriba en símbolos, como se indica, el conjunto de los números naturales.

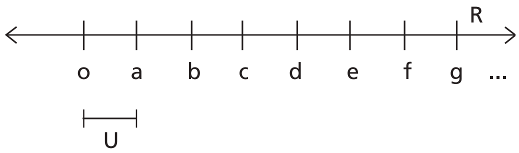
....

....

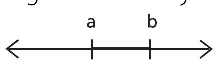
Para interpretar el conjunto de los números naturales se puede recurrir a la representación gráfica del mismo en una recta numérica que se debe graduar a partir de una unidad, como muestra la figura.

Para graduar la recta se considera un punto "o" y se elige un segmento U como unidad.

Luego se dibujan segmentos congruentes a U, es decir de igual medida que el segmento U en forma consecutiva, un segmento seguido de otro segmento y así se continúa a partir del punto "o" como se muestra en la figura.

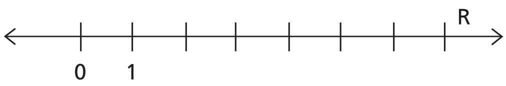


Nota.
Un segmento es una parte de la recta que está limitada por dos puntos que son llamados extremos del segmento. Por ejemplo: $\overline{ab}$

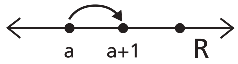


Ahora al punto "o" se le asigna el número 0, al punto "a" el número natural 1 y siguiendo ordenadamente se le asigna el número natural correspondiente a los otros puntos.

A partir de esta información, asígnele a los puntos indicados sobre la recta R los números naturales correspondientes.



Nota.
El sucesor de un número natural "a" es el que está "inmediatamente" a la derecha de "a", es decir que el sucesor de "a" es "(a+1)" Por ejemplo el sucesor de 5 es 5+1, es decir que el sucesor de 5 es 6.



ACTIVIDADES

1. Observe la recta numérica y conteste:

a) ¿Es posible representar todos los números naturales sobre la recta numérica?¿Por qué?.

....

....

b) ¿Entre un número natural y su sucesor existe otro número natural?

....

....

c) Entre dos números naturales no consecutivos, por ejemplo el número natural 7 y el número natural 10, ¿cuántos números naturales existen?

....

....

Al representar los números naturales sobre la recta numérica puede observar que a cada punto de la recta se le ha asignado un número natural pero, ¿a todo punto de la recta se le ha asignado un número natural? ……

A partir de estas preguntas que usted ha contestado se formalizarán las características del conjunto de los números naturales.

PENSAR

El conjunto de los números naturales tiene infinitos elementos. Por ello no es posible representar todos los números naturales sobre la recta numérica.

El conjunto de los números naturales tiene un primer elemento que es el cero, si se ordenan los números naturales de menor a mayor.

Todo número natural tiene su sucesor.

El conjunto de los números naturales es discreto. Esta característica es la que le muestra que entre dos números naturales consecutivos no existe otro número natural o bien que entre dos números naturales no consecutivos existe una cantidad finita (se puede contar) de números naturales.

Los números naturales "no cubren" toda la recta numérica. Si bien a cada número natural se le asigna un punto sobre la recta, no a todo punto de la recta se le puede asignar un número natural.

LA RECTA Y LOS NÚMEROS ENTEROS

ACTIVIDADES

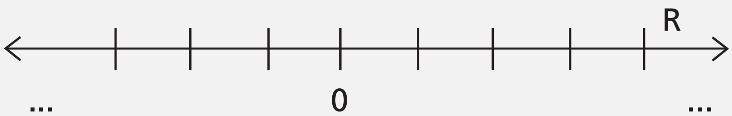
1. Lea nuevamente números enteros y escriba a continuación la notación del conjunto de los números enteros, enteros positivos y negativos.

....

....

Para representar los números enteros en la recta numérica se parte de la misma manera que para los números naturales. Esto es, graduar la recta a partir de una unidad considerando un punto "o", al que se le asigna el número entero 0, y elegir un segmento U como unidad.

2. A partir de estas condiciones asigne los números enteros a cada uno de los puntos de la recta numérica que están señalados.



3. Observe la recta numérica R y responda:

a) ¿Es posible ubicar todos los números enteros sobre la recta? ¿Por qué?

....

b) ¿Cuál es el antecesor de -3?

....

c) ¿Cuál es el sucesor de -1?

....

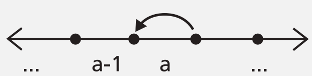
d) Entre un número entero y su antecesor, ¿existe otro número entero? Piense por ejemplo entre los números enteros -4 y -3

....

e) Entre el antecesor y el sucesor de un número entero, ¿cuántos números enteros existen?

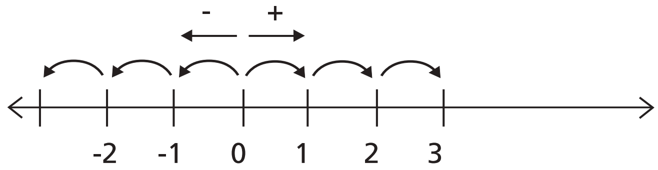
....

Nota.
El antecesor de un número entero "a" es el número entero que está inmediatamente a la izquierda de "a", esto significa que el antecesor de "a" es "(a -1)"



Al representar los números enteros sobre la recta numérica, puede observar que a cada punto de la recta se le ha asignado un número entero pero, ¿a todo punto de la recta se le ha asignado un número entero? ……

A partir de las respuestas y de la observación de la siguiente figura se formalizarán las características del conjunto de los números enteros (y a su vez usted podrá verificar sus respuestas).



PENSAR

El conjunto de los números enteros tiene infinitos elementos. Por ello no es posible representar todos los números enteros sobre la recta numérica.

Todo número entero tiene su antecesor y su sucesor.

El conjunto de los números enteros es discreto. Ya que entre dos números enteros consecutivos no existe otro número entero o bien que entre dos números enteros no consecutivos existe una cantidad finita (se puede contar) de números enteros.

Los números enteros "no cubren" toda la recta numérica. Si bien a cada número entero se le asigna un punto sobre la recta, usted observará que no a todo punto de la recta se le puede asignar un número entero.

LA RECTA Y LOS NÚMEROS RACIONALES

Así como a los números naturales y a los números enteros se les puede asignar un punto en la recta numérica, también le corresponden puntos de la recta numérica a los números racionales. Pero antes de comenzar con esta tarea revisaremos nuevamente los conceptos estudiados en el conjunto de los números racionales. Para ello comenzaremos respondiendo las siguientes preguntas:

a) ¿Qué es un número racional?
……………………………………………………………………………………

b) ¿Cuáles son las formas en que puede escribir un mismo número racional?
……………………………………………………………………………………

NOTAS

c) Si un número está escrito en notación fraccionaria, ¿qué hace para expresarlo en notación decimal?

....

d) ¿Los números enteros son números racionales?

....

Por una cuestión de practicidad, para representar los números racionales sobre la recta numérica se utilizarán exclusivamente las expresiones decimales de los mismos.

ACTIVIDADES

Situación 1

1. Escriba, completando la siguiente tabla, en notación decimal, los siguientes números racionales:

Notación fraccionaria	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{14}{5}$	$-\frac{17}{10}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{3}{2}$
Notación decimal								

2. Represente la expresión decimal de los números racionales sobre la siguiente recta numérica:

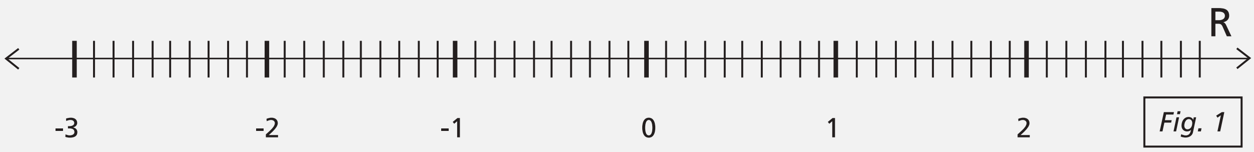


Fig. 1

3. Escriba dos números racionales y ubíquelos en la recta numérica anterior.

....

A partir de su trabajo, podemos observar que la expresión decimal de $\frac{1}{2} = 0{,}5$ y la de $\frac{3}{4} = 0{,}75$.

Si compara el numerador y el denominador de $\frac{1}{2}$, verá que 1 < 2. Si compara ahora el numerador y denominador de $\frac{3}{4}$ también se cumple que 3.......4.

Si sigue probando con otros números racionales escritos en notación fraccionaria, tal que su numerador sea menor que su denominador, observará que su cociente es una expresión decimal comprendida entre los números enteros 0 y 1.

Observemos las expresiones decimales de $\frac{6}{5} = 1{,}2$ y la $\frac{3}{2} = 1{,}5$. Al comparar el numerador y denominador de $\frac{6}{5}$ y $\frac{3}{2}$, ¿qué puede decir acerca del numerador y denominador de cada uno de esos números racionales?..................

Seguramente que al realizar las respectivas comparaciones coincidirá en que en ambas el numerador es mayor que el denominador y sus respectivas expresiones decimales son mayores que 1.

NOTAS

PENSAR

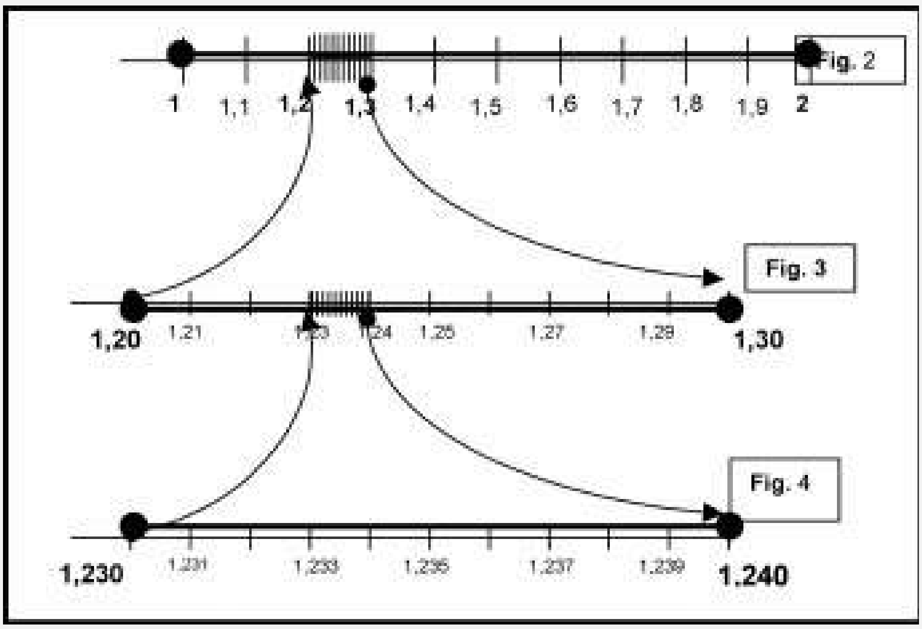
Los números racionales expresados con notación fraccionaria, tal que el numerador es menor que el denominador, están ubicados entre los números enteros 0 y 1, y la parte entera de su expresión decimal es el cero.

Los números racionales expresados con notación fraccionaria, tal que el numerador es mayor que el denominador, tienen asignados puntos de la recta que corresponden a números mayores que uno y la parte entera de su expresión decimal es mayor o igual que uno.

ACTIVIDADES

Situación 2

1. Seguimos trabajando sobre la recta numérica, pero ahora solamente se han considerado partes de la misma. Analice con atención cada una de las figuras siguientes:



Ahora, para que usted pueda comparar sus apreciaciones se muestra una síntesis de lo dibujado.

En la fig. 2, el segmento que tiene asignado en sus extremos los números enteros 1 y 2 ha sido fraccionado en 10 segmentos, todos de igual medida de longitud, y a cada uno de ellos les corresponde un número racional.

En la figura 3, observe el segmento a cuyos extremos se le han asignado los números racionales 1,20 y 1,30 respectivamente y el cual ha sido fraccionado nuevamente en 10 segmentos (segmentos de igual medida de la cantidad de longitud) asignándole a cada extremo un número racional.

Por último, en la figura 4 se ha realizado el mismo procedimiento que en los casos anteriores pero sobre el segmento que tiene por extremos los números racionales 1,230 y 1,240.

2. Vuelva a leer y analizar esta descripción y responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto de los números racionales?

....

b) Entre dos números racionales, ¿cuántos números racionales existen?

....

c) Está claro que a todo número racional le corresponde un punto de la recta numérica, pero puede asegurarse: que a todo punto de la recta numérica le corresponde un único número racional

....

NOTAS

PENSAR

El conjunto de los números racionales tiene infinitos elementos. Por ello no es posible representar todos los números racionales sobre la recta numérica.

El conjunto de los números racionales es denso ya que entre dos números racionales distintos existen infinitos números racionales.

Los números racionales "no cubren" toda la recta numérica. Si bien a cada número racional se le asigna un punto sobre la recta, también ocurre que no a todo punto de la recta se le puede asignar un número racional, ya que hay puntos a los que no se les asigna un número racional.

LA RECTA NUMÉRICA Y LOS NÚMEROS IRRACIONALES

Para comenzar, lea nuevamente las características de los números irracionales analizadas anteriormente y responda las siguientes preguntas.

a) ¿Cuáles son los elementos del conjunto de los números irracionales?

....

....

....

b) ¿Cuál es la característica de la expresión decimal de un número irracional?

NOTAS

Por esta característica expresada al responder estas preguntas, para ubicar un número irracional sobre la recta numérica se trabaja con un procedimiento geométrico que no abordaremos. Lo que sí consideramos es que a cada número irracional se le asigna un punto en la recta numérica, pero ¿a cada punto de la recta real le corresponde un número irracional?

Seguramente respondió que no, porque viene de representar en la recta numérica real los números racionales.

Cuando abordamos el tema de los números irracionales se realizó una visualización de cómo representar, con bastante exactitud, la $\sqrt{2}$ sobre la recta numérica, con lo cual se verificó la correspondencia que existe entre cada número irracional y un punto de la recta numérica.

De esta manera podemos concluir que a cada número irracional le corresponde un punto en la recta numérica

ACTIVIDADES

1. *¿Entre qué números racionales ubicaría en la recta numérica los números irracionales* $\sqrt{3}$; $\sqrt{26}$?

LA RECTA NUMÉRICA Y LOS NÚMEROS REALES

Recuerde que si se reúnen todos los números racionales con los números irracionales se obtiene el conjunto de los números reales. Teniendo presente este concepto le propongo que responda las siguientes preguntas.

a) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto de los números reales?

b) ¿Le parece que se cubren todos los puntos de la recta numérica? O dicho de otra manera, ¿estamos en condiciones de afirmar que a cada punto de la recta numérica se le puede asignar

NOTAS

un número real, o que a cada número real se le puede asignar un punto de la recta?

....

....

PENSAR

El conjunto de los números reales tiene infinitos elementos.

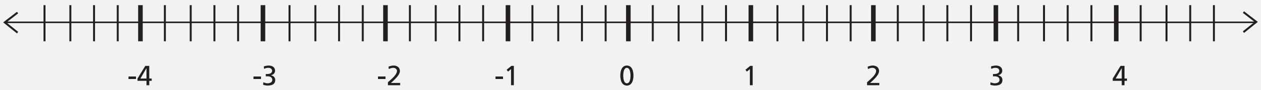
Al ubicar los números reales en la recta numérica "se cubren" todos los puntos de la misma, ya que a cada número real le corresponde un punto de la recta y a cada punto de la recta le corresponde un número real.

*A partir de esta última observación podemos asegurar que la recta está **completa**.*

VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO REAL. NÚMEROS OPUESTOS

ACTIVIDADES

1)Ubique los siguientes números reales sobre la recta numérica asignándole a cada uno de ellos un punto en la recta: 4, -4, 3,6; -4,2; $\frac{4}{5}$; $-\frac{4}{5}$ *; -2,8.*



2) Señale con un color el segmento cuya medida de longitud es la distancia que existe entre los puntos correspondientes a la ubicación de los números 0 *y* 1*.*

3) Señale con otro color el segmento cuya medida de longitud es la distancia que existe entre los puntos correspondientes a la ubicación de los números 0 *y* -2*.*

4) Ubique sobre la recta numérica un número que esté a la misma distancia del punto correspondiente al 0 *que el punto correspondiente al número -2,8.*

5) Ubique sobre la recta numérica un número cuya ubicación esté a la misma distancia del punto correspondiente al 0*, que el punto correspondiente al 3,6.*

6) Identifique y señale un par de números cuya ubicación sea tal que se encuentren a la misma distancia respecto del punto correspondiente al 0*.*

La distancia que usted ha señalado desde la ubicación del número **0** a la ubicación del número **1** y la distancia que usted señaló desde la ubicación del número **0** a la ubicación del **-2** se llama **módulo o valor absoluto** del número **1** y del número **-2**, respectivamente.

Para señalar el módulo de un número, es decir la distancia que existe desde su ubicación en la recta numérica a la ubicación del número 0, se simboliza escribiendo el número entre barras, como se muestra a continuación:

|1| = 1 se lee: el módulo de 1 es igual a 1 y se interpreta que la distancia desde la ubicación del número 1 a la ubicación del número 0, es 1.

|-2| = 2 se lee: el módulo de menos 2 es 2 y se interpreta que la distancia desde el punto correspondiente a la ubicación del número 0 al punto correspondiente a la ubicación del -2, es 2.

Si observa los dos módulos obtenidos, ¿qué puede decir acerca del signo de ambos?
....

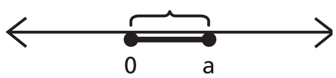
Efectivamente, el módulo de un número positivo o de un número negativo es en ambos casos un número positivo.

NOTAS

PENSAR

Se llama valor absoluto o módulo de un número real a la distancia que existe desde el punto de ubicación de dicho número al punto correspondiente al número cero. Esta distancia es siempre un número real positivo.

Simbólicamente: " a" es |a|= un número real, |a| ; se lee: módulo de a.



El número que se le pide representar en el punto 4), cuando se dice: "ubique sobre la recta numérica un número, que esté a la misma distancia del punto correspondiente al 0, que el punto correspondiente al número -2,8.", es el números 2,8.

Al determinar el módulo de cada uno de los números señalados se observa que: |2,8 | = 2,8 y |- 2,8| = 2,8

En el caso del punto 5), en donde se le pide: "ubique sobre la recta numérica un número cuya ubicación esté a la misma distancia del punto correspondiente al **0**, que el punto correspondiente al 3,6.", es el número -3,6.

NOTAS

¿Qué puede decir acerca del módulo de 3,6 y -3,6?

....

Por último, en el punto 6) se le pide: "identifique y señale un par de números cuya ubicación sea tal que se encuentren a la misma distancia respecto del punto correspondiente al 0.". Este par de números reales puede ser por ejemplo: 3,2 y – 3,2.

¿Qué relación puede indicar con respecto al módulo de este par de números?

....

En síntesis, podemos decir que existen pares de números reales que están ubicados a la misma distancia del cero, siendo uno negativo y el otro positivo. Y que estos números se llaman opuestos.

PENSAR

Dos números reales son opuestos si tienen el mismo valor absoluto o módulo y distinto signo.

ORDEN

Para ordenar números reales es necesario compararlos. Pero tenga presente que en esta actividad se involucran números positivos y números negativos.

Situación 1

Un grupo de andinistas está escalando sobre una pared rocosa que está ubicada a la orilla de un lago. Por un descuido, uno de los andinistas cae al agua. Los encargados de la patrulla de rescate en el informe, entre los datos, indicaron las alturas en las que constataron las condiciones de los seguros en la pared y las distintas profundidades en las que buscaron al andinista desaparecido. Todas las medidas se realizaron respecto del nivel del espejo del agua del lago.

Las cantidades de longitud fueron dadas en metros, por ello sólo se indicaron las medidas correspondientes que puede leer a continuación.

Nota.
Los seguros son chapas con ganchos que se clavan en la pared para enganchar los mosquetones por donde pasa la cuerda para escalar.

-15,5; -1; +24,8; +1, +6; -4,7; +20; -8,5; -8,2; -5; +10

Observe estas medidas y realice las actividades que se piden a continuación:

a) ¿Por qué hay medidas que se indican con un signo negativo y otras con un signo positivo?

....

....

....

b) Ordene esas medidas de menor a mayor.

....

....

....

Recordando que la situación menciona profundidades y alturas con respecto al nivel del espejo de agua del lago es necesario diferenciar las medidas que indican las distintas profundidades con un signo negativo y las medidas de las alturas con un signo positivo, y no es necesario escribir el signo más, ya que los números reales que se escriben sin signo se suponen positivos.

Al ordenar estas medidas de menor a mayor, seguramente comenzó con la medida que indica más profundidad (o menos altura) y terminó con la medida que indica más altura. Entonces al ordenarlas le habrá quedado:

-15,5 < -8,5 < -8,2 < -5 < -4,7 < -1< 1 < 6 < 10 < 20 < 24,8

NOTAS

ACTIVIDADES

1. Complete con menor (<); mayor (>) o igual según corresponda.

a) – 5...........-8,2

b) -15, 5 .... -4,7

c) -8,5.......... -8,5

d) 1 ....- 1

e) -15,5 6

f) 6 10

g) 24,8 20

Respuestas:
a) > ; b) < ; c) =; d) >; e) <; f) < g) >

A partir de las respuestas obtenidas se pueden realizar las siguientes observaciones, consideradas como una formalización para comparar y ordenar números reales.

NOTAS

PENSAR

• *Si se comparan dos números reales distintos y negativos, es menor el número que tiene mayor valor absoluto. Es decir el que está ubicado a mayor distancia hacia la izquierda del punto correspondiente al cero.*

• *Si se comparan dos números reales de distinto signo siempre es mayor el número positivo.*

• *Si se comparan dos números reales distintos y positivos, siempre es menor el de menor valor absoluto. Es decir el que está ubicado a menor distancia hacia la derecha del punto correspondiente al cero.*

Situación 2

¿Cómo comparar números racionales? Esta pregunta aparece sencillamente porque los números racionales tienen dos notaciones: una fraccionaria y otra decimal. Por ejemplo, analicemos juntos este ejemplo:

Complete con mayor (>) , menor (<) o igual (=) según corresponda.

a) $\frac{5}{9}$.......0,25 b) $-0,382$...... $-0,3\hat{8}$ c) $\frac{2}{5}$....... $-\frac{4}{7}$ d) $-1,25$....... $\frac{15}{5}$

A continuación se resuelve el ejercicio para que pueda verificar sus resultados.

a) $\frac{5}{9}$.......0,25

Para comparar estos dos números racionales positivos - donde uno está expresado en notación fraccionaria y el otro en notación decimal- le sugerimos expresar ambos números de una misma forma.

Expresar al número $\frac{5}{9}$ en notación decimal o al número 0,25 en notación fraccionaria son dos posibles alternativas. Analizaremos cada una de ellas.

• Los números expresados en escritura decimal:

Escriba la expresión decimal de:

$\frac{5}{9}$ = ...

Entonces la tarea es ahora comparar: $0,\hat{5}$ y 0,25

$0,\hat{5}$ 0,25

En este caso la parte entera de las dos expresiones es la misma; es el número 0 en ambos casos. Entonces se analiza y compara la parte decimal.

Para ello iguale el orden decimal de los números -en este caso deberían ser del orden de los centésimos- (ambos números deberían tener dos cifras decimales) y luego compare la parte decimal obtenida.

Esto es: debe comparar 0,55 (cincuenta y cinco centésimos) y 0,25 (veinticinco centésimos) y al comparar la parte decimal queda: 55 > 25. Entonces, como los dos números son positivos se puede concluir que:

$\frac{5}{9} > 0,25$

Recuerde que al comparar dos números expresados en notación decimal debe tener en cuenta las siguientes observaciones:

• Para comparar números expresados en notación decimal se compara primero la parte entera, si esta resulta igual se pasa a comparar la parte decimal. Previo se deben igualar órdenes (es decir tener igual número de cifras decimales).

• Los números expresados en escritura fraccionaria:

La expresión fraccionaria de 0,25 (25 centésimos) es:

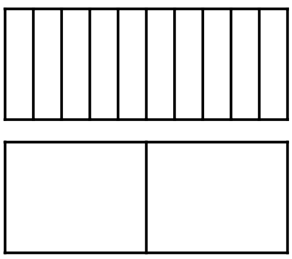
$0,25 = \frac{25}{100}$ ¿Cuál es la fracción irreducible equivalente a $\frac{25}{100}$?

....

Para responder a esta pregunta debe recordar qué es una **fracción equivalente**, cómo se obtiene y qué es la **expresión fraccionaria irreducible** de un número racional. Si no lo recuerda lea los siguientes puntos:

1- Fracción equivalente a una dada

Coloree cinco de las 10 partes en que está fraccionado este rectángulo:



Es decir que están coloreadas las $\frac{5}{10}$ partes del mismo.

Ahora coloree 1 de las dos partes en que está fraccionado el siguiente rectángulo que tiene las mismas medidas que el anterior.

Ahora está coloreado $\frac{1}{2}$ un medio) del rectángulo.

NOTAS

NOTAS

Compare las partes coloreadas del rectángulo. ¿Cómo resultan?

....

Como la parte pintada en ambos casos representan la misma porción de rectángulo se dice que ambas fracciones son equivalentes y se escribe:

$$\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

Si observa esta expresión y divide numerador y denominador de la primera fracción por un mismo número, en este caso por 5, lo que obtiene es:

$$\frac{5:5}{10:5}=\ldots\ldots\ldots$$

¿Qué obtiene? ....

Efectivamente al dividir numerador y denominador de una fracción por un mismo número entero (distinto de cero) se obtiene una fracción equivalente a la dada. Se dice que la primera expresión fraccionaria ha sido simplificada, es decir que $\frac{1}{2}$ es una expresión simplificada de $\frac{5}{10}$.

Ahora, ¿qué sucede si al numerador y denominador de una fracción se los multiplica por un mismo número?

Pruebe, por ejemplo, con $\frac{2}{3}$ y observe coloreadas las dos terceras partes del rectángulo de la derecha.

Multiplique numerador y denominador por 2, para obtener la fracción:

$$\frac{2.2}{3.2}=\ldots\ldots\ldots$$

Realice la representación grafica en el rectángulo que está debajo del anterior, que tiene las mismas medidas del que está arriba, y coloree las $\frac{4}{6}$ partes del mismo.

¿Cómo resultaron las dos partes coloreadas?

....

Sí, efectivamente representan la misma porción o parte del rectángulo. Podemos decir entonces que:

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$$

Podemos concluir que $\frac{4}{6}$ es una fracción equivalente a $\frac{2}{3}$, construida mediante la multiplicación, por un número entero distinto de cero, del numerador y denominador de $\frac{2}{3}$ Por lo que $\frac{4}{6}$ es una expresión amplificada de $\frac{2}{3}$

Revise nuevamente lo analizado y responda a la pregunta: ¿qué es una fracción equivalente a una dada?

....

....

....

NOTAS

RECORDAR

Para obtener **fracciones equivalentes** a una dada se debe multiplicar o dividir el numerador y el denominador de la fracción por un mismo número entero distinto de cero.

2- Expresión irreducible de un número racional expresado como fracción

Todavía nos queda por responder:

¿Qué es la expresión irreducible de un número racional expresado como fracción?

Considere la fracción $\frac{25}{100}$ y simplifíquela, o sea divida el numerador y denominador por un mismo número entero distinto de cero, y complete el cuadro con la fracción equivalente obtenida:

$$\frac{25}{100} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$$

A esta nueva fracción, ¿es posible volver a simplificarla? Hágalo todas las veces que pueda y escriba la última expresión que obtiene:

$$\frac{25}{100} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$$

Esta última expresión obtenida es la expresión irreducible de $\frac{25}{100}$. Es irreductible porque el único número entero que divide el numerador y denominador de $\frac{1}{4}$ es el número 1.

Ahora puede responder a la siguiente pregunta: ¿qué es la expresión irreducible de un número racional expresado como fracción?

....

....

....

RECORDAR

La expresión fraccionaria de un número racional es irreductible si por el único número entero que es posible dividir al numerador y denominador es el número 1.

NOTAS

Volviendo a nuestra tarea inicial de comparar dos números racionales escritos en notación fraccionaria, puntualmente:

$\frac{5}{9} \ldots\ldots \frac{25}{100}$

Analizamos la posibilidad de construir fracciones equivalentes e irreductibles a partir de un número fraccionario dado, y visualizamos que:

$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

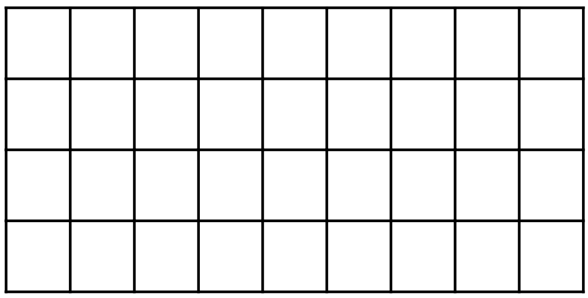
Entonces, reemplazando la fracción $\frac{25}{100}$ por su equivalente irreductible, los números racionales por comparar son:

$\frac{5}{9} \ldots\ldots \frac{1}{4}$

Para comparar estas dos fracciones le proponemos seguir dos caminos, uno gráfico y otro numérico. De esta manera:

Muestre a través de un gráfico cómo compararía estos números expresados en notación fraccionaria.

A continuación le presentamos el rectángulo fraccionado. En el mismo, coloree con un color las cinco novenas partes del mismo $\left(\frac{5}{9}\right)$ y con otro color la cuarta parte $\left(\frac{1}{4}\right)$ del mismo:



¿En cuántas partes quedó fraccionado el rectángulo?

Utilice ese número de partes y escriba, para cada parte representada, una fracción equivalente que tenga ese número como denominador:

$\frac{5}{9} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ $\qquad$ $\frac{1}{4} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

Compare las fracciones obtenidas. ¿Cuál de las partes representa más porción del rectángulo?
....

Ahora complete el siguiente cuadro con "<" o ">" según corresponda:

$\frac{5}{9} \ldots\ldots \frac{1}{4}$ también la expresión equivalente $\frac{5}{9} \ldots\ldots \frac{25}{100}$

Le solicitamos que analice cómo comparó estas fracciones y piense cómo podría comparar dos números racionales si no contara con la representación gráfica.

Posiblemente pensó que **en primer lugar se deben buscar fracciones equivalentes a las dadas pero de igual denominador, para luego comparar los numeradores de estas fracciones equivalentes y poder comparar las fracciones dadas inicialmente.**

Si analizamos más detenidamente la última expresión se puede decir que como los denominadores de los números racionales $\frac{5}{9}$ y $\frac{1}{4}$ son distintos, el primer paso es calcular **fracciones equivalentes** a las dadas pero con la condición de que tengan **el mismo denominador**.

Para determinar cuál es el denominador de las fracciones equivalentes y que sea el mismo denominador, debemos encontrar un múltiplo común a ambos denominadores, en este caso un múltiplo de 9 y 4.

En la línea de puntos escriba los primeros once múltiplos de 4 distintos de cero:

....

Ahora escriba los primeros cinco múltiplos de 9 distintos de cero:

....

Nota.
Múltiplo de un número entero: el múltiplo de un número entero se obtiene multiplicando este número por otro número entero.

Seguramente al calcular los múltiplos de 4 y 9, respectivamente, el primer múltiplo y común a 4 y 9 es 36.

Pues bien, 36 es el denominador de las fracciones equivalentes a $\frac{5}{9}$ y a $\frac{1}{4}$ que necesitamos.

Multiplique convenientemente el numerador de cada una de las fracciones para obtener las igualdades indicadas.

$\frac{5}{9} = \frac{\ldots\ldots}{36}$

$\frac{1}{4} = \frac{\ldots\ldots}{36}$

Reemplazando cada fracción por su equivalente, queda entonces para comparar:

$\frac{20}{36} \ldots\ldots \frac{9}{36}$

Observe que ambas expresiones fraccionarias poseen el mismo denominador, por lo que para compararlas basta con comparar los numeradores.

Y su resultado seguramente coincidirá con:

NOTAS

$\frac{20}{36} > \frac{9}{36}$ Entonces también puede expresarse que $\frac{5}{9} > \frac{1}{4}$, $\frac{5}{9} > 0,25$

PENSAR

Si dos números son positivos, es mayor el número de mayor valor absoluto. Es decir, el que está ubicado en la recta numérica a mayor distancia hacia la derecha respecto del punto correspondiente al cero

Si dos números son negativos, es mayor el de menor valor absoluto. Es decir, el que está ubicado en la recta numérica a menor distancia hacia la izquierda del punto correspondiente al cero.

Si dos números tienen distinto signo, es mayor el positivo.

ACTIVIDADES

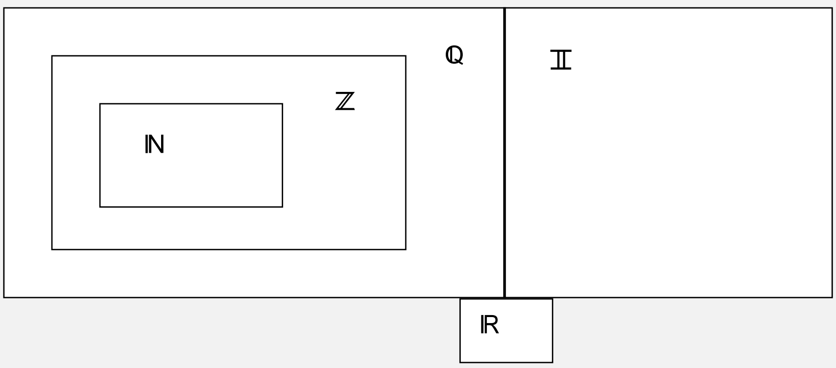
1. Le solicitamos que analice los puntos b), c) y d) de manera similar a como se procedió para completar el caso a).

a) $\frac{5}{9} > 0,25$ *b)* $-0,382......-0,3\hat{8}$ *c)* $\frac{2}{5}.......-\frac{4}{7}$ *d)* $-1,25.......\frac{15}{5}$ *Respuesta: b) >; c) >; d) <*

ACTIVIDADES

1) A continuación se presenta un listado de números que usted ubicará en el lugar que corresponda del siguiente diagrama.

6; -12,68; -15; 0; $\sqrt{26}$; $-23,4\hat{5}$; $-\frac{31}{7}$; $\frac{6}{7}$



2) Señale con una X las características que le son propias a cada conjunto numérico.

	Tiene infinitos elementos	*Cada elemento tiene su sucesor*	*Cada elemento tiene su antecesor y sucesor*	*Conjunto discreto*	*Conjunto denso*	*Al ser representados en la recta numérica "cubren" toda la recta*
$\mathbb{N}$						
$\mathbb{Z}$						
$\mathbb{Q}$						
$\mathbb{I}$						
$\mathbb{R}$						

3) Señale con una X a los conjuntos numéricos a los que pertenecen los números indicados en la siguiente tabla.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
125					
$^-1,45$					
$^-4$					
0,23					
$\frac{5}{4}$					
$\sqrt[3]{5}$					
0					

4) Escriba una fracción equivalente a cada una de las dadas y explique en cada caso cómo construyó esa fracción.

a) $\frac{4}{7} = \ldots\ldots$

b) $-\frac{13}{5} = \ldots\ldots$

5) Complete con menor (<), mayor (>) o igual (=) según corresponda.

a) -12,27……. -12,28 *b)* $\frac{4}{7} \ldots\ldots \frac{3}{5}$ *c)* $1,25 \ldots\ldots \frac{5}{4}$ *d)* $-\frac{11}{5} \ldots\ldots \frac{11}{5}$

6) Dadas las fracciones $\frac{2}{5}$ *y* $\frac{2}{7}$ *, escriba dos fracciones equivalentes a ellas que tengan el mismo denominador.*

7) Juan y Andrés son dos estudiantes sanjuaninos que están estudiando en Mendoza. Ambos reciben la misma cantidad de dinero mensualmente. Juan gasta en trasporte, alquiler, comida y fotocopias $\frac{6}{7}$ *del total del dinero que recibe mensualmente y Andrés pagando el transporte, alquiler, comida y fotocopias gasta* $\frac{4}{5}$ *de su mensualidad. ¿Cuál de los dos jóvenes gasta la mayor parte de su dinero?*

……

8) En dos hospitales distintos se ha tratado la misma cantidad de enfermos de SIDA. En cada hospital se ha utilizado un tratamiento distinto. En un hospital respondieron al tratamiento 8 de los 10 enfermos y en el otro respondieron las $\frac{4}{5}$ partes del total de los enfermos.
¿En qué hospital ha sido más efectivo el tratamiento?
Fundamente cada respuesta con cálculos o con gráficos.

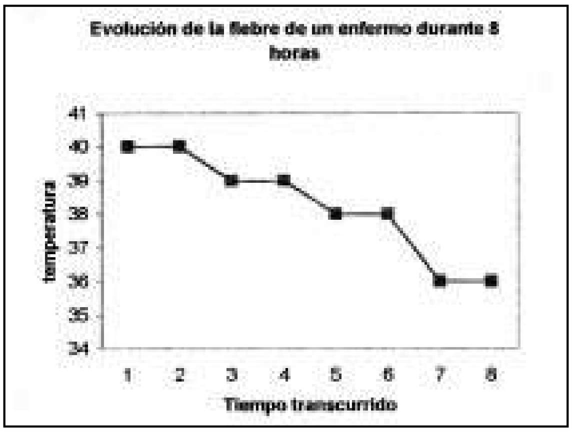
NOTAS

....

INTERVALOS

Situación 1

A partir de la evolución de la fiebre de un enfermo se ha realizado el siguiente gráfico. Sobre el eje vertical están indicadas las medidas de las cantidades de temperatura y sobre el eje horizontal se indican las medidas de las cantidades de tiempo.



Responda las siguientes preguntas a partir de la observación del gráfico.

a)En el intervalo de tiempo comprendido entre la primera y la tercera hora, ¿entre qué valores ha variado la temperatura?
....

b) ¿Para qué intervalo de tiempo transcurrido la medida de la temperatura descendió de 40 a 39?
....

c) ¿Qué significado le daría usted a la palabra intervalo utilizada para interpretar los datos en este gráfico?
…………………………………………………………………………………………

Interpretando la primera pregunta podemos considerar el segmento del eje horizontal (eje que corresponde a una recta numérica) cuyos extremos tienen asignado el número 1 y el número 3. Los puntos de este segmento muestran el tiempo transcurrido entre la 1ª hora y la 3ª hora.

A su vez, para este tiempo transcurrido sobre el eje horizontal se observa cómo varía la fiebre del enfermo a través de las cantidades de temperatura que se indican en el eje vertical. Es decir que entre la primera hora y la tercera hora la temperatura ha variado de 40º C hasta los 39º C.

De esta manera puede expresarse que para el intervalo de tiempo comprendido entre la primera y tercera hora, la temperatura ha variado en un intervalo de temperatura comprendido entre los 39º C y los 40º C.

PENSAR

Los intervalos de números reales están determinados por dos números reales distintos y todos los números reales comprendidos entre ambos.

Geométricamente, se representan por medio de un segmento de la recta numérica o por una semirrecta, o en algunos casos con la misma recta numérica.

TIPOS DE INTERVALOS

Intervalos acotados

Geométricamente se representan por medio de segmentos de la recta numérica o recta real.

Intervalo cerrado

Para representar un intervalo cerrado siga los siguientes pasos:

Represente sobre la recta numérica los puntos correspondientes a los números -3 y 1.

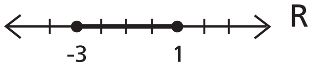
NOTAS

NOTAS

Señale con un color todos los puntos correspondientes a los números reales comprendidos entre -3 y 1 y con el mismo color marque también los puntos que corresponden a este par de números.

Al terminar, seguramente le ha quedado dibujado un segmento de recta como se muestra a continuación.

A los **números** que corresponden a los extremos del segmento se los llama **extremos del intervalo**



Nota.
Este intervalo real cerrado se simboliza encerrando los extremos del segmento con corchetes.
[-3, 1] *, se lee: intervalo cerrado de extremos -3 y 1.*
A este intervalo pertenecen todos los números reales que son mayores o iguales al número –3 y menores o iguales al número 1. Es decir que pertenecen a dicho intervalo los números reales comprendidos entre -3 y 1 y los mismos extremos que son los números -3 y 1. Por eso al representar dicho intervalo en la recta real se resaltan los extremos con círculos pintados de negro y los puntos comprendidos entre ellos.

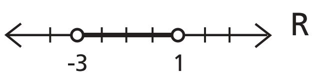
Intervalo abierto

Para representar un intervalo real abierto siga los siguientes pasos:

Represente sobre la recta numérica los puntos correspondientes a los números -3 y 1.

Señale con un color todos los números reales comprendidos entre -3 y 1, pero no señale los puntos correspondientes a los números -3 y 1.

Al finalizar, seguramente llegó a una representación como la siguiente:

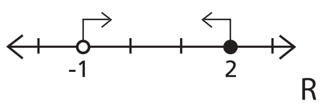


Nota.
Este intervalo real abierto se simboliza encerrando los extremos del segmento con paréntesis, porque no se consideran los extremos -3 y 1.
(-3, 1) *, se lee: intervalo real abierto de*

NOTAS

extremos -3 y 1.
Este intervalo está formado por todos los números reales mayores al número real –3 y menores que el número real 1. Es decir que pertenecen a él todos los números reales comprendidos entre -3 y 1 y se excluye a los extremos, que son los números -3 y 1. Por eso al representar en la recta real dicho intervalo los extremos del segmento representado se indican con circunferencias y se señalan o resaltan sólo los puntos comprendidos entre ellos.

Observe con atención el siguiente intervalo e interprételo simbólicamente. Preste mucha atención a los extremos del mismo.



…………………………………………………………………………………………

En este caso no pertenece al intervalo el extremo al que se le asigna el número – 1, debido a que en la representación gráfica en la recta real el punto asociado al número – 1 aparece rodeado con una circunferencia sin sombrear su región interior. Mientras que el otro extremo, al cual se le asigna el número 2, sí pertenece al intervalo. Este intervalo se simboliza:

(- 1 ; 2]

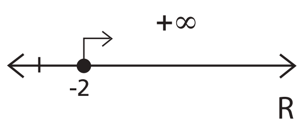
Intervalos no acotados

Geométricamente se representan con semirrectas o con la misma recta real.

Actividad 1

Dibuje una recta real o recta numérica y señale con color todos los números reales que sean mayores o iguales a -2.

Seguramente que su dibujo quedó aproximadamente así:



Nota:
∞,este símbolo indica infinito

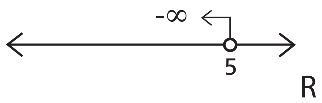
Que simbólicamente se indica: [-2 ; + ∞) y se lee: intervalo

NOTAS

cerrado – 2 más infinito y a este intervalo pertenecen todos los números reales que son mayores o iguales a – 2 y se representa por medio de una semirrecta.

Represente sobre la recta numérica el conjunto de números reales menores que 5.

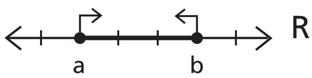
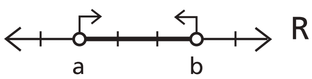
A continuación se muestra la representación para que la compare con la suya. Atención, solamente se pretende señalar los números reales menores que 5.

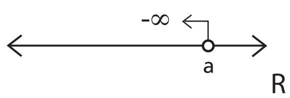


Que simbólicamente el intervalo representado se indica: (- ∞, 5) y se lee: intervalo real abierto menos infinito, 5. A este intervalo pertenecen todos los números reales que son menores a 5 y se representan por medio de una semirrecta sin considerar en este caso el origen de la misma.

PENSAR

<table>
<tr><th colspan="2">Dados dos números reales "a" y "b" distintos y a < b se define:</th></tr>
<tr>
<td>a) Intervalos acotados.

• intervalo real cerrado [a; b]

• Intervalo real abierto (a; b)
</td>
<td>b) Intervalos no acotados.
Solamente se muestran algunas generalizaciones.
[a ; + ∞)

(-∞; a)
</td>
</tr>
</table>

ACTIVIDADES

1) Vuelva a leer la situación 1) y responda las preguntas utilizando la notación de intervalos reales.

2) Represente sobre la recta real el siguiente intervalo: [-5; 1,8).

3) A partir del intervalo que usted ha dibujado, indique si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

a) El número -5 pertenece al intervalo.
b) El número 1,8 pertenece al intervalo.
c) El número -0,5 y su opuesto son números que pertenecen al intervalo.
d) El número $\sqrt{3}$ pertenece al intervalo.
e) En ese intervalo solamente existen 7 números enteros.
f) El número 1,79 pertenece al intervalo.
g) El número $\frac{15}{10}$ pertenece al intervalo.

OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES BAJO DISTINTAS NOTACIONES (FRACCIONARIA Y DECIMAL). PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES

Antes de abordar los cálculos con números racionales es conveniente revisar algunas nociones a las que necesitará recurrir en varias ocasiones para resolver las situaciones propuestas. Para ello responda:

¿Qué es un número racional?

....

....

¿De qué formas se puede expresar un número racional?

....

....

¿Cuándo dos fracciones son equivalentes?

....

....

¿Cómo obtiene una fracción equivalente a un número dado en escritura fraccionaria, por ejemplo a $\frac{21}{63}$?

....

....

¿Qué significado tiene el arco que aparece en la expresión decimal de un número racional, por ejemplo: $2,\overset{\frown}{5}$?

....

....

Si pudo responder, continúe. En caso contrario lea nuevamente el tema "conjunto de números racionales" antes de seguir avanzando. Es importante considerar la siguiente observación:

NOTAS

NOTAS

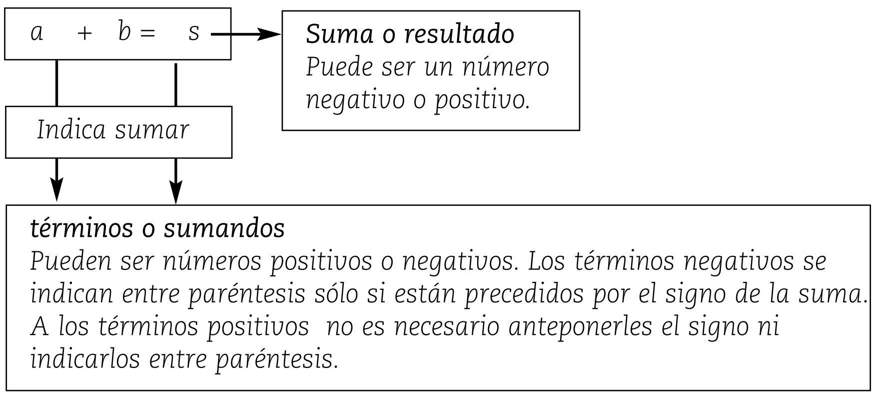
A partir de este momento hablaremos de operaciones **en el conjunto de los números racionales.**

Por ello es necesario que sepa que nos referiremos a **operación** en un conjunto numérico cuando se cumple que el resultado del cálculo entre dos números de ese conjunto siempre es un único número que pertenece a dicho conjunto. Si esto no se cumple, hablaremos simplemente de **cálculos posibles** en un conjunto numérico.

Por ejemplo, la suma de dos números racionales siempre tiene por resultado un único número racional. Por ello la adición es una operación en el conjunto de los números racionales. Como al restar dos números racionales siempre se obtiene un único número racional, la sustracción es una operación en el conjunto de los números racionales. También son operaciones en el conjunto de los números racionales la multiplicación y división. De cada una de estas operaciones analizaremos los cálculos correspondientes y las propiedades que cada una de ellas cumple. Propiedades que luego serán empleadas para resolver ecuaciones.

SUMA DE NÚMEROS RACIONALES

Comenzamos con un esquema para que recuerde el significado de las palabras que se utilizarán.



A partir de diversas situaciones que le proponemos resolver revisará conceptos, cálculos, procedimientos y algoritmos.

Situación 1

Sebastián y su amigo están acampando en una zona de Uspallata para subir un cerro. A las tres de la madrugada, Sebastián se despierta y lee que el termómetro registra una temperatura de 4,5° C bajo cero. A las 8 de la mañana, cuando se despiertan, vuelve a mirar el registro y observa que ha descendido 3° C más. Después de desayunar realizan una caminata corta y al mediodía la temperatura ya había subido 3,6 ° C y después de almorzar, a las tres de la tarde, la temperatura se incrementó en otros 5° C.

a) Indique, realizando los cálculos necesarios, la cantidad de temperatura registrada a las 8 de la mañana, al medio día y a las tres de la tarde.

b) Escriba la expresión que le permite calcular la cantidad de temperatura registrada a las tres de la tarde.

Para resolver esta situación es importante que indique, utilizando números, las variaciones en las medidas de temperatura que están implícitas en las expresiones: "la temperatura ha subido…., "la temperatura ha descendido…" y también cómo escribir el número que indica una medida de temperatura bajo cero.

Para responder el punto a) los cálculos que usted seguramente propuso son:

-4,5 + (- 3) = -7,5
-7,5 + (+3,6) = -3,9
- 3,9 + (+5) = 1,1

O sea que los registros de la temperatura fueron de: 7,5 ºC bajo cero a las 8 de la mañana , 3,9ºC bajo cero al medio día y de 1,1ºC sobre cero a las tres de la tarde.

La expresión que corresponde al cálculo que se pide en el punto b) y que permite calcular la medida de la temperatura a las tres de la tarde es:

-4,5 + (-3) + (+3,6) + (+5) =1,1

Por último, para resolver esta suma de números positivos y negativos habrá utilizado alguna de las dos propuestas que se muestran a continuación.

1ª) Realizar el cálculo de la expresión como está escrita, es decir: -4,5 + (-3) + (+3,6) + (+5). Para ello primeramente calculó la suma de los dos primeros términos : -4,5 + (-3) = -7,5 luego a este resultado le sumó el tercer término: -7,5 + (+ 3,6) = -3,9; y por último al nuevo resultado le sumó el último término, obteniendo de esta manera el resultado final:

-3,9 + (+5) = 1,1

La 2ª propuesta consiste en calcular la resta entre la suma de los términos positivos y la suma de los términos negativos,

NOTAS

NOTAS

como se puede ver en la siguiente expresión:

$$\begin{array}{l}(\,3{,}6 + 5\,) - (\,4{,}5 + 3) = \\ \quad 8{,}6 \quad - \quad 7{,}5 \quad = 1{,}1\end{array}$$

RECORDAR

En la suma de dos números racionales se pueden presentar las siguientes situaciones que dependen del signo de los sumandos:

• Los sumandos tienen el mismo signo. En este caso se suman los valores absolutos de los términos y el resultado tiene el mismo signo de los sumandos. Como usted puede ver en los siguientes ejemplos:

$(+1{,}5) + (+4) = +5{,}5 = 5{,}5$

$$\left.\begin{array}{l}|+1{,}5| = 1{,}5 \\ |+4| = 4\end{array}\right\} 1{,}5 + 4 = 5{,}5$$

$(-8{,}75) + (-12{,}3) = -21{,}05$

$$\left.\begin{array}{l}|-8{,}75| = 8{,}75 \\ |-12{,}3| = 12{,}3\end{array}\right\} -(8{,}75+12{,}3) = -21{,}05$$

Nota:
Se llama módulo o valor absoluto de un número a la distancia de dicho número al cero.
El módulo de un número se indica entre barras.
Por ejemplo:
$|-4| = 4$ *Se lee: módulo de -4 igual a 4*
$|5| = 5$ *Se lee: módulo de 5 igual a 5*

• Los sumandos tienen distinto signo. Ante este caso se restan los valores absolutos y se coloca el signo del sumando de mayor valor absoluto, como puede observar en el siguiente ejemplo:

$-8 + (\,+3) = -5$

$$\left.\begin{array}{l}|-8| = 8 \\ |+3| = 3 \\ |-8| > |+3|\end{array}\right\} 8 - 3 = 5 \text{ y como } 8 > 3 \text{ es entonces: } -8 + (+3) = -5$$

$5{,}5 + (\,-2{,}5) = 3$

$$\left.\begin{array}{l}|+5{,}5| = 5{,}5 \\ |-2{,}5| = 2{,}5 \\ |5{,}5| > |-2{,}5|\end{array}\right\} \begin{array}{l}5{,}5 - 2{,}5 = 3 \text{ y como } 5{,}5 > 2{,}5 \text{ es entonces:} \\ 5{,}5 + (-2{,}5) = 3\end{array}$$

• Si se suman expresiones decimales de números racionales se respeta el valor de cada cifra según la posición que ocupa sumando centésimos entre sí, décimos entre sí, unidades entre sí y así siguiendo según el orden de la cifra.

ACTIVIDADES

1. Para referirnos a los cálculos con números racionales expresados como fracción responda a continuación a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuándo dos o más fracciones son equivalentes?

....

....

b) ¿Cómo se obtiene una fracción equivalente a otra?

....

....

c)¿Cómo se calcula el menor múltiplo común de dos o más números naturales?

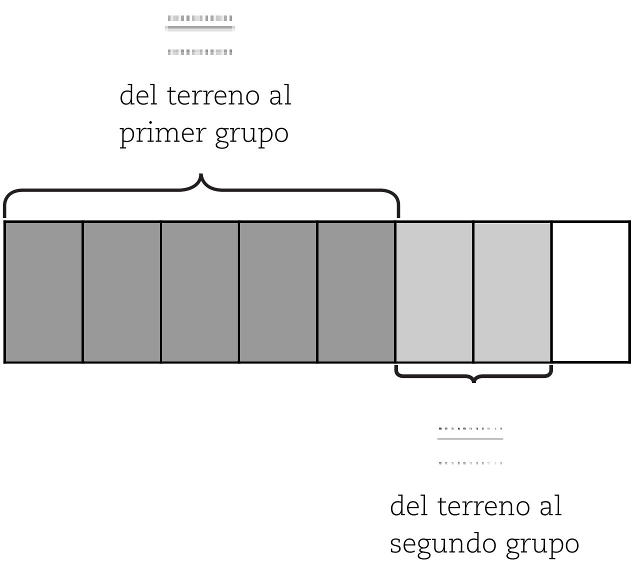
....

....

Situación 2

La municipalidad ha destinado $\frac{5}{8}$ de un terreno para que un grupo de estudiantes realicen el cultivo de una huerta orgánica y $\frac{2}{8}$ del mismo a otro grupo para plantar árboles. ¿Qué parte del terreno ha entregado la municipalidad a los dos grupos de alumnos?

Para resolver esta situación es muy práctico interpretarla primero a través de un gráfico, como se muestra en la figura. Todo el rectángulo representa el terreno que ha sido fraccionado.



¿En cuántas partes se ha fraccionado el terreno?

....

NOTAS

NOTAS

¿Cuántas partes del mismo son las que se utilizarán para la huerta orgánica?

....

¿Cuántas partes se destinarán para plantar árboles?

....

Complete los cuadros que señalan las partes del terreno en el gráfico

¿Cuántas partes en total se han destinado a los estudiantes?

....

Si contamos las partes coloreadas coincidiremos en que se han entregado en total $\frac{7}{8}$ partes del terreno a los alumnos.

Pero para calcular aritméticamente la solución, como hay que juntar las dos partes entregadas para resolver la situación, el cálculo a realizar es una suma:

$$\frac{5}{8}+\frac{2}{8}=\frac{5+2}{8}=\frac{7}{8}$$

Como podrá observar, el resultado del cálculo coincide con la respuesta obtenida mediante la interpretación gráfica del mismo.

PENSAR

Si se suman números racionales expresados como fracciones de igual denominador la suma es un número racional que tiene el mismo denominador y el numerador es la suma de los numeradores de los términos dados.

Pero, ¿cómo se resuelve una suma de fracciones de distinto denominador?

Situación 3

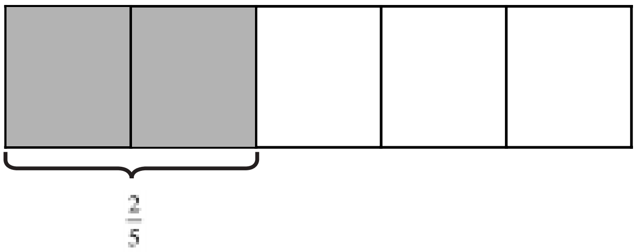
Un móvil realiza dos rondas de patrullaje. Durante la primera ronda consume las $\frac{2}{5}$ partes de la capacidad del tanque de combustible y durante la segunda $\frac{1}{3}$ parte del tanque. ¿Qué parte de la capacidad del tanque se utilizó para las dos rondas?

Para calcular cuántas partes de la capacidad del tanque utilizadas durante las dos rondas, estamos de acuerdo en que la operación a realizar es:

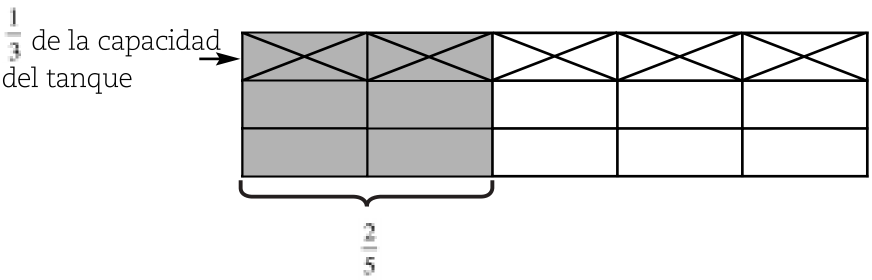
$$\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=$$

Usted notará que estos dos números racionales tienen distinto denominador, por lo que no es posible sumar inmediatamente, como en el caso anterior en que los denominadores eran iguales.

Para resolver este cálculo trabajamos nuevamente con un gráfico de forma rectangular, a partir del cual se representa la capacidad total del tanque de combustible. Se han coloreado las dos quintas partes utilizadas en la primera ronda.



En la representación anterior señale la tercera parte del tanque que es utilizada en la segunda ronda. Para ello fraccione la figura rectangular en tres partes (en forma horizontal) y señale con una cruz la tercera parte de la capacidad del tanque. Seguramente obtuvo una representación como la siguiente:



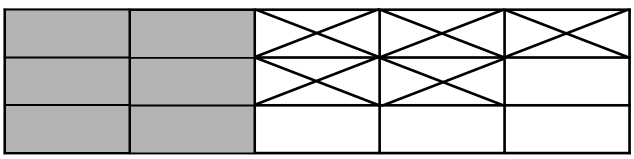
¿En cuántas partes ha quedado fraccionado ahora el rectángulo que representa la capacidad total del tanque?

....

Cada "parte", ¿qué parte del entero (total del tanque) representa?

....

Observe que al representar las partes ocupadas en la segunda de las rondas aparecen dos quinceavas partes de la capacidad del tanque como "ocupadas dos veces" (pintadas y señaladas con una cruz), situación que es imposible por lo que esas dos partes (dos quinceavas partes) deben ser consideradas de las otras partes de la capacidad del tanque sin usar. Por ello es que la siguiente figura representa adecuadamente la capacidad del tanque que se utilizó para realizar las dos rondas.



Al representar el consumo de cada ronda, hay que prestar atención, de no superponer el coloreado.

NOTAS

NOTAS

Si observa esta última representación verá que se han coloreado las $\frac{2}{5}$ partes de la capacidad del tanque que equivale a... ¿cuántas quinceavas partes?

....

También está sombreada la tercera parte de la capacidad del tanque que equivale a... ¿cuántas quinceavas partes?

....

De esta manera, considerando las $\frac{6}{15}$avas partes del tanque que corresponden al consumo de la primera ronda y las $\frac{5}{15}$avas partes de la capacidad del tanque, que indica el consumo de la segunda ronda, entonces, ¿qué partes de la capacidad total del tanque se consumieron?

....

Seguramente al escribir la respuesta usted ha contado la cantidad de partes coloreadas, que son en total 11 de las 15 dibujadas.

Es decir que se ocuparon las $\frac{11}{15}$partes del tanque.

Aritméticamente el cálculo queda expresado así:

$$\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{11}{15}$$

Pero podrá notar que se están sumando dos números racionales expresados en forma fraccionaria de distinto denominador, y que la suma hallada es la que se obtuvo a través de la representación y de considerar las expresiones fraccionarias equivalentes a los sumandos y de igual denominador. Es decir que puede escribirse la siguiente suma:

$$\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}=\frac{11}{15}$$

Para resolver la suma de dos números racionales expresados en forma fraccionaria de distinto denominador, como en este caso, es necesario expresar dicha suma como una suma de términos que tengan el mismo denominador.

Para ello se deben construir fracciones equivalentes a las dadas, con el mismo denominador.

Seguramente recordará que el denominador común de los dos números racionales se encontraba a través del **múltiplo común menor** de los denominadores, en este ejemplo de 3 y 5, 15. Calculado el múltiplo común menor, se procede a encontrar una fracción equivalente a $\frac{2}{5}$, con denominador 15, y otra fracción equivalente a $\frac{1}{3}$ también con denominador 15.

En definitiva, se busca amplificar las dos fracciones:

NOTAS

$\frac{2}{5}=\frac{\dots}{15}$. Multiplicando por tres al numerador se tiene: $\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$

$\frac{1}{3}=\frac{\dots}{15}$. Multiplicando por 5 al numerador se tiene: $\frac{1}{3}=\frac{5}{15}$

Luego, el cálculo que resuelve la situación es:

$$\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}=\frac{11}{15}$$

Con lo cual confirmamos una vez más que se han consumido en las dos rondas las $\frac{11}{15}$ avas partes del total de la capacidad del tanque.

PENSAR

Si se suman números racionales expresados como fracciones de distinto denominador, se debe transformar dicha suma en otra suma cuyos sumandos son expresiones fraccionarias equivalentes a los sumandos dados de igual denominador que es el menor múltiplo común de los denominadores dados.

Situación 4

Al resolver situaciones suelen presentarse sumas con números racionales expresados con escritura decimal y con escritura fraccionaria, como el cálculo que se muestra a continuación:

$$\frac{3}{4}+2,5=$$

Para resolver dicho cálculo se puede:

• transformar el número racional expresado en notación fraccionaria a notación decimal, o bien,

• transformar el número racional expresado en notación decimal a notación fraccionaria como se recuerda en la siguiente nota.

En este caso optaremos por la primera de las alternativas, es decir resolver la suma con números racionales expresados con notación decimal. Para lo cual debe encontrarse la expresión decimal de $\frac{3}{4}$

Nota:
Recuerde que 2,5 se lee veinticinco décimos, cuya notación fraccionaria es $\frac{25}{10}$
Entonces: $2,5=\frac{25}{10}$

Se encuentra el cociente: $\frac{3}{4}=0,75$

Volviendo a la suma que nos ocupa, ésta queda expresada así:

$0,75 + 2,5 = 3,25$

Llegando de esta forma a la solución buscada.

NOTAS

Usted recordará que al calcular el cociente entre dos números enteros para expresar un número racional en escritura decimal, no siempre obtiene un expresión decimal exacta. Surge entonces la pegunta: ¿cómo resolvemos esta situación en un problema?

Por ejemplo la suma:

$$\frac{4}{3}+\frac{1}{4}=$$

Al expresar en notación decimal cada uno de los números racionales correspondientes a los sumandos, la suma queda:

$$\frac{4}{3}+\frac{1}{4}=1,3333...+0,25$$

Para calcular la suma hay que acordar cuántas cifras decimales se van a utilizar. Por ejemplo, puede ser que se acuerde:

• Una cifra decimal, y el resultado sería:

1,3 + 0,2 = 1,5

Entonces es

$$\frac{4}{3}+\frac{1}{4}\cong 1,5$$

Nota:
$\cong$ *se lee: aproximadamente igual*

• Tres cifras decimales y el resultado sería:

$$\frac{4}{3}+\frac{1}{4}\cong 1,333+0,250=1,583$$

Al observar las sumas obtenidas vemos que éstas no resultan iguales, ya que 1,5 < 1,583. El resultado depende de la situación con la que está trabajando o de la exactitud esperada del cálculo. De todos modos más adelante se volverá sobre este aspecto de la suma de números racionales en escritura decimal.

RECORDAR

Si se suman dos números racionales expresados con distinta escritura es necesario escribir ambos en el mismo tipo de notación y luego calcular la suma.

Si se suman números racionales cuya notación decimal es infinita se acuerda con la cantidad de cifras decimales que se desea obtener la suma.

PROPIEDADES DE LA SUMA CON NÚMEROS RACIONALES

Hasta el momento se han analizado distintas situaciones que implican, para su solución, una suma de números racionales. Ahora abordaremos el estudio de las propiedades que le van a aportar métodos de cálculos más cómodos y eficaces.

Si usted relee todas las situaciones analizadas observará que si suma pares de números racionales cualesquiera la suma siempre será única y será un número racional. Esto nos permite enunciar la siguiente propiedad:

RECORDAR

Propiedad de cierre

La suma de dos números racionales es única y siempre un número racional.

Al realizar el cálculo de una suma es indistinto el orden en que se sumen los términos; esto no altera el resultado o suma. Conclusión que puede expresarse a través de la propiedad conmutativa.

RECORDAR

Propiedad conmutativa

Para todos los números racionales a y b se verifica que:
$a + b = b + a$

Hasta el momento siempre se han realizado adiciones con dos sumandos, y usted sabe bien que en la mayoría de las situaciones se presentan más de dos términos.

Pues bien, si se presenta una adición de tres o más términos usted puede calcular la suma de los dos primeros y luego sumarla al tercero o también puede calcular la suma de los dos últimos y sumarle luego el primero; en ambos caso la suma es única y la misma. O sea: el orden en que se asocian los términos no altera la suma o resultado final. Para indicar el modo en que se calculan las sumas, usted observará que al interpretar la propiedad simbólicamente se utilizan los paréntesis para indicar el modo en que se asocian los términos para sumar.

RECORDAR

Propiedad asociativa

Para todos los números racionales a, b, c se verifica que:
$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$.

NOTAS

NOTAS

Situación 1

Analice esta situación que es muy simple, pero que muchas veces en la instancia del cálculo genera dudas.

Martín y Diego van juntos hasta el quiosco a tomar una gaseosa y acuerdan que entre los dos van a juntar el dinero para comprarla. Al llegar, Martín saca \$0,50 y en ese momento Diego se da cuenta de que no trajo dinero. Indique el cálculo del total de dinero que tienen para comprar la gaseosa.

Seguramente usted no tuvo necesidad de hacer el cálculo ya que el resultado es \$0,50, porque Diego no aportó ningún peso.

De todos modos el cálculo aritmético que está vinculado a esta situación es el siguiente:

$0{,}50 + 0 = 0{,}50$

Puntualmente, lo que interesa resaltar en este cálculo es que si en una suma de dos términos uno de ellos es cero, la suma será igual al otro término. El cero es el elemento neutro de la adición en el conjunto de los números racionales. La propiedad que expresa esto es:

RECORDAR

Propiedad del elemento neutro

Existe el cero que pertenece a $\mathbb{Q}$, tal que para todo número racional a, se verifica que:

$a + 0 = 0 + a = a$

ACTIVIDADES

1. Analice y complete la línea punteada con el resultado correspondiente:

a) $0{,}3 + (-0{,}3) = (-0{,}3) + 0{,}3 =$ ……….

b) $\frac{8}{3}+\left(-\frac{8}{3}\right)=-\frac{8}{3}+\frac{8}{3}$ ………

En cada uno de los casos los términos sumados, ¿cómo son?

……………………………………………………………………………………………………

Los términos son opuestos y **el resultado es cero (0)**, que es el elemento neutro de la adición.

Podemos concluir que: si a un número racional se le suma su opuesto la suma es cero.

PENSAR

Propiedad del elemento opuesto o inverso aditivo

Para todo número racional "a", existe el racional (-a) tal que:
$a+(-a) = -a+a = 0$.

ACTIVIDADES

1. Analice y complete la siguiente igualdad con el resultado de cada uno de los miembros indicados:

$$\overbrace{\frac{3}{2}+\left(-\frac{2}{8}\right)}^{\textit{Primer miembro}} = \overbrace{\frac{6}{4}+\left(-\frac{1}{4}\right)}^{\textit{Segundo miembro}}$$

....
.... = ...

2. Volviendo al cálculo inicial, sume a ambos miembros un mismo número y luego compare los resultados de cada miembro y escriba una conclusión.

A continuación se escribe una conclusión que le permitirá verificar su respuesta. La igualdad se mantiene debido a que se sumó el mismo número en cada uno de los miembros. Es decir que, si a ambos miembros de una igualdad se le suma un mismo número racional, se mantiene la igualdad.

PENSAR

Propiedad uniforme

Para todos los números racionales a, b, c se cumple: si $\boldsymbol{a = b}$ ***entonces*** $\boldsymbol{a + c = b + c}$.

NOTAS

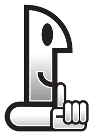
La propiedad que se presenta a continuación está muy vinculada a la anterior y se refiere a la cancelación de sumandos o términos iguales en distintos miembros.

Analice el siguiente ejemplo:

$$-\frac{15}{3}+\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{8}{3}+\left(-\frac{7}{3}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$-\frac{15}{3}=-\frac{8}{3}+\left(-\frac{7}{3}\right)$$

Por lo tanto, todo sumando o término que aparece en ambos miembros de una igualdad puede ser cancelado conservando la igualdad.



RECORDAR

Propiedad cancelativa

Para todos los números racionales a, b, c se cumple:
si a + c = b + c entonces a = b.

Relea las propiedades con atención y analice los ejemplos. Escriba el nombre de cada propiedad y dé otros ejemplos.

Pues bien, al comenzar con la revisión de las propiedades de la suma se especificó puntualmente que las mismas le van a aportar métodos de cálculos más cómodos y eficaces.

Observe el siguiente cálculo:

$$\frac{15}{4}+\left(-\frac{2}{5}\right)+0+\left(-\frac{15}{4}\right)+5+\left(-\frac{20}{4}\right)+\frac{9}{2}+\left(-\frac{13}{2}\right)=$$

NOTAS

Antes de comenzar con el cálculo, le sugiero que responda las siguientes preguntas observando la expresión del cálculo propuesto.

1º ¿Cuántos términos tiene la expresión?

....

2º ¿Es posible simplificar algunos de los términos expresados como fracción y obtener una expresión equivalente formada por números menores a los dados? ¿En cuál de los términos?

....

3º ¿Hay términos que son números opuestos?

....

4º ¿Es necesario volver a escribir el cero?

....

Una vez realizada la observación de los términos, ya sea con el fin de detectar los números que son opuestos, del término cero, o simplificar fracciones, comience con el cálculo de la suma. Para ello recuerde las propiedades: asociativa, conmutativa y uniforme.

A continuación se muestra el cálculo resuelto, en el que se identifica lo realizado en cada paso y las propiedades que se utilizaron.

$$\frac{15}{4}+\left(-\frac{2}{5}\right)+0+\left(-\frac{15}{4}\right)+5+\left(-\frac{20}{4}\right)+\frac{9}{2}+\left(-\frac{13}{2}\right)=$$

- suma de números opuestos
- propiedad elemento neutro
- simplificación de una fracción

$$-\frac{2}{5}+5+(-5)+\frac{9}{2}+\left(-\frac{13}{2}\right)=$$

- suma de números opuestos

$$-\frac{2}{5}+\frac{9}{2}+\left(-\frac{13}{2}\right)=$$

- propiedad asociativa
- suma de números racionales de igual denominador

$$-\frac{2}{5}+\left(-\frac{4}{2}\right)=$$

- Cálculo del menor múltiplo común para la suma de números racionales de distinto denominador
- Amplificación de fracciones.
- Suma de dos término negativos.

$$-\frac{4}{10}+\left(-\frac{20}{10}\right)=$$

- Suma de dos números racionales negativos de igual denominador.
- Simplificación

$$-\frac{24}{10}=-\frac{12}{5}$$

ACTIVIDADES

1) Resuelva y exprese qué hace en cada paso como se mostró en el ejemplo anterior.

$$\frac{1}{5}+7+\left(-\frac{14}{2}\right)+2{,}5+(-3{,}8)=$$

RESTA DE NÚMEROS RACIONALES

a - b = c	→	*Diferencia*
		Sustraendo
		Minuendo

Recuerde que la resta de números racionales también se puede expresar como una suma. Esto significa que al minuendo hay que sumarle el opuesto del sustraendo.
a – b = a + (- b)

ACTIVIDADES

Situación 1

1) Calcule las siguientes diferencias:

a) $\frac{3}{5}-\frac{10}{3}=$

b) $5-\left(-\frac{1}{2}\right)=$

2) De una bolsa de azúcar, que tiene solamente el 60% de su capacidad con azúcar, se han sacado las $\frac{7}{20}$ *partes de la capacidad de la bolsa para ser fraccionada en paquetes.*

a) ¿Qué porcentaje de la capacidad de la bolsa de azúcar faltaba antes de comenzar a fraccionarla?

b) ¿Qué parte de la capacidad de la bolsa queda aún después del fraccionamiento?

Antes de iniciar la resolución de esta situación le sugiero que lea nuevamente el problema, subraye los datos del mismo y preste especial atención a las dos preguntas que presenta. Para una mejor interpretación le proponemos, también, que responda las siguientes preguntas:

1) ¿La bolsa de azúcar estaba total o parcialmente llena?

....

2) ¿Qué porcentaje asocia a la capacidad de la bolsa cuando está completamente llena?

....

3) ¿Qué parte o porcentaje de la capacidad de la bolsa faltaba antes de comenzar a fraccionar?

....

4) ¿Qué parte o porcentaje de la capacidad total de la bolsa está con azúcar?

....

5) ¿Qué parte de la capacidad de la bolsa se extrae para fraccionar?

....

6) Para poder calcular qué parte de la capacidad de la bolsa que aún queda para fraccionar, ¿qué cálculo haría con 60% y $\frac{7}{20}$ *?*

....

7) A partir de ahora responda las preguntas del problema.

....

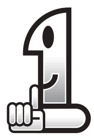
***Respuestas**.*
a) 40% de la capacidad faltaba.
b) $\frac{1}{4}$ *partes de la capacidad de la bolsa queda.*

NOTAS

SUPRESIÓN DE PARÉNTESIS ( ), CORCHETES[ ] Y LLAVES{ }

Habrá notado que se están utilizando los símbolos "+" y "-" para indicar tanto signos de números racionales como operaciones aritméticas. También en algunos casos el paréntesis indica un número negativo y en otros le indica el orden en que debe realizar un cálculo. A continuación se analizan ambas situaciones.

RECORDAR



La resta de dos números racionales se puede expresar como una suma del minuendo más el opuesto del sustraendo:

$$a - b = a + (- b)$$

La suma de dos números racionales se puede expresar como una resta del primer sumando menos el opuesto del segundo sumando:

$$a + b = a - (- b)$$

NOTAS

Situación 1

Los paréntesis encierran números racionales

Observe con atención el análisis que se realiza a continuación y complete donde se indica.

a) Cálculos en los que aparecen números racionales positivos:

Usted recordará que acordamos que los números positivos los escribimos sin signo.

Por ejemplo: + 0,5 se escribe 0,5

A continuación se presentan los números racionales positivos en cálculos.

- +3,4 – (+5,2) lo escribe 3,4 – 5,2
- $+\frac{2}{5}$ + (+10) lo escribe ……+…….,
- En estos dos casos se ha suprimido el signo que identifica un número racional positivo.

b) Cálculos en los que aparecen números racionales negativos.

- $\frac{3}{2}$ – (-5) =

Si expresa esta resta como una suma queda …………..

El resultado de $\frac{3}{2}$ + (+5) = $\frac{3}{2}$ + 5 =………

Entonces resulta la expresión sin paréntesis:

$\frac{3}{2}$ – (- 5) = $\frac{3}{2}$ + 5

Observe que al suprimir el paréntesis precedido por un signo menos... ¿qué pasó con el signo del número que encierra el paréntesis?
……………..…………………..……………..……………..……………..…………

- 1,8 + (- 0,10) =

Para resolver este cálculo se presentan dos propuestas:

a) Se realiza la suma indicada:

1,8 + (-0,10) = 1,7

b) Se transforma la suma en una resta:

1,8 – (+0,1).

Al suprimir el paréntesis que encierra un racional positivo queda:

1,8 – 0,1 = 1,7

RECORDAR

• Cuando se suprimen paréntesis precedidos por un signo negativo cambia el signo del número racional que encierran.

• Cuando se suprimen paréntesis precedidos por un signo positivo se mantiene el signo del número racional que encierran.

• Antes de comenzar las actividades lea nuevamente la primera situación y las dos conclusiones finales.

ACTIVIDADES

1. Escriba la siguiente expresión sin paréntesis, teniendo en cuenta las dos conclusiones anteriores.

1,5 + (- 1,5) – (-3,4) – (+ 7,8) + (+ 2,2) =

....

¿Habrá llegado a esta expresión?

1,5 - 1,5 + 3,4 - 7,8 + 2,2 =

2. Calcule el resultado de la suma algebraica.

La expresión para el cálculo seguramente le quedó: (1,5 + 3,4 + 2,2) – (1,5 + 7,8) =
7,1 – 9,3 =
Si se expresa la resta como una suma: 7,1 + (-9,3) = - 2,2

3. Resuelva:

$$-\frac{2}{5}+\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{2}{4}\right)=$$

Respuesta.

$$-\frac{2}{5}$$

NOTAS

Situación 2.

Los paréntesis indican el orden en que se debe realizar un cálculo

a) Analice, complete y resuelva el siguiente cálculo:

$$5+\left(-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{5}{3}-\frac{3}{2}-5\right)=$$

¿Cuántos términos tiene esta expresión?

....

Seguramente contestó que 3.

A continuación se identifican los tres términos:

$$\overbrace{5}+\overbrace{\left(-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)}-\overbrace{\left(\frac{5}{3}-\frac{3}{2}-5\right)}=$$

Para eliminar los paréntesis es necesario prestar atención a si están precedidos por un signo positivo (+) o un signo negativo (-)

El primer término, nos referimos al 5, no presenta paréntesis. Observará que el segundo término, $+\left(-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)$, está precedido por un signo (+) y que entonces al eliminar los paréntesis se mantienen los signos de los números que encierra. La nueva expresión es:

$$5-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}-\left(\frac{5}{3}-\frac{3}{2}-5\right)=$$

Atención al eliminar el paréntesis del tercer término, $-\left(\frac{5}{3}-\frac{3}{2}-5\right)$ ya que este término está precedido por un signo negativo (-). Entonces para eliminar los paréntesis hay que cambiar los signos de todos los números racionales que encierra, y la expresión que obtiene sin paréntesis es:

$$5-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}-\frac{5}{3}+\frac{3}{2}+5=$$

ACTIVIDADES

1. De esta manera se ha llegado a un cálculo con sumas y restas de números racionales con distinto denominador. Resuelva este cálculo.

$$5-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}-\frac{5}{3}+\frac{3}{2}+5=$$

Respuesta.

$\frac{26}{3}$

Ahora se proponen cálculos en los que aparecen los paréntesis pero también los corchetes y las llaves. Estos símbolos habrá que ir eliminándolos para calcular el resultado. Para resolverlos se presentarán dos propuestas, para las cuales hay reglas comunes como las que se expresan a continuación:

1º Se resuelven o eliminan primero los paréntesis, luego los corchetes y finalmente las llaves.

2º Si un paréntesis, corchete o llave está precedido por un signo negativo, al suprimirlos cambia el signo del o los números racionales que encierra.

3º Si un paréntesis, corchete o llave está precedido por un signo positivo, al suprimirlos no cambia el signo de los términos que encierra.

ACTIVIDADES

La propuesta es resolver el siguiente cálculo:

$$\frac{1}{4}-\left\{3-\left[\frac{2}{5}+(0{,}5-1{,}5+4)\right]+\frac{10}{5}\right\}=$$

Las alternativas son:

Propuesta A	*Propuesta B*
Resolviendo primero los ( ), luego los [ ] en tercer lugar la { } *Resuelva el paréntesis y complete.* $\frac{1}{4}-\left\{3-\left[\frac{2}{5}+(0{,}5-1{,}5+4)\right]+\frac{10}{5}\right\}=$ $\frac{1}{4}\left\{3\left[\frac{2}{5}+(\qquad)\right]+\frac{10}{5}\right\}$ *Al eliminar el paréntesis resulta:* $\frac{1}{4}-\left\{3-\left[\frac{2}{5}+3\right]+\frac{10}{5}\right\}=$ *Resuelva el corchete y complete.* $\frac{1}{4}-\left\{3-[\ldots\ldots\ldots]+\frac{10}{5}\right\}=$ *Al eliminar el corchete resulta:* $\frac{1}{4}-\left\{3-\frac{17}{5}+\frac{10}{5}\right\}=$ *Resuelva las llaves y complete:* $\frac{1}{4}-\{\ldots\ldots\ldots\}=$ *Al eliminar las llaves resulta:* $\frac{1}{4}-\frac{8}{5}=$ *Al simplificar el primer sumando:* $-\frac{27}{20}$ *El resultado final es* $-\frac{27}{20}$	*Suprimiendo primero los ( ), luego los [ ], en tercer lugar las { } y por último resolviendo la suma algebraica que resulta:* $\frac{1}{4}-\left\{3-\left[\frac{2}{5}+(0{,}5-1{,}5+4)\right]+\frac{10}{5}\right\}=$ *Al suprimir los paréntesis que están precedidos por un signo positivo resulta:* $\frac{1}{4}-\left\{3-\left[\frac{2}{5}+0{,}5-1{,}5+4\right]+\frac{10}{5}\right\}=$ *Ahora se suprimen los corchetes. Atención que están precedidos por un signo negativo.* $\frac{1}{4}-\left\{3-\frac{2}{5}-0{,}5+1{,}5-4+\frac{10}{5}\right\}=$ *Elimine las llaves. Atención que están precedidas por un signo negativo.* …………………………………………………………… *Seguramente le quedó, simplificando los números racionales expresados como fracciones,* $\frac{1}{4}-3+\frac{2}{5}+0{,}5-1{,}5+4-2=$ *Termine usted el cálculo y compare su respuesta con la de la propuesta A.*

Analice nuevamente los pasos realizados en ambas propuestas. Le propongo el desafío de resolver el siguiente cálculo aplicando una de las dos alternativas de solución propuestas:

$$\frac{1}{2}-\left\{4+\left[-0,5+\frac{3}{4}-(2,5-1,5)\right]\right\}=$$

ACTIVIDADES

1.Lea la siguiente situación. Andrea y Marina están estudiando para una evaluación de suma y resta de números racionales. Para ello se han propuesto realizar los mismos cálculos. En una primera instancia cada una resuelve sola el mismo cálculo y luego se lo intercambian para corregirlo.

a) A continuación se muestran dos de los cálculos resueltos por cada una de las niñas y un problema. Una de ellas ha cometido errores. Indique los errores con la correspondiente justificación.

Andrea	*Marina*
1) $\frac{3}{5}+\frac{10}{3}-\frac{1}{2}=\frac{18}{30}+\frac{100}{30}-\frac{15}{30}=\frac{18+100-15}{30}=\frac{103}{30}$ 2) $\frac{1}{2}-\left(\frac{3}{2}-5\right)=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+5=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+\frac{10}{2}=\frac{1-3+10}{2}=\frac{8}{2}=4$	1) $\frac{3}{5}+\frac{10}{3}-\frac{1}{2}=\frac{3+10-1}{5+3-2}=\frac{12}{6}=2$ 2) $\frac{1}{2}-\left(\frac{3}{2}-5\right)=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-5=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-\frac{10}{2}=\frac{1+3-10}{2}=-\frac{6}{2}=-3$

Esteban se gastó de sus ahorros: el 35% en salidas con sus amigos y la mitad en un libro. ¿Qué parte gastó?

En cada caso se escribe como lo pensó al problema cada una de las niñas.

Andrea	*Marina*
Primero expreso el porcentaje como una fracción: $35\%=\frac{35}{100}=\frac{7}{20}$ *Gastó 2 partes distintas de sus ahorros, entonces, para calcular las partes que gastó en total, tengo que reunirlas o sea que debo sumar esas partes.* $\frac{7}{20}+\frac{1}{2}=\frac{7+10}{20}=\frac{17}{20}$ *Se gastó las* $\frac{17}{20}$ *partes del total de sus ahorros.*	*Hizo dos gastos, y para saber todo lo que gastó debo sumar.* $35+\frac{1}{2}=\frac{70}{2}+\frac{1}{2}=\frac{70+1}{2}=\frac{71}{2}=35,5$ *Se gastó $35,5*

2. Entre Martín y Nicolás se han comido 7 de las 10 porciones equivalentes en que se cortó la tarta de frutillas. ¿Cuántas porciones quedan para el resto de sus hermanos? Explique cuáles son los caminos que haría para responder la pregunta. La idea es que no escriba la "cuenta", sino que justifique por qué escribe esa "cuenta".

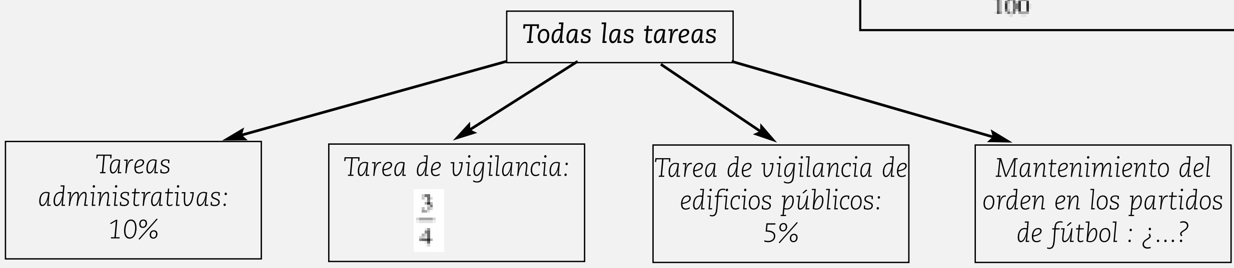
....
....
....
....
....
....
....

3. El comisario de un pueblo ha decidido redistribuir nuevamente la totalidad del personal a su cargo. El 10% se dedicará a tareas administrativas, las $\frac{3}{4}$ partes a vigilancia y rondas y un 5% a vigilancia de los edificios públicos.

¿Quedará parte de su personal disponible para mantener el orden y la seguridad de los partidos de fútbol?

Para comenzar a resolver esta situación lea nuevamente el problema. Intente escribirlo de una forma más sintética. También puede ayudarle representarla mediante un esquema, como por ejemplo el siguiente:

> ***Para recordar.***
> *Una fracción porcentual es aquella cuyo denominador es el número entero 100. Para generalizar, se toma "a" como un número entero y $\frac{a}{100}$ representa una fracción porcentual. Son expresiones equivalentes, entonces: $\frac{a}{100}$ = a %*



Observe las palabras que le den una "pista" y las expresiones numéricas.

O también se puede hacer las siguientes preguntas. ¿Todo el personal tiene una tarea asignada? ¿Qué operación le permite verificar si todo el personal ya está afectado a alguna tarea? Seguramente usted responderá que se debe sumar el número que representa a cada una de las partes.
Ahora bien, ¿si el número que obtiene es mayor que 1 o sea que el entero, ¿qué significa este resultado ? ¿Y si fuese igual a 1? ¿Qué significado tiene este resultado? Por último, ¿y si fuese menor que 1?

> ***Respuesta.***
> *Sí queda parte del personal (el 10%)*

4. Defensa Civil ha organizado tres talleres de capacitación; uno es de supervivencia, otro de primeros auxilios y el tercero de prevención sísmica. Se aclara en el folleto de propaganda que no es posible realizar dos o tres capacitaciones simultáneamente. Los efectivos de una comisaría están interesados en los cursos: de los 100 efectivos se anota el 65 % en el taller de supervivencia, el 25% en el de primeros auxilios y el 8% en el de prevención sísmica.

a) ¿Qué porcentaje de los efectivos de la comisaría se está capacitando?

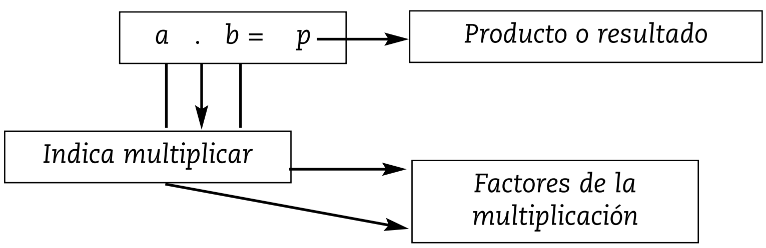
b) ¿Qué parte del personal no se está capacitando?

c) Indique qué cantidad de efectivos asiste a cada taller.

5. Dos maratonistas están entrenando y del objetivo que se han propuesto ya han logrado las $\frac{2}{5}$ partes y el 50% del mismo. ¿Qué parte del objetivo ya han logrado? ¿Qué parte del objetivo les falta aún?

MULTIPLICACIÓN EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Para comenzar consideramos el producto de dos números racionales cualesquiera **a** y **b**, que da por resultado otro número racional único **p** (en el siguiente cuadro aparecen el nombre que reciben).



Situación 1

NOTAS

a) Beatriz ahorró durante tres meses la quinta parte de su sueldo. ¿Qué parte de un sueldo había ahorrado al cabo de los tres meses?

b) Resuelva y complete:

-4. (-2) = ... 8.5 = ... 20.(-3)= ....

Seguramente que al resolver esta situación a) usted propuso una de estas dos alternativas:

$\frac{1}{5}.3=\frac{3}{15}$ o $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{15}$

Si ponemos especial atención a $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$ observará que el término $\frac{1}{5}$ está repetido 3 veces. Esta expresión también se puede escribir de un modo más "abreviado", es decir como un producto: $\frac{1}{5}.3$ entonces:

$\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{1}{5}.3$

Si calculamos la suma del primer miembro resulta:

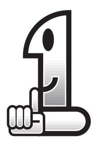
$\frac{3}{5}=\frac{1}{5}.3$

En el punto b) se propone que calcule tres productos, en los que hay factores negativos y factores positivos.

En el primero el producto que obtuvo es 8, en el segundo el producto es 40 y el último producto es -60. Para obtener estos resultados seguramente ha tenido en cuenta los signos de los factores.

Al realizar estos cálculos debió considerar las reglas de signos de la multiplicación que se escriben a continuación, para que las recuerde siempre que deba multiplicar factores con signos positivos o negativos.

RECORDAR



• Al multiplicar dos números racionales de igual signo (ambos positivos o ambos negativos) el resultado o producto es un número racional positivo.

• Al multiplicar dos números racionales de distinto signo (uno positivo y el otro negativo, en cualquier orden) el resultado o producto es un número racional negativo.

NOTAS

Situación 2

Considere los siguientes cálculos y resuélvalos:

a) 1,2 ·(- 2,4) = ...

b) 5,3 · 1,32 = ...

c) -0,64 ·(- 1,23) = ...

Observe los factores de dichos productos: ¿qué números son? Seguramente responderá que son números racionales expresados con escritura decimal. Si usted recuerda, al expresar un número racional en escritura decimal puede ocurrir que la parte decimal del número presente:

• infinitas cifras decimales periódicas, o

• que no tenga cifras decimales o tenga finitas (se pueden contar) cifras decimales.

Los números racionales que corresponden a estas últimas expresiones decimales son los números racionales decimales o, simplemente, números decimales.

Volviendo entonces a la pregunta: "los factores de los puntos a), b) y c), ¿qué números son?
....

Acordamos que efectivamente se trata de números racionales decimales o simplemente números decimales.

Complete el siguiente cuadro:

Cálculo	*Número de orden decimal del primer factor*	*Número de orden decimal del segundo factor*	*Número de orden decimal del resultado o producto*
a) - 1,2 . 2,4 = ...	*Uno*	*Uno*	*Dos*
b) -5,3 · 1,32 = ...	....	*Dos*	....
c) -2,64 · (- 1,23) = ...	....	....	....

Nota.
El orden de un número decimal está vinculado a la cantidad de cifras decimales que tiene dicha expresión.
Por ejemplo: 1,523 es una expresión decimal de tercer orden, porque tiene 3 cifras decimales después de la coma, es decir que posee tres cifras en la parte decimal. Entonces se dice que el orden decimal de dicho número es tres.

Compare el resultado de sumar el número de cifras decimales del primer factor expresado en la segunda columna y el número de cifras decimales del segundo factor expresado en la tercera columna, con el número de cifras decimales que tiene el resultado de cada cálculo y que se visualiza en la cuarta columna.

NOTAS

¿Qué ocurre?
....

Es decir que el número de orden decimal del producto o resultado de multiplicar dos números decimales es igual a la suma de los números de órdenes de los factores correspondientes.

Ahora, complete el siguiente cuadro:

Cálculo	*Cálculo de los factores considerados "como números enteros" (sin considerar la coma decimal)*
a) - 1,**2** . 2,**4** = ...	*a)* – 1 **2** . 2**4** =...............
b) -5,**3** · 1,**32** = ...	*b)* -5 **3** · 1**32** = ...
c) -2,**64** · (- 1,**23**) = ...	*c)* -2**64** · (- 1**23**) = ...

Es decir que si se quiere multiplicar, por ejemplo, -1,2 · 2,4 puede emplearse el siguiente procedimiento:

1. Considerar los números correspondientes a los factores "como números enteros", sin coma decimal, y obtener su producto. Por ejemplo si consideramos - 1,**2** . 2,**4** = ...

¿cuál es su producto al considerar los factores como números enteros? "-12.24"= -288

2. Determinar de qué orden es el resultado o producto y colocar la coma decimal en el número correspondiente al resultado.

Para determinar el orden decimal del resultado o producto, complete:

1,2 es un decimal de .... orden, porque tiene ....

2,4 es un decimal de .... orden, porque tiene................

Entonces: ¿de qué orden es el producto o resultado?
....

Ahora como el resultado es de orden dos el producto o resultado del cálculo es: - 2,88; un número decimal de orden 2 o de segundo orden. Siga usted con el análisis de los productos dados en b) y c).

NOTAS

PENSAR

El producto de dos o más números racionales decimales o simplemente decimales expresados en escritura decimal, se obtiene multiplicando los factores como si fueran números enteros. El número de orden decimal del resultado es igual a la suma de los números de órdenes decimales de los factores que intervienen y el signo depende de si los factores tienen el mismo o distinto signo (considerar regla de signos).

Seguimos analizando otra situación, por ejemplo el producto entre una expresión fraccionaria de un número racional y un número decimal.

$\frac{1}{3} \cdot 1,5 =$

Si le piden trabajar usando la escritura decimal de los factores. ¿Cómo lo resuelve?

....

Seguramente pensó en realizar el cociente 1: 3, pero al resolverlo ¿qué característica presenta la parte decimal de dicho cociente?

....

Como la escritura decimal de $\frac{1}{3} = 0,\hat{3}$ es periódica, es necesario acordar con cuántas cifras decimales se va a trabajar para calcular el producto, que siempre resultará aproximado.

Resuelva el producto $\frac{1}{3} \cdot 1,5 =$

a) utilizando dos cifras decimales

b) utilizando tres cifras decimales

c) compare los resultados obtenidos en a) y en b)

RECORDAR

Si en el producto de dos o más números racionales expresados en notación decimal hay factores con la parte decimal periódica, se debe tomar una decisión sobre el número de cifras decimales empleadas, el que dependerá de la precisión con que se desee trabajar para calcular el producto.

Pero... ¿cómo se calcula entonces el producto exacto?

Para obtener el resultado exacto del producto $\frac{1}{3} \cdot 1,5$ hay que trabajar con los factores expresados en notación fraccıonaria. Considerando que 1,5 se lee "quince décimos", ¿cómo lo expresaría en notación fraccionaria?

....

Si la expresión que propuso puede ser simplificada, hágalo:

....

Luego, el producto inicial queda: $\frac{1}{3} \cdot 1,5 = \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{10} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

Finalmente, el producto exacto es $\frac{1}{2}$

Situación 3

Una comisaría tiene las tres cuartas partes del total de sus efectivos afectados a tareas de control y vigilancia. El 20 % de los efectivos que se dedican a esta tarea es el personal femenino de la comisaría. ¿Qué parte del personal de la comisaría es femenino?

Para resolver este problema le sugiero que comience primero por responder las siguientes preguntas:

¿Qué parte del personal de la comisaría está asignada a la tarea de control y vigilancia?

El 20% del personal al que se refiere la situación corresponde al personal femenino que posee la comisaría. Ahora, ¿se refiere al 20% de la totalidad de los efectivos de la comisaría o al 20% del personal que tiene asignada la tarea de control y vigilancia?

¿Cuál es la pregunta del problema?

Es decir que lo que se busca es el 20% de las tres cuartas partes del total del personal de la comisaría.

Nota.
Un porcentaje puede expresarse en notación fraccionaria con denominador 100. Por ejemplo:
$20\% = \frac{20}{100}$

También se puede expresar empleando escritura fraccionaria de un número: que se está buscando las $\frac{20}{100}$ partes de las $\frac{3}{4}$ partes de la totalidad de los efectivos.

Esto último se puede expresar, luego de simplificar, de la siguiente forma:

Recuerde.
$20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$

NOTAS

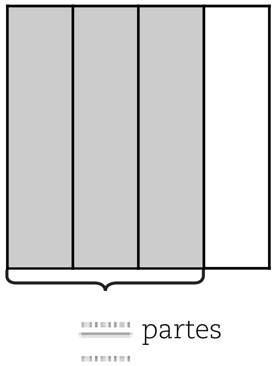
NOTAS

$\frac{1}{5}$ de $\frac{3}{4}$ de la totalidad del personal de la comisaría.

¿Qué cálculo hay que hacer cuando se busca, como en este caso, **una parte de otra parte de un todo o totalidad**?

....

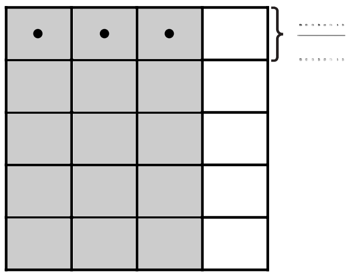
Si no está seguro de cuál es el cálculo por resolver, pensemos en una representación gráfica, por ejemplo una figura rectangular que represente la totalidad del personal, en la que indicamos sombreadas las $\frac{3}{4}$ partes de la misma.



La parte sombreada... ¿qué indica?

....

De la parte sombreada sólo un quinto $\left(\frac{1}{5}\right)$ corresponde a personal femenino de la comisaría, por lo que para indicar esta parte es necesario fraccionar la gráfica en 5 partes. Observe la siguiente representación en la que, luego de fraccionar en quintos, se ha señalado con "•" las partes que corresponden al personal femenino.



Por lo tanto se ha indicado con "•" la quinta parte de las tres cuartas partes del todo.

Las partes indicadas con • están señalando la parte del total del personal que es femenina. Entonces, ¿qué parte del todo representa la parte señalada con "•", y qué es la parte que se busca para dar la solución del problema?

Para responder a esta pregunta seguramente que contó la totalidad de partes en que quedó fraccionado el todo (en la representación gráfica) y cuántas de dichas partes corresponden al personal femenino de la comisaría. Es decir que hay 3 partes marcadas con "•" de las 20 partes que tiene toda la representación. Expresado en escritura fraccionaria es: $\frac{3}{20}$

Complete la representación gráfica con dicha parte.

Finalmente, $\frac{3}{20}$ partes de la totalidad del personal de la comisaría es personal femenino; y esta es la respuesta a la situación dada.

Podemos concluir también que:

20% de $\frac{3}{4}$ o lo que es equivalente, $\frac{1}{5}$ de $\frac{3}{4}$ del total ahora se sabe que es $\frac{3}{20}$ del total del personal.

Hasta el momento solamente se ha interpretado, mediante la representación gráfica, la respuesta de la situación. Pero todavía nos está faltando determinar el cálculo para llegar a esta respuesta.

Observe el cuadro anterior y analice qué cálculo haría con los numeradores 1 y 3 para obtener 3 (numerador del resultado) y qué cálculo haría con los denominadores 5 y 4 para obtener 20 (denominador del resultado).

Posiblemente pensó en un producto... y efectivamente es así.

$$\frac{1}{5}.\frac{3}{4}=\frac{1.3}{5.4}=\frac{3}{20}$$

PENSAR

Cada vez que en una situación problema se busque una parte de otra parte, el cálculo a realizar es un ***producto*** *entre números racionales.*

En este caso el producto es: $20\%.\frac{3}{4}=\frac{20}{100}.\frac{3}{4}=\frac{1}{5}.\frac{3}{4}=\frac{3}{20}$ Observe que en este cálculo ha sido expresado el porcentaje como una fracción y que la misma ha sido simplificada.

En general, al multiplicar dos números racionales expresados con escritura fraccionaria se obtiene un número racional cuyo numerador es el producto de los numeradores de los factores y cuyo denominador es el producto de los denominadores de los factores.

Situación 4

Analizamos esta situación que posee sólo un cambio respecto de la anterior. Una comisaría tiene 60 efectivos y las tres cuartas partes de los mismos están afectados a tareas de control y vigilancia. El 20 % de los efectivos que se dedican a esta tarea es

NOTAS

NOTAS

el personal femenino de la comisaría.

a) ¿Qué parte del personal de la comisaría es femenino?

....

b) ¿Cuántos efectivos son mujeres?

....

Lea atentamente la situación y responda:

a) ¿Qué diferencia observa en el enunciado de la situación 3 y esta?

....

b) Considerando lo trabajado en la situación 3, ¿puede responder a la pregunta a)?

....

c) ¿Cuál es el todo o la totalidad a la que hace referencia el problema? ....

d) ¿Cuántos efectivos tiene en total el destacamento policial?

....

Como la primera de las preguntas fue abordada en la situación 3, ya conocemos su respuesta. Se sabe que las $\frac{3}{20}$ partes de la totalidad de los efectivos de la comisaría es personal femenino.

Pero como ahora se conoce la totalidad (el todo) de los efectivos (el número de efectivos de la comisaría), esas tres veinteavas partes de los efectivos se refieren concretamente a tres veinteavas partes de los 60 efectivos.

Es decir que hay que encontrar $\frac{3}{20}$ de 60 efectivos.

Pero una vez más se busca una parte de un todo, por lo que se puede pensar... ¿en qué cálculo?

Si pensó en un producto estuvo acertado. Si resuelve $\frac{3}{20} \cdot 60 =$ .... obtendrá el número de personal femenino de la comisaría y que por lo tanto está abocado a la tarea de vigilancia y control.

Escriba la respuesta de la segunda pregunta del problema:

....

RECORDAR

Cada vez que una situación implique encontrar una parte de un todo el cálculo a realizar es una multiplicación.

PENSAR

NOTAS

• *Si se multiplican dos números racionales en notación fraccionaria el producto será otro número racional cuyo numerador se obtiene multiplicando los numeradores de las fracciones factores y el denominador se obtiene multiplicando los denominadores de los factores.*

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$ iendo $b \neq 0$ y $d \neq 0$

• *Recuerde que puede simplificar las fracciones antes de multiplicar, es más, sólo en el caso de la multiplicación puede simplificar el numerador de una fracción con el denominador de otra fracción.*

• *Si en el producto de dos números racionales uno de los factores es cero entonces el producto será igual a cero.*

• *Si en el producto de dos números racionales los factores tienen el mismo signo (ambos positivos o negativos) entonces para obtener el producto o resultado se multiplican los valores absolutos de los factores y el signo del resultado siempre será positivo.*

• *Si en el producto de dos números enteros los factores tienen distinto signo, entonces para obtener el producto o resultado se multiplican los valores absolutos de los factores y el signo siempre será negativo.*

• *Si multiplica números racionales escritos en notación decimal exacta, el producto se obtiene multiplicando cada factor como si fueran números enteros y el número de orden decimal del resultado será igual a la suma de los números de órdenes decimales de los factores.*

• *Si se multiplican números racionales en notación decimal y otros en notación fraccionaria, se calcula la expresión decimal del que está indicado en notación fraccionaria y luego se calcula el producto.*

• *Si se multiplican números racionales en notación decimal y otros en notación fraccionaria y el cociente de esta última es una expresión decimal periódica, se debe tomar una decisión sobre el número de cifras decimales empleadas, que dependerá de la precisión con que se desee trabajar para calcular el producto.*

• *Cada vez que una situación implique encontrar* ***una parte de otra parte de un todo*** *o simplemente* ***una parte de un todo,*** *la operación aritmética involucrada es la* ***multiplicación****.*

Una de las principales aplicaciones de las expresiones decimales de un número racional proviene de los problemas que implican el uso del porcentaje. Los porcentajes son ampliamente utilizados en la vida cotidiana. Simplemente al abrir un periódico se observan en informaciones, como por ejemplo las tasas de interés bancario al poner dinero a plazo fijo, el recargo porcentual al solicitar un crédito o financiación de una compra en cuotas, el descuento que se realiza en una compra que se abona al contado, informaciones, etc.

En el transcurso de varias situaciones analizadas usted ya ha utilizado el concepto de porcentaje, que no es otra cosa que una fracción cuyo denominador es 100. Así, por ejemplo, el 80% de algo tiene determinada característica equivale a decir que de cada 100 partes 80 de ellas tienen dicha característica. Por lo tanto otra manera de expresar el 80% es con una fracción cuyo numerador es 80 y cuyo denominador es 100.

$$80\% = \frac{80}{100}$$

Recordar.

80 → *numerador*

100 → *denominador*

ACTIVIDADES

1. A continuación se indican distintas expresiones, que usted escribirá en porcentaje o notación porcentual.

a) $\frac{1}{100}$ = ... *b)* $\frac{40}{100}$ = ... *c)* $\frac{150}{100}$ = ...

d) 0,05 =............. *e)* 1,30= .... *f)* 0,50= ......

Analicemos juntos sus respuestas.

En los puntos a), b) y c) usted observará que todas las expresiones fraccionarias tienen denominador 100, de manera que su notación porcentual o su expresión como porcentaje es inmediata y seguramente que sus respuestas han sido 1%; 40% y 150%.

Si ahora analizamos los puntos d), e) y f) obtenemos expresiones decimales de números racionales pero con la característica que todas presentan dos dígitos decimales. A estos números racionales le corresponden sus expresiones fraccionarias equivalentes con denominador 100, ya que nuestro objetivo es determinar la expresión porcentual de las mismas.

Resulta entonces:

0,05 = $\frac{5}{100} = 5\%$; 1,30 = $\frac{130}{100} = 130\%$ *y por último* 0,50 = $\frac{50}{100} = 50\%$

A partir de la resolución de esta simple actividad podemos concluir que la notación porcentual es una forma de escribir números racionales, que expresados como fracción tienen como denominador el número100. Pues bien, al ser números racionales es posible sumar, restar, multiplicar números expresados en porcentaje.

2. En un club social, el 9 de Julio, se organizó un locro comunitario para juntar dinero, ya que los socios de la identidad quieren realizar arreglos en la cancha de fútbol y de bochas, pintar el salón de reuniones sociales y donar el 5% de la ganancia a un comedor comunitario de la zona. Con la venta de entradas juntaron $1200 y con la venta de gaseosas, vino y café una cantidad de dinero correspondiente al 40% del monto correspondiente a la venta de entradas.

¿Cuál fue el monto total recaudado en el locro comunitario?

¿Cuál es el monto de dinero que se le entregará al comedor?

Como ya es costumbre le pido que lea nuevamente esta situación, subraye los datos, reflexione sobre palabras como porcentaje, ganancia: monto recaudado y que, por último y si le parece conveniente, escriba un enunciado más simple o realice un gráfico o una tabla.

3. En un importante negocio de electrodomésticos se anuncian dos propuestas de venta de una heladera, cuyo costo es de $980.

1º Propuesta
Sobre el precio se hace un descuento del 10% y se puede pagar en 10 cuotas mensuales con cualquier tarjeta de crédito.

2º Propuesta
Sobre el precio se hace un descuento del 10% y otro del 5% si se paga en 10 cuotas con la tarjeta de crédito de la empresa.

a) Indique cuál de los siguientes cálculos le permite calcular el monto de una cuota de la primera propuesta.

10% 980: 10=........ 90%.980: 10=......... 10.980 : 10 =........ 90. 980: 10= ......

b) Indique cuál es el cálculo que le permite calcular el precio final de la segunda propuesta.

980 –(10% + 5%) 980...... 980 - 10%.980 + 5% 980 ...... 980 -10%.5%. 980=......... 980 - 15.980 = ...

4. Tres oficiales policías deciden armar por su cuenta una pequeña empresa de vigilancia. Para el montaje de la misma cada uno aporta con un capital. Uno aporta $2500, otro aporta $5000 y el tercero aporta $10000. También acuerdan que las ganancias que obtenga cada uno serán proporcionales al capital que aportó cada uno sobre el total de lo aportado. Al cabo del sexto mes la empresa tiene una ganancia de $5000. ¿Qué cantidad de dinero le corresponde a cada uno?

Nuevamente le propongo leer y reflexionar sobre el enunciado.

Para una mejor comprensión del texto responda las siguientes preguntas: a) ¿Cuál es el monto del capital inicial? b) ¿Cada uno de los oficiales ha aportado el mismo capital? c) ¿Qué se indica acerca del momento de *repartir las ganancias? d) ¿Qué parte o porcentaje del capital de inicio ha aportado cada oficial? e) ¿Qué cantidad de dinero le corresponde a cada uno, de los $5000 de ganancia?*

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN EN $\mathbb{Q}$

ACTIVIDADES

1. Calcule el producto de:

a) $24.\left(-\frac{25}{16}\right) = ...$ *b)* $-\frac{49}{25}.\left(-\frac{50}{28}\right) = ...$ *c)* 2,04 . 0,03 =....... *d)* $-\frac{4}{3}.0,75 = ...$

Los resultados para que compare con sus respuestas son:

$-\frac{75}{2}$; $\frac{7}{2}$; 0,0612 , -1

Se pueden seguir multiplicando infinitos pares de números racionales y el producto siempre será un número racional y único.

PENSAR

Propiedad de cierre. El producto de dos números racionales es un número racional único.

En esta actividad aparecerán símbolos matemáticos, como los corchetes [ ] y llaves { }, que indican el orden en que se debe realizar el cálculo. Resuelva este cálculo que tiene tres factores.

1,5 . (- 2) .0,2 = ...

Al resolver este cálculo seguramente usted pensó:
1,2. (- 2) = -3

Luego volvió a multiplicar con el tercer factor: - 3 . 0,2 = -0,6

El cálculo que efectuó se indica con el uso de corchetes y llaves: { [1,5 . (- 2)] .0,2} = - 0,6

Primero se calcula el producto de los factores que están entre los corchetes y finalmente se calcula el producto de los factores que están entre las llaves como se mostró antes.

• Pero también este mismo cálculo se puede pensar de este modo: {1,5 . [(-2) .0,2]}= .....

Primero se calcula el producto de los factores que están entre los corchetes: { 1,5 . (- 0,4) }=

Finalmente se calcula el producto de los factores que están entre las llaves: { 1,5 . (- 0,4)}= -3

Podemos concluir que: **{ [1,5 . (- 2)] .0,2} = { 1,5 . [(- 2) .0,2]}**

En síntesis, notará que en ambos casos se asociaron primero dos factores para finalmente, al producto, multiplicarle el tercer factor. El orden en que se asocian los factores no altera el resultado final del cálculo.

NOTAS

PENSAR

Propiedad asociativa. Para todos los números racionales a, b, c se verifica que: a . b. c = (a . b) . c = a . (b . c)

ACTIVIDADES

1. Calcule y analice el producto o resultado.

a) -2,4 .1 = ... *b)* 1 . (-2, 4) = ... *c)* $\frac{9}{4}.\frac{1}{1}=$ .... *d)* $\frac{1}{1}.\frac{9}{4}=$ ....

¿Cómo resultan los productos en los cálculos a) y b)? ¿Y en el caso de c) y d)?
....
....

El resultado que usted ha obtenido en los dos primeros cálculos es -2,4 y en los dos últimos cálculos es $\frac{9}{4}$. Estos ejemplos verifican que si a un número racional se lo multiplica por el número uno (1) a izquierda o derecha, el producto que se obtiene es siempre el número racional considerado. Por ello, el número 1 es el elemento neutro de la multiplicación en $\mathbb{Q}$.

PENSAR

*Propiedad del **Elemento neutro**. Existe el número 1 perteneciente a $\mathbb{Q}$, tal que para todo número racional "a" se verifica:* $\mathbf{1 \cdot a = a \cdot 1 = a}$

ACTIVIDADES

1. Analice y complete con el producto o resultado.

a) $-\frac{4}{25}\cdot\left(-\frac{15}{12}\right)=$............

b) $-\frac{15}{12}\cdot\left(-\frac{4}{25}\right)=$............

2. ¿Cómo son los resultados obtenidos en ambos casos?

....

El orden en que se multipliquen los factores no altera el producto, ya que en ambos casos obtuvo $\frac{1}{5}$. Si probara con otros ejemplos llegaría a la misma conclusión.

PENSAR

***Propiedad conmutativa**. Para todos los números racionales a, b se verifica que: a . b = b . a*

ACTIVIDADES

Analice y complete la siguiente igualdad y observe los nombres que aparecen.

$$\underbrace{\frac{3}{4}.(-3{,}5)}_{\text{Primer miembro}} = \underbrace{0{,}75.\left(-\frac{7}{2}\right)}_{\text{Segundo miembro}}$$

El signo igual (=) separa los dos miembros de la igualdad dada.

¿Se trata de una igualdad?

Para verificar si la expresión es realmente una igualdad complete:

$\frac{3}{4}.(-3,5)$ .... y $0,75.\left(-\frac{7}{2}\right)$ =.........

Observe el resultado que obtuvo en cada caso: si se trata de números iguales, entonces es una igualdad. ¿Qué ocurrió?¿Es una igualdad?

Este cálculo que realizó se puede expresar:

$$\underbrace{\frac{3}{4}.(-3,5)}_{-\frac{21}{8}} = \underbrace{0,75.\left(-\frac{7}{2}\right)}_{-\frac{21}{8}}$$

Es decir: se realiza el cálculo en cada miembro y luego se comparan los resultados obtenidos.

b) Si multiplica a ambos miembros por 0,1 la expresión que resulta es:

Realice el cálculo indicado en cada miembro. Recuerde la propiedad asociativa.

$$\frac{3}{4}.(-3,5).(-0,1) = 0,75.\left(-\frac{7}{2}\right).(-0,1)$$

$$-\frac{21}{8}.(-0,1) = -\frac{21}{8}.(-0,1)$$

$$-\frac{21}{8}.\left(-\frac{1}{10}\right) = -\frac{21}{8}.\left(-\frac{1}{10}\right)$$

$$\frac{21}{80} = \frac{21}{80}$$

Podemos concluir que: si a ambos miembros de la igualdad se lo multiplica por un mismo número racional, se mantiene la igualdad.

PENSAR

Propiedad uniforme. *Para todos los números racionales a, b, c; se cumple que si* $a = b$ *entonces* $a \cdot c = b \cdot c$

La propiedad que analizaremos, la cancelativa, está muy vinculada con la anterior, y se refiere a la cancelación de factores iguales **(distintos de cero)**, en distintos miembros.

Ejemplo: $2.\left(-\frac{1}{3}\right).9 = 2.\left(-\frac{2}{6}\right).\frac{27}{3}$

NOTAS

Cancelando el factor 2 en ambos miembros queda

$$\left(-\frac{1}{3}\right).9=\left(-\frac{2}{6}\right).\frac{27}{3}$$

-3 = - 3

Entonces, un mismo factor (distinto de cero) que está multiplicando en ambos miembros de una igualdad puede ser cancelado conservando la igualdad.

PENSAR

Propiedad cancelativa. *Para todos los números racionales a, b, c y c π 0, si a . c = b . c entonces a = b*

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma y la resta

Conteste las preguntas que se formulan a continuación:

Observe la siguiente igualdad. a . (b + c) = a.b + a . c

¿Cuántos miembros tiene?

....

¿Cuántos y cuáles son los factores del primer miembro?

....

Seguramente usted contestó que 2. Siendo los factores: a y (b + c).

¿Cuántos y cuáles son los términos que tiene el segundo miembro?

....

Seguramente usted contestó que 2. Siendo los términos a. b y a . c

Si observa los términos del segundo miembro verá que en cada término está el factor a, es decir que se ha distribuido el mismo en cada término.

Trabaje sobre el siguiente ejemplo:

$$\frac{3}{2}.\left(\frac{25}{15}+\frac{20}{4}-3\right)=$$

Distribuya el factor en cada término encerrado en el paréntesis:

$$\frac{3}{2}.\left(\frac{25}{15}+\frac{20}{4}-3\right)=\text{........}$$

Le quedó :

$$\frac{3}{2}.\frac{25}{15}+\frac{3}{2}.\frac{20}{4}-\frac{3}{2}.3$$

Entonces puede escribir la siguiente igualdad:

$$\frac{3}{2}.\left(\frac{25}{15}+\frac{20}{4}-3\right)= \frac{3}{2}.\frac{25}{15}+\frac{3}{2}.\frac{20}{4}-\frac{3}{2}.3$$

En esta expresión se observa que el factor $\frac{3}{2}$ se ha distribuido en el segundo miembro a cada término de la suma algebraica.

Ahora se pide que verifique la igualdad, para lo cual resuelva cada uno de los miembros.

a) En el primer miembro calcule el resultado del paréntesis y luego el producto con el factor $\frac{3}{2}$

....

b) Para el segundo miembro calcule cada uno de los términos y realice la suma algebraica que resulta:

....

c) Compare los resultados de a) y b) y escriba la conclusión

....

Compare sus resultados con los cálculos que se desarrollan a continuación y que muestran el camino seguido:

$$\frac{3}{2}.\left(\frac{25}{15}+\frac{20}{4}-3\right)= \frac{3}{2}.\frac{25}{15}+\frac{3}{2}.\frac{20}{4}-\frac{3}{2}.3$$

$$\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}+5-3\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{3}+\frac{3}{2}\cdot 5-\frac{3}{2}\cdot$$

$$\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}+2\right)=\frac{5}{2}+\frac{15}{2}-\frac{9}{2}$$

$$\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{6}{3}\right)=\frac{11}{2}$$

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{11}{3}=\frac{11}{3}$$

$$\frac{11}{3}=\frac{11}{3}$$

Con este ejemplo se muestra la aplicación y verificación de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma.

PENSAR

Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma y a la resta. Para todos los números racionales a, b, c se cumple que a . (b + c) = a . b + a . c

NOTAS

NOTAS

El siguiente esquema le muestra la acción de distribuir:

$a\,.\,(\,b + c\,) = a\,.\,b + a\,.\,c$

Observe los siguientes ejemplos de productos:

a) $-\frac{1}{5}\cdot(-5)=1$ b) $\frac{1}{4}\cdot 4=1$

c) $-\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)=1$ d) $\frac{7}{2}\cdot\frac{2}{7}=1$

En todos los ejemplos al obtener el inverso de un número racional el numerador del número racional es el denominador de su inverso multiplicativo y el denominador del número racional es el numerador de su inverso multiplicativo. Al observar los productos notará que todos son iguales a 1, es decir, al elemento neutro de la multiplicación. En los casos como estos se dice que los factores son números racionales inversos o inversos multiplicativos. Así se tiene que $-\frac{1}{5}$ y – 5 son inversos o inversos multiplicativos y $\frac{1}{4}$ y 4 son inversos o inversos multiplicativos como los son también $-\frac{3}{5}$ y $\left(-\frac{5}{3}\right)$

¿Cuál es el inverso de $-\frac{5}{13}$?

Si pensó en el número $-\frac{13}{5}$ está en lo correcto, ya que $-\frac{5}{13}\cdot\left(-\frac{13}{5}\right)=$ Al dar como resultado 1, es lo que permite afirmar que se trata de números racionales inversos.

Podemos concluir también que el producto de un número distinto de cero por su inverso es 1.

RECORDAR

El inverso multiplicativo de un racional positivo es otro racional positivo.

El inverso multiplicativo de un racional negativo es otro racional también negativo.

PENSAR

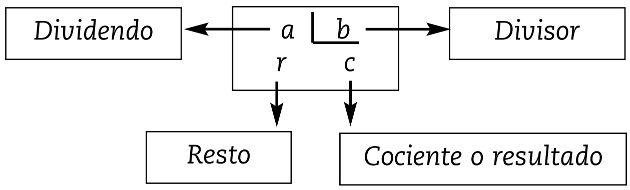
Propiedad del inverso multiplicativo

Todo número racional distinto de cero tiene su inverso multiplicativo a^{-1} tal que: $a\,.\,a^{-1} = a^{-1}\,.\,a = 1$

DIVISIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

NOTAS

Si consideramos a, b, c y r números racionales tales que b sea distinto de cero, es posible expresar el siguiente cociente con el propósito de recordar los nombres que se asignan en el siguiente esquema:



Situación 1

Andrés está averiguando precios de cámaras digitales de diversas marcas. En un negocio le ofrecen una que cuesta $431,50. Pero como están en promoción puede pagarla en 10 cuotas iguales sin recargo. ¿Cuál es el monto de cada cuota?

Antes de comenzar a resolver esta situación, le propongo que responda las siguientes preguntas:

¿Qué pide el problema?

....

¿Qué debe hacer Andrés con el precio de la cámara digital para pagarla en cuotas?

....

¿Qué cálculo resuelve la situación planteada?

....

Situaciones como estas en las que hay que **repartir**, en este caso $431,50 en 10 cuotas, implican que aritméticamente se realice el cociente entre 431,50 y 10 para calcular el monto de la cuota mensual.

Luego, el cálculo que tiene que resolver es:

431,50: 10 =.........

Seguramente el resultado que usted ha obtenido es 43,15; esto significa que Andrés debería abonar una cuota mensual de $ 43,15 durante 10 meses.

En esta situación usted resolvió un cociente de dos números racionales específicamente: el dividendo es un número racional decimal o simplemente decimal y el divisor es un número racional que es entero.

NOTAS

Situación 2

Se desea embotellar 30 litros de desinfectante en envases que tienen una capacidad de 1,5 litros. ¿Cuántos envases se necesitan? Nuevamente le propongo que lea el problema y responda las siguientes preguntas:

¿Cuál es la acción concreta a realizar para resolver esta situación?

....

¿Aritméticamente qué cálculo implica realizar?

....

Resuelva la situación e indique la respuesta.

Nuevamente la situación nos indica que la acción es la de repartir, y que aritméticamente significa calcular el cociente entre 30 y 1,5 para determinar la cantidad de botellas que se necesitan.

Para resolver este cálculo usted puede utilizar la calculadora. Pero si decide resolverlo escribiendo cada paso de la cuenta notará que puede seguir dos caminos:

• expresar dicho cociente en forma fraccionaria y resolverlo, o bien

• pensar y buscar de qué forma podría transformarse el divisor en un número entero para que el cálculo sea de la forma del propuesto en la situación 1.

Si elige el segundo camino la dificultad está en el divisor ¿Por qué?

....

Efectivamente el divisor, quince décimos, es un número decimal cuya parte decimal es distinta de cero. Para resolver este cálculo usando la escritura decimal, necesariamente debemos pensar en cómo transformar el divisor en un número entero (es decir sin parte decimal).

¿Se le ocurre alguna alternativa? Coméntela:

....

Piense por qué número debe multiplicar al divisor para transformarlo en el número entero 15

....

Pruebe multiplicarlo por 10 y obtendrá: 1,5 · 10 = 15

NOTAS

Si el divisor de una división es multiplicado por 10, en este caso, para obtener un cálculo equivalente al dado inicialmente se debe multiplicar por el mismo número al dividendo. De esta forma queda:

30 : 1,**5** = (30. **10**) : (1,5. **10**) = **300: 15** =

Resuelva el último cálculo escrito. ¿Qué valor obtuvo?

Seguramente que el cociente que usted ha obtenido es 20. Esto significa que se necesitan 20 botellas de 1,5 litros para envasar los 30 litros de desinfectante.

Situación 3

Se tiene una soga de 56,1m de largo y se necesita cortar trozos de soga de 9,35m de largo. ¿Cuántos trozos se pueden cortar?

Resuelva la situación propuesta y registre los pasos que hizo.

Nuevamente en esta situación tiene dos caminos para resolver:

• expresar dicho cociente en forma fraccionaria y resolverlo, o bien
• pensar y buscar de qué forma podría transformarse el divisor en un número entero para que el cálculo sea de la forma del propuesto en la situación 1.

Ahora le proponemos que lea lo que usted hizo y compare su cálculo con el que se muestra a continuación:

56,1: 9,**35** = (56,1. **100**) : (9,**35**. **100**) =5610 : **935**= 6

El cociente es 6 y esto significa que puede cortar 6 trozos de 9,35cm de los 56,1cm de soga que tiene.

Las tres situaciones anteriores corresponden a la división de dos números racionales expresados en escritura decimal. En las mismas se presentaron distintas situaciones: cociente entre un número racional con parte decimal y un número racional entero (situación 1), cociente entre un número racional entero y un número racional con parte decimal (situación 2) y el cociente entre

NOTAS

dos números racionales con parte decimal (situación 3). Puede observarse que en las dos últimas situaciones se buscó transformar el divisor en un número entero y por lo tanto el cálculo original fue transformado en un cociente equivalente con divisor entero, para lo cual se multiplicó tanto el dividendo como el divisor por un mismo número. Este número siempre es la unidad seguida de cero, es decir que se multiplica por 10, 100, 1.000 tanto al dividendo como al divisor, según el número de orden del divisor sea uno, dos o tres, respectivamente.

PENSAR

Para resolver los cocientes de números racionales expresados en escritura decimal, en los casos en los que el divisor es un número decimal (con parte decimal distinta de cero), debe transformarse dicho cociente en un cociente equivalente con el divisor entero, para lo cual se debe multiplicar tanto al dividendo como al divisor por la unidad seguida de tantos cero como el número de orden tenga el divisor. (Por ejemplo: por 10, si el divisor es de primer orden; por 100, si el divisor es de segundo orden).

ACTIVIDADES

Situación 4

1. Responda las siguientes preguntas:

a) ¿A qué se llama inverso multiplicativo de un número racional escrito en notación fraccionaria?

b) ¿Cómo se obtiene el inverso multiplicativo de un número racional escrito en notación fraccionaria?

c) ¿Cómo se calcula el cociente entre dos números racionales escritos en notación fraccionaria?

d) ¿Recuerda la regla de los signos de la división de números racionales?

2. Resuelva los siguientes cocientes expresados en notación fraccionaria:

a) $\frac{3}{5} : \frac{27}{15} =$ *b)* $-\frac{10}{7} : \left(-\frac{5}{21}\right) =$

c) $-\frac{2}{3}:\frac{4}{6}=$ *d)* $\frac{8}{5}:\left(-\frac{64}{25}\right)=$

Le propongo que compare lo que usted ha resuelto con lo que se propone a continuación.

a) $\frac{3}{5}:\frac{27}{15}=\frac{3}{5}\cdot$ *. Antes de resolver el producto es conveniente observar la posibilidad de simplificar sobre cada una de las fracciones o entre numerador y denominador de las fracciones que son factores.*

$$\frac{3}{5}:\frac{27}{15}=\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{27}=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{9}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{3}$$

Si usted analiza con atención los distintos pasos indicados para llegar al resultado, verá que se ha simplificada primero $\frac{15}{27}$ *y luego también se ha simplificado entre fracciones, para finalmente realizar el producto entre los numeradores y denominadores de las fracciones resultantes de la simplificación y obtener el cociente.*

b) $-\frac{10}{7}:\left(-\frac{5}{21}\right)$ *.En este caso observe que el dividendo y el divisor son negativos, entonces el cociente es positivo, quedando así:* $-\frac{10}{7}:\left(-\frac{5}{21}\right)=+\frac{10}{7}\cdot\frac{21}{5}$ *simplificando en el segundo miembro y resolviendo se obtiene:* $\frac{10}{7}\cdot\frac{21}{5}=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{1}=\frac{2.3}{1.1}=6$

c) $-\frac{2}{3}:\frac{4}{6}$ *. Para esta división el cociente es negativo ya que dividendo y divisor presentan distinto signo, resultando:* $-\frac{2}{3}:\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{4}$ *que al simplificar y resolver se obtiene:*

....

El resultado o cociente en este caso es -1

d) El cociente es: $-\frac{5}{8}$

PENSAR

Al resolver el cociente entre dos números racionales escritos en notación fraccionaria se obtiene otro número racional que es el producto del primer número racional por el inverso multiplicativo del divisor.

Es decir:

$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$ *donde* $\frac{d}{c}$ *es el inverso multiplicativo de* $\frac{c}{d}$ *del divisor.*

• Si se dividen dos números racionales del mismo signo el cociente es positivo.

• Si se dividen dos números racionales de distinto signo el cociente es negativo.

NOTAS

LA DIVISIÓN EN SITUACIONES PROBLEMAS

ACTIVIDADES

1. Resuelva las siguientes situaciones

a) Marianela y Andrea están preparando las bebidas para un festejo. Tienen una damajuana de 5 litros de vino Tempranillo, pero no deciden si lo envasan en botellas de $\frac{3}{4}$ litros o en jarras de $\frac{1}{2}$ litro, ya que quieren que sobre vino en la damajuana. ¿En cuál de los dos envases les conviene envasar el vino?

b) Una bolsa de alimentos para perro pesa 20 kg y cuesta \$90. Si Quillen, que es la perra de Beatriz, debe comer dos raciones diarias de 125gr. ¿Para cuántos días le alcanza la bolsa de alimento? ¿Cuál es el gasto diario en alimento?

CÁLCULOS CON LAS CUATRO OPERACIONES DE NÚMEROS RACIONALES

ACTIVIDADES

1. Dado el siguiente cálculo:

a) $-\frac{4}{16}\cdot\frac{8}{10}+5\div\left(-\frac{5}{25}\right)+3=$

a) Realice el análisis de los pasos que siguen:

1° Se separa en términos:

$$\overbrace{-\frac{4}{16}\cdot\frac{8}{10}}+\overbrace{5\div\left(-\frac{5}{25}\right)}+\overbrace{3}=$$

2° Se resuelve la operación indicada en cada término:

$$\overbrace{-\frac{1}{5}}+\overbrace{(-25)}+\overbrace{3}=$$

3° Se eliminan los paréntesis, teniendo en cuenta las reglas de los signos:

$$-\frac{1}{5}-25+3=$$

4º Se resuelve la suma algebraica:

$$-\frac{1}{5}-22=$$

$$-\frac{1}{5}-\frac{22.5}{5}=-\frac{1}{5}-\frac{110}{5}=-\frac{111}{5}$$

En el siguiente cálculo, complete lo que se pide:

$$b)\frac{3}{2}\cdot\left(1+\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\right)-\frac{6}{3}+\left(-\frac{4}{6}+\frac{1}{3}\right)=$$

Respuesta.

$$\frac{35}{4}$$

1º Separe en términos.
2º Resuelva cada paréntesis.
3º Resuelva las operaciones indicadas en cada término, teniendo en cuenta los signos y sus reglas.

2. Resuelva:

$$c)0,25:0,5-\frac{3}{4}-\left(-\frac{2}{9}:\frac{4}{18}\right)=$$

Respuesta.

$$\frac{3}{4}$$

POTENCIACIÓN

Situación 1

Observe las siguientes expresiones y responda.

1) 3.3.3.3.3.3=

2) (-0,2).(-0,2).(-0,2)=

3) $\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)=$

a) ¿Qué es lo que tienen en común cada una de estas expresiones?
....

Seguramente usted ha respondido que en cada una de ellas se repite un mismo factor.

b) Indique cuántas veces se repite el mismo factor en cada una de las expresiones.

NOTAS
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

NOTAS

Acordamos entonces que en 1) el factor 3 se repite 6 veces, en 2) el factor (-0,2) se repite 3 veces y en 3) el factor $\left(-\frac{2}{3}\right)$ se repite 4 veces.

Cada una de las expresiones anteriores admite ser escrita como una potencia, como se muestra a continuación.

1) $\underbrace{3.3.3.3.3.3}= 3^6$

> El factor 3 se repite 6 veces y se escribe: 3^6.
> 3^6: se lee: 3 elevado a la sexta.

2) $\underbrace{(-0,2).(-0,2).(-0,2)} = (-0,2)^3$

> El factor (-0,2) se repite 3 veces y se escribe: $(-0,2)^3$.
> $(-0,2)^3$: se lee: (-0,2) elevado a la tercera o elevado al cubo.

3) $\underbrace{\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}=\left(-\frac{2}{3}\right)^4$

> El factor $\left(-\frac{2}{3}\right)$ se repite 4 veces y se escribe $\left(-\frac{2}{3}\right)$
> $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$: se lee: $\left(-\frac{2}{3}\right)$ elevado a la cuarta.

c) Calcule cada uno de los productos indicados en los puntos 1) ;2) y 3).

Entonces, para que compare con sus resultados, es:

$729 = 3^6$; $-0,008 = (-0,2)^3$; $\frac{16}{81}=\left(-\frac{2}{3}\right)^4$

En síntesis, los productos en que se repiten los factores se pueden escribir de una forma "abreviada" como lo indicado en los segundos miembros de los puntos 1), 2) y 3) de la situación 1.

PENSAR

Esta nueva forma de escribir un producto en que se repiten los factores se llama potencia.

En la potencia el número que se repite como factor se llama base, el número de veces que ese factor se repite se llama exponente y al resultado se lo llama también potencia. Así, en el ejemplo se tiene:

Exponente

$3^6 = 729 \longrightarrow$ *Potencia o resultado*

Base

NOTAS

LOS SIGNOS DE LA POTENCIACIÓN

Situación 2

Para realizar las actividades que siguen recuerde que si se multiplican dos factores del mismo signo el producto tiene el signo positivo y si se multiplican dos factores que tienen distinto signo, el producto es negativo.

Para comenzar, calcule y complete donde se indique con línea de puntos.

$3^2 =$, se lee: 3 elevado al cuadrado

Aplicando la definición de potenciación y notando que los factores son positivos, la potencia resulta:

a) $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$

Se lee: 3 elevado al cuadrado, es igual a 3 por 3 que es igual a 9. El signo del producto o resultado es positivo

b) $0{,}4^3 =$; se lee:..

Aplicando la definición de potenciación y notando que los factores son positivos, la potencia resulta:

$0{,}4^3 = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}064$

Se lee:..

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 =$ ....

Aplicando la definición de potenciación y notando que los factores son positivos, la potencia resulta:

$\left(\frac{2}{3}\right)^4 =$ .... $= \frac{16}{81}$

Se lee: ....

Observe las potencias dadas en esta actividad y responda:

¿La base de estas potencias son números racionales positivos o negativos?
....

NOTAS

¿El exponente en cada una de ellas es par o impar?

....

¿Qué signo tiene el resultado?

....

RECORDAR

Puede concluirse que en una potencia si la base es un número racional positivo y el exponente es un número natural (par o impar), la potencia es un número racional positivo.

Situación 3

a) $(- 0,5)^2 =$, se lee: menos 0,5 elevado al cuadrado

Aplicando la definición de potenciación y notando que los factores son negativos, la potencia resulta:

$(-0, 5)^2 = (-0,5)\cdot (-0,5) = 0,25$

Se lee: menos 0,5 elevado al cuadrado es igual a menos 0,5 por menos 0,5 que es igual a 0,25. El signo del producto es positivo.

b) $(- 3)^4 =$

Aplicando la definición de potenciación y teniendo en cuenta el signo de los factores:

$(- 3)^4 =(- 3) \cdot (- 3) \cdot (- 3) \cdot (- 3)$

Se lee: menos 3 elevado a la cuarta es igual a: menos 3, por menos 3, por menos 3, por menos 3.

Aplicando la propiedad asociativa de la multiplicación y teniendo presentes los signos de los factores, resulta:

$9 . (-3) . (-3) =$

Aplicando nuevamente la propiedad asociativa y observando que: "si los dos factores tienen distinto signo el producto es negativo", resulta: $-27. (-3) =$

Por último, como los dos factores tienen el mismo signo el producto es positivo.

Resultando finalmente: $(- 3)^4 = -27. (-3) = 81$

ACTIVIDADES

1. Aplique la definición de potenciación y resuelva:

$(-2)^6 =$

$(-9)^2 =$

2. Observe las potencias dadas en esta actividad y responda:

a) ¿La base de estas potencias son números racionales positivos o negativos?

....

b) ¿El exponente en cada una de ellas es par o impar?

....

c) ¿Qué signo tiene el resultado?

....

Puede concluirse que en una potencia si la base es un número racional negativo y el exponente es un número natural par, la potencia es un número racional positivo.

ACTIVIDADES

Situación 4

1. Complete y calcule las siguientes potencias, a partir de la definición.

a) $\left(-\frac{1}{4}\right)^3 = \left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) =$ ....

b) $(-1,2)^3 =$.................... =.........

c) $(-2)^5 =$ .... = ...

Respuesta.
a) $-\frac{1}{64}$ *b)* $-1,728$; *c)* -32

2. Observe las potencias dadas en esta actividad y responda:

a) ¿La base de estas potencias son números racionales positivos o negativos?

....

b) ¿El exponente en cada una de ellas es par o impar?

....

c) ¿Qué signo tiene el resultado?

....

Puede concluirse que en una potencia si la base es un número racional negativo y el exponente es un número impar, la potencia es un número racional negativo.

NOTAS

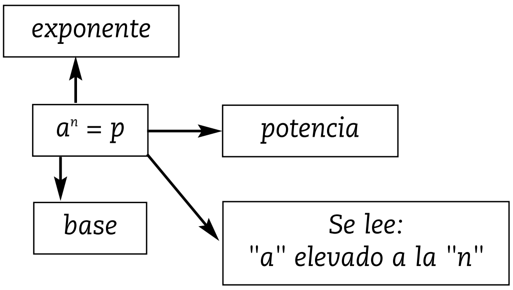
PENSAR

Para recordar los signos de la potenciación.

La potencia que tiene como base un número racional y como exponente un número natural da por resultado otro número racional que es **negativo**, únicamente cuando la **base es un número negativo** y el **exponente** es un número **impar**. En los otros casos la potencia es un número racional positivo.

Análisis de casos especiales de potencias con base racional

Antes de avanzar, les mostraremos el siguiente esquema para que recuerde expresiones, sabiendo que a y p son números racionales y n es un número natural.



Nota.
Si un número racional está elevado a la segunda se lee, usualmente, que está elevado al ***cuadrado****.*
Si un número racional está elevado a la tercera se lee, usualmente, que está elevado al ***cubo****.*

• Potencia con exponente igual a 1

Recuerde la definición de potencia y resuelva:

Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3	Ejemplo 4
$\left(\frac{1}{4}\right)^1 =$	$\left(-\frac{5}{6}\right)^1 =$	$0{,}2^1 =$	$(-7)^1 =$ ....

Al completar la tabla anterior seguramente obtuvo como resultado el mismo número que tiene la base de cada una de las potencias arriba propuestas. El número 1 como exponente indica que la base está como factor una única vez; por lo que se puede concluir que:

PENSAR

La potencia de base racional que tiene exponente igual a 1 es igual al número racional que tiene como base.

• Potencia con exponente 0 y base distinta de cero

Lea con atención cada uno de los siguientes ejemplos de potencias que ya están resueltos:

Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3	Ejemplo 4
$\left(-\frac{1}{2}\right)^0 = 1$	$(-1{,}02)^0 = 1$	$\left(\frac{8}{7}\right)^0 = 1$	$576^0 = 1$

¿Qué resultado se obtiene cuando el exponente de una potencia es cero?
....

Puede concluirse que:

La potencia de base racional distinta de cero y exponente igual a cero es igual a 1.

• Potencia con exponente entero negativo y base distinta de cero

Lea con atención cada uno de los siguientes ejemplos que se muestran resueltos:

Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3
opuesto	*opuesto*	*opuesto*
$(5)^{-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{1}{5}$	$\left(-\frac{4}{3}\right)^{-3} = \left(-\frac{3}{4}\right)^3 = -\frac{27}{64}$	$\left(-\frac{4}{3}\right)^{-3} = \left(-\frac{3}{4}\right)^3 = -\frac{27}{64}$
inverso	*inverso*	*inverso*

Ejemplo 4
opuesto
$(-1{,}2)^{-3} = \left(-\frac{12}{10}\right)^{-3} = \left(-\frac{10}{12}\right)^3 = -\frac{1000}{1728} = -\frac{125}{216}$
inverso

Observe cada ejemplo y responda:

¿Qué signo tiene el exponente de las potencias de los ejemplos?
....

En todos los casos las potencias son de exponente negativo, es decir que son números enteros negativos y fueron igualadas a otra potencia equivalente cuya base ¿qué número es respecto de la base inicial?
....

Al igualar cada potencia a una potencia equivalente a la dada cuya base es el inverso multiplicativo de la base de la potencia inicial, ¿qué ocurrió con el exponente de esta nueva potencia? ¿Qué número es?
....

NOTAS

NOTAS

Ahora resuelva usted solo las siguientes potencias de exponente negativo y explique los pasos que realiza hasta llegar al resultado.

$(-3)^{-3} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\left(\frac{6}{7}\right)^{-2} = \ldots\ldots\ldots$

RECORDAR

Al observar los ejemplos puede concluirse que **la potencia de base racional distinta de cero y de exponente entero negativo es igual a otra potencia cuya base es el inverso multiplicativo de la base dada y el exponente de la nueva potencia es el opuesto del exponente (es decir, un entero positivo).**

PENSAR

Definición

Sea $\frac{a}{b}$ un número racional (con b distinto de 0) y "n" un número natural, se define la potenciación como sigue:

$\left(\frac{a}{b}\right)^{0} = 1$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{1} = \frac{a}{b}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}$ *, siendo n un número natural (n > 1) que indica la cantidad de veces que hay que multiplicar el factor "$\frac{a}{b}$" por sí mismo.*

$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{n}$ *o n un número entero positivo (n > 0)*

ACTIVIDADES

1- Calcule

a) $(0,1)^{4} =$

b) $(-200)^{0} =$

c) $\left(-\frac{8}{9}\right)^{-2} =$

d) $(-0,25)^{-2} =$

e) $(-2)^{-4} =$

f) $(-1,2)^{-1} =$

g) $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-3} =$

2- Analice las siguientes igualdades, detecte y corrija el error que hay en cada una de ellas.

a) $(-0,2)^{-2} = 0,04$

b) $\left(\frac{4}{5}\right)^{3} = \frac{12}{15}$

c) $\left(-\frac{10}{3}\right)^{2} = -\frac{100}{9}$

PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÓN

Ya hemos hecho mención de la importancia de las propiedades al momento de simplificar y facilitar el cálculo así como en la resolución de ecuaciones. Es por ello que se abordarán algunas de las propiedades de la potenciación. Sólo se considerarán las propiedades de mayor utilidad y aplicación a los fines propuestos en este curso.

Le proponemos este análisis a través de ejemplos para luego escribir la formalización de cada una de las propiedades.

Producto de potencias de igual base

Situación 1

Observe el siguiente producto e indique qué tienen en común cada uno de los factores (o potencias que son factores)

$3^4 \,.\, 3^2 .\, 3^3 =$
....

a) Exprese como un producto cada uno de los factores de la expresión dada.

3.3.3.3...................................=

b) Cuente e indique el número de factores 3 que ha obtenido
....

Este producto de 9 factores iguales a 3 también se puede escribir como una potencia: 3^9

c) Observe los exponentes **4**, **2** y **3** y el exponente **9** del producto final. ¿Qué calculo haría usted con los exponentes **4**, **2** y **3** para obtener el exponente **9**?
....

Seguramente habrá pensado en sumarlos. Efectivamente es así. Entonces resulta que:

$3^4 \,.\, 3^2 .\, 3^3 = \mathbf{3^{4+2+3}} = \mathbf{3^9}$

NOTAS

Ahora, analicemos este otro producto de potencias de igual base:

$5^2.5^{-6}.5^5=$

Podrá observar que los factores son todas potencias que tienen la misma base, pero con una diferencia de la expresión del punto a): los exponentes no son todos enteros positivos.

Si aplicamos la definición de potenciación a cada uno de estos factores recordando de escribir la expresión equivalente de 5-6 la expresión que queda es:

$$5.5.\left(\frac{1}{5}\right)^6.5.5.5.5.5=$$

$$5.5.\frac{1}{5}.\frac{1}{5}.\frac{1}{5}.\frac{1}{5}.\frac{1}{5}.\frac{1}{5}.5.5.5.5.5=$$

a) Simplifique esta expresión y escriba el resultado como una potencia:

....

Seguramente ha llegado al producto 5^1, después de simplificar la expresión.

En síntesis, la expresión queda:

$5^2.5^{-6}.5^5 = 5^1$

Le propongo que sume los exponentes de las potencias del primer miembro y compare el resultado con el exponente de la potencia del segundo miembro. Cuidado al calcular la suma, porque uno de los exponentes es negativo.

Estamos de acuerdo en que al calcular la suma su expresión ha sido: 2 + (-6) +5 = 1

Concluyendo entonces:

$5^2.5^{-6}.5^5 = 5^{2+(-6)+5} = 5^1 = 5$

En síntesis, si observa la propuesta del punto a) y b) de esta situación resulta que si se tiene un producto de potencias de igual base se obtiene otra potencia que tiene la misma base y el exponente es la suma de los exponentes dados.

PENSAR

Propiedad producto de potencias de igual base

El producto de potencias de igual base es igual a otra potencia *que tiene la misma base y el exponente es la suma de los exponentes de las potencias factores.*

$\boldsymbol{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$

Cociente de potencias de igual base

Situación 2

Seguimos con el análisis de esta expresión.

a) $5^8 : 5^4 =$

Nuevamente le pregunto cómo son las bases de este cociente
....

La expresión $5^8 : 5^4$ también se puede escribir $\frac{5^8}{5^4}$ Entonces es $5^8 : 5^4 = \frac{5^8}{5^4}$

Exprese cada potencia (la del dividendo y la del divisor) como un producto: $5^7 : 5^4 = \frac{5^7}{5^4} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

Simplifique la expresión: $5^7 : 5^4 = \frac{5^7}{5^4} = \frac{5.5.5.5.5.5.5}{5.5.5.5}$

Resultando después de la simplificación:

$$5^7 : 5^4 = \frac{5^7}{5^4} = \frac{\cancel{5}.\cancel{5}.\cancel{5}.\cancel{5}.5.5.5}{\cancel{5}.\cancel{5}.\cancel{5}.\cancel{5}} = \dots\dots$$

El cociente le ha quedado expresado como un producto de tres factores iguales a 5, que también lo puede escribir como una potencia.

$$5^7 : 5^4 = \frac{5^7}{5^4} = 5.5.5 = \dots\dots$$

Seguramente ha llegado a:

$$5^7 : 5^4 = \frac{5^7}{5^4} = 5.5.5 = 5^3$$

Preste atención a los exponentes 7 y 4 y al exponente 3 de la potencia que da por resultado. ¿Qué calculo haría usted con los exponentes 7 y 4 para obtener el exponente 3 ?

Seguramente habrá pensado en restarlos. Efectivamente es así. Entonces resulta que:

$$5^7 : 5^4 = \frac{5^7}{5^4} = 5^{7-4} = 5^3$$

Se puede concluir que el cociente de dos potencias de igual base es otra potencia que tiene la misma base y el exponente se obtiene restando los exponentes dados.

NOTAS

NOTAS

b) Analicemos este cociente de potencias de igual base.

$1{,}2^{3} : 1{,}2^{-4} =$

Preste atención al signo de los exponentes de las potencias y resuelva aplicando la definición de potencia.

Entonces el resultado expresado como potencia es:

$1{,}2^{3} : 1{,}2^{-4} = \mathbf{1{,}2^{3-(-4)} = 1{,}2^{3+4} = 1{,}2^{7}}$

En síntesis, si observa la propuesta del punto a) y b) de la situación 2 resulta que si se tiene un cociente de potencias de igual base se obtiene otra potencia que tiene la misma base y el exponente es la diferencia de los exponentes dados.

PENSAR

Propiedad cociente de potencias de igual base

El cociente de potencias de igual base es igual a otra potencia que tiene la misma base y el exponente es la diferencia entre el exponente del dividendo y el exponente del divisor.

$a^{n} : a^{m} = a^{n-m}$

Potencia de otra potencia

Situación 3

Comenzamos nuevamente con la actividad de analizar y completar.

$(2^{4})^{3} =$

Exprese como producto la potencia que está entre paréntesis
....

Seguramente ha llegado a esta expresión: $(2^{4})^{3} = (2.2.2.2)^{3}$

Ahora, al expresar como producto $(2.2.2.2)^{3}$, sin resolver el paréntesis le queda:

$(2^{4})^{3} = (2.2.2.2)^{3} = 2.2.2.2 \,.\, 2.2.2.2.\ 2.2.2.2 =$

Cuente el número de factores 2 que han resultado y luego escriba este producto como una potencia.

$(2^{4})^{3} = (2.2.2.2)^{3} = 2.2.2.2 \,.\, 2.2.2.2.\ 2.2.2.2 =$ ....

Seguramente, coincidimos en que la potencia es: 2^{12}

En conclusión, resulta que: $(2^4)^3 = 2^{12}$

Le proponemos que resuelva las siguientes potencias siguiendo el procedimiento similar al del ejemplo a).

b) $(0,3^3)^2 =$

Pues bien, compare el resultado de a) y b) y elabore una conclusión. Finalmente, compárela con el siguiente recuadro.

NOTAS

PENSAR

Propiedad potencia de otra potencia

La potencia de otra potencia es igual a otra potencia cuya base es igual a la dada, pero el exponente se obtiene multiplicando los exponentes dados.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Propiedad distributiva de la potenciación

ACTIVIDADES

1. A continuación se proponen dos cálculos, a) y b) para verificar si es posible distribuir la potenciación con respecto a multiplicación y al cociente de números racionales.

a) Resuelva primero el cálculo del punto a) y luego el del punto b). Para ello complete con "=" (es igual) o con "≠" (no es igual) según corresponda. Es decir, lo que se busca es determinar si el primer miembro es igual o no es igual al segundo miembro; es decir determinar si se trata de una igualdad o no.

a) $\left(0,1.\frac{5}{2}\right)^2$ .... $0,1^2.\left(\frac{5}{2}\right)^2$	*b)* $(-4:2)^3$.......... $(-4)^3 : 2^3$
Antes de completar observe el segundo miembro y exprese con sus palabras qué diferencias encuentra en relación al primer miembro	*Antes de completar observe el segundo miembro y exprese con sus palabras qué diferencias encuentra en relación al primer miembro*
....	....

Efectivamente en el segundo miembro se ha distribuido el exponente 2 a cada uno de los factores del producto. Para poder completar con "=" o con "≠", le proponemos resolver los cálculos y comparar resultados.

$\left(0{,}1.\frac{5}{2}\right)^2 =$	$0{,}1^2.\left(\frac{5}{2}\right)^2 =$	$(-4:2)^3 =$	$(-4)^3 : 2^3 =$
Calcule el producto del paréntesis y luego resuelva la potencia.	*Calcule las potencias y luego el producto de las mismas.*	*Calcule el cociente del paréntesis y luego resuelva la potencia.*	*Calcule las potencias y luego el cociente de las mismas.*
....	....	....	....

Compare los resultados de ambos cálculos y escriba una conclusión.

Seguramente, si realizó los cálculos con fracciones, obtuvo como resultado $\frac{1}{16}$ *y si trabajó con expresiones decimales su resultado ha sido 0,0625.* *En síntesis podemos decir que:* $\left(0{,}1.\frac{5}{2}\right)^2 = 0{,}1^2.\left(\frac{5}{2}\right)^2 =$	*Seguramente, si realizó los cálculos obtuvo como resultado - 8 .* *En síntesis podemos decir que:* $(-4:2)^3 = (-4)^3 : 2^3$

2. En esta actividad le proponemos que usted analice si la potenciación es distributiva respecto de la suma y la resta de números racionales. Para ello trabaje sobre cada una de las siguientes expresiones y complete con "=" (es igual) o con "≠" (no es igual) según corresponda para determinar si el primer miembro es igual o no al segundo miembro.

$$\left(\frac{3}{2}+0{,}5-\frac{1}{4}\right)^2 \ldots\ldots\ldots \left(\frac{3}{2}\right)^2+0{,}5^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

Antes de completar observe el segundo miembro, $\left(\frac{3}{2}\right)^2+0{,}5^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2$ *y exprese con sus palabras qué diferencias encuentra en relación al primer miembro*

....

Sí, efectivamente en el segundo miembro se ha distribuido el exponente a cada uno de los términos de la suma algebraica. A partir de esta observación le dejamos la tarea de realizar los cálculos sobre cada uno de los miembros y completar con "=" o "≠" para, finalmente, enunciar una conclusión.

....
....
....

Si prueba con otros números siempre llegará a la misma situación final, es decir, a que la potenciación no es distributiva con respecto a la suma y resta de números racionales.

PENSAR

A modo de síntesis lea el siguiente cuadro en donde **a, b, c** son números racionales y **n** es un número entero:

Considerando que **a, b, c** son números racionales y **n** es un número entero, se tiene que:

La potenciación **sí** es distributiva respecto de la multiplicación de números racionales: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

De aquí se desprende también que: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

La potenciación **sí** es distributiva respecto de la división de números racionales: $(a : b)^n = a^n : b^n$, con $b \neq 0$

De aquí se desprende también que: $a^n : b^n = (a : b)^n$

La potenciación **no** es distributiva respecto de la suma ni la resta de números racionales: $(a + b - c)^n \neq a^n + b^n - c^n$

De aquí se desprende también que: $a^n + b^n - c^n \neq (a + b - c)^n$

Es momento de detenernos para que usted relea y revise lo hecho. Finalmente le proponemos el siguiente cuadro. Y que realice una síntesis de lo abordado en potenciación de números racionales.

Potenciación de números racionales con exponente entero.

simbólicamente

$p = a^n$

Regla de los signos
La potencia que tiene como base un número racional y el exponente es un número natural da por resultado otro número racional que es negativo únicamente cuando la base es un número negativo y el exponente es un número impar. En los otros casos la potencia es un número racional positivo.

Se define

$a^n = a$ *si* $n = 1$
$a^0 = 1$ *si* $a \neq 0$
$a^n = a.a.a....a$ *tantas veces como lo indica el exponente entero positivo n.*
$a^{-1} = \frac{1}{a}$

Propiedades

Producto de potencias de igual base
$a^n \cdot a^m = a^{(n+m)}$

Distributiva respecto de:
a) Multiplicación
$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$
b) División
$(a : b)^m = a^m : b^m$, *siendo* $b \neq 0$

Cociente de potencias de igual base
$a^n : a^m = a^{(n-m)}$

Potencia de otra potencia.
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

NOTAS

ACTIVIDADES

1) Complete con el número que falte para que se cumpla la igualdad.

a) $(\text{-----})^{-3} = \frac{1}{8}$

b) $(-0,5)^{\dots\dots\dots} = -0,125$

c) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{3} = \dots\dots\dots$

d) $[(-3)^{\text{----}}]^{\text{----}} = (-3)^6$

e) $\left(\frac{5}{4}\right)^{\text{----}} = \frac{16}{25}$

2) Indique si es verdadera o falsa cada una de las siguientes afirmaciones y justifique las afirmaciones verdaderas y falsas.

a) $0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 = 0,5^4$...

b) $\left(\frac{4}{5}\right)\cdot\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = 3.\frac{4}{5}$ ....

c) $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot(-3)\cdot(-3) = 2^4.(-3)^2$...

d) $\frac{3^2}{3^{-5}} = 3^{-3}$ ....

e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{8}$ ....

f) $\dfrac{\left(\frac{2}{5}\right)^{3}}{\left(\frac{2}{5}\right)^{5}} = \frac{4}{25}$ ....

g) $(1,3 - 0,2)^2 = 1,3^2 - 0,2^2$ ....

3) Calcule las siguientes potencias:

a) $1,4^0 =$ ....; *b).* $\left(-\frac{6}{5}\right)^{-2} =$ ......; *c)* $0,8^{-2} =$.......; *d)* $(-0,3)^3 =$ ....; *e)* $(-10)^{-5} =$ ....

4) Juan tiene que revocar una pared con forma de cuadrado de 4m de lado y le pregunta a don Manuel, el ferretero, cuánta mezcla hace falta. Don Manuel le responde que con 1kg de mezcla puede revocar una pared con forma de cuadrado de 1m de lado. Juan le pide entonces 4 kg. de mezcla.
¿Es suficiente la cantidad de mezcla que lleva Juan? ¿Por qué?

5) ¿Cuántas baldosas cuadradas caben en un costado de un patio cuadrado, si para cubrir toda la superficie se han utilizado 100 baldosas?
Si cada baldosa tiene una superficie de 100 cm^2. ¿Cuántos metros mide el costado del patio?

6) Le propongo a continuación un desafío. Verifique si el resultado del siguiente cálculo es: 27
Una pequeña ayuda: recuerde identificar los términos.

$$4^{-2}.(-2)^4 - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3^5}{3^4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} =$$

RAÍZ DE UN NÚMERO REAL

ACTIVIDADES

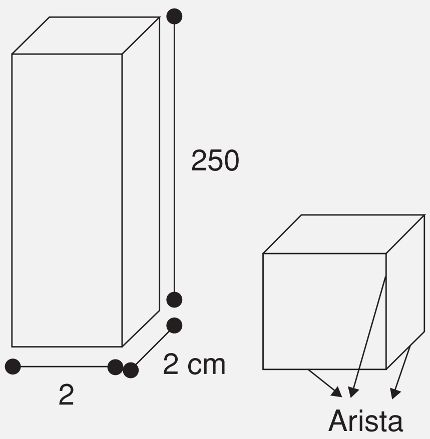
1. Le proponemos completar las líneas de puntos con números reales positivos para que sea cierta la igualdad, en los casos que sea posible.

$(\ldots\ldots)^2 = \frac{16}{25}$ $\qquad$ $(\ldots\ldots)^4 = 10000$ $\qquad$ $(\ldots\ldots)^2 = -16$

2. Complete la línea de puntos con números reales para que sea cierta la igualdad.

$(\ldots\ldots)^5 = -32$ $\qquad$ $(\ldots\ldots)^3 = \frac{27}{8}$

3. Marianela y Andrea necesitan construir un cubo que tenga un volumen equivalente al del prisma cuyas dimensiones se pueden ver en una de las figuras.



Si Usted lee y observa las figuras, en realidad hay dos situaciones por resolver. ¿Por qué?

....
....

Nota.
Si en lenguaje coloquial se expresa que: "el volumen de un prisma es de 15 metros cúbicos", se está haciendo referencia a una cantidad de volumen, que en lenguaje simbólico escribimos: 15 m^3. En esta expresión decimos que 15 (el número) es la medida de la cantidad de volumen del prisma y el m^3 es la unidad empleada para medir . Expresión que solemos abreviar diciendo: 15 es la medida del volumen del prisma.

Probablemente ha respondido que no se conoce la medida de la cantidad de volumen del prisma que se necesita para calcular la medida de la cantidad de volumen del cubo. Y realmente es así.

Pues bien, será entonces la primera tarea calcular la medida de la cantidad de volumen del prisma.

Para ello, ¿recuerda la "fórmula" que le permite calcular la medida de la cantidad de volumen de dicha figura? Si es así escríbala a continuación.
....

NOTAS

Para que compare la expresión con la suya:

$|V| = |L|.|A|.|H|$ es decir: la medida de la cantidad de volumen de un prisma ($|V|$) es igual al producto de las medidas del largo ($|L|$), ancho ($|A|$) y alto ($|H|$) del mismo.

Entonces la medida de la cantidad de volumen es:
....

Seguramente coincidimos en que la cantidad del volumen es: $1000cm^3$ y la medida es 1.000.

Conocida la medida de la cantidad de volumen del prisma, nos dedicamos entonces a calcular la medida de la cantidad de volumen del cubo.

¿Recuerda la relación que existe entre las medidas de la cantidad de longitud de las aristas de un cubo?
....

Efectivamente las aristas de un cubo tienen todas las mismas medidas de la cantidad de longitud.

Recordará que la "fórmula" para calcular el volumen de un cubo es: $|V| = |L|.|A|.|H|$, o sea, la medida de la cantidad de volumen de un cubo es igual al producto de las medidas de la cantidad de longitud del largo, ancho y alto del mismo. Pero como recordamos anteriormente, en este caso las tres medidas son iguales. Podemos escribir entonces que:

$|V| = |A|.|A|.|A|$

Si observa el segundo miembro de la expresión para calcular la medida de la cantidad volumen verá que hay tres factores iguales. Podemos escribirla también así:

$|V| = |A|.|A|.|A|= |A|^3$

Resultando entonces:

$|V|=|A|^3$

De esta última expresión resulta que:

$1000 =|A|^3$

Esta última expresión nos indica que la medida de la cantidad de volumen del cubo es 1000. Pero el problema ¿nos pide calcular la medida de la cantidad de volumen del cubo o la medida de la cantidad de longitud de una de sus aristas?

Lo que se está buscando es la medida de la cantidad de longitud de una arista del cubo. Entonces nos debemos preguntar qué número elevado al cubo o qué número multiplicado 3 veces por sí mismo es igual a 1000

....

Sí, el número que multiplicado 3 veces por sí mismo es 10. Podemos concluir entonces que para que el cubo tenga la misma medida de la cantidad de volumen que el prisma deben medir sus aristas 10, es decir que tienen que tener una cantidad de longitud equivalente a 10 cm.

A continuación se realizan observaciones que le permitirán recordar el cálculo de raíces de números racionales.

En la actividad 1, si realiza un análisis más detenido, podrá observar que lo que se pide en cada uno de los casos es encontrar la base de cada una de las potencias dadas. Para encontrar la base de una potencia, seguramente usted, para cada caso, se ha preguntado, y si no lo hizo puede pensarlo ahora -los siguientes interrogantes:

Para el punto a- ¿qué número real positivo elevado al cuadrado da $\frac{16}{25}$? O también puede interrogarse: ¿qué número positivo multiplicado dos veces por sí mismo da por resultado $\frac{16}{25}$? El número positivo que satisface estas condiciones es $\frac{4}{5}$, porque $\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

Para el punto siguiente, (.......)^4 = 10000, ... ¿qué número real positivo elevado a la cuarta da 10000? O también puede preguntarse ¿Qué número positivo multiplicado por sí mismo cuatro veces es 10000? El número que responde a estas preguntas es 10 . Porque si resuelve la potencia $(10)^4$ obtiene: ....

Para el punto (.........)^2 = -16, ... ¿qué número real positivo elevado al cuadrado da -16? O también puede plantearse, ¿qué número positivo multiplicado 2 veces por sí mismo da por resultado -16 ? Seguramente no pudo encontrar ningún número real que elevado al cuadrado sea igual a -16, ya que la potencia de exponente par, en este caso 2, es siempre un número positivo.

En la actividad 2, si analiza con atención el enunciado, observará que se pide un número real, sin indicar si debe ser un número positivo o negativo.

Para el punto (.........)^5= -32, se preguntará entonces, ¿qué número real elevado a la quinta da -32?.............. Seguramente ha pensado en (-2), porque $(-2)^5 = -32$.

Por último para, $(.......)^3 = \frac{27}{8}$ el número es .... porque $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$

En el caso de la actividad 3, para calcular la medida de la arista del cubo también fue necesario realizar las mismas preguntas que se efectuaron en las actividades 1 y 2.

NOTAS

NOTAS

Las actividades 1, 2 y 3 propuestas están vinculadas con un tema matemático que es la radicación de números reales.

Por ejemplo, cuando se pregunta: ¿qué número positivo multiplicado dos veces por sí mismo es igual a $\frac{16}{25}$?

En aritmética este interrogante se traduce simbólicamente así: $\sqrt{\frac{16}{25}} = ...$(se lee: "raíz cuadrada de $\frac{16}{25}$ es igual a.....).

Y la respuesta a la pregunta planteada, es decir el número $\frac{4}{5}$ es el resultado de la raíz cuadrada de $\frac{16}{25}$

Así se expresa en forma completa como: $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$. Observe que en este caso no se coloca el índice de la raíz porque es dos, se trata de la raíz cuadrada de un número racional. La raíz cuadrada es el único caso en que no se escribe el índice de la raíz. Así cada vez que aparezca una raíz sin índice indicará que se trata de una raíz cuadrada o de índice 2.

De manera que si utilizamos esta nueva notación resultará que el resto de las expresiones de la situación 1, 2 y 3 podrían escribirse:

$\sqrt[4]{10000} = ...$, que al resolverla queda: $\sqrt[4]{10000} = 10$ (se lee: raíz cuadrada de 10000 es igual a 10).

$\sqrt{-16} = ...$ que, como antes vimos, no tiene resultado.

$\sqrt[5]{-32} = ...$, que al resolverla queda: $\sqrt[5]{-32} = -2$(se lee: la raíz quinta de -32 es igual a -2)

$\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = ...$, que al resolverla queda: $\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$(se lee: raíz cúbica de $\frac{27}{8}$ es igual a $\frac{3}{2}$)

$\sqrt[3]{1000} = ...$, que al resolverla queda: $\sqrt[3]{1000} = 10$(se lee: raíz cúbica de 1000 es igual a 10).

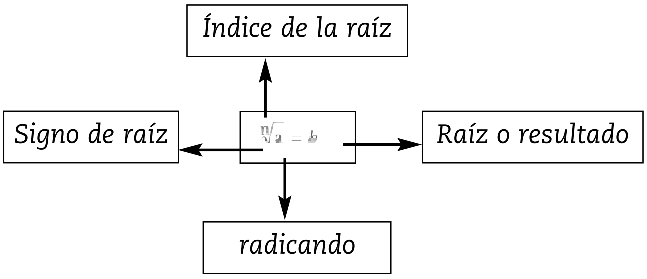
A partir de las actividades analizadas podemos concluir que:

• si el índice es par, la raíz sólo está definida para números positivos.

• si el índice es impar se puede definir para cualquier número real.

PENSAR

• Para que se familiarice con los nuevos nombres lea atentamente el siguiente cuadro



Nota.
Si el índice de la raíz es 2, es decir que se trata de una raíz cuadrada, no se escribe.

NOTAS

....

• En general si se considera que "a" es un número real y "n" es un número entero mayor a 1, se puede definir:

$\sqrt[n]{a} = b$ si se cumple que $b^n = a$

Se lee: la raíz enésima de un número "a" es un número "b" si cumple que b elevado a la "n" es igual a "a".

Teniendo en cuenta las siguientes condiciones:

1ª Si el índice, n, es par la raíz enésima de un número real no negativo "a" es el número no negativo "b" cuya potencia enésima (b^n)es "a"

2ª Si el índice, n, es impar, la raíz enésima de un número real "a" es el número "b" cuya potencia enésima (b^n) es "a"

3ª Si el índice, n, es par, la raíz enésima de un número real negativo "a" no es un número real, ya que no existe ningún número real cuya potencia enésima par (b^n, n par) sea un número negativo.

ACTIVIDADES

1. A continuación, teniendo en cuenta la definición de radicación, complete en donde aparezcan líneas de puntos.

a) $\sqrt[5]{32} =$ .... *porque se cumple que* $2^5 = 32$

b) $\sqrt[3]{0,008} = 0,2$ *Porque se cumple que........*

c) $\sqrt[7]{-1} = -1$ *porque se cumple que* $(-1)^7 = -1$

d) $\sqrt[5]{\left(-\frac{1}{243}\right)} = -\frac{1}{3}$ *porque se cumple que ....*

e) $\sqrt{0,81} = 0,9$ *porque se cumple que............*

f) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}} =$ ...... *porque se cumple que* $\left(\frac{1}{2}\right)^4 =$ ......

g) $\sqrt{(-25)} =$ ....

2. A partir de los resultados obtenidos analice:

a) Observe los ejemplos ¿Cuáles corresponden a raíces en las que el índice de la raíz es un número natural impar y el radicando es un número real positivo?

En los casos (1 y 2) con estas características, ¿la raíz o resultado que obtuvo qué signo tiene?

Podemos concluir que:
Si el índice de una raíz es impar y el radicando es un real positivo la raíz o resultado es positivo.

b) Observe los ejemplos ¿Cuáles corresponden a raíces en las que el índice de la raíz es un número natural impar y el radicando es un número real negativo?

En los casos (3 y 4) con estas características, ¿la raíz o resultado que obtuvo qué signo tiene?

Podemos concluir que:
Si el índice de una raíz es impar y el radicando es un real negativo la raíz o resultado es negativo.

c) Observe los ejemplos. ¿Cuáles corresponden a raíces en las que el índice de la raíz es un número natural par y el radicando es un número real positivo?

En los casos (5 y 6) con estas características, ¿la raíz o resultado que obtuvo qué signo tiene?

Podemos concluir que:
Si el índice de una raíz es par y el radicando es un real positivo, la raíz es positiva.

d) Observe nuevamente los ejemplos. ¿Cuáles corresponden a raíces en las que el índice de la raíz es un número natural par y el radicando es un número real negativo?

En los casos (7) con estas características, ¿la raíz o resultado existe?

Podemos concluir que:
Si el índice de una raíz es par y el radicando es un real negativo no existe la raíz o resultado.

En este análisis se obtuvo la regla de signos que hay que considerar al resolver una raíz de un número real.

PENSAR

• Si el índice de una raíz es par y el radicando es un número positivo, la raíz es positiva.

• Si el índice de una raíz es impar y el radicando es un número positivo la raíz o resultado es positivo.

NOTAS

• ***Si el índice de una raíz es impar y el radicando es un número negativo, la raíz o resultado es negativo.***

• ***Si el índice de una raíz es par y el radicando es un número negativo, no existe la raíz o resultado.***

PROPIEDADES DE LA RADICACIÓN

Antes de comenzar con este análisis es fundamental que tenga presente la definición de radicación y las restricciones que se han indicado. A continuación analizará si es posible distribuir la raíz con respecto al producto y cociente de dos números reales. Le proponemos este análisis a través de ejemplos, para luego escribir la formalización.

Ejemplo 1

Complete con "=" (es igual) o con "≠" (no es igual) según corresponda:

$\sqrt{9 \cdot 4}$.........$\sqrt{9} \cdot \sqrt{4}$

Es decir que se trata de determinar si el primer miembro es igual o no al segundo miembro.

Antes de completar observe el segundo miembro ($\sqrt{9} \cdot \sqrt{4}$) y exprese con sus palabras qué diferencias encuentra en relación al primer miembro
....

Observe que en el segundo miembro se ha distribuido la raíz cuadrada a cada factor del radicando del primer miembro.

a) Calcule el producto indicado en el radicando del primer miembro y luego la raíz del mismo.

$\sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{\ldots\ldots} = \ldots\ldots$

b) Calcule las raíces de cada factor del segundo miembro y escriba el producto final.

$\sqrt{9} \cdot \sqrt{4} = \ldots\ldots \cdot \ldots\ldots = \ldots\ldots$

Los dos resultados que obtuvo en a) y en b), ¿son iguales?
....

Entonces complete con "=" o "≠" según corresponda:

$\mathbf{\sqrt{9 \cdot 4}}$.........$\mathbf{\sqrt{9} \cdot \sqrt{4}}$ que puede expresarse también como:

$\mathbf{\sqrt{9} \cdot \sqrt{4} = \sqrt{9 \cdot 4}}$

NOTAS

Ejemplo 2

Realice los cálculos correspondientes en cada miembro y luego complete con "=" o "≠" según corresponda.

$$\sqrt[3]{-27}\cdot\sqrt[3]{-8}\ldots\ldots\sqrt[3]{-27.(-8)}$$

Antes de completar, observe el segundo miembro $\sqrt[3]{-27.(-8)}$ y exprese con sus palabras qué diferencia encuentra en relación con el primer miembro ....

Seguramente observó que se está calculando la raíz cúbica de un producto de dos factores.

a) Calcule la raíz de cada factor y luego el producto final.

$$\sqrt[3]{-27}\cdot\sqrt[3]{-8}=\ldots\ldots\ldots\ldots=6$$

b) Calcule la raíz del producto indicado en el radicando.

$$\sqrt[3]{-27.(-8)}=\sqrt[3]{\ldots\ldots}=6$$

Si compara el resultado del punto a) y punto b) seguramente le ha quedado:

6 = 6

Entonces, teniendo en la propuesta del ejemplo 2, resulta:

$$\sqrt[3]{-27}\cdot\sqrt[3]{-8}\ldots\ldots\sqrt[3]{-27.(-8)}$$

PENSAR

Considerando dos números reales cualesquiera "a" y "b", y "n" un número natural mayor a uno, podemos concluir que:

La raíz enésima de un producto de dos números reales es igual al producto de las raíces enésimas de los factores del radicando.

$$\sqrt[n]{a.b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$$

El producto de dos raíces enésimas de igual índice es igual a la raíz enésima del producto de los radicandos de los factores.

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a.b}$$

Ejemplo 3:

NOTAS

Complete con "=" (es igual) o con "≠" (no es igual) según corresponda:

$\sqrt{100:25}$........$\sqrt{100}:\sqrt{25}$

Es decir que se trata de determinar si el primer miembro es igual o no al segundo miembro.

Antes de completar observe el segundo miembro, ($\sqrt{100}:\sqrt{25}$), y exprese con sus palabras qué diferencias encuentra en relación al primer miembro
....

Observe que en el segundo miembro se ha distribuido la raíz al dividendo y divisor del radicando del primer miembro.

a) Calcule el cociente indicado en el radicando del primer miembro y la raíz del mismo.

$\sqrt{100:25}=\sqrt{\ldots\ldots}=\ldots\ldots$

b) Calcule las raíces del dividendo y del divisor del segundo miembro y escriba el cociente final

$\sqrt{100}:\sqrt{25}=\ldots\ldots:\ldots\ldots=\ldots\ldots$

Los dos resultados que obtuvo en a) y en b), ¿son iguales’
....

Entonces complete con "=" o "≠" según corresponda:

$\sqrt{100:25}$.........$\sqrt{100}:\sqrt{25}$ que puede expresarse también como:

$\sqrt{100}:\sqrt{25}=\sqrt{100:25}$

Ejemplo 4:

Ahora le propongo que realice un análisis similar al ejemplo 3 y escriba una conclusión.

$\sqrt[3]{(-8)}:\sqrt[3]{(-64)}$..........$\sqrt[3]{-8:(-64)}$

....
....
....

¿ Le quedó?

$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

NOTAS

RECORDAR

Considerando dos números reales cualesquiera "a" y "b", y "n" un número natural mayor a uno, podemos concluir que:

La raíz enésima de un cociente de números reales es igual al cociente de las raíces enésimas del dividendo y del divisor del radicando.

$\sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}$ siendo $b \neq 0$

El cociente de dos raíces enésimas de igual índice es igual a la raíz enésima del cociente de los radicandos.

$\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b}$ siendo $b \neq 0$

PENSAR

Teniendo en cuenta la definición de radicación de números reales, sus condiciones y que a, b son números reales y n es un número natural mayor a 1, se puede concluir que:

- *La raíz es distributiva respecto al producto de dos números reales, siempre que las raíces que se obtienen al distribuir sean números reales. En símbolos:*

$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$

$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$

- *La raíz es distributiva con respecto al cociente de dos números reales, siempre que las raíces que se obtienen al distribuir sean números reales. En símbolos:*

$\sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}$ *siendo* $b \neq 0$

$\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b}$ *siendo* $b \neq 0$

ACTIVIDADES

1) Pensando en la propiedad distributiva de la potenciación con respecto a la multiplicación y al cociente verifique si:

$$\sqrt{\frac{25.16}{81}} = \frac{\sqrt{25}.\sqrt{16}}{\sqrt{81}}$$

2) Acordamos que hasta el momento no hemos mencionado si la raíz es distributiva respecto de la suma y la resta de números reales. O sea, pretendemos indagar si:

a) ¿ $\sqrt{25-16} = \sqrt{25} - \sqrt{16}$ o $\sqrt{25-16} \neq \sqrt{25} - \sqrt{16}$?

b) ¿ $\sqrt{9+16} = \sqrt{9} + \sqrt{16}$ o $\sqrt{25-16} \neq \sqrt{25} - \sqrt{16}$?

Se sugiere que trabaje sobre cada miembro en los puntos a) y b) y luego compare los resultados, para finalmente escribir una conclusión para cada uno de ellos.

PENSAR

NOTAS

*La raíz **sí** es distributiva respecto de la multiplicación y división de números reales, siempre que las raíces que se obtienen existan.*

*La raíz **no** es distributiva respecto de la suma ni la resta de números reales.*

Raíz de otra raíz

Nuevamente comenzamos con el análisis de ejemplos, pero siempre teniendo presente la definición de radicación y sus condiciones.

Ejemplo 1

Complete con "=" (es igual)o con "≠" (no es igual) según corresponda:

$\sqrt[3]{\sqrt{64}}$ .... $\sqrt[6]{64}$

Nuevamente se trata de determinar si el primer miembro es igual o no al segundo miembro.

Le propongo que compare el primer miembro con el segundo e indique con sus palabras qué diferencia observa con respecto al segundo miembro

....

Seguramente coincidimos en que en el primer miembro se está calculando una raíz y luego se está calculando otra raíz al resultado encontrado.

a) A partir de esta última observación complete la siguiente igualdad:

$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} =$ ....

b) Calcule la raíz siguiente y complete: $\sqrt[6]{64} =$ ....

Comparando los resultados de los puntos a) y b) seguramente le ha quedado:

2 = 2

NOTAS

podemos decir entonces que:

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64}$$

Por último le pido que observe los índices del primer miembro y el índice del segundo miembro e indique mediante qué operación se puede vincular los índices 3 y 2 del primer miembro con el índice 6 del segundo miembro.

....

Seguramente usted ha contestado mediante la multiplicación y es así. Pues bien, estamos entonces en condiciones de formalizar lo trabajado.

PENSAR

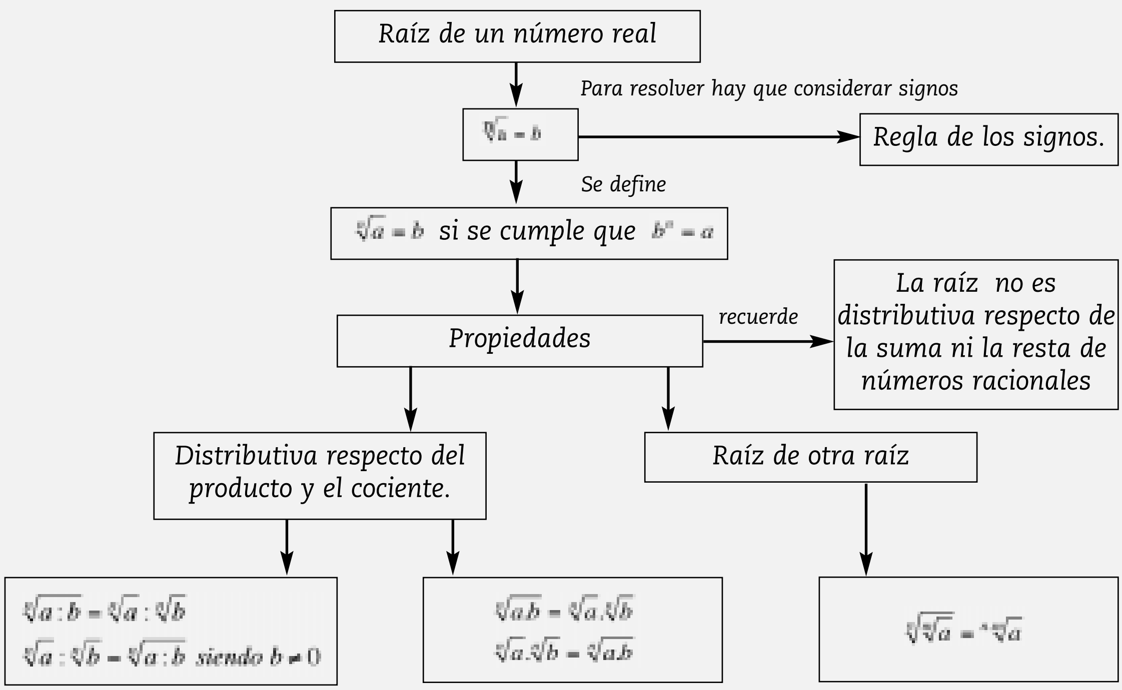
Teniendo presente la definición de radicación, sus condiciones y que a es un número real y tanto n como m son números naturales mayores a uno, podemos decir que:

La raíz de otra raíz de un número real es igual a otra raíz del mismo número real pero cuyo índice se obtiene multiplicando los índices dados.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$$

ACTIVIDADES

Antes de comenzar con esta actividad le sugiero que comience a leer nuevamente lo trabajado para radicación de números reales. Para ello le puede ayudar el siguiente esquema en el que a, b son números reales y tanto m como n son números naturales mayores a uno.



1) Indique si las siguientes raíces son números reales, justificando en cada caso.

a) $\sqrt[3]{-64} =$

b) $\sqrt{0,04} =$

c) $\sqrt{-\frac{25}{16}}$

d) $\sqrt[4]{-1} =$

Respuesta.
a)-4; b) 0,2; c) no existe ningún número real que elevado al cuadrado sea igual a $-\frac{25}{16}$
d) no existe ningún número real que elevado a la cuarta sea igual a -1

2) Indique si las siguientes igualdades son verdaderas. En caso de que no sean verdaderas, justifique por qué no lo son.

a) $\sqrt{\frac{9}{4}+25} = \sqrt{\frac{9}{4}} + \sqrt{25}$

b) $\sqrt{1+2^2+(-2)^2} = 3$

c) $\sqrt{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{9}}$

d) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}.27} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}}.\sqrt[3]{27}$

e) $\sqrt{2.50} = \sqrt{2}.\sqrt{50}$

f) $\sqrt{\frac{1}{8}} + \sqrt{\frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}$

g) $\sqrt{-\frac{1}{8}.(-32)} = 4$

h) $\sqrt{-64} = -8$

i) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{128}} = 2$

Respuesta.
a) F; b)V; c) V; d) V; e) V, f) F, g) F; h) F, i) F

CÁLCULOS CON SUMAS, RESTAS, PRODUCTOS, COCIENTES, POTENCIAS Y RAÍCES DE NÚMEROS REALES

Ya que se ha detenido un momento para revisar lo hecho, seguirá con el desafío de resolver cálculos con sumas, restas, productos, cocientes, potencias y raíces de números reales. En especial nos interesa que trabaje con números racionales debido al uso que le daremos más adelante. No olvide utilizar las propiedades trabajadas para simplificar los cálculos.

Estos cálculos reciben el nombre de cálculos combinados.

Se muestra a continuación uno de estos cálculos ya resuelto para que usted lo analice y luego resuelva los otros que se le proponen.

Para realizar el siguiente cálculo: $2^{-2}.\sqrt[3]{-64}+0,15:0,03-(2^{2}\cdot 2^{-1}) =$ .... una alternativa a seguir es leer el cálculo e identificar los términos. Recuerde que los símbolos de suma y resta separan

NOTAS

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

NOTAS

términos. De esta manera se señala a continuación cada término con un arco.

$$\overbrace{2^{-2}\cdot\sqrt[3]{-64}}+\overbrace{0{,}15:0{,}03}-\overbrace{(2^2\cdot 2^{-1})}$$

Luego, ¿qué le parece que hay que hacer?

....

Seguramente coincidirá en que es necesario resolver cada uno de los términos, prestando atención a los signos de los números y llegando a una suma algebraica que hay que resolver para llegar al resultado final. Observe todo el cálculo resuelto:

$$\overbrace{2^{-2}\cdot\sqrt[3]{-64}}+\overbrace{0{,}15:0{,}03}-\overbrace{(2^2\cdot 2^{-1})}$$

$$\overbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot(-4)}+\overbrace{\frac{15}{100}:\frac{3}{100}}-\overbrace{(2^1)}=$$

$$\overbrace{\frac{1}{4}.(-4)}+\overbrace{\frac{15}{100}\cdot\frac{100}{3}}-\overbrace{2}=$$

Al simplificar cada uno de los términos de la expresión, resulta:

-1 + 5 - 2 = 3

Ahora resuelva usted los cálculos que se dan a continuación y registre a la derecha de los mismos los pasos que sigue en cada caso para llegar al resultado final.

Respuestas.
-3; -7; $\frac{31}{6}$

a) $\sqrt{0{,}25}:0{,}5-2^2(2)^{-1}+\sqrt[5]{-32}=$

b) $\sqrt[3]{(-27)}:\sqrt{9}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right).(-2)-3^2=$

c) $\frac{3^2.3^5}{3^5}-\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{8}{10}-\sqrt[3]{\frac{8}{27}}\right)-3.\left(\frac{6}{5}\right)^{-1}=$

APROXIMACIONES DE EXPRESIONES DECIMALES DE NÚMEROS REALES

Aproximación de un número real por exceso y por defecto

Comience analizando y resolviendo las siguientes situaciones y escriba las respuestas correspondientes en cada uno de los casos.

1) Se necesitan 59 botellas de vino fino. Pero dicho vino viene envasado en cajas de 6 botellas cada una. ¿Cuántas cajas son necesarias comprar?

2) Quiero repartir 59 pesos entre mis 6 hijos. ¿Qué cantidad de dinero puedo darle a cada uno?

NOTAS

Seguramente que al resolver cada una de las situaciones propuestas su punto de partida ha sido el cociente de:

59:6 = 9,833333333........

Pero para obtener una respuesta coherente al punto 1, seguramente pensó que necesita comprar 9 cajas de vino, ya que no es posible que adquiera partes de una caja.

En el punto 2), al repartir los $59 entre los 6 hijos, debió aproximar el cociente, 9,85, al centésimo, ya que la menor unidad monetaria es el centavo. Está claro que la cantidad de dinero que recibe cada hijo es mayor que el cociente real.

En los dos casos analizados usted ha realizado una **aproximación** del cociente, porque no ha escrito todas las cifras.

En el primer caso es **9** y como 9 < 9,833333......, o sea el valor aproximado es menor que el cociente, decimos entonces que la aproximación es por defecto.

En el segundo caso es **9,85** y como 9,85 > 9,83333......, o sea el valor aproximado es mayor que el cociente, decimos entonces que la aproximación es por exceso.

RECORDAR

Si se realiza la aproximación de un número real positivo **a** por otro número real positivo **b**:

la aproximación es por **exceso** si **b > a**

la aproximación es por **defecto** si **b < a**

ACTIVIDADES

Revise las siguientes aproximaciones y complete donde aparezca la línea de puntos.

- *45, 5 es la aproximación al décimo de 45,53 por defecto, ya que 45,5 < 45, 53.*
- *2500 es la aproximación a la centena de 2553 por ....; ya que 2500 < 2553*
- *34,45 es la aproximación al centésimo de 34,433 por exceso; ya que 34,45 .... 34,433*

- *.............. es la aproximación al entero de 36,89 por exceso, ya que ....> 36,89*
- *.............. es la aproximación al centésimo de 2, 345 por defecto ya que ....< 2, 345*

NOTAS

Aproximación por redondeo de un número real

Seguimos ahora analizando estas situaciones.

Situación 1

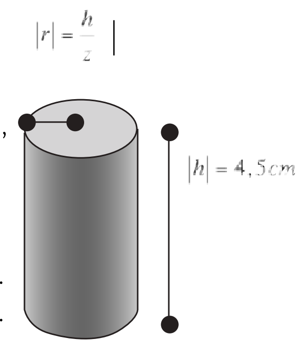
Laura, al llenar el tubo de gas de su vehículo lee que debe abonar $6,68.Al entregarle $10 al empleado, éste le entrega de vuelto $ 3,30. ¿Podría explicar cuál ha sido el criterio del empleado para entregarle a Laura este vuelto?

....

....

Situación 2

Calcule la cantidad de volumen de una figura cilíndrica como la representada, cuya altura es de 4,5cm y el segmento radial tiene una longitud equivalente a la mitad de la altura de la misma.



....

....

....

A continuación revisamos juntos la resolución de las situaciones propuestas anteriormente.

En la situación a) acordamos que el cálculo no es correcto porque la diferencia es igual a 3,32, pero para entregar el "vuelto" generalmente no es posible darlo exacto ya que habitualmente no se cuenta con monedas cuyo valor corresponda a $ 0,01, o sea a un centavo de peso . Por ello es que el precio se ha "redondeado" y en este caso Laura ha pagado "de más".

Observe cómo se ha realizado el redondeo:

a) Cuando la primera cifra eliminada es mayor o igual a 5, se le suma 1 a la cifra anterior.

Por ejemplo: si redondeamos al décimo 6,68 se debe eliminar la cifra 8. Pero 8 >5, entonces hay que sumarle 1 a la cifra que está inmediatamente a la izquierda de 8, que en este caso es 6. Entonces el número redondeado que se obtiene es 6, 7. Concluimos entonces que:

$6{,}68 \cong 6{,}7$; 6,68 es aproximadamente igual a 6,7

Mediante el redondeo se ha obtenido una aproximación por exceso en el décimo 6,68. Por esa razón es que Laura ha pagado "de más".

Algo similar ocurre en el punto b), pero en contraste con la situación a), al redondear, se ha obtenido una aproximación menor al número real.

Al calcular la medida de la cantidad de volumen de la figura, la expresión que le permite determinar el valor pedido es:

$|V| = \pi.|r^2|.|h|$

$|V| = \mathbf{3{,}14.}\ 2{,}25^2.\ 4{,}5$

$|V| = 71{,}533125\ cm^3$

Al trabajar con el número **irracional π**, hay que determinar con cuántos decimales realizar el cálculo, porque la expresión decimal de este número (3,14159265358979323846264338327950....) tiene infinitas cifras decimales no periódicas. En general, se considera el número $\pi \cong 3{,}14$; que es la expresión redondeada de dicho número.

Observe cómo se ha realizado el redondeo, en este caso, del número π:

a) Cuando la primera cifra eliminada es menor a 5, se deja la cifra que está inmediatamente a la izquierda de ésta sin modificar.

Por ejemplo: si redondeamos al centésimo, 3,14159265358979323846264338327950.. se deben eliminar todas las cifras que están a la derecha de 4. Como la primer cifra a eliminar es 1, y 1 <5, se deja la cifra que está inmediatamente a la izquierda de 1.

$3{,}14159265358979323846264338327950 \cong 3{,}14$

Mediante el redondeo se ha obtenido una aproximación por defecto al centésimo del número π.

RECORDAR

Cuando la primera cifra eliminada es mayor o igual a 5 se le suma 1 a la cifra anterior. Y el número que se obtiene es una aproximación del mismo por exceso.

Cuando la primera cifra eliminada es menor a 5 se deja la cifra que está inmediatamente a la izquierda de ésta sin modificar. Y el número que se obtiene es una aproximación por defecto del mismo.

NOTAS

ACTIVIDADES

1) Realice el siguiente cálculo trabajando con la calculadora, redondeando al centésimo cada uno de los términos del mismo.

$\sqrt{7}+\sqrt[3]{5}+\frac{1}{7}=$

A continuación se muestran las expresiones decimales de los términos dados.

$\sqrt{7}$=1,4142135623730950488016887242097.....

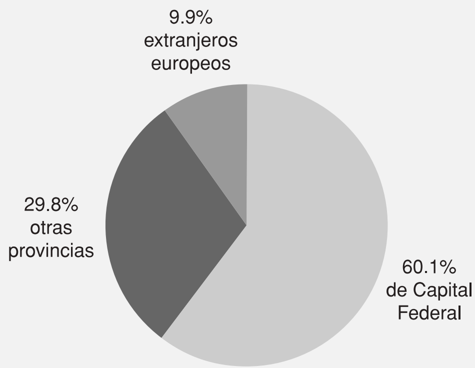
$\sqrt[3]{5}$=1,6206565966927624351504541295622 .....

$\frac{1}{7}$=0, 142857142857142857142857142857 14.....

2) En la entrada a Mendoza por el Arco Desaguadero el personal policial lleva un registro de los turistas que han ingresado hasta las 12 del medio día del comienzo del receso de invierno.

En total son aproximadamente 320 turistas. En el siguiente gráfico se muestra el porcentaje discriminado de su procedencia.

Redondee cada uno de los porcentajes al entero y calcule la cantidad de turistas que proviene de cada lugar.



3) Oscar necesita 3 bolsas de cemento, 4 bolsas de cal, 1,5m^3 de arena, 2 bolsas de pegamento para azulejos y 6 m de caño P.V.C. para realizar unos arreglos en su casa. Al hojear el periódico lee la oferta que se muestra a continuación. Al mirar este anuncio, Oscar concluyó que necesita aproximadamente: $85, si redondea todos los precios al entero. ¿Está usted de acuerdo?

Corralón: LA TUERCA			
Azulejos decorados m^2	$ 7,60	Cemento	$ 8; 50
Caño galv. 12	$13,30	Cal común	$ 1,95
Caño P.V.C 4” x 4m	$ 7,95	Pegamento de azulejos 1 X 20kg	$ 4,50
Arena por m^3 y viaje	$ 12,90	Cerámico 8x16	$ 4,9
		Azulejos lisos m2	$ 3,45

NOTACIÓN CIENTÍFICA

NOTAS

En distintas ciencias, como la biología, química, astronomía, física, economía y otras, es muy frecuente que los científicos deban trabajar y realizar cálculos con números muy grandes o con números muy pequeños. La expresión de estos números utilizados en cálculos es sumamente incómoda y poco práctica. Le mostramos a continuación algunos para ejemplificar.

Comenzamos mostrándole algunas cifras muy grandes, como por ejemplo la edad de la Tierra que es de aproximadamente 450000000 años o también la cantidad de longitud del segmento radial de la Tierra que es de aproximadamente: 6370000 m. Si pensamos en cantidades pequeñas, tenemos que la cantidad de longitud aproximada del virus causante del sarampión es de 0,0000001 m o también que la cantidad de masa de una célula mediana del hígado es de aproximadamente: 0,000000002 g.

Por ello es que para trabajar con estos números se emplea una forma de expresión particular que se llama notación científica. Pero antes de abordar la notación científica de número es necesario que recuerde algunos conceptos.

Exprese los siguientes números como producto de dos factores tal que:

• Uno de esos factores sea un número cuyo módulo sea mayor o igual a uno y menor que diez.

• El otro factor sea la unidad seguida de ceros.

Y, finalmente, exprese la unidad seguida de ceros como una potencia de base 10. Para realizar lo pedido complete a continuación la línea de puntos donde se le indique.

Situación 1

a) $3000 = 3 \; . \; .... = 3.10^{3}$

b) $50.000.000.000 = \; .... \; . \; 10000000000 = 5 \; . \; 10^{10}$

La última expresión obtenida de cada número corresponde a la notación científica de cada uno de ellos.

En a) después de la cifra 3, ¿cuántas cifras hay?

....

Identifique la potencia de base 10 del último factor de a). ¿Cuál es el exponente de este factor?

....

Teniendo presente las dos últimas preguntas, ¿qué puede

NOTAS

decir respecto del número de cifras a la derecha de la cifra 3 y del exponente de la potencia?

....

Estamos de acuerdo en que el número de cifras a la derecha de la cifra 3 y el número que corresponde al exponente de la potencia de base 10 es el mismo, siendo en este caso 3.

Podemos decir que la notación científica del número 3000 es $3.\ 10^3$.

Para controlar el punto b), responda las mismas preguntas que hicimos para a).

En b) después de la cifra 5, ¿cuántas cifras hay?

....

Identifique la potencia de base 10 del último factor de b). ¿Cuál es el exponente de este factor?

....

Teniendo presente las dos últimas preguntas ¿qué puede decir respecto del número de cifras a la derecha de la cifra 5 y del exponente de la potencia?

....

Estamos de acuerdo en que el número de cifras a la derecha de 5 y el número que corresponde al exponente de la potencia de base 10 es el mismo, siendo en este caso 10.

Podemos decir que la notación científica del número 50.000.000.000 es $5\ .\ 10^{10}$

Observe que en estos dos casos se llegó a la notación científica del número, que es expresar dicho número como un producto de dos factores tales que:

• Uno de esos factores sea un número cuyo módulo sea mayor o igual a uno y menor que diez.

• El otro factor es una potencia de base 10.

Advierta que en estos casos el exponente de la potencia de base 10 es un número entero positivo.

Continúe expresando en notación científica los siguientes números:

c) 200 = ...

d) 40 = ...

e) 600000= ....

Situación 2

NOTAS

Ahora se le propone expresar números muy pequeños, dados en escritura decimal, en notación científica, para lo cual se busca transformar las expresiones decimales en un producto de dos factores, producto que tendrá las particularidades que antes se trabajaron.

Para ello realice lo indicado en cada caso:

Complete la línea de punto con la escritura fraccionaria correspondiente, tal que el denominador sea la unidad seguida de ceros (10, 100, 1.000, 10.000):

a) $0{,}0005 = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

Ahora complete la línea de puntos con un número natural tal que el denominador quede expresado como una potencia de base 10.

$0{,}0005 = \frac{5}{10^{\ldots}}$

La expresión obtenida, $\frac{5}{10^4}$ también puede escribirse como el producto del factor 5 por el factor 10^{-4}.

En conclusión, podemos escribir que: $0{,}0005 = 5.10^{-4}$. Esta última expresión es la notación científica del número 0,0005. Si observa la notación científica verá que es igual a un producto cuyo primer factor es un número cuyo módulo es mayor o igual a uno y menor que diez y el segundo factor es una potencia de 10.

Ahora siga el mismo procedimiento anterior y complete las líneas de puntos de tal manera que se obtenga, al final, la notación científica de los siguientes números:

b) $0{,}000008 = \frac{\ldots\ldots}{1000000} = \frac{\ldots\ldots}{10^{\ldots}} = 8.10^{-6}$

c) $0{,}009 = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots} = \frac{9}{10^3} = 9.10^{\ldots}$

d) $0{,}5 = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = 5.10^{-1}$

Observe que en estos casos se llegó también a la notación científica de cada uno de los números, que es expresar a dichos números como un producto de dos factores tales que:

• Uno de esos factores sea un número cuyo módulo sea mayor o igual a uno y menor que diez.

• El otro factor es una potencia de base 10.

Observe que en estos casos el exponente de la potencia de base 10 es un número entero negativo.

NOTAS

Situación 3

Exprese en notación científica los siguientes números:

a) 20.000 =

b) 0,0006=

c) 300.000 =

d) 0,0000000009 =

Lea con atención la siguiente conclusión:

La notación científica de un número consiste en escribir dicho número como un producto de dos factores, de los cuales uno es un número cuyo módulo es mayor o igual que uno y menor que 10 y el otro factor es una potencia de base 10 con exponente entero (positivo o negativo).

Simbólicamente podemos señalar que un número expresado en notación científica tiene esta notación:

$\boxed{a\ .\ 10^n} \rightarrow$ *Potencia de base 10 con exponente entero*

$a \rightarrow \boxed{1 \leq |a| < 10}$

Situación 4

a) La distancia entre Plutón y el Sol es, aproximadamente, 6.000.000.000 de kilómetros. Si escribimos en notación científica:

El primer factor cuyo valor absoluto es mayor o igual a 1 y menor que 10 es.................... Efectivamente es 6. El segundo, que es la potencia base 10, es........ Sí, coincidimos en que es 10^9.

Entonces 6.000.000.000 = 6.10^9

b) La cantidad de volumen de agua de los lagos y mares de nuestro planeta es de 233.000.000.000.000.000 litros o de 233.000 billones de litros.

Observe con atención el siguiente esquema:

$$\underbrace{223.000.000.000.000.000}_{\text{17 cifras}} = 2,23\ .\ 10^{17}$$

Responda las siguientes preguntas:

NOTAS

¿El primer factor es en valor absoluto mayor que uno y menor que 10?............... porque $1 < 2,23 < 10$.

¿El segundo factor es una potencia de base 10? ...., efectivamente es 10^{17}.

c) Veamos este otro ejemplo.

La cantidad de superficie que ocupan todos los continentes e islas de la Tierra es de 135.000.000 de kilómetros cuadrados.

Vuelva a observar este esquema y complete donde se le indique:

$$1\underbrace{35.000.000}_{\text{....... cifras}} = 1,35 \ . \ 10^{.....}$$

Revisemos juntos su respuesta. ¿El primer factor es en valor absoluto mayor o igual a 1 y menor que 10? Efectivamente es cierto, ya que:

$1 < 1,35 < 10$.

El segundo factor es una potencia de base 10 cuyo exponente coincide con la cantidad de cifras indicadas. Entonces es 10^8.

La notación científica de **135.000.000 = 1,35.10^8**

d) Lea nuevamente los puntos a) b) y c) de la situación 4 y escriba en notación científica los siguientes números:

234000 =

456700 =

89000000000 =

Respuesta.
$2,34.\ 10^5$; $4,567.\ 10^5$; $8,9.\ 10^{10}$

Situación 5

a) La cantidad de longitud del segmento diametral de la levadura de cerveza, organismo unicelular que se utiliza para hacer el pan, es de aproximadamente, 0,007 milímetros.

Observe el siguiente esquema:

$$0,\underbrace{007}_{\text{3 cifras}} = 7.\ 10^{-3}$$

Analicemos la igualdad anterior, teniendo presente la notación científica de un número:

NOTAS

¿El primer factor es en valor absoluto mayor o igual a uno y menor que 10?............... porque $1<7<10$

¿El segundo factor es una potencia de base 10? ...., efectivamente es 10^{-3} y el exponente es negativo Analicemos este otro ejemplo.

b) La cantidad de masa de un electrón en reposo es: 0,0000000000000000000000000000911 gramos.

Vuelva a observar este esquema y complete donde se le indique:

$$\underbrace{0,0000000000000000000000000000911}_{\text{....... cifras}} = 9,11\ .\ 10^{\text{.....}}$$

Revisemos juntos su respuesta. ¿El primer factor es mayor o igual a 1 y menor que 10?. Efectivamente es cierto, ya que:

$1 < 9,11 < 10$.

El segundo factor es una potencia de base 10 cuyo exponente coincide con la cantidad de cifras indicadas. Entonces es 10^{-28}.

La notación científica de la cantidad de masa de un electrón es: $9,11\ .\ 10^{-28}$ g.

Le propongo entonces que lea lo analizado en los puntos a) y b) de la situación 5) y escriba en notación científica los siguientes números.

a) 0,000000000000123 =

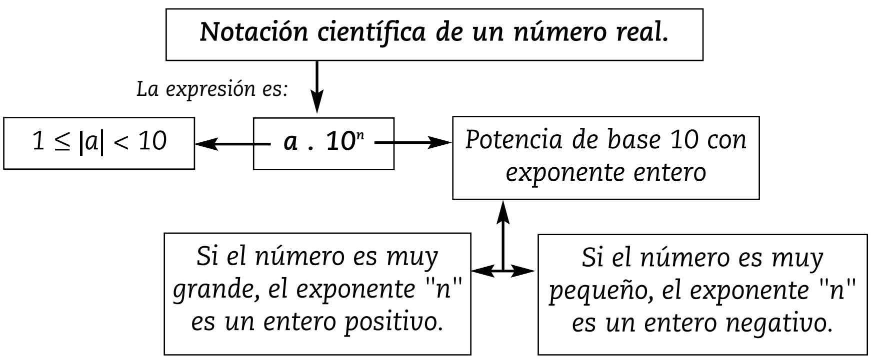
Respuesta.
$1,23.10^{-13}$; $4,567.\ 10^{-5}$;$2,\ 34.10^{-6}$

b) 0, 00004567 =

c) 0, 00000234

Antes de seguir avanzando lea nuevamente lo hecho de notación científica. También se le propone a continuación una síntesis para que repase.

PENSAR

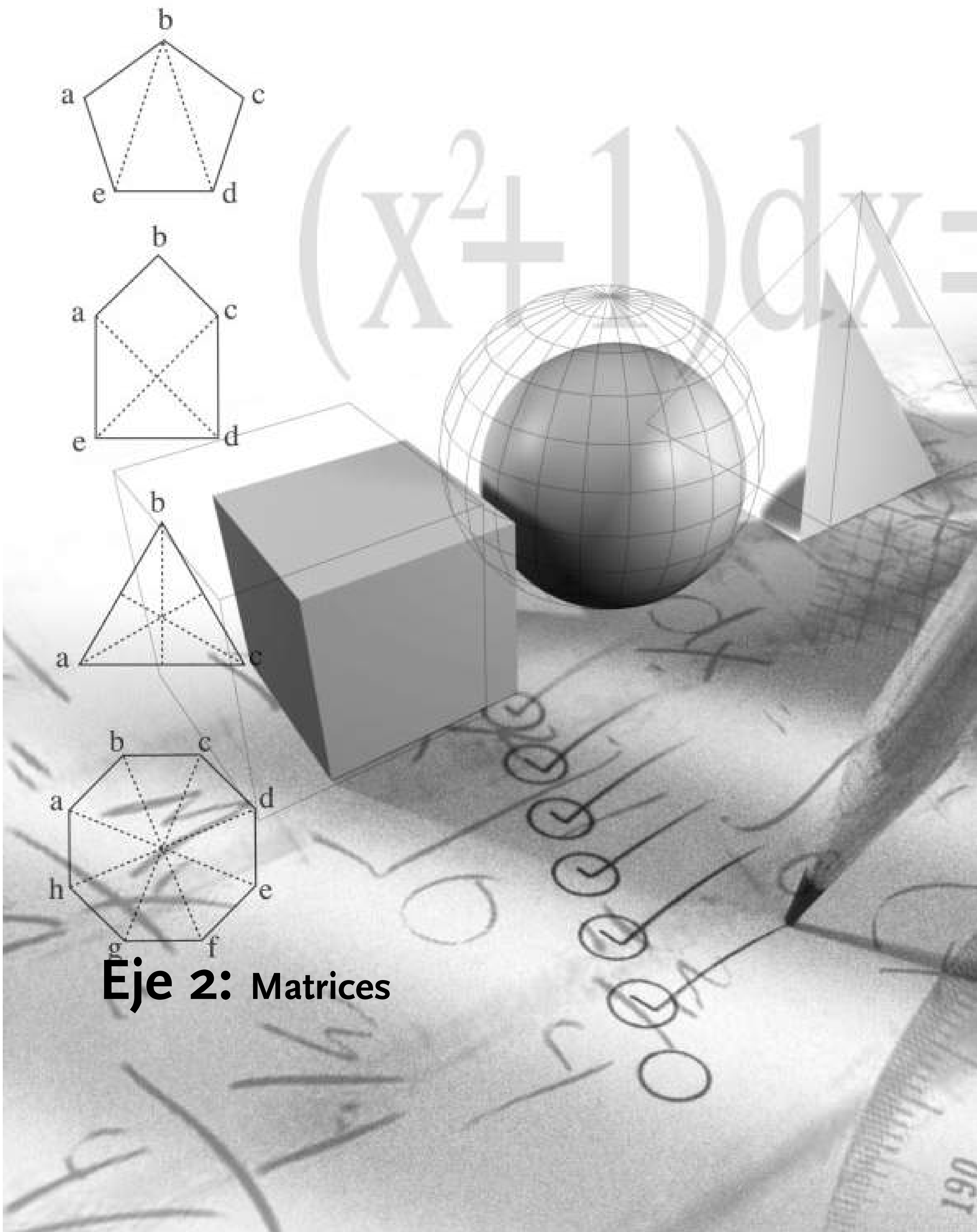


ACTIVIDADES

Lea con atención cada una de las siguientes situaciones y realice los cálculos utilizando notación científica.

1) Muchas veces durante las tormentas de verano se observa primero el rayo y unos segundos después se escucha el trueno. Si la rapidez de propagación de la luz es de 300.000 km por segundo y la del sonido es de 340 metros por segundos, exprese ambas medidas en notación científica y justifique por qué se observa primero el relámpago y luego se escucha el trueno.

2) Si la cantidad de peso de un grano de arroz es de 0,0000277 kg. ¿Cuántos granos de arroz hay entonces en 20 kg, aproximadamente?



Eje 2: Matrices

NOCIÓN DE MATRIZ

ACTIVIDADES

Situación 1

Información de algunos equipos de fútbol

Es muy común observar, en la sección de deportes de un diario, cuadros que presentan diversas informaciones de los equipos de fútbol que de un modo muy cómodo permiten la lectura de los mismos. En la tabla siguiente se muestran las posiciones hipotéticas de una fecha, de los cinco primeros equipos de la A.F.A.

Equipo	Puntos	Jugados	Ganados	Empatados	Perdidos	Goles a favor	Goles en contra
River	36	16	11	3	2	36	16
Boca	34	16	10	4	2	32	14
Talleres	28	16	8	4	4	25	17
Racing	27	16	8	3	5	28	24
Vélez	25	16	7	4	5	27	19

A partir de la observación de la tabla responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos partidos ha empatado Talleres?..

b) ¿Cuántos goles en contra tiene Racing?..

c) ¿Cuántos partidos ha perdido Boca?..

d) ¿Cuántos goles a favor tiene River?..

Seguramente que para responderlas usted procedió de la siguiente manera:

Para saber la cantidad de partidos empatados por Talleres buscó en las filas la que corresponde a la información acerca de Talleres y la columna que se refiere a partidos empatados, y su respuesta ha sido 4. Para responder la pregunta referida a los goles en contra que tiene Racing, nuevamente buscó en las filas la referida a este equipo y la columna que indica los goles en contra y respondió 24.

Situación 2

Tabla de notas

1. Ahora se muestra una tabla parcial correspondiente a las notas de cuatro evaluaciones de seis alumnos. Obsérvela y responda.

	E1	E2	E3	E4
1. Álvarez	7	8	9	10
2. Contreras	5	6	6	8
3. Hernández	7	8	9	8
4. Martín	4	7,5	7	10
5. Valdés	8	6	3	10
6. Zamora	5	7	9	9

a) ¿Qué nota obtuvo el primer alumno en la primera evaluación?..

b) ¿Qué nota sacó el sexto alumno en la tercera evaluación?..

c) ¿Quién y en qué evaluación sacó la nota más baja?...

d) ¿Qué nota sacó el cuarto alumno en la segunda evaluación?..

Situación 3

Consumo de kilos de pan, carne y manteca de una familia durante los años 1999, 2000, 2001 en un país.

	Pan	Carne	Manteca
1999	430	157	8
2000	390	162	6
2001	410	169	10

1. A partir de los datos que observa en esta tabla responda:

a) ¿Qué indica el número 162 ubicado en la tabla?...

b) ¿Qué indica el número 10 que se encuentra en la tabla? ....

A medida que usted ha abordado las situaciones 1, 2 y 3 puede observar que a través de cuadros numéricos es posible registrar e interpretar sencillamente gran cantidad y variedad de información numérica.

Por ejemplo, en la **situación 1** se indican para cinco equipos diferentes datos referidos a puntos, número de partidos jugados, ganados, empatados, perdidos, número de goles a favor y de goles en contra. Si se realiza una lectura por fila (horizontal) de izquierda a derecha, se señalan los datos referidos a cada equipo. Si considera a River, se muestran los valores referidos a puntos, número de partidos jugados, ganados, empatados, perdidos, número de goles a favor y de goles en contra.

Pero si hacemos una lectura vertical observamos los distintos valores de, por ejemplo, número de goles a favor para cada uno de los cinco equipos.

Si leemos dicha información, se tiene que:

River tiene 36 goles a favor, Boca tiene 32 goles a favor y Talleres tiene 25 goles a favor,

Racing tiene 28 goles a favor y Vélez tiene 27 goles a favor.

En síntesis, podemos decir que estos cuadros presentan elementos ordenados que brindan información, ya sean leídos por fila (en forma horizontal) o por columna (en forma vertical).

En la **situación 2** se muestra cómo se pueden identificar datos estableciendo el orden del alumno con el orden de la evaluación. Por último, en la **situación 3** se mostró que también es posible hacerlo a partir de un valor de la tabla e interpretar su significado.

En matemática a estas tablas de números se les da el nombre de **matriz**.

NOTAS

PENSAR

*Se denomina **matriz** a un ordenamiento rectangular de números.*

Estos números aparecen dispuestos en:

- ***filas** (líneas de elementos ordenados horizontalmente) y en*
- ***columnas** (líneas de elementos ordenados verticalmente).*

ACTIVIDADES

1. *En la siguiente matriz observará que se ha identificado una fila y una columna.*

$$\begin{bmatrix} \boxed{7} & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 6 & 6 & 8 \\ 7 & 8 & 9 & 8 \\ 4 & 7,5 & 7 & 10 \\ 8 & 6 & \boxed{3} & 10 \\ 5 & 7 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

Fila de una matriz

Columna de una matriz

a) Esta matriz, ¿cuántas filas tiene?........ y ¿cuántas columnas tiene?.........

Seguramente usted ha contado 6 filas y 4 columnas. El número de filas y el número de columnas permite definir el **orden o dimensión de esta matriz**.

Decimos entonces que esta matriz es de orden 6 x 4, o de dimensión **6 x 4**; esto indica que tiene 6 filas y 4 columnas.

PENSAR

Si la matriz tiene m filas y n columnas se dice que es de ***orden m x n*** o *que su* ***dimensión es de m x n****.*

Se lee matriz de orden "m" por "n" o *que su dimensión es de "m" por "n".*

ACTIVIDADES

Seguimos trabajando sobre la matriz anterior…

1. Sobre la matriz se ha señalado el número 7.

a) Escriba sobre la línea de puntos a qué fila pertenece. ....

b) Escriba sobre la línea de puntos a qué columna pertenece. ....

2. Sobre la matriz también se ha señalado el número 3.

a) Escriba sobre la línea de puntos a qué fila pertenece. ....

b) Escriba sobre la línea de puntos a qué columna pertenece. ....

3. Identifique y escriba sobre la línea de puntos el elemento de la matriz que está en la tercera fila y segunda columna. ....

Para que verifique sus respuestas, el elemento 7 está en la primera fila y primera columna y el elemento 3 se ubica en la quinta fila y tercera columna. La respuesta de c) es el número 8.

RECORDAR

Cada elemento de la matriz está identificado por la posición que ocupa, esto es, está en la intersección de una fila y una columna.

NOTAS

PENSAR

Las matrices se denotarán por letras mayúsculas y sus elementos por la misma letra pero en minúscula.

Cada elemento de la matriz presenta dos subíndices: el primero indica la fila a la que pertenece y el segundo subíndice señala la columna a la que pertenece.

$$\begin{array}{c} \\ fila1 \\ fila2 \\ \dots \\ fila-m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} columna1 & columna2 & \dots & columna-n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array} = A_{m \times n} = (a_{i,j})$$

a_{mn}

Subíndices: m y n

($a_{i,j}$), i y j son subíndices , "i" indica el número de la fila y "j" indica el de la columna. Por ejemplo: a_{32} indica que el elemento a está en la tercera fila y segunda columna.

MATRIZ CUADRADA, MATRIZ FILA Y MATRIZ COLUMNA

ACTIVIDADES

1. *Observe las siguientes matrices A, B, C y D e indique en el cuadro para cada una su orden o dimensión, es decir, indique el número de filas y el número de columnas.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -4 & 0 \\ 5 & 0,5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1,2 & 0 & 3,5 \\ 1,3 & 7 & 70 \\ 25 & 8 & -10 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{5} & 7 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ -15 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

2. *Complete sobre la línea de puntos.*

a) El orden de A es: ....

b) El orden de B es: ....

c) El orden de C es: ....

d) El orden de D es: ....

NOTAS

Para que compare con sus respuestas, se observa que:

La dimensión u orden de la matriz A es de 3 x 2, es decir tiene tres filas y dos columnas.

La dimensión u orden de la matriz B es 3 x 3, esto indica que tiene tres filas y tres columnas.

La dimensión de la matriz C es 1 x 3, está señalando que tiene una fila y tres columnas.

La dimensión de la matriz D es de 4 x 1, es decir que presenta cuatro filas y una columna.

Observaciones.

- La matriz B presenta la particularidad de tener el mismo número de filas y columnas y por ello recibe el nombre de **matriz cuadrada**. En este caso es una matriz cuadrada de orden 3, por tener tres columnas y tres filas.

- La matriz C presenta una única fila y tres columnas y recibe el nombre de matriz fila.

- La matriz D presenta cuatro filas y una única columna y recibe el nombre de matriz columna.

PENSAR

Si una matriz presenta el mismo número de filas y columnas, es una matriz cuadrada.

Simbólicamente se indica: $A_{(m \times m)} = (a_{i,j})$

Si una matriz consta de una fila y varias columnas, es una matriz fila.

Simbólicamente se indica: $A_{(1 \times n)} = (a_{1,j})$

Si una matriz presenta una columna y varias filas, es una matriz columna.

Simbólicamente se indica: $A_{(m \times 1)} = (a_{i,1})$

ACTIVIDADES

1. Lea nuevamente los conceptos analizados hasta el momento y luego comience con esta actividad.

2. Construya la matriz A de orden 3x2 a partir de los siguientes datos:

a) 4 es el elemento de la primera fila y primera columna.
b) -1 es el elemento de la primera fila y segunda columna.
c) 0,5 es el elemento de la segunda fila y primera columna.
d) 1,4 es el elemento de la segunda fila y segunda columna.
e) -5 es el elemento de la tercera fila y primera columna.
f) 7 es el elemento de la tercera fila y segunda columna.

MATRIZ SUMA

Situación 4

Comparación de precios de algunos productos durante dos meses consecutivos.

Mes de mayo	*Supermercado A*	*Supermercado B*
Jabón X para lav. automático	$ 12,50	$ 12,50
Lavandina	$ 2, 30	$ 2, 30
Enjuague para ropa	$1,70	$1,70

Mes de junio	*Supermercado A*	*Supermercado B*
Jabón X para lav. automático	$ 12,50	$ 12,50
Lavandina	$ 2, 30	$ 2, 30
Enjuague para ropa	$1,70	$1,70

1. Resuelva las siguientes actividades:

a) Arme la matriz correspondiente al mes de mayo y al mes de junio.

b) Indique la dimensión de cada matriz

....

NOTAS

c) ¿Cómo es el orden de cada una de las matrices?

d) Si compara los elementos de las filas y columnas de la matriz de precios del mes de mayo con los elementos de la matriz de precios del mes de junio, ¿qué observa?

Estas matrices son iguales. Ahora piense detenidamente para responder la siguiente pregunta:

e) ¿Es posible decir que dos o más matrices son iguales si tienen distinto orden?

PENSAR

Dos o más matrices son iguales si tienen el mismo orden, es decir el mismo número de filas y el mismo número de columnas, y los elementos correspondientes a igual fila e igual columna son iguales.

Situación 5

1. Considere los datos del consumo de kilos de pan, carne y manteca de tres familia durante los años 1999, 2000, 2001 en un país.

Familia 1	*Pan*	*Carne*	*Manteca*
1999	*430*	*157*	*8*
2000	*390*	*162*	*6*
2001	*410*	*169*	*10*

Familia 2	*Pan*	*Carne*	*Manteca*
1999	*330*	*257*	*9*
2000	*290*	*262*	*6*
2001	*310*	*220*	*5*

Familia 3	*Pan*	*Carne*	*Manteca*
1999	*530*	*257*	*6*
2000	*490*	*262*	*7*
2001	*310*	*169*	*6*

a) Arme las matrices correspondientes a las familias 2 y 3, la de la familia 1 es la que se muestra a continuación.

$$\begin{array}{c} 1999 \\ 2000 \\ 2001 \end{array} \begin{bmatrix} 430 & 157 & 8 \\ 390 & 162 & 6 \\ 410 & 169 & 10 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

1ª familia *2ª familia* *3ª familia*

Construiremos ahora una matriz que indique el consumo total durante los tres años indicados para las tres familias. En este caso particular lo que hay que hacer es reunir los consumos de cada familia a lo largo de los tres años indicados, por lo que es necesario sumar las medidas de los consumos correspondientes y esto no es otra cosa que la suma de tres matrices en este caso.

Bueno, utilizando las matrices del consumo de cada familia comenzamos con la construcción de la matriz suma.

Identifique en la matriz de cada familia el consumo de pan durante 1999.

Entonces, el consumo total de pan de las tres familias en 1999 es: (430+ 330+530). Este consumo corresponde a la primera fila y primera columna de la matriz suma.

$$\begin{bmatrix} (430+330+530) & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{bmatrix}$$

Seguimos con el consumo de carne de las tres familias durante 1999, es decir el elemento que se ubica en la primera fila y segunda columna. Y el elemento es:

(157 + 257 + 257)

$$\begin{bmatrix} (430+330+530) & (157+257+257) & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{bmatrix}$$

Ahora indique el lugar que le corresponde en la matriz al consumo total de manteca en 1999.

$$\begin{array}{c} \\ 1999 \\ 2000 \\ 2001 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \textit{pan} & \textit{carne} & \textit{manteca} \end{array} \\ \begin{bmatrix} (430+330+530) & (157+257+257) & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{bmatrix} \end{array}$$

Ahora continúe construyendo la matriz suma y complétela en su totalidad.

NOTAS

NOTAS

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \quad\textit{pan} & \qquad\textit{carne} & \qquad\textit{manteca} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1999 \\ 2000 \\ 2001 \end{array} & \begin{bmatrix} (430+330+530) & (157+257+257) & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{bmatrix} \end{array}$$

Para que pueda comparar su respuesta, se muestra cómo resulta la matriz suma.

$$\begin{bmatrix} 430 & 157 & 8 \\ 390 & 162 & 6 \\ 310 & 169 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 330 & 257 & 9 \\ 290 & 262 & 6 \\ 310 & 220 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 530 & 257 & 6 \\ 490 & 262 & 7 \\ 310 & 169 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (430+330+530) & (157+257+257) & (8+9+6) \\ (390+290+490) & (162+262+262) & (6+6+7) \\ (310+310+310) & (169+220+169) & (10+5+6) \end{bmatrix}$$

Matriz suma

ACTIVIDADES

1. A partir de la matriz suma, escriba sobre la línea de puntos lo que se señala a continuación:

a) Indique el significado de la suma escrita que está en la segunda fila y primera columna.

....

b) Indique el significado de la suma escrita en la tercera fila y tercera columna.

....

c) Indique la ubicación de la suma (6+6+7) y su significado.

....

Quedando la matriz que muestra el consumo de pan, carne y manteca de tres familias durante los años 1999, 2000 y 2001, es decir la matriz suma, así:

$$\begin{bmatrix} 1290 & 671 & 23 \\ 1170 & 686 & 19 \\ 930 & 558 & 21 \end{bmatrix}$$

Revisando nuevamente lo hecho, responda las siguientes preguntas:

a) Indique el orden de cada una de las matrices correspondientes a cada familia.

....

b) Observe la matriz suma; indique su orden.

....

c) Si compara los órdenes de las matrices consumo de cada familia con el orden de la matriz suma, ¿que puede *decir acerca del orden?*

……

Situación 6

1. Al interpretar matricialmente una determinada información se llega a estas dos matrices que se desean sumar:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} =$$

a) Indique el orden de la primera matriz

……

b) Indique el orden de la segunda matriz

……

c) Le parece que es posible sumar estas dos matrices. Fundamente su respuesta.

……
……
……

Al determinar el orden de las matrices, usted encontró que el orden de la primera matriz es 2 x 3, ya que tiene dos filas y tres columnas; y que el orden de la segunda matriz es 5x1, ya que presenta cinco filas y una columna. Justamente por no tener ambas el mismo orden es que estas matrices no se pueden sumar.

A partir de los resultados obtenidos en las situaciones 5 y 6 se puede concluir que: se pueden sumar dos o más matrices si tienen el mismo orden.

PENSAR

Dos o más matrices se pueden sumar si el orden de las dos matrices es el mismo. Es decir que el número de filas y de columnas debe ser el mismo.

A esta altura usted se preguntará qué pasa si se pretende realizar el mismo estudio pero para una ciudad de 500 habitantes. Seguro que coincidirá conmigo en que es un trabajo muy tedioso, si hay que hacerlo a "mano" con lápiz y papel. Es más, en la práctica diaria podemos encontrarnos con matrices que tienen cientos de filas y columnas. Pero el Prof. Miguel de Guzmán, doctor en matemáticas español, decía frente a estos inmensos cálculos:

"La computadora, que es el lápiz y papel de la nueva matemática de la segunda mitad del siglo XX, puede tratar tales matrices y otros cálculos en fracciones de segundos haciendo posible en nuestro tiempo lo que era un sueño hace cincuenta años".

ACTIVIDADES

1) Construya una matriz de orden 3 x 2.

2) Construya una matriz de orden 4 x 2.

3) Responda las siguientes preguntas.

a) ¿Es posible sumar dos matrices de distinto orden?

……

b) ¿Es posible sumar dos matrices que tienen la misma cantidad de filas y distinta cantidad de columnas?

……

c) Es posible sumar dos matrices que tiene distinta cantidad de filas pero la misma cantidad de columnas?

……

4) Proponga una situación real o ficticia que le permita sumar matrices.

……

……

……

……

MULTIPLICACIÓN DE UNA MATRIZ POR UN NÚMERO REAL

Situación 7

Martín necesita comprar óleo, látex y diluyente de pintura porque quiere empezar a pintar. Para ello va a una pinturería y le entregan los siguientes precios de los artículos en diferentes tamaños:

	Chico	*Mediano*	*Grande*
Óleo	2	15	18
Látex	8	10	18
Diluyente	5	6	10

A la semana, habiendo decidido lo que quería comprar, se entera de que todos los artículos tienen un recargo de 5%, debido al aumento de los combustibles. ¿Cuál es el nuevo precio de los artículos?

Para confeccionar la nueva lista de precios, estamos de acuerdo en que a cada uno de los precios hay que aumentarles un 5%. Esto significa que al precio anterior hay que sumarle el 5% de dicho precio.

La lista de precios es posible escribirla utilizando la notación matricial.

Indique, sobre la línea de puntos, la cantidad de filas que tiene la lista de precios

....

Ahora indique, sobre la línea de puntos, la cantidad de columnas que tiene dicha lista

....

Conocido el número de filas y columnas es posible armar una matriz de orden 3 x 3, cuyas filas nos señalan el precio de cada tipo de producto y las columnas nos señalan el precio según el tamaño de cada producto.

$$\begin{bmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 8 & 10 & 18 \\ 5 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

Nota.
Recordará que: $5\% = \frac{5}{100}$
Entonces el precio final (P_f) *es la suma de:*

$$P_f = P + \frac{5}{100}P = \frac{105}{100}P = 105\%$$

Para indicar que a cada precio hay que multiplicarlo por el 105%, o directamente por la expresión decimal 1,05, se señala así:

$$1{,}05 \times \begin{bmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 8 & 10 & 18 \\ 5 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

NOTAS

NOTAS

Este tipo de notación, la multiplicación de un número real por una matriz, le indica que para calcular la matriz que corresponde a la nueva lista de precios hay que multiplicar cada elemento de la misma por 1,05.

$$1{,}05 \text{ x } \begin{bmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 8 & 10 & 18 \\ 5 & 6 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12{,}6 & 15{,}75 & 18{,}90 \\ 8{,}40 & 10{,}50 & 18{,}90 \\ 5{,}25 & 6{,}30 & 10{,}50 \end{bmatrix}$$

Y así se obtiene el precio final de cada producto según su tipo y su tamaño.

Confeccione la lista con los nuevos precios.

Es momento de detenernos y revisar lo hecho. Para resolver esta situación se determinó el producto entre un número real y una matriz.

PENSAR

Producto de una matriz por un número real

Para multiplicar un número por una matriz se multiplica por él cada elemento de la matriz. La matriz producto tiene el mismo orden que la matriz original.

ACTIVIDADES

1. La señora Martínez, durante los meses de abril, mayo y junio, registró el precio de 5 productos. Durante el mes de mayo tuvo la suerte de encontrar esos productos con un descuento del 2%, pero en junio se encontró con la sorpresa de que el precio de los productos había sido aumentado un 8% con respecto a los precios correspondientes al mes de abril.

a) Escriba en forma matricial los precios de los productos del primer mes e indique el orden de la matriz correspondiente.

b) Calcule y complete los precios del mes de mayo, utilizando notación matricial.

c) Calcule y complete los precios del mes de junio, utilizando notación matricial.

d) Complete la tabla que se muestra a continuación.

	Abril	Mayo	Junio
Detergente	$ 2		
Colonia	$ 8		
Limpiavidrios	$ 4		
Jabón para lavarropas	$ 12		
Enjuague ropa fina	$ 3		

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA

Para comenzar, es importante que recuerde que una matriz es cuadrada cuando tiene igual número de columnas que de filas. Y ese número de filas y de columnas es el orden de una matriz cuadrada.

La expresión generalizada de una matriz cuadrada de orden 2 es:

$$A_{mxm} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

a_{11} : simboliza el elemento de la primera fila primera columna.
a_{12}: simboliza el elemento de la primera fila segunda columna
a_{21}: simboliza el elemento de la segunda fila primera columna
a_{22}: simboliza el elemento de la segunda fila segunda columna

En el siguiente gráfico se muestra la diagonal principal y la diagonal secundaria de la matriz cuadrada. La diagonal principal une los elementos que tienen iguales subíndices (a_{11} y a_{22}).

$$A_{mxm} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Diagonal Secundaria

Diagonal Principal

Cada matriz cuadrada tiene asociado un número real que se llama **determinante** de la matriz.

El determinante de una matriz cuadrada es una herramienta muy útil en matemática. Usted lo utilizará en este curso, fundamentalmente, para resolver sistemas de ecuaciones que estudiará más adelante.

Pues bien, ¿qué es un determinante? Un determinante de una matriz cuadrada es un número. Este número se obtiene a partir de los elementos numéricos de la matriz.

NOTAS

NOTAS

¿Cómo se calcula ese número que tiene asociado toda matriz cuadrada, es decir el determinante de una matriz cuadrada? El determinante de una matriz cuadrada se calcula de la siguiente manera:

Al producto de los elementos de la diagonal principal se le resta el producto de los elementos de la diagonal secundaria.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \det(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Nota.
Es importante que observe la diferencia entre la notación matricial que se indica entre paréntesis y la notación referida al determinante de una matriz cuadrada que se nota entre barras.

Determinante de orden 2

Analizaremos juntos el cálculo del determinante de la siguiente matriz cuadrada A.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det(A) = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -1$$

Nota.
$4 \cdot 1$ *es el producto de los elementos de la diagonal principal.*
$2 \cdot 3$ *es el producto de la diagonal secundaria.*
det(A) $= 4 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -1$.

Ahora le proponemos encontrar el determinante de la siguiente matriz, que tiene elementos que son números reales negativos.

$$B = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Nota.
El producto de dos números reales que tienen el mismo signo es positivo. El producto de dos números reales que tienen distinto signo es negativo.

Indicamos el determinante de la matriz B.

$$\det(B) = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Dibuje la diagonal principal y calcule el producto de los elementos de la misma

....

Dibuje la diagonal secundaria y calcule el producto de los elementos de la misma

....

Finalmente, calcule el det (B) =

....

A continuación se calcula el determinante de la matriz dada para que verifique sus resultados.

det(B) = -4 . (-1) – (-3) . 2 = 10

Teniendo en cuenta los pasos realizados, calcule el determinante de C.

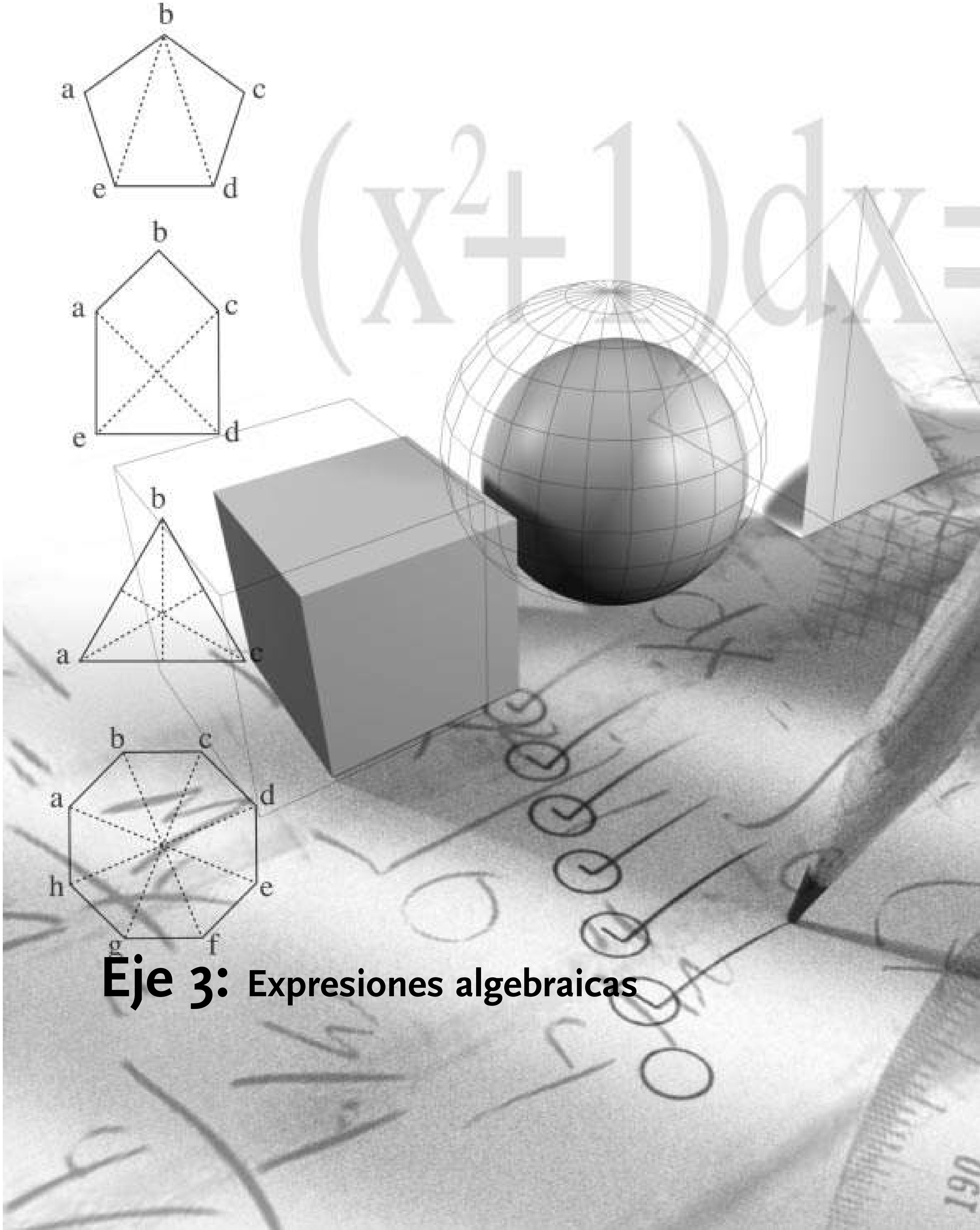
$$C = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -0,3 & -4 \end{bmatrix}$$

ACTIVIDADES

a) Realice una pequeña síntesis sobre matriz cuadrada, determinante de una matriz cuadrada y cálculo del determinante de una matriz cuadrada.

....
....
....
....
....
....

b) Escriba tres matrices cuadradas y calcule el determinante de cada una de ellas.



Eje 3: Expresiones algebraicas

HISTORIA DE LA "X"

NOTAS

Algunos historiadores de la matemática afirman que la letra **x** se usó como abreviatura de la palabra árabe shei (cosa), para nombrar las incógnitas.

Sin embargo, se considera que la notación algebraica moderna fue inventada en 1637, por el matemático francés René Descartes. En su obra se representaron las constantes con las primeras letras del alfabeto (a, b, c, ...) y las variables o incógnitas con las últimas (x, y, z).

Se cuenta que el editor que estaba imprimiendo el libro, debido a la gran cantidad de ecuaciones que tenía, le preguntó a Descartes si podía emplear esas últimas letras para las ecuaciones. Descartes le respondió que le resultaba indiferente qué letras utilizase. El editor eligió usar especialmente la x, porque en francés esa letra se utiliza poco" [1].

La matemática es una ciencia que se nutre de distintos lenguajes y formas de expresión. Veamos oraciones como las siguientes:

"El doble del precio del repuesto del auto es $30".

"Analía trabaja tres horas más de las que trabaja Patricia".

"La altura de un árbol".

"La edad de Juan es la mitad de la de Esteban",

Están escritas en un lenguaje coloquial, que es el lenguaje corriente formado por las palabras del idioma que hablamos. Otro tipo de lenguaje es el lenguaje simbólico o algebraico. Este lenguaje usa símbolos específicos de la matemática y letras que utilizamos para representar números desconocidos. Por ejemplo, las expresiones anteriores en lenguaje algebraico quedarían expresadas así:

• "$2 . x = 30$", siendo **x** la letra que representa el valor del precio del repuesto.

• "$a = 3 + p$", siendo **a** la letra que representa el número de horas de trabajo de Analía y p el de Patricia.

• "x", en la que **x** representa la altura del árbol.

• "$j = \frac{1}{2} . e$ ", siendo **j** la letra que representa la edad de Juan y e la letra que representa la edad de Esteban.

[1]. *ARAGÓN, Laurito (2004)*, ***Matemática 9. Carpeta de actividades***, *Estrada, pág.* 65.

NOTAS

En matemática, una letra representa, en general, a un número con un valor desconocido.

Estas expresiones en las que aparecen números y letras que pueden representar distintas cosas (edad, un número, altura), dependiendo de la situación planteada en un lenguaje coloquial, se llaman **expresiones algebraicas**. En ellas intervienen números y letras relacionados mediante operaciones aritméticas y generalmente surgen de la traducción de un lenguaje coloquial a un lenguaje simbólico.

RECORDAR

En las expresiones algebraicas las letras reciben el nombre de **variables** o **parte literal de la expresión** y pueden ser reemplazadas por **distintos números** y los números que acompañan a esas variables se llaman **coeficientes**.

Así, si tenemos: $3 \,.\, \underline{a} = 6$

Coeficiente ← 3 . a → Variable

Advierta que una expresión algebraica debe tener el mismo significado que la expresión coloquial.

Teniendo esta idea en cuenta, lea la siguiente situación:

Situación 1

Alicia se encuentra en un dilema. Tiene que completar una tabla con la siguiente consigna:

Sea **x** el número de horas de trabajo de una persona, se pide:

Comparar si la expresión en lenguaje coloquial tiene el mismo significado que en el lenguaje algebraico, indicando **si es correcta** o **no** cada situación.

Caso	*Lenguaje coloquial*	*Lenguaje algebraico*	Correcto	
			sí	*no*
1	*El número de horas de trabajo de una persona más dos horas*	$x + 2$		
2	*El doble del número de horas de trabajo de una persona, disminuido en tres horas.*	$2 \,.(x - 3)$		
3	*La mitad del número de horas de trabajo de una persona.*	$\frac{1}{2}\, x$		
4	*La mitad del número de horas de trabajo de una persona, disminuida en cinco.*	$\frac{1}{2} \,.\, x + 5$		

¿Cómo resultaron las expresiones algebraicas del caso 2 y el caso 4? ....

Efectivamente, estas expresiones algebraicas propuestas no son del todo correctas. Le proponemos escribirlas en forma correcta a continuación:
....

Situación 2

Una empresa de ventas por catálogo propone a sus empleados el siguiente sueldo:

"Cada empleado cobrará $400 como sueldo fijo, $3 por cada artículo que venda y $4 por cada día sábado que trabaje".

Si convenimos en llamar "**v**" al número de artículos vendidos y "**s**" al número de días sábados trabajados, le proponemos:

a) Escriba la **expresión algebraica** correspondiente que permite calcular el sueldo total (mensual) de cada empleado.

Lo ayudamos. Primero considere cómo expresaría en símbolos cuánto ganaría un empleado en concepto de artículos vendidos y señale cuál de las siguientes expresiones emplearía:

a) $v + 3$ b) $3 . v$ c) 3^v

Ahora determine cuál de las siguientes expresiones le permite calcular cuánto gana un empleado por trabajar los días sábados.

a) $4 . s$ b) $s + 4$ c) $4s$

Finalmente, con las expresiones antes señaladas y considerando que el sueldo fijo es de $400, complete la **expresión algebraica** que permite calcular el sueldo total (mensual) de cada empleado.

Sueldo =...........................

b) A partir de la expresión anterior, calcule el sueldo de los empleados que se muestran a continuación:

Empleado	*Tarea realizada*	*Sueldo* = 400 + 3 . v + 4. s
A	*Vendió 50 artículos.*	
B	*Vendió 100 artículos y trabajó dos días sábado.*	
C	*No vendió ningún artículo pero trabajó cuatro días sábado.*	
D	*Vendió 20 artículos y trabajó un día sábado.*	

NOTAS

NOTAS

c) Le preguntamos: ¿cuál empleado cobrará más dinero al finalizar este mes?

Continuamos...

Otros ejemplos de expresiones algebraicas son:

- $3x - 4$
- $2\,b + 2$
- $3\,x + 5\,x - 2b$

En la última expresión algebraica hay dos **términos semejantes, 3 x y 5 x**, pues tienen la **misma letra o parte literal**. Cuando esto ocurre la expresión algebraica puede expresarse de manera equivalente como:

- $3\,x + 5\,x - 2\,b = 8\,x - 2\,b$

(3+5 =8)

Si observa bien podrá ver que se sumaron los números a la izquierda de cada **x**, es decir que se sumaron los coeficientes de los términos semejantes.

Así, ¿cómo expresaría el siguiente caso?

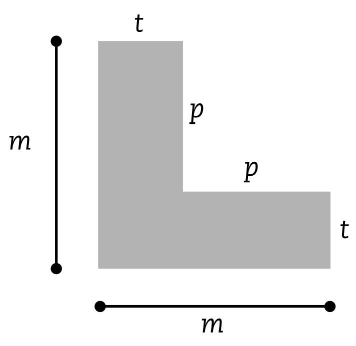
$8\,b + 5\,s - 5\,b$ = ...

Efectivamente, queda: $8\,b + 5\,s - 5\,b = 3\,b + 5\,s$

Algunas expresiones algebraicas son empleadas en el proceso de medición de cantidades de longitud (perímetros), cantidades de superficie y en fórmulas de otras disciplinas como en ciencias naturales. Para profundizar este tipo de aplicación analicemos un ejemplo:

Situación 3

"Una huerta tiene la forma que se muestra a continuación y se tiene la siguiente información sobre la misma:



Se quiere alambrar la huerta en todo su contorno (frontera). Para ello debemos averiguar el perímetro de la misma. Pero como en realidad no conocemos los valores de **m, t** o **p**, escribiremos sólo en forma simbólica la expresión que nos permitirá averiguar dicho perímetro.

NOTAS

RECORDAR

Encontrar el perímetro de una figura es calcular la suma de las medidas de la longitud de los lados del mismo.

Proponga a continuación la expresión algebraica que le permite calcular el perímetro de la figura que representa la huerta.
....

Es posible que haya escrito una expresión como la siguiente:

$P = m + m + t + p + p + t$

Busque una expresión equivalente a la dada, considerando que existen términos semejantes, de manera que resulte una forma más sencilla:
....

A continuación se muestra una alternativa para llegar a una expresión más sencilla que la anterior. Si consideramos que:

$m = 1 \,.\, m$,
$p = 1 \,.\, p$ y
$t = 1 \,.\, t$, se tiene:
$P = m + m + t + p + p + t$
$P = 1\,m + 1\,m + 1\,t + 1\,p + 1\,p + 1\,t$

conmutamos convenientemente y asociamos los términos semejantes.

$P = (1\,m + 1\,m) + (1\,t + 1\,t) + (1\,p + 1\,p)$

sumamos los coeficientes de los términos semejantes.

$P = \quad 2\,m \quad + \quad 2\,t \quad + \quad 2\,p$

Otra forma que se le puede haber ocurrido es:

$P = 2\,.(m + t + p)$

Observe que en las expresiones anteriores intervienen números y letras relacionadas mediante las operaciones aritméticas de suma y multiplicación. Luego, las expresiones halladas son expresiones algebraicas.

NOTAS

PENSAR

Para sumar o restar expresiones algebraicas hay que tener en cuenta que sólo se pueden sumar o restar términos semejantes (que tienen la misma variable o parte literal o letra), y que el resultado es otra expresión algebraica con la ***misma parte literal*** *pero que el número o coeficiente que acompaña a la letra es la suma o resta de los coeficientes, según corresponda.*

Ejemplos:

$b + b^3$ (Estos dos términos no se pueden sumar por no ser semejantes)

$x + b$ (Estos dos términos no se pueden sumar por no ser semejantes)

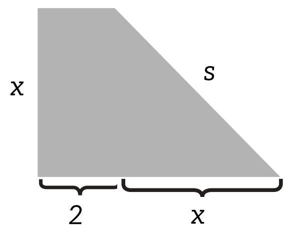
$2x + 3x - x = 4x$ (todos los términos son semejantes, luego dos más tres menos uno es cuatro)

Nota.
Conviene tener presente que el signo de multiplicación no suele ponerse entre las letras y coeficientes (o números) en una expresión algebraica: 3.x=3x

A partir de lo analizado anteriormente le proponemos la siguiente actividad:

Actividad 1:

a) Escriba la expresión que le permite hallar el perímetro de la siguiente figura, que representa un cantero:



b) ¿Cuál es el perímetro del cantero si $x=4$ y $s=5,7$?

Si escribió para el perímetro alguna expresión equivalente a esta: $P = 2.x + 4 + s$, y reemplazó las letras por los valores propuestos, seguramente obtuvo el número 17,7. A este número, que se obtiene al reemplazar la o las variables (o parte literal) de una expresión algebraica por un número dado y resolver los cálculos correspondientes, se lo llama **valor numérico de la expresión algebraica.**

Seguimos...

NOTAS

También es posible utilizar expresiones algebraicas para calcular la medida de cantidades de superficies.

Situación 4

Sea, por ejemplo, una pared de forma rectangular, ¿qué expresión utilizaría para calcular la medida de su cantidad de superficie?

....

Seguramente habrá recordado la "fórmula" que le permite calcular la medida de la cantidad de superficie de un rectángulo. Le mostramos cómo lo escribimos nosotros:

Sup. rectángulo = |b|. |h|

Siendo: |b|: medida de la cantidad de longitud de la base.

|h|: medida de la cantidad de longitud de la altura.

Actividad 2

Teniendo en cuenta la expresión que permite calcular la medida de la cantidad de superficie de una pared de forma rectangular, complete la tabla que se muestra a continuación:

Medida de la longitud de la base	*Medida de la longitud de la altura*	*Medida de la cantidad de superficie de la pared*
2	4	
3	2	
4	2	

PENSAR

*En general, si la variable o las variables que intervienen en una expresión algebraica son reemplazadas por un número, el valor que se obtiene se llama **valor numérico de la expresión algebraica**.*

Puede observarse que una misma expresión algebraica puede tener más de un valor numérico, dependiendo del valor que se le asigne a la variable.

Así por ejemplo, considerando la expresión algebraica $3x + 5$, para hallar el valor numérico cuando x toma el valor 2, se reemplaza a la x por 2 y se resuelve; el valor que se obtiene es el llamado valor numérico

NOTAS

$3 \,.\, x + 5 = 3 \,.\, 2 + 5 = 6 + 5 = 11$

Es decir que el valor numérico de la expresión algebraica para $x = 2$ es *11*.

Pero si se quiere hallar, ahora, el valor numérico de la misma expresión pero para $x = \frac{5}{6}$, se procede de manera similar y se tiene:

$$3.x+5=3.\frac{5}{6}+5=\frac{5}{2}+5=\frac{5}{2}+\frac{10}{2}=\frac{15}{2}$$

Nota.
Una manera de resolver el primer término de la expresión es: primero se resuelve el producto y luego se simplifica (dividiendo denominador y numerador por 3 en este caso).

$$3.\frac{5}{6}=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}$$

Luego, el valor numérico de la expresión algebraica, cuando $x=\frac{5}{6}$ es $\frac{15}{2}$.

Hay otras expresiones algebraicas conocidas para usted que son las **ecuaciones**. Las ecuaciones son expresiones algebraicas formadas por una igualdad donde hay una o más variables llamadas incógnitas que se simbolizan con letras. Este tema lo abordaremos más adelante con mayor detalle.

Actividad 3

Una empresa se dedica a vender vidrios y también confecciona espejos de forma cuadrangular, es decir con forma de cuadrado. El metro lineal de marco de madera cuesta $10 y el vidrio espejado cuesta $20 el metro cuadrado. La mano de obra no depende del tamaño del espejo, por ello siempre tiene un valor fijo de $15.

Se pide:

a) Escribir la expresión algebraica que permita calcular, en forma general, el costo total de un espejo

....

b) ¿Cuánto costará un espejo de forma cuadrada de 2 m de lado?

....

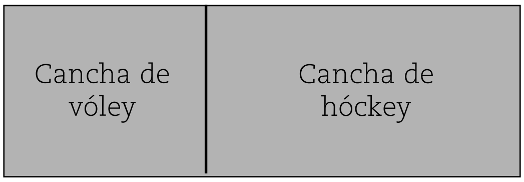
Factor común

Lea atentamente la siguiente situación para luego poder formalizar matemáticamente.

Situación 1

NOTAS

El club "Vida y Deporte" decide embaldosar la cancha de hóckey y la de vóley. Se encuentran una a continuación de la otra como se muestra en el siguiente dibujo:

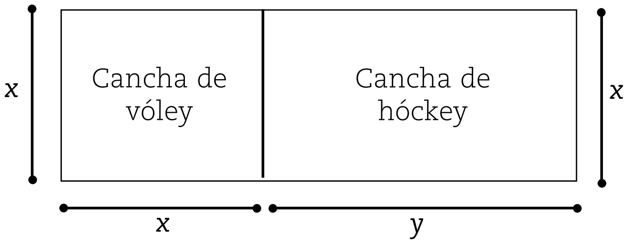


La comisión del club llama a dos personas para que realicen el presupuesto correspondiente. Éste dependerá de la cantidad de superficie a embaldosar.

Suponga que cada lado de la cancha de vóley mide **"x metros" y que el lado más largo de la cancha de hóckey mide "y metros"**.

¿Cuál es la superficie total de las dos canchas a embaldosar?

La información sobre las medidas de las canchas, que se brinda a las personas interesadas, se muestra en el siguiente gráfico:



Para encontrar la respuesta al interrogante planteado podemos seguir dos alternativas diferentes:

Alternativa 1	*Expresar algebraicamente según los datos*
Pensar en ***dos canchas por separado*** *y encontrar: 1° - la medida de la superficie de la cancha de forma cuadrada.*	....
2° - ***la medida de la superficie de la cancha de forma rectangular.***	....
3° - la ***suma*** *de ambas medidas para así obtener la medida de la cantidad de superficie total de las dos canchas.*	$x^2 + x \cdot y$

Alternativa 2	*Expresar algebraicamente según los datos*
Pensar como si fuera una única cancha (cancha unificada) y encontrar: 1° - la medida del lado más largo de la cancha unificada.	....
2° - ***la medida de la cantidad de superficie de la cancha unificada.***	$x. (x + y)$

NOTAS

Conclusión:

La medida de la superficie total de las dos canchas puede expresarse de dos maneras distintas pero que son equivalentes. Así, se puede escribir la siguiente igualdad:

$$\underbrace{x^2 + x \cdot y}_{\text{Primer miembro}} \quad = \quad \underbrace{x \cdot (x + y)}_{\text{Segundo miembro}}$$

Esta igualdad recibe el nombre de **identidad**.

Observe que si en el segundo miembro de la identidad **($x. (x + y)$)** aplica la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma obtiene la expresión correspondiente al primer miembro, lo cual confirma que se trata de una identidad (son expresiones algebraicas equivalentes).

Analizando geométricamente, en el primer miembro hay una suma de las áreas de un cuadrado de lado **x** y de un rectángulo de lado **x** y de lado **y**. En el segundo miembro tenemos que considerar las dos figuras unidas, considerando el rectángulo que se obtiene cuyos lados son: lado **x** y lado **($x + y$)**.

Si analizamos la expresión algebraicamente se dice que para obtener el segundo miembro se ha sacado factor común **x** y se lo multiplica por otra expresión algebraica que surge de dividir cada término del primer miembro por el factorcomún extraído. Observe:

La expresión inicial es:	$x^2 + x \cdot y$
Como el factor **x** *se repite en ambos términos de la expresión:*	$\underline{x}^2 + \underline{x} \cdot y$
Se ***extrae factor común a x****, multiplicando* **x** *por una expresión algebraica (entre paréntesis) que surge de dividir cada término de la expresión inicial por* **x** *(factor común):*	$x \cdot (x + y)$ $\boxed{(x.y) : x = y}$ $\boxed{x^2 : x = x}$
Para verificar que al sacar factor común no se ha cometido ningún error se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma o resta (según corresponda) y se debe obtener la expresión inicial:	$x \cdot (x + y) = x \cdot x + x \cdot y$ $= x^2 + x \cdot y$

Observe que el procedimiento de **extraer o sacar factor común** es un procedimiento **inverso** al de aplicar la propiedad **distributiva** de la multiplicación respecto de la adición.

A continuación le presentamos algunas situaciones en las que trabajará con la extracción de un factor común:

Actividad 1

Juan está trabajando en una expresión bastante complicada. Su amigo, Esteban, lo ayuda dándole las siguientes indicaciones.

Complete la tabla, suponiendo que usted es Juan:

Indicaciones de Esteban	*Tarea que realiza Juan*
"Escribe la expresión inicial":	$\frac{2}{5}x + 3x + x$
"Señala en la expresión el factor que se repite en todos los términos":	$\frac{2}{5}x + 3x + x$
*Extrae el factor común (x) encontrado y multiplica a dicho factor por la expresión que resulta de dividir cada término de la expresión inicial por **x**. Nota que el último término de la expresión tiene coeficiente 1, porque x = 1x".*	....
"Con la expresión que obtuviste en el paso anterior completa la siguiente identidad":	$\frac{2}{5}x + 3x + x=$..................
"Realiza la verificación correspondiente, aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma o resta".	$x \cdot \left(\frac{2}{5}+3+1\right)=$.................

En conclusión, si realiza la extracción del factor común directamente, sin detalles, se tiene:

$$\frac{2}{5}x + 3x + x = \underbrace{x}_{1^\circ \text{ factor}} \cdot \overbrace{\left(\frac{2}{5}+3+1\right)}^{2^\circ \text{ factor}}$$

Nota.
Recuerde que cuando un término de la expresión algebraica coincide en su totalidad con el factor común, entonces al extraerlo se coloca 1 en el término correspondiente al segundo factor.

Habrá observado que en este caso el **factor común** está dado sólo por la parte literal (letra) de la expresión dada.

Actividad 2

Nuevamente Esteban le ayuda a Juan en otras situaciones.

a) Complete según corresponda:

Indicaciones de Esteban	*Tarea que realiza Juan*
"Escribe la expresión inicial:"	15 x + 9 y + 3 *a*
"¿Hay alguna letra que se repita?"	*Juan responde:* ....
"Como no hay ninguna letra que se repita en los términos, el factor común puede estar en la parte numérica, es decir en los coeficientes. Factoriza cada coeficiente de la expresión"	15 x + 9 y + 3 *a* = = 3 . 5 . x + ...

NOTAS

NOTAS

"¿Hay algún factor numérico que se repita en todos los términos de la expresión?"	*"Sí, es el número ...."*
"Bien, entonces extrae el factor común 3 y multiplica dicho factor por la expresión que resulta de dividir cada término de la expresión inicial por 3:"	3 . (..................................)
"Puedes escribir directamente como queda:"	$15\ x + 9\ y + 3\ a = 3\ .\ (5\ x + 3y + 1a)$
"Realiza la verificación correspondiente, aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma o resta:"	$3\ .\ (5\ x + 3y + 1a) =$ ...."
"¿Llegaste a la expresión inicial?"	....

En conclusión, si realiza directamente la extracción del factor común, sin detalles, se tiene:

$$15\ x + 9\ y + 3a = 3\ .\ (5\ x + 3y + 1a)$$

Habrá observado que en este caso el **factor común** está dado sólo por la parte numérica (o **coeficientes**) de la expresión dada.

b) Complete según corresponda:

Indicaciones de Esteban	*Tarea que realiza Juan*
"Escribe la expresión inicial:"	$8\ x^2 - 20\ xy + 4\ x$
"Observa: ¿hay alguna letra que se repita?"	*La letra que se repite es:* ....
"Analiza qué ocurre en la parte numérica. Para ello factoriza cada número:"	8 x 2 - 20 xy + 4 x $2\ .\ 2\ .\ 2\ x^2$ - ....xy + ... x
"¿Hay algún factor numérico que se repita?":	*Sí, es el número..........*
"Como el factor común es **2.2 = 4** *y en la parte literal es x, entonces extrae el factor común* **4.x** *y multiplica dicho factor por la expresión que resulta de dividir cada término de la expresión inicial por* **x** *y por* **4***":*	4x (..... - ...... + 1) *note que cuando todo el término coincide con el factor común se coloca 1.*
"Puedes expresar directamente":	$8\ x^2 - 20\ xy + 4\ x =$ ....
"Realiza la verificación correspondiente, aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma o resta y debes llegar a la expresión inicial":	$4x\ (\ 2x\ -\ 5y\ +1\ ) =$ ....

En conclusión, si realiza directamente la extracción del factor común, sin detalles, se tiene:

$$8\ x^2 - 20\ xy + 4\ x = 4x\ (\ 2x\ -\ 5y\ +\ 1\ )$$

Observe que en este caso el factor común tiene una parte numérica y una parte literal (letra o letras).

ACTIVIDADES

1- *¿Cómo extrae factor común en la siguiente expresión? Explique cada paso que realiza:*

$$\frac{1}{2}yx^2 - \frac{1}{4}xy + \frac{1}{6}x^2$$

2- *Extrae factor común en cada caso.*

a) 2x – 10 y	
b) 14 x + 7 x	
c) $\frac{1}{6}yx^2 - \frac{2}{3}xy + \frac{7}{9}x^2$	
d) 5 x^2 - 20 x -35 x	
e) 12 x + 6 y – 12 z	
f) $\frac{2}{3}x + \frac{1}{5}x$	

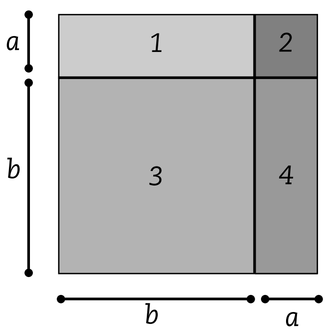
CUADRADO DE UN BINOMIO

Para abordar este tema del álgebra lo invitamos a analizar la siguiente situación:

Juan compra un terreno con forma de cuadrado para la instalación de una cancha de papi-fútbol para alquilar. Le encarga al arquitecto que quiere distribuir el terreno en cuatro partes: una parte será el jardín de recepción, otra será destinada para vestuarios, otra para playa de estacionamiento y otra para la cancha de papi-fútbol.

El arquitecto realiza un pequeño esquema y se lo muestra a Juan para conocer su opinión y así iniciar la elaboración de planos y demás trámites.

El arquitecto le dice: "como desconocía las dimensiones exactas del terreno lo separé en cuatro sectores":



• El sector 1: tiene forma de rectángulo y sus dimensiones son **b** metros de base (largo) y **a** (ancho) de altura y se destinaría para el jardín de recepción

• El sector 2: tiene forma de cuadrado de lado **a** metros y se

NOTAS

destinaría a la playa de estacionamiento para clientes.

• El sector 3: tiene forma de cuadrado de lado **b** metros y se destinaría a la cancha propiamente dicha.

• El sector 4: tiene forma de rectángulo y sus dimensiones son **a** metros de base (largo) y **b** metros de altura (ancho) y se destinaría para la construcción de vestuarios.

¿Qué le parece esta distribución, don Juan?".

Con la información dada por el esquema y por el relato del arquitecto: ¿cómo calcularía la cantidad de superficie de todo el terreno?

Hay dos opciones para resolver este problema:

Opción 1	*Opción 1*
Pensar en un único terreno sin separación por sectores y encontrar: *1° - la medida de cada lado del terreno. de forma cuadrada.* *2° - la medida de la superficie del terreno.*	*Pensar en cuatro sectores o partes del terreno y encontrar:* *1° - la medida de la cantidad de superficie del sector 1.* *2° - la medida de la cantidad de superficie del sector 2.* *3° - la medida de la cantidad de superficie del sector 3.* *4° - la medida de la cantidad de superficie del sector 4.* *3° - la suma de todas las medidas de los sectores para así obtener la medida de la cantidad de superficie total del terreno.*
Desarrollo de la opción 1	*Desarrollo de la opción 2*
1° - la medida de cada lado del terreno de forma cuadrada es: *(a + b)* *2° - la medida de la cantidad de superficie del terreno es:* $\lvert l\rvert \cdot \lvert l\rvert = (a+b)\cdot(a+b) = (a+b)^2$	*1° - para encontrar la medida de la cantidad de superficie del sector 1, se piensa en que éste tiene forma de rectángulo. La medida de la base es b y la medida de la altura es a. Por lo tanto:* $\lvert b\rvert \cdot \lvert h\rvert = b \cdot a$ *2° - la medida de la cantidad de superficie del sector 2 con forma de cuadrado, cuyo lado mide a, se obtiene de la siguiente manera:* $\lvert l\rvert \cdot \lvert l\rvert = a \cdot a = a^2$ *3° - la medida de la cantidad de superficie del sector 3 con forma cuadrada, cuyo lado mide b, se obtiene de la siguiente manera:* $\lvert l\rvert \cdot \lvert l\rvert = b \cdot b = b^2$ *4° - la medida de la cantidad de superficie del sector 4, que tiene forma rectangular y sabiendo que la medida de la base es a y la medida de la altura es b. Por lo tanto:* $\lvert b\rvert \cdot \lvert h\rvert = a \cdot b$ *5° - La medida de la cantidad de superficie total es igual a la suma de las medidas de la cantidad de superficie de cada uno de los sectores, por lo que se tiene la siguiente expresión:* $b \cdot a + a^2 + b^2 + a \cdot b$

Luego, las dos expresiones obtenidas permiten calcular la medida de la cantidad de superficie del terreno, por lo que son equivalentes, y puede expresarse la siguiente igualdad:

$$(a+b)^2 = b \cdot a + a^2 + b^2 + a \cdot b$$

Si observa detenidamente la expresión anterior se tiene:

• El primer término formado por una suma de dos expresiones algebraicas, a y b, elevada al cuadrado. Por ello recibe el nombre de cuadrado de una suma o bien cuadrado de un binomio. Observe que a la suma de a y b se la llama binomio (expresión algebraica de dos términos).

• El segundo miembro de la igualdad podrá notar que está formado por cuatro términos, dos términos con exponente dos, y el primer término y el último son iguales. Considerando la propiedad conmutativa de la multiplicación se tiene que $b \cdot a = a \cdot b$ por lo que en la expresión hay dos términos iguales.

La expresión anterior puede escribirse de la siguiente forma:
$(a+b)^2 = a \cdot b + a^2 + b^2 + a \cdot b$ (se reemplaza $b \cdot a$ por $a \cdot b$)

y considerando que $a \cdot b + a \cdot b = 2 \cdot a \cdot b$, se tiene:
$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$

Esta igualdad algebraica (identidad) recibe el nombre de **cuadrado de un binomio**.

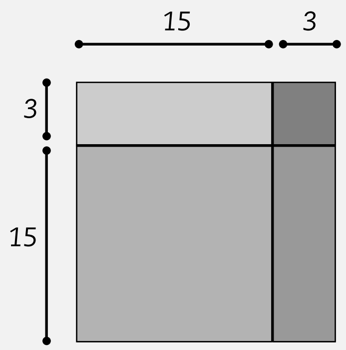
La expresión $(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$ se lee: el cuadrado de un binomio (expresión algebraica formada por dos términos) o simplemente el cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primer término (a^2) más el doble producto del primer término por el segundo ($2 \cdot a \cdot b$) más el cuadrado del segundo (b^2).

Esta expresión es utilizada para resolver situaciones como las que se presentan a continuación.

NOTAS

ACTIVIDADES

1. Encontrar, de dos formas distintas, la medida de la cantidad de superficie de la siguiente figura:



2. Resolver los siguientes cuadrados de una suma aplicando la expresión $(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$

a) $(x+2)^2=$

b) $(3+x)^2=$

c) $(4+a)^2=$

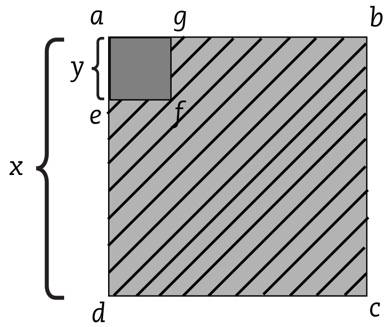
NOTAS

Diferencia de cuadrados

Lea atentamente la siguiente situación para luego formalizarla matemáticamente.

Situación 1

Un docente les da a sus alumnos la siguiente representación gráfica, formada por dos cuadrados superpuestos, uno el cuadrado abcd y el otro el cuadrado agfe:



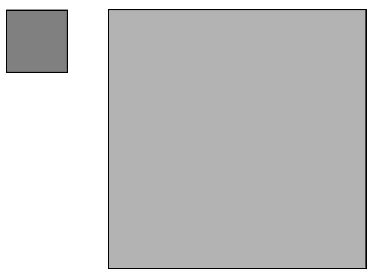
Recuerde.
cuadrado cuadrilátero con lados y ángulos congruentes (de igual medida).

La información dada es que la medida de la cantidad de longitud del lado ae (del cuadrado agfe) es **"y"** y la medida de la cantidad de longitud del lado ad (del cuadrado abcd) es **"x"**. Ambos datos están señalados en la representación gráfica anterior. Y el docente les dice: "Encuentren la medida de la cantidad de superficie de la **"parte rayada"** del cuadrado abcd de **dos formas distintas**".

Inmediatamente a Juan, que es uno de sus alumnos, se le ocurrieron las siguientes dos alternativas. Analice cada una de ellas y complete las líneas de puntos según lo indicado en cada caso:

Alternativa 1

Juan dice: "Imagino dos cuadrados y encuentro la medida de la cantidad de superficie de cada uno de ellos"



La medida de la cantidad de superficie de un cuadrado se encuentra empleando la siguiente expresión o fórmula: $|l|^2$, la que se lee: el cuadrado de la medida de la cantidad de longitud del lado.

NOTAS

• ¿Cuál es la medida del lado del cuadrado abcd?
....

Entonces la medida de la cantidad de superficie del cuadrado abcd es:

$|l|^2$ =.........

• ¿Cuál es la medida del lado del cuadrado agfe?
....

Entonces la medida de la cantidad de superficie del cuadrado agfe es:

$|l|^2$ = ...

Luego, considerando la medida de la superficie del cuadrado abcd **(x^2)** y la medida de la superficie del cuadrado agfe **(y^2)**, la medida de la cantidad de superficie de la parte rayada se obtiene restando las medidas anteriores.

La medida de la parte rayada de la figura es:
....

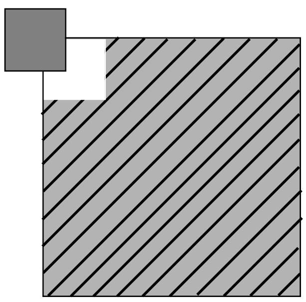
Juan dice: "De esta manera llegué a la siguiente expresión algebraica final:

x^2-y^2

Alternativa 2

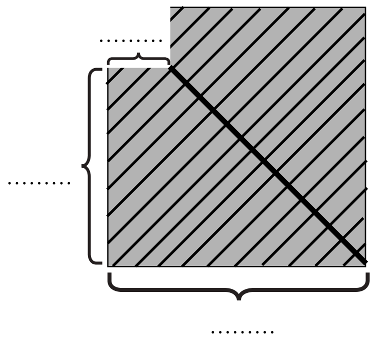
Juan procedió de la siguiente manera:

Imagine que recorta el cuadrado agfe y así le quedan dos figuras similares a las siguientes:



En la figura rayada se traza una diagonal como se muestra a continuación:

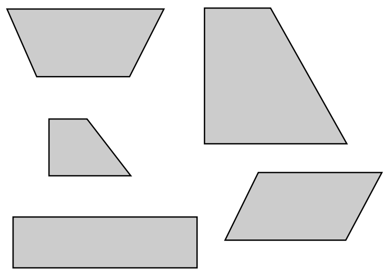
NOTAS



Ubique en la figura la medida de cada uno de sus lados expresados en términos de x e y según corresponda.

Imagine que recorta la figura por la diagonal trazada ¿Cuántas figuras se obtienen? ....

Recuerde.
trapecio es un cuadrilátero con al menos dos lados paralelos.



Observe que todas las figuras poseen un par de lados paralelos o más.

Suponga que toma una de ellas y la superpone con la otra, ¿hay alguna posibilidad de que coincidan? ....

¿Cómo son dichas figuras si al superponerlas coinciden?..................

¿Qué forma tiene cada una de las figuras obtenidas?..................

Como las dos figuras obtenidas con forma de trapecio son congruentes, sus medidas son iguales. Por lo tanto la medida de la cantidad de superficie de la figura "rayada" es igual al doble de la medida de la superficie de uno de los trapecios.

Y como la medida de la cantidad de superficie de un trapecio se obtiene con la siguiente expresión:

$\frac{(|B|+|b|)\cdot|h|}{2}$ (recuerde que esta expresión se lee: la suma de la medida de la base más larga y la medida de la base menos larga, por la medida de la altura del trapecio dividido dos).

El doble de esta medida es: $2\cdot\frac{(|B|+|b|)\cdot|h|}{2}$, y si simplifica convenientemente se tiene:

$(|B|+|b|)\cdot|h|$, que es la expresión que permite calcular la medida de la superficie solicitada en la situación.

Según la representación gráfica en términos de **x** e **y**:

|B| = ...
|b| = ...
|h| = (y –x)

Si reemplaza dichas expresiones se tiene:

$(|B|+|b|)\cdot|h|$ = ...

Juan dice: "De esta manera llegué a la siguiente expresión algebraica final":

$(x + y) \, . \, (x - y)$

Usted, ¿cuál de las dos alternativas propuestas por Juan hubiera seguido? ¿Por qué?
....

Estas expresiones-, $x^2 - y^2$ y $(x + y) \, . \, (x - y)$, son equivalentes porque ambas permiten encontrar la medida de la superficie de una misma figura. Por ello constituyen una identidad que recibe un nombre muy particular: **diferencia de cuadrados**:

$x^2 - y^2 = (x + y) \, . \, (x - y)$

Esta expresión algebraica se lee: la diferencia de dos cuadrados x^2 e y^2 es igual al producto de la suma por la diferencia de **x** e **y**.

Si se conociera los valores numéricos de x e y podría encontrar el valor numérico de cada una de ellas. Suponga **x = 5**, e **y = 2**.

El valor numérico de $x^2 - y^2$ es: ....

El valor numérico de $(x + y) \, . \, (x - y)$ es: ....

¿Cómo resultan dichos valores numéricos? ....

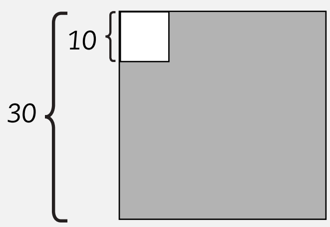
Por ello se trata de una identidad, de una igualdad de dos expresiones algebraicas.

La identidad obtenida es utilizada para resolver situaciones como las que se presentan a continuación:

NOTAS

ACTIVIDADES

1. Encontrar de dos formas distintas la medida de la cantidad de superficie de la parte sombreada de la siguiente figura.

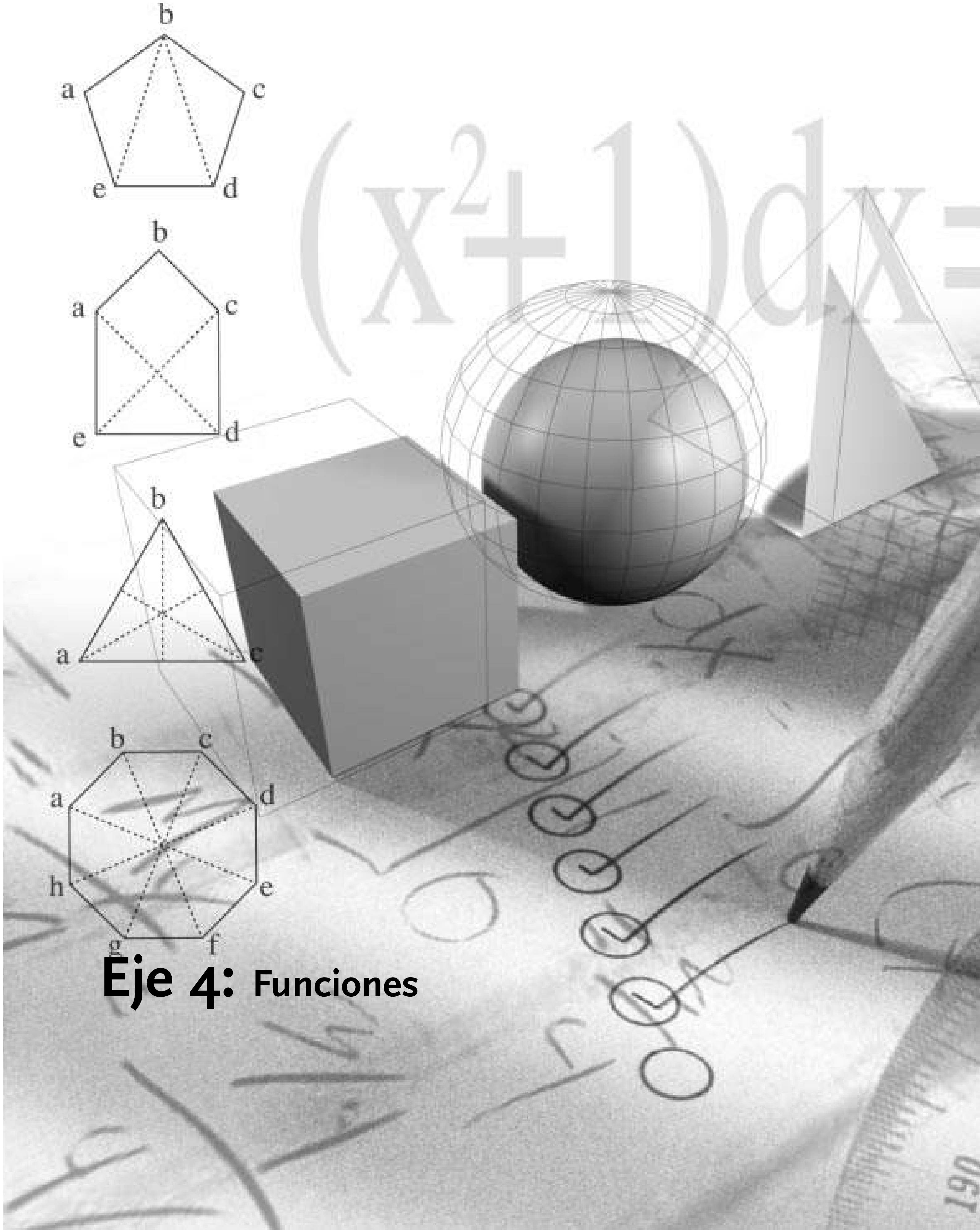


2. Resolver las siguientes diferencias de cuadrados aplicando la expresión: $a^2-b^2=(a-b).(a+b)$

a) $x^2-3^2=$

b) $5^2-2^2=$

c) $a^2-4^2=$



Eje 4: Funciones

FUNCIONES. DOMINIO. IMAGEN

NOTAS

CRECIMIENTO. DECRECIMIENTO. INCREMENTOS. MÁXIMOS. MÍNIMOS.

Es muy común analizar la relación que existe entre la distancia recorrida por un vehículo y el tiempo de marcha, la temperatura corporal y el número de pulsaciones por minuto de un niño enfermo, la producción (en litros) de vino y la cosecha (en toneladas) de uva, por nombrar sólo algunas.

Estos ejemplos pueden estudiarse matemáticamente como funciones. Éstas son herramientas poderosas que nos sirven para estudiar y modelizar distintos fenómenos (de la naturaleza, sociales, económicos), es decir interpretarlos matemáticamente en forma algebraica y/o gráfica y que nos permiten sacar conclusiones y en algunos casos realizar predicciones.

Así, en las situaciones antes mencionadas podemos establecer una relación entre dos variables consideradas: una de estas variables recibe el nombre de variable **dependiente** (distancia recorrida por un vehículo, la temperatura corporal, la producción de vino expresada en litros) y la otra es la variable **independiente** (tiempo de marcha, pulsaciones por minuto, cosecha de uva expresada en toneladas). Podemos decir, por ejemplo, que la distancia recorrida por el vehículo depende del tiempo de marcha.

Generalmente a la variable independiente se la simboliza con la letra "**x**" y a la variable dependiente con la letra "**y**". Si la relación que existe entre las variables **x** e y es tal que para cada valor de **x** existe uno y sólo un valor de **y**, que le corresponde en dicha relación, entonces la relación recibe el nombre especial de **función**.

RECORDAR

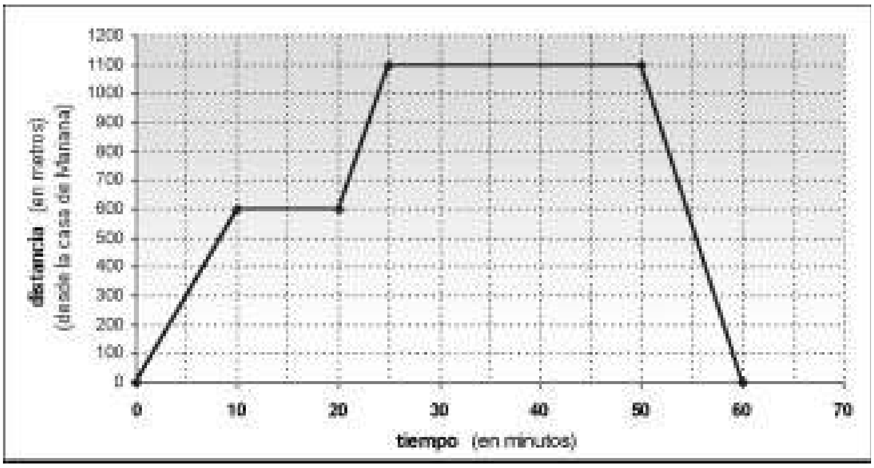
La relación en la que a **cada** valor de una variable independiente le corresponde **un único** valor de la variable dependiente llamada imagen es una **función**.

Analice la siguiente situación y podrá realizar algunas observaciones.

Situación 1

Una mañana Mariana fue a la casa de su madre. En el camino se detuvo en la panadería, en la que se encontró con una amiga. Luego se dirigió sin parar hasta lo de su madre. El gráfico muestra la distancia a la que se encontraba Mariana desde que salió de su casa, en función del tiempo.

NOTAS



Actividad 1

Le proponemos responder las siguientes preguntas, según lo que muestra el gráfico:

a) ¿Qué variable se representó en el eje horizontal? ¿Y en el vertical?

....

b) ¿Cuánto tiempo tardó Mariana en llegar a la casa de su madre?

....

c) ¿A cuántos metros de la casa de Mariana se encuentra la panadería?

....

d) ¿Cuánto tiempo se quedó en la casa de su madre?

....

e) ¿Cuánto tiempo empleó para regresar desde la casa de su madre?

....

RECORDAR

En los gráficos se representan en el eje de las abscisas (x) los valores asignados a la variable independiente y en el eje de las ordenadas (y) los valores asignados a la variable dependiente.

Puede decirse que a cada medida de la cantidad de tiempo(x) transcurrido desde el inicio del recorrido le corresponde un único número, que indica la distancia recorrida (y) hasta ese momento desde el punto de partida. Es por ello que la relación representada es una **función**.

NOTAS

PENSAR

*A una relación la llamamos función cuando a cada valor de la variable independiente (valor de **x**) le corresponde un único valor de la variable dependiente (valor de **y**). En este caso se dice que **"y es función de x"** , y se simboliza **y = f (x)**, siendo f el nombre de la función.*

Las funciones se simbolizan con una letra imprenta minúscula, como por ejemplo: f, g, h.

Veamos lo que podemos interpretar en la **situación 1**:

•Desde que Mariana salió de su casa hasta que regresó transcurrieron 60 minutos (una hora).

• Tardó diez minutos en llegar a la panadería, en la que permaneció diez minutos.

• La casa de la madre se encuentra a 1100 metros de la casa de Mariana, a la que llegó luego de 25 minutos de haber salido de su casa.

• Demoró diez minutos en regresar.

• El tiempo **varía** entre 0 y 60 minutos. A su vez, el tiempo puede tomar valores reales intermedios. Luego, podemos decir que el **dominio** de la función está dado por el intervalo real cerrado [0,60].

• De la misma manera, como la distancia **varía** entre 0 y 1100 metros (con sus valores reales intermedios), podemos decir que la **imagen** de la función está dada por el intervalo real cerrado [0,1100].

PENSAR

*El **dominio** de la función es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente **x**. Se simboliza: **D(f)** y se lee dominio de la función f.*

*La **imagen** de la función es el correspondiente conjunto de valores que toma la variable dependiente **y**. Se simboliza : **Im(f)** y se lee imagen de la función f.*

*Llamamos **codominio** al conjunto de todos los valores que puede tomar la variable dependiente de una función. En todos los casos consideraremos que el codominio es el conjunto **IR** de los números reales.*

NOTAS

Actividad 2

Complete.

a) El dominio de la función representada en la situación 1 es: D (f) = ...

b) La imagen de la función representada en la situación 1 es: Im (f) = ...

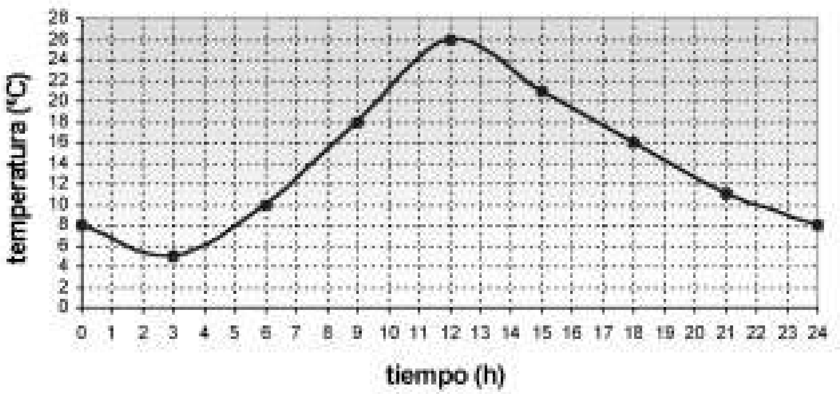
RECORDAR

Algunas funciones no pueden definirse mediante fórmulas. Hay algunas que sólo se definen mediante tabla de datos o mediante su representación gráfica.

A continuación veremos otras representaciones gráficas, en las que se relacionan dos variables numéricas, así como también algunas interpretaciones.

Situación 2

Se muestra la variación de la temperatura exterior de una



casa a medida que transcurre el tiempo.

Nota.
Siempre observe la gráfica de izquierda a derecha.

Actividad 1

Responda:

a) ¿Cuál es la medida de la temperatura máxima y a qué hora se registró?

....

NOTAS

b) ¿Y cuál es la medida de la temperatura mínima?

....

c) ¿Durante cuánto tiempo se hicieron los registros?

....

Luego, podemos decir:

• La **máxima** temperatura está dada por 26° C a la hora 12, es decir que la mayor de las medidas de temperatura es 26.

• La temperatura **mínima** es 5° C registrada en la hora 3, es decir que la menor de las medidas de temperatura es 5.

• Como la temperatura varía entre 5° C y 26° C, y a su vez, puede tomar valores reales intermedios, podemos decir que la **imagen** de la función está dada por el intervalo real cerrado **[5,26]**.

• De la misma manera, como el tiempo varía entre 0 h y 24 h (con sus valores reales intermedios), podemos decir que el **dominio** de la función está dado por el intervalo real cerrado **[0,24]**.

• La función es **creciente**:

• de 3h a 12h, puesto que al aumentar el tiempo también aumenta la temperatura (en el gráfico la curva que representa este aumento de temperatura es ascendente, siempre observándola de izquierda a derecha, es decir que la curva "sube") desde 5° C hasta los 26° C.

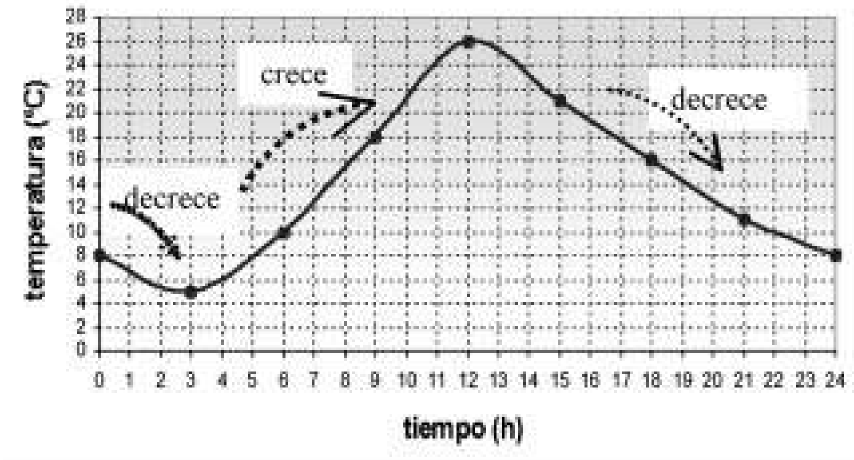
En este caso el **incremento** (o variación) de la función es de **21° C.**

• La función es decreciente:

• de 0h a 3h, puesto que a medida que aumenta el tiempo la temperatura disminuye (en el gráfico, observándolo de izquierda a derecha, la curva que representa esta disminución de temperatura es descendente, es decir la curva "baja") desde 8° C a 5° C. Por lo tanto el **incremento** (o variación) de la función es de **–3° C**. Note que el incremento, en este caso, es negativo para indicar que la temperatura bajó durante ese período de tiempo.

• de 12h a 24h, puesto que a medida que aumenta el tiempo la temperatura disminuye (en el gráfico, observándolo de izquierda a derecha, la curva que representa esta disminución de temperatura es descendente, es decir la curva "baja") desde 26° C a 8° C. Por lo tanto el **incremento** (o variación) de la función es

NOTAS



de **–18° C**. Note que el incremento es negativo para indicar que la temperatura bajó durante ese período de tiempo.

Nota.
La ubicación de un punto en el plano queda determinada por sus coordenadas (x, y), siendo x e y números reales tales que el primer número indica la posición de la dirección horizontal y el segundo la posición de la dirección vertical. Al primer número se lo llama ***abscisa*** *y al segundo número se lo llama* ***ordenada****.*

Actividad 2

Responda observando la gráfica correspondiente a la **situación 2**:

a) ¿En qué punto la función crece hasta alcanzarlo y luego decrece? (observe la gráfica siempre de izquierda a derecha).

Dar las coordenadas de dicho punto ....

En dicho punto, la función tiene un **máximo local**, que es el punto donde la función toma un valor máximo, un valor que resulta ser mayor que cualquier otro valor que tomen los puntos de la función que le rodean. Así, el punto (12, 26) es un máximo o también se dice que en x = 12 la función alcanza un valor máximo: f(12)=26. Éste indica la mayor de las medidas de temperatura registradas en el exterior de la casa: 26.

b) ¿Cuál es el punto en el que la función toma un valor que resulta ser **menor** que cualquier otro valor que tomen los puntos de la función que le rodean? Dar las coordenadas de dicho punto ....

En dicho punto, la función tiene un **mínimo local**, que es el punto donde la función toma un valor mínimo, un valor que resulta ser menor que cualquier otro valor que tomen los puntos de la función que le rodean. Así, el punto (3, 5) es un mínimo o también se dice que en x = 3 la función alcanza un valor mínimo:

NOTAS

PENSAR

f(3)=5. Éste indica la menor de las medidas de temperatura registradas en el exterior de la casa: 5.

Para analizar las variaciones de una función, la gráfica de la misma debe ser observada siempre de ***izquierda a derecha****.*

Una función es ***creciente*** *si al aumentar los valores que toma la variable independiente "x" aumenta los valores que toma la variable dependiente"y". Y una función es* ***decreciente*** *cuando al aumentar los valores que toma la variable independiente disminuyen los valores que toma la variable dependiente.*

Intervalo de ***crecimiento****: es el subconjunto del dominio de la función f, para el cual la función es creciente.*

Lo simbolizamos: ***Ic****.*

Intervalo de ***decrecimiento****: es el subconjunto del dominio de la función f, para el cual la función es decreciente. Lo simbolizamos: Id.*

Un punto es un ***máximo*** *de la función si el valor de la función en dicho punto es mayor que cualquier otro valor que la función tome en otros puntos. Además, la función crece hasta alcanzar el punto máximo y decrece después de haberlo alcanzado.*

Un punto es un ***mínimo*** *de la función si el valor de la función en dicho punto es menor que cualquier otro valor que la función tome en otros puntos. Además, la función decrece hasta alcanzar el punto mínimo y crece después de haberlo alcanzado.*

Así entonces, teniendo en cuenta el gráfico anterior (de las temperaturas),:

El Intervalo de **crecimiento** de la función es: **Ic** = (3, 12)

El Intervalo de **decrecimiento** de la función es: **Id** = (0, 3) $\cup$ (12, 24)

Nota.
El símbolo $\cup$, se lee ***unión****.*

Atención: tenga en cuenta que los intervalos de crecimiento o decrecimiento son **intervalos abiertos** y por ser subconjuntos del dominio están dados para valores de x.

Actividad 3

1) Teniendo en cuenta el gráfico de la **situación 1** (de Mariana), conteste:

NOTAS

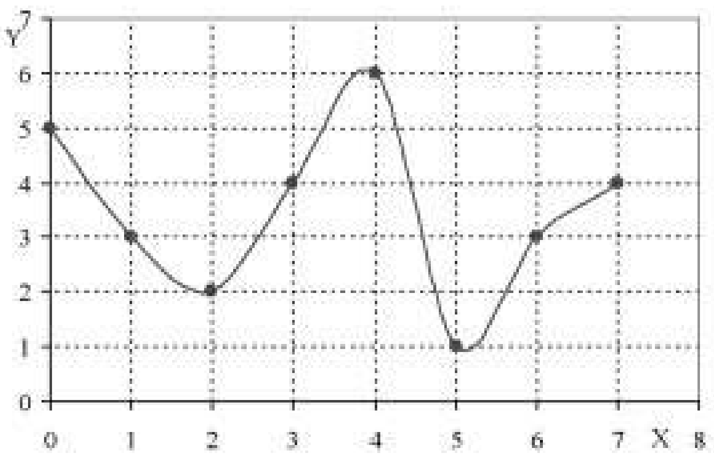
a) ¿Cuál es el Intervalo de **crecimiento** de la función?
Ic = ...

b) El **incremento** en el intervalo anterior es:
....

c) ¿Cuál es el Intervalo de **decrecimiento** de la función?
Id = ...

d) El **incremento** en el intervalo anterior es:
....

e) ¿En qué intervalo la función es **constante**, es decir que el incremento en dicho intervalo es cero (en el gráfico se observa un segmento de recta que tiene una dirección paralela al eje horizontal o de abscisas), es decir que el segmento de recta "no sube ni baja")?
....



2) Analice el siguiente gráfico correspondiente a una función y conteste:

a) ¿Cuáles son las coordenadas del **máximo** de la función?
....

b) ¿Cuáles son las coordenadas del **mínimo** de la función?
....

c) ¿Cuál es el Intervalo de **crecimiento** de la función?
Ic = ...

d) ¿Cuál es el **incremento** en el intervalo (2, 4)?
....

e) ¿Cuál es el **incremento** en el intervalo (5, 7)?
....

NOTAS

f) ¿Cuál es el intervalo de **decrecimiento** de la función?
Id = ...

g) ¿Cuál es el **incremento** en el intervalo (0, 2)?
....

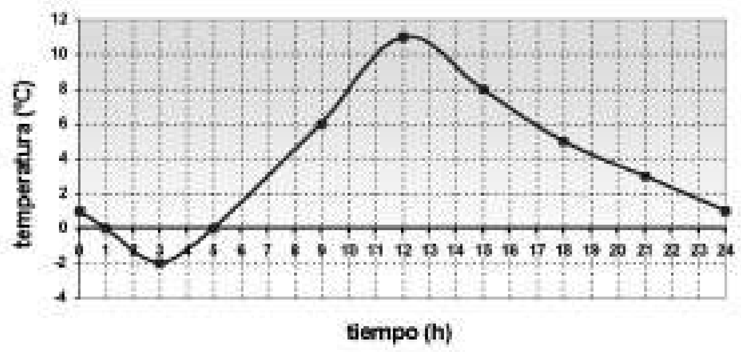
h) ¿Cuál es el **incremento** en el intervalo (4, 5)?
....

Actividad 4

En un intervalo de crecimiento de la función, el **incremento** es ¿positivo o negativo?
....

En un intervalo de decrecimiento de la función, el **incremento** es ¿positivo o negativo?
....

Actividad 5



Veamos ahora la variación de la temperatura exterior de otra casa a medida que transcurre el tiempo.

Vemos que a la hora 1 la temperatura es de 0º C. En símbolos, si **x = 1 y f(1)=0**, entonces decimos que **x = 1** es un **cero** o **raíz** de la función porque la imagen de dicho valor de **x** es cero.

Responda: ¿qué puede decir de la **hora 5**? Elabore una conclusión
....
....

Actividad 6

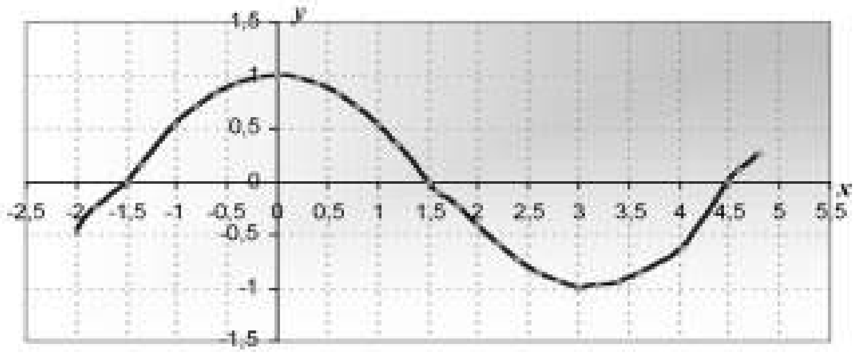
Dada la siguiente gráfica, que representa a una función f, cuyo dominio es el conjunto de números reales:

Observe la siguiente notación en símbolos:

NOTAS

f: IR ➛ IR

Significa que la función f tiene como dominio y codominio al conjunto de números reales.



a) Marque con un color los puntos de intersección de la gráfica de la función con el eje de las abscisas, es decir aquellos puntos que tienen contacto con el eje de las abscisas o eje de las x, puntos donde la gráfica "corta" al eje de las x.

b) Indique las coordenadas **(x, y)** de dichos puntos:
....

c) Luego, ¿para qué valores de **x** la gráfica "corta" o "toca" al eje de las abscisas?
x1= .... **x2**= .... **x3**= ....

d) ¿Cuántos ceros (o raíces) presenta esta función?
....

e) Marcar con un color el punto en el que se encuentra un **mínimo local** de la función. Escribir las coordenadas de dicho punto
....

f) ¿Cuáles son las coordenadas de un **máximo local** de la función?
....

g) Señale con un color el punto en el que se encuentra un máximo local de la función.

h) Compare sus respuestas con lo siguiente:

• Presenta un **máximo local** en el punto de coordenadas (0, 1).

• Presenta un mínimo en el **x = 3**. El valor del **mínimo local** es f(3) = **-1**.

• El punto de coordenadas (3, -1) es un **mínimo local** de la función.

• La gráfica intersecta al eje horizontal en **x1 = -1,5**, **x2 = 1,5** y en **x3 = 4,5**. Por ello, se tiene:

f (-1,5) = 0
f (1,5) = 0
f (4,5) = 0

Decimos entonces **que la función tiene tres ceros** o **raíces**: para x1 = -1,5 , x2 = 1,5 y x3 = 4,5

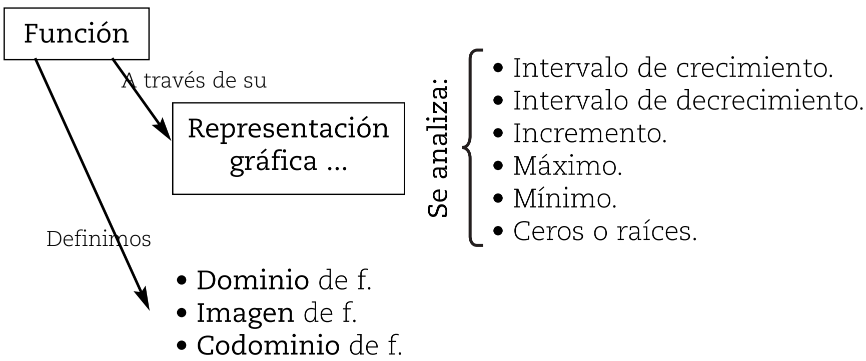
Ahora está en condiciones de leer e interpretar las siguientes conclusiones:

• Se llaman **ceros** o **raíces** de una función aquellos valores del **dominio** cuya **imagen es cero**.

• Según la función, ésta puede tener una raíz, varias o ninguna.

• Gráficamente los ceros o raíces de una función corresponden a las abscisas de los puntos que tienen contacto con el eje de las abscisas o eje de las x, puntos donde la gráfica "corta" al eje de las x.

Recapitulemos lo hecho hasta ahora. Observe el siguiente cuadro:



FUNCIÓN: CONTINUIDAD. PERIODICIDAD

Vuelva a cada uno de los gráficos correspondientes a funciones analizados anteriormente e intente recorrer su gráfica con un lápiz.¿Es posible recorrer dichos gráficos sin necesidad de levantar el lápiz?
....

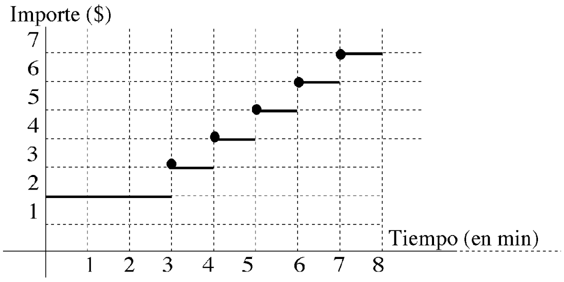
Hasta ahora, los gráficos expuestos **no presentaban saltos** ni cortes, pueden recorrerse con un lápiz sin tener que levantarlo del papel. Las funciones que tienen esta característica reciben el nombre de **funciones continuas**. En este punto estamos analizando la continuidad de una función y por ello le proponemos seguir analizando gráficos de funciones.

NOTAS

NOTAS

Situación 1

Se muestra el gráfico de una función que indica el número de pesos que hay que pagar de acuerdo con el número de minutos que se hablen por teléfono cuando se hacen llamadas de larga distancia desde una cabina telefónica.



• Cuando se efectúa la llamada se paga, en un principio, $2, pudiendo hablar hasta 3 minutos.

• Luego, por cada nuevo minuto que se hable, se paga $1 más y, por lo tanto, el gráfico presenta un **salto**.

• A este tipo de función se la llama **escalonada**.

Observe la representación gráfica: ¿la función representada es continua? ¿Por qué?

....

....

Esta función, en la que sí se presentan "saltos", es una **función discontinua**.

Conclusión:

• Las funciones cuyos gráficos no presentaban saltos ni cortes y pueden recorrerse con un lápiz sin tener que levantarlo del papel reciben el nombre de funciones continuas.

• Las funciones cuyos gráficos presentaban saltos y/o cortes y que no pueden recorrerse con un lápiz sin tener que levantarlo del papel reciben el nombre de funciones discontinuas.

Situación 2

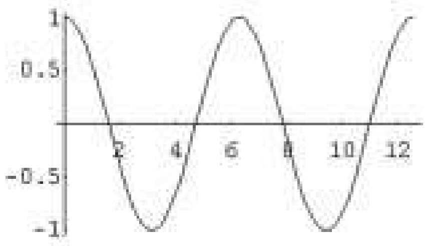
Observemos parte de un electrocardiograma, el que refleja la variación periódica del voltaje de la corriente que el corazón envía a sí mismo para producir las contracciones en función del tiempo:

NOTAS

Observe detenidamente el gráfico: hay partes de la curva que "se reiteran" regularmente, es decir que la gráfica toma la misma forma una y otra vez.

Situación 3

La siguiente es la representación gráfica de una función definida en $\mathbb{R}$.

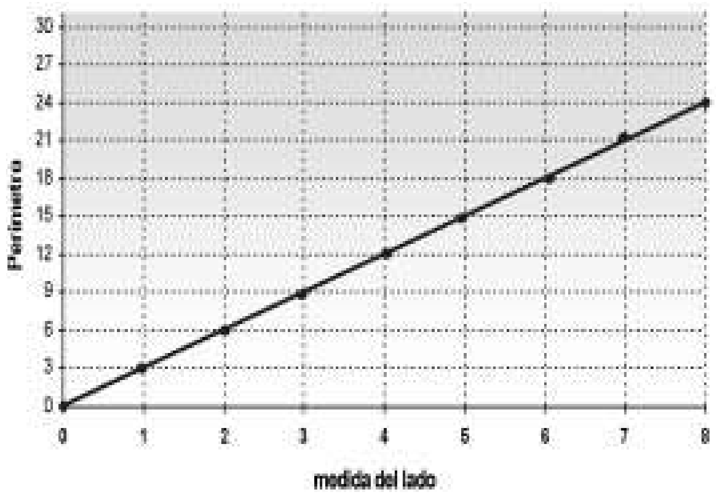


Como habrá visto, en ambas situaciones el gráfico se repite sucesivamente cada cierto intervalo o período. Estas son funciones llamadas **funciones periódicas**.

FUNCIÓN LINEAL. PENDIENTE. ORDENADA AL ORIGEN

Situación 1

Se muestra la variación de la medida del perímetro de un triángulo equilátero, en función de la medida de su lado.



Responda:

a) ¿Cómo están los puntos representados en esta gráfica?

....

b) Por esa característica, ¿qué nombre recibe este tipo de funciones? Escríbalo

Nota. *Un triángulo equilátero es un triángulo que posee sus tres lados congruentes, es decir de igual medida de la cantidad de longitud*

NOTAS

c) ¿Cuál es la variable independiente (x)?

d) ¿Cuál es la dependiente (y)?

e) Anote la fórmula que relaciona ambas variables:

f) ¿Es dicha relación una función? ¿Por qué?

Seguramente coincidirá en que:

• Al estar los puntos alineados, es decir que pertenecen a una misma recta, se ha representado una **función lineal**.

• Podemos decir que la función está definida para $\mathbf{x \geq 0}$, así podemos simbolizar:

$f : [0,\infty] \rightarrow IR$

$\mathbf{x \rightarrow y = 3 . x}$

• Como la recta que determinan dichos puntos (a la cual pertenecen) contiene al centro de coordenadas (0,0), entonces se ha representado una función de **proporcionalidad directa**.

• Las variables que intervienen, el perímetro y la longitud del lado del triángulo equilátero, se dicen que son directamente proporcionales.

• Recuerde que la **constante** de proporcionalidad es: $k = \frac{y}{x}$, en la que x es la medida de la variable independiente e y es la medida de la variable dependiente correspondiente a la medida de x considerada.

• La fórmula que permite relacionar los valores de ambas variables es: $\mathbf{y = 3 . x}$

Situación 2

Observemos en las siguientes tablas el precio del azúcar y el del café:

Azúcar					
Peso (x)	1	2	4	4,5	5
Precio (y_1)	1,10	2,20	4,40	4,95	5,50

Café					
Peso (x)	1	2	4	4,5	5
Precio (y_2)	5,00	10,00	20,00	22,50	25,00

• Para el precio del azúcar:

a) Calcule el cociente entre cada valor de la variable precio con el valor correspondiente de la variable peso para el azúcar: $\frac{y}{x}$

$\frac{1,10}{1} = 1,10$; $\frac{2,20}{2} = \ldots\ldots$; ....

b) ¿Qué valor obtuvo en cada uno de los cocientes anteriores?

....

c) ¿Qué nombre recibe el cociente encontrado?

....

Por lo tanto, se puede decir que los valores de la variable precio y los de la variable peso del azúcar son directamente proporcionales.

d) ¿Cuál es la variable independiente (x)?

....

e) ¿Cuál es la dependiente (y_1)?

....

f) Anote la fórmula que relaciona ambas variables:

....

• Para el precio del café:

a) Igual que hizo para el azúcar, ahora realice los cocientes para el café:

....

b) ¿Qué conclusión puede escribir?

....

c) ¿Cuál es la variable independiente (x)?

....

d) ¿Cuál es la dependiente (y_2)?

....

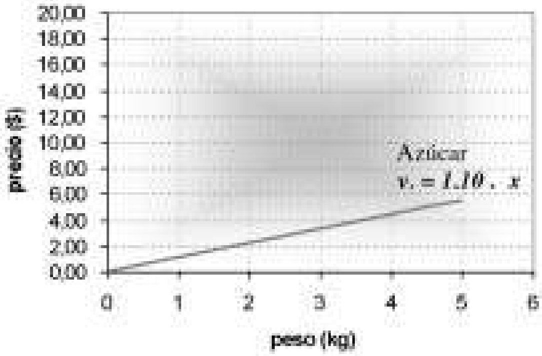
e) Anote la fórmula que relaciona ambas variables:

....

Le mostramos el gráfico para el precio del azúcar.

NOTAS

NOTAS



Complete el mismo gráfico con la gráfica correspondiente para los valores del café.

Coincidirá en que ambas funciones son:
- funciones lineales.
- funciones crecientes.

Responda:

¿Cuál de las dos funciones crece más rápidamente?

....

Observe las expresiones de ambas funciones: $y_1 = 1,10 . x$; $y_2 = 5 . x$, ¿por qué cree que y_2 crece más rápidamente que y_1?

....

- En las situaciones 1 y 2 se han representado **funciones lineales** cuyas fórmulas tienen una estructura (forma) similar:

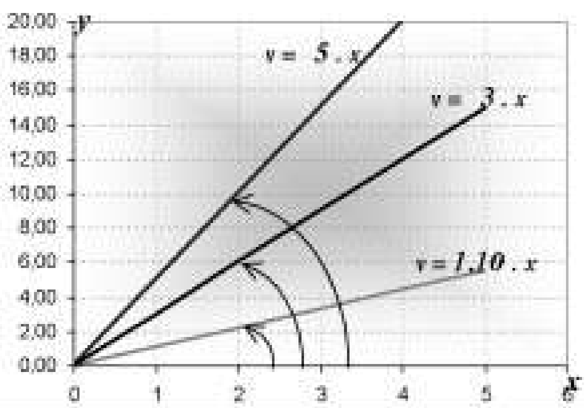
$y = 3 . x$
$y = 1,10 . x$
$y = 5 . x$

Podemos simbolizarlas de la siguiente manera:

$y = a . x$

Situación 3

Mostramos las gráficas de las tres funciones en un mismo sistema de referencia:



Vemos que **más rápidamente crecen** a medida que el coeficiente **a aumenta**.

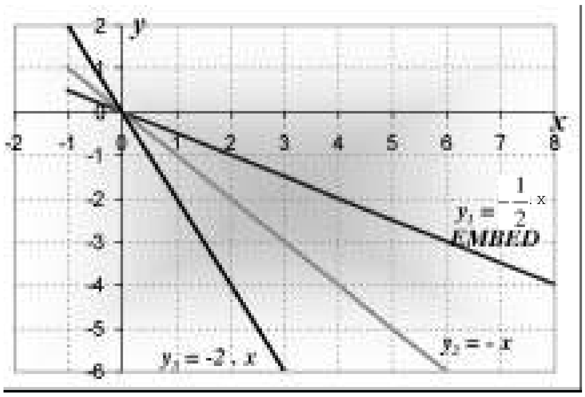
Al aumentar el coeficiente **a**, aumenta el ángulo formado por las rectas y el eje de las abscisas.

Así, podemos decir que el coeficiente **a** es responsable de la **inclinación** de la recta, por lo que se le llama **pendiente**.

En las tres funciones: $a > 0$

Actividad 1

Observe ahora las siguientes gráficas y conteste:



• Las funciones representadas, ¿son crecientes o decrecientes?

....

• ¿Cuál es la pendiente de la recta dada por y_1?

....

• ¿Y la pendiente de y_2?

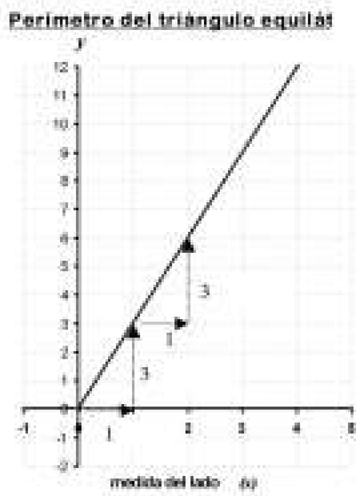
....

• ¿Y la de y_3?

....

Quiere decir que en las tres funciones representadas: $a < 0$

Situación 4



NOTAS

NOTAS

Analizaremos el gráfico de la situación 1:

• Puede observar que cada vez que **x** avanza **1 unidad**, **y** se **incrementa** en **3 unidades.**

• Esto significa que la **variación** de la función es **3**.

• El incremento indica la **inclinación** de la recta y recibe el nombre de **pendiente** de la recta.

• Si escribimos la ecuación correspondiente a la recta, el número que acompaña a la **x** es:

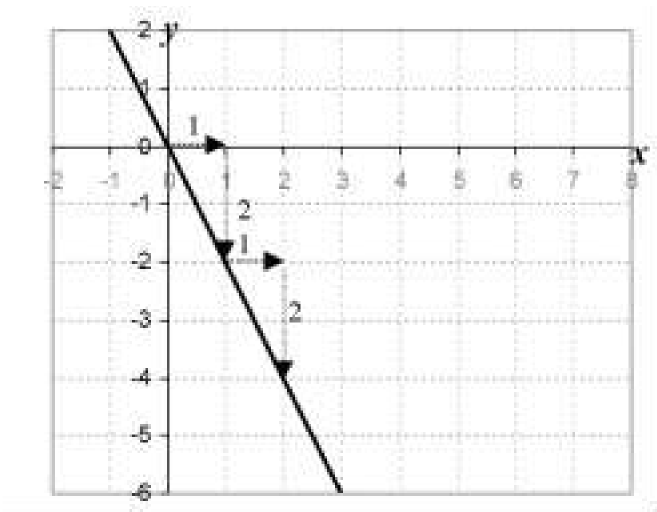
$$y = 3 \cdot x$$

• Es decir, el número "que acompaña" a la **x**, en la ecuación de una recta, es la **pendiente** de la misma e indica la inclinación con respecto al eje de las abscisas o de las **x**.

En este caso, la **pendiente es 3**.

Situación 5

El siguiente gráfico representa la función lineal cuya expresión es : $y = -2 \cdot x$



• Puede observar que cada vez que x avanza 1 unidad, y disminuye 2 unidades.

• Esto significa que la variación de la función es –2, o dicho de otra manera, el incremento es –2.

• Es decir: la pendiente de esta función es –2 e indica la inclinación con respecto al eje de las abscisas o de las x.

Situación 6

NOTAS

Gastón está construyendo su casa y quiere comprar arena a una empresa que cobra \$9 (fijos) por gastos de envío y además cobra \$7 el metro cúbico de arena. ¿Cuál es el monto que va pagar Gastón si compra 5 m^3 de arena?

Le pedimos que resuelva la situación, anotando todos los pasos que sean necesarios.

¿Qué cálculo haría para resolver la situación?
....

• Para responder a la pregunta planteada se puede pensar en resolver un cálculo como el siguiente, que se muestra con el resultado correspondiente:

$$\underbrace{7}_{\text{Medida del precio por metro cúbico}} \;.\; \underbrace{5}_{\text{Número de } m^3} + \overbrace{9}^{\text{Gastos de envío}} = 44$$

Luego, pagará \$44 por la compra de 5 m^3 de arena.

• ¿Cuál es el monto a pagar si decide comprar 2 m^3?

Escriba el cálculo que resuelve esta nueva situación y resuelva dicho cálculo.
....

Esta situación puede ser expresada mediante una expresión algebraica -una fórmula- que vincula el número de metros cúbicos con el importe a pagar (en pesos por la cantidad de arena especificada).

Así, si simbolizamos con "**y**" el número de pesos a pagar y con "**x**" la medida de m^3 de arena, ¿qué expresión algebraica propone usted para representar esta situación?
....

Posiblemente la expresión que escribió es:

$y = 7 \,.\, x + 9$

La relación que existe entre el número de pesos a pagar y la medida de m^3 de arena, ¿es una función?......................... ¿Por qué?
....

La expresión anterior está formada por un primer miembro que es "**y**" y un segundo miembro con dos términos: uno con la variable "**x**" llamado **término dependiente** y el otro sin variable

NOTAS

que se llama **término independiente**.

Así, por ejemplo, se tiene:

$$y = \underbrace{7 \,.\, x}_{\text{Término dependiente}} + \underbrace{9}_{\text{Término independiente}}$$

Esta fórmula recibe el nombre de ecuación explícita de la recta, porque si representamos gráficamente los infinitos puntos de coordenadas reales (pares de números reales) que satisfacen la igualdad resultan ser alineados y pertenecen a dicha recta.

En general:

La **ecuación explícita de una recta** es:

$$y = \underbrace{a \,.\, x}_{\text{Término dependiente}} + \underbrace{b}_{\text{Término independiente}}$$

siendo **a** y **b** dos números reales conocidos.

La fórmula de la **situación 6** es **y = 7 . x + 9**, en la que **a** = 7 y **b** = 9.

Para la representación de dicha función es conveniente completar la siguiente tabla para luego ubicar dichos puntos en un sistema de coordenadas.

a) Complete la siguiente tabla de valores:

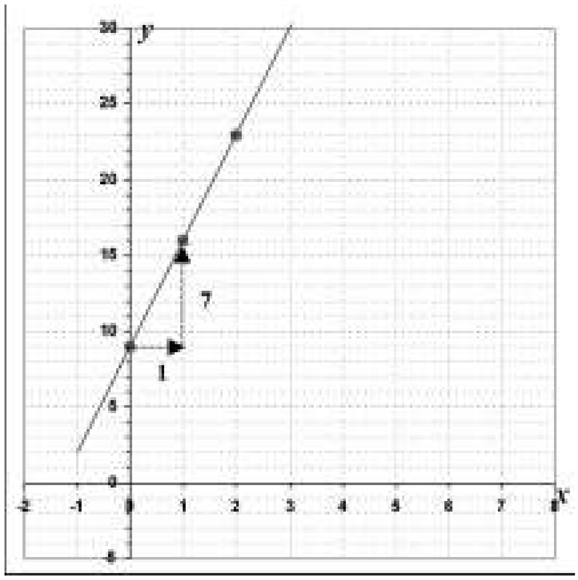
x *(número de m^3)*	$y = 7 \,.\, x + 9$ *(número de pesos a pagar)*
1	....
2	....
3,5	....
4	....
5	....

b) Represente gráficamente en un sistema de coordenadas los valores de la tabla.

Actividad 2

NOTAS

Le pedimos que compare la representación gráfica que hizo con la que mostramos a continuación:



a) ¿Cuál es el incremento de la función?
....

b) Luego, la **pendiente** de la recta es: **a** = ...

c) Marque en la gráfica (con color) el punto de intersección de la recta con el eje de las "**y**" o eje de ordenadas.

d) ¿Cuáles son las coordenadas de dicho punto?
....

e) Ahora encuentre el valor que tiene y cuando **x=0**, reemplazando en la fórmula que representa la situación y resolviendo:

y = 7 . x + 9
y = 7 . ..... + 9
y = ... + 9
y = ...

Si observa el valor de **y**, cuando **x** es igual a cero verá que, es **9**; valor que coincide con el valor de **b** en la fórmula de la recta asociada a la **situación 6**: **y = 7 . x + 9**.

Compare el valor de **y** obtenido con las coordenadas del punto del eje de ordenadas por el cual pasa la recta que determina los puntos representados. ¿Qué ocurre?
....

Se puede concluir que:

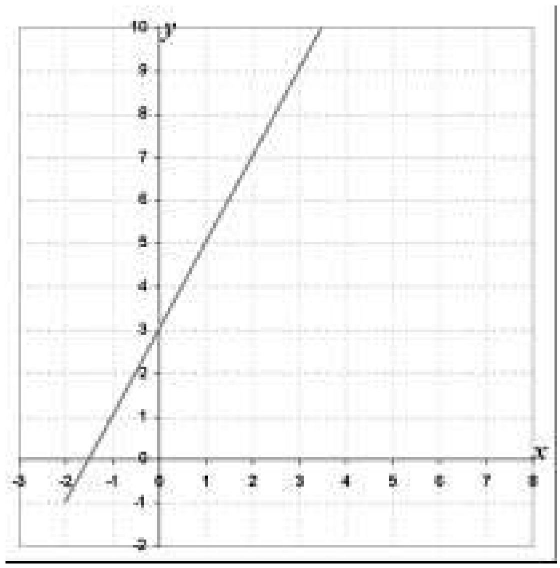
NOTAS

El punto **(0, b)** es el punto en común entre la recta correspondiente a una función lineal y el eje de las **y** o eje de ordenadas (eje vertical).

El valor de **b**, en este caso **9**, recibe el nombre de **ordenada al origen** e indica cuántas unidades hacia arriba (si **b** es positivo) o hacia abajo (si **b** es negativo) del punto (0,0), origen del sistema de coordenadas, pasa la recta cuya ecuación es **y = a . x + b**.

Actividad 3

A partir del gráfico que se muestra a continuación, complete:



a) Marque en la gráfica (con color) el punto de intersección de la recta con el eje de las "**y**".

b) La recta "corta" al eje de las "**y**" en el punto de coordenadas: ....

c) Luego, la ordenada al origen es: **b** = ...

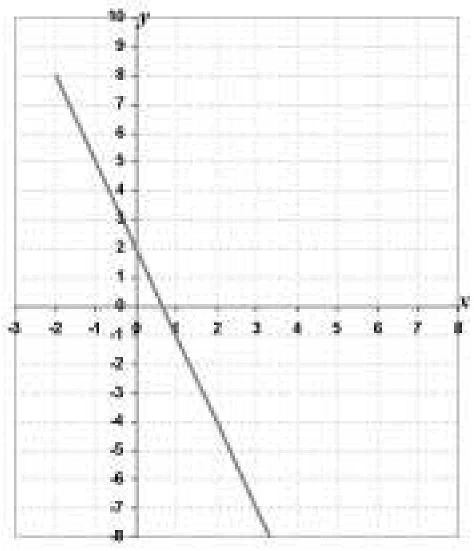
d) A partir del punto marcado con color, si la **x** aumenta en 1 unidad, el incremento de la función es ....

e) Luego, la pendiente es: **a** = ...

f) La ecuación de la recta correspondiente al gráfico es : ....

Actividad 4

Complete, teniendo en cuenta la representación siguiente:



a) Marque en la gráfica (con color) el punto de intersección de la recta con el eje de las "**y**".

b) La recta "corta" al eje de las "**y**" en el punto de coordenadas: ....

c) Luego, la ordenada al origen es: **b** = ...

d) A partir del punto marcado con color, si la **x** aumenta en 1 unidad el incremento de la función es ....

e) Luego, la pendiente es: **a** = ...

f) La ecuación de la recta correspondiente al gráfico es : ....

Actividad 5

Le proponemos que represente en el sistema de coordenadas la siguiente función: $y = 0 . x + 5$

a) ¿Qué puede decir de la pendiente de la recta? ....

b) ¿Cómo es la recta que obtuvo? ....

NOTAS

NOTAS

Resumimos:

Sea la ecuación explícita de la recta: $y = a \cdot x + b$

• a es la pendiente:

-indica la inclinación de la recta
-indica la variación de la función cuando x aumenta una unidad

si **a > 0**, la recta es ascendente (o la función es creciente)
si **a < 0**, la recta es descendente (o la función es decreciente)
si **a = 0**, la recta es horizontal (o la función es constante)

• b es la ordenada al origen:

-indica cuántas unidades por encima (si **b** es positivo) o por debajo (si **b** en negativo) del punto (0, 0) pasa la recta.

La ecuación explícita de la recta tiene la forma:

$$y = \underbrace{a}_{\downarrow} \cdot x + \underbrace{b}_{\downarrow}$$

Pendiente
Indica la inclinación que tiene la recta respecto del eje de las abscisas (de las x)

Ordenada al origen
Indica cuántas unidades por encima (si b es positivo) o por debajo (si b en negativo) del punto (0, 0) pasa la recta. Si b = 0 la recta pasa por el punto (0, 0).

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA RECTA

Para representar una función cuya gráfica es una recta o bien puntos alineados se puede:

• construir una tabla de valores y ubicar los puntos que se obtienen en la misma.

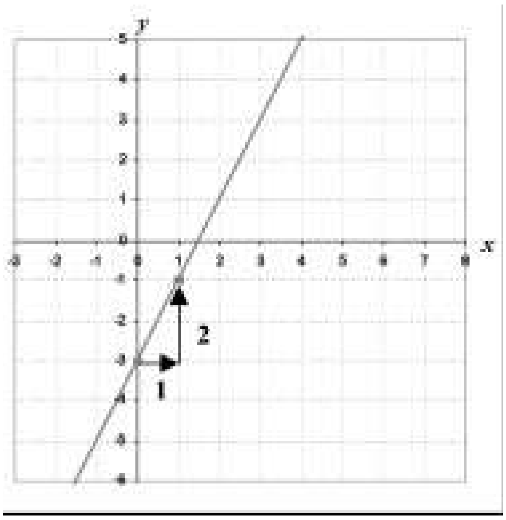
• utilizar el concepto de ordenada al origen y pendiente.

Consideramos la situación de representar una recta en un sistema de coordenadas sin realizar la tabla de valores, sólo identificando **ordenada al origen y pendiente**.

Para lograrlo observe las siguientes situaciones:

Situación 7

Se representa en un sistema de coordenadas la recta correspondiente a la ecuación: y = 2 . x – 3.



1) Identificamos el valor de la ordenada al origen, b = -3.

2) Identificamos la pendiente, en este caso a = 2.

3) En un sistema de coordenadas:

1. Representamos la ordenada al origen ubicando el punto **(0,b)**, en este caso **(0,-3)**, que se encuentra en el eje de las y por tener abscisa igual a cero.

(0, -3) es un punto de la recta a representar, es el punto en el que la recta "corta" al eje vertical o eje "de las y".

2. Se representa la pendiente de la recta que indica la **inclinación** de la recta respecto del eje x. Como la **pendiente** es un número entero **positivo**, a partir de la ordenada al origen, se toma 1 unidad de x hacia la derecha y **a** unidades hacia arriba, en este caso, **2** unidades hacia arriba y se señala otro punto que también pertenece a la recta que se desea representar gráficamente.

3. Se conectan los dos puntos señalados por medio de una recta, obteniéndose de esta manera la gráfica de la recta cuya ecuación explícita es: y = 2 . x – 3.

Actividad 6

Representar en un sistema de coordenadas la recta correspondiente a la ecuación: y = -3 . x + 1.

1) Identificar el valor de la ordenada al origen, b = ...

2) Identificamos la pendiente, en este caso a = ...

3) En un sistema de coordenadas (ver gráfica a continuación):

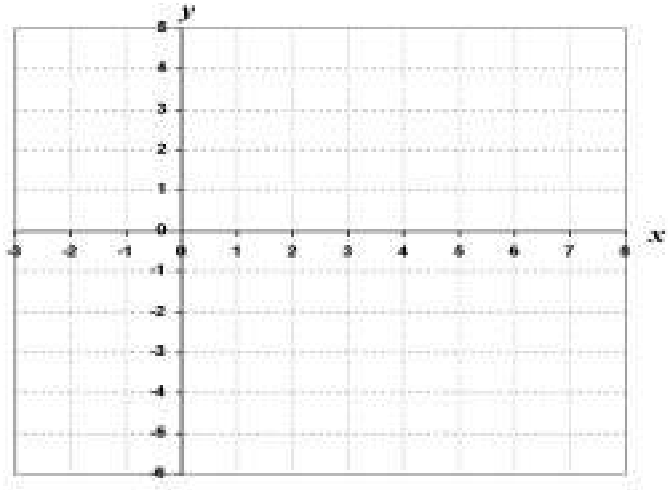
NOTAS

NOTAS

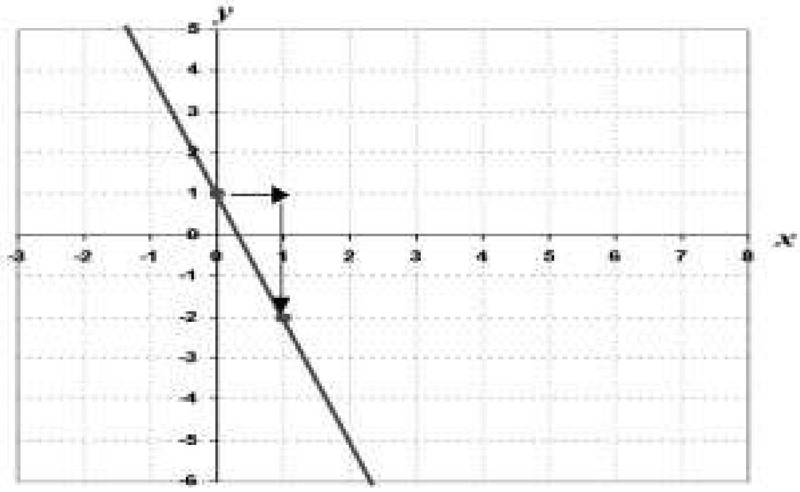
1. Represente la ordenada al origen ubicando el punto **(0, b)**, en este caso **(0, ……..)**. En este punto la recta a representar "corta" al eje vertical o eje "de las y".

2. Represente la pendiente de la recta que indica la **inclinación** de la recta respecto del eje x. Como la **pendiente** es un entero ...., a partir de la ordenada al origen, se toma 1 unidad de **x** hacia la derecha **y** a unidades... ¿hacia arriba o hacia abajo? .... , y se señala otro punto que también pertenece a la recta que se desea representar gráficamente.

3. Conecte los dos puntos señalados por medio de una recta, obteniéndose de esta manera la gráfica de la recta cuya ecuación explícita es: **y = -3 . x + 1**.



• Compare el gráfico que obtuvo con el siguiente:



PENSAR

Cuando se representa gráficamente en un sistema de coordenadas una recta a partir de su fórmula explícita ***y = a . x – b*** *se identifica el valor correspondiente a la ordenada al origen y a la pendiente y se* *procede de la siguiente forma:*

NOTAS

1. Se representa la ordenada al origen ubicando el punto ***(0, b)*** *que se encuentra en el eje "de las y" por tener abscisa igual a cero. Es un punto de la recta, precisamente, es el punto donde la recta corta al eje vertical o "eje de las y".*

2. Se representa la pendiente de la recta que indica la inclinación de la recta respecto del eje x. Hay que considerar dos situaciones:

• Si la pendiente es un número entero positivo: a partir de la ordenada al origen se toma una unidad de ***x*** *hacia la derecha y* ***a*** *unidades hacia arriba y se señala el punto correspondiente a esa posición, que es otro punto perteneciente a la recta.*

• Si la pendiente es un número entero negativo: a partir de la ordenada al origen se toma una unidad de ***x*** *hacia la derecha y* ***a*** *unidades hacia abajo y se señala el punto correspondiente a esa posición, que es otro punto perteneciente a la recta.*

3. Se conectan los dos puntos señalados por medio de una recta.

Actividad 7

1. Representar en un sistema de coordenadas cada una de las siguientes rectas dadas a través de su ecuación explícita.

a) $y = x - 5$
b) $y = 2 . x – 1$
c) $y = -3 . x + 2$

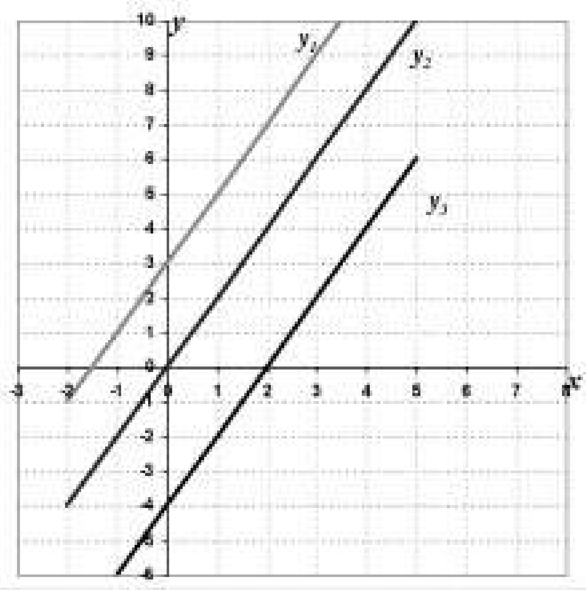
RECTAS PARALELAS

Analizaremos las ecuaciones explícitas de rectas que resultan paralelas.

NOTAS

Actividad 8

Mostramos tres funciones lineales en el mismo sistema de coordenadas cartesianas.



1) Escriba la ecuación explícita de cada una de las rectas representadas:

y_1 =................................

y_2 =................................

y_3=................................

2) Observe la fórmula de las ecuaciones de las tres rectas representadas, mire con atención las pendientes y las ordenadas respectivamente ¿En qué coinciden las tres ecuaciones escritas anteriormente?
....
....

Efectivamente, las **pendientes** de las tres rectas **coinciden, son iguales**.

Si observamos las ecuaciones de cada recta:

$y_1 = 2 . x + 3$, $y_2 = 2 . x$, $y_3= 2 . x - 4$, en los tres casos, tenemos $a = 2$.

Esto permite escribir la siguiente...

Conclusión: dos o más rectas son paralelas si coinciden sus pendientes.

NOTAS

Actividad 9

a) Dada la ecuación de una recta $\mathbf{y_1 = 4 \cdot x - 4}$, escriba la ecuación de una recta que sea paralela a ella.

....

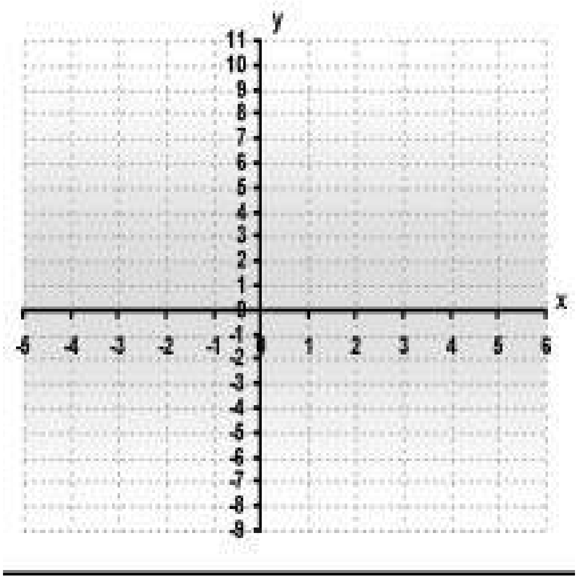
b) Represente gráficamente ambas rectas y verifique que resultan paralelas.

Actividad 10 (integración)

Dada la siguiente **función lineal**:

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \rightarrow y = -2x + 2.$



1) Represente gráficamente.

2) A partir de la gráfica realizada:

a) ¿Cuál es el cero o raíz de la función? x1 = ...

NOTAS

b) Indique si la función es creciente o decreciente

....

c) ¿Representa una función de proporcionalidad directa?...... ¿Por qué?

....

d) ¿Cuál es el dominio de dicha función?

....

e) A partir del análisis de la fórmula, escriba la **ordenada al origen**: **b = ...**

f) ¿Cuál es la **pendiente**? **a = ...**

Seguramente observó que :

• Se ha representado una función lineal que es decreciente.

• **No** representa una proporcionalidad directa, ya que **no** contiene al origen de coordenadas.

• Su **dominio** es $\mathbb{R}$.

• La **ordenada al origen** es b = 2.

• La **pendiente** es a = –2.

• La gráfica de la función corta al eje de las abscisas en **x =1**, es decir que la imagen de **x = 1** es **0**, lo anotamos **f (1) = 0**, entonces **x = 1** es un **cero** o **raíz** de la función.

HIPÉRBOLA

Ahora, buscamos recordar una función muy especial que tiene algunas características especiales:

• El comportamiento de las variables que intervienen es tal que si los valores que va tomando una de ellas aumenta las imágenes correspondientes de dichos números son valores de la otra variable y los mismos van disminuyendo pero en igual proporción (si un valor de la primer variable aumenta al doble, la imagen correspondiente a dicho valor disminuye a la mitad).

• Si se realizan los productos entre cada número que toma la primer variable por su correspondiente imagen, número que corresponde a la segunda variable da siempre un valor constante.

Una función con las características indicadas, ¿qué nombre recibe?

....

Seguramente, pensó en una función de proporcionalidad inversa, y efectivamente está en lo cierto. Un ejemplo de estas funciones es la función f que consideramos a continuación.

Situación 8

La función *f*, cuya fórmula es: $y=\frac{3}{x}$ representa una función de **proporcionalidad inversa**, en la que la constante es **k=3**.

Complete la siguiente tabla de valores, para luego realizar el gráfico:

x	$y=\frac{3}{x}$
-6	$y=\frac{3}{-6}=-\frac{1}{2}$
-3	$y=\frac{3}{-3}=....$
-2	$y=\frac{3}{-2}=....$
-1	$y=\frac{3}{-1}=-3$
1	$y=\frac{3}{1}=......$
2	$y=\frac{3}{.......}=....$
3	$y=\frac{.......}{.......}=....$
6	$y=\frac{.......}{.......}=....$

1. Observe la tabla y complete:

a) Los valores de la columna correspondientes a los números que toma la variable "x" están ordenados de menor a mayor, es decir que "van aumentando". ¿Qué ocurre con los números que toma la variable "y" que son las imágenes correspondientes a los valores de "x"?
....

b) Realice todos los productos entre cada número que toma la variable "x" y su correspondiente imagen, número que toma la variable "y". ¿Qué número obtiene en cada uno de dichos productos?
....

c) ¿La variable x podría tomar el valor cero?
....

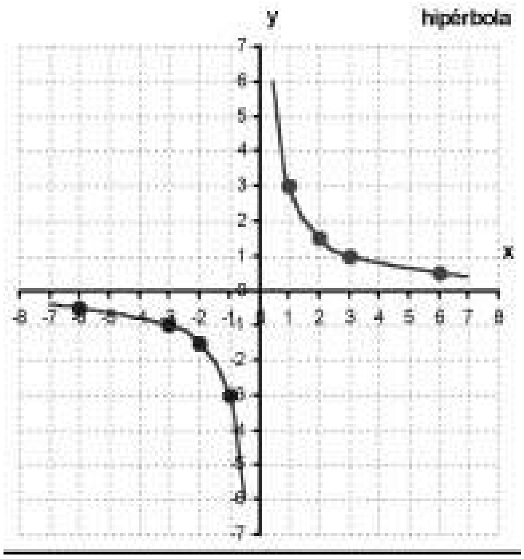
Es decir, **no** es posible resolver el cociente **3:0**. Si recuerda el significado de la división cuando es interpretada desde una situación concreta recordará que está vinculada a repartir: ¿es posible repartir, por ejemplo, "tres objetos entre nadie"?
....

NOTAS

NOTAS

• El dominio de la función es IR – {0} , ya que **x no puede ser igual al número cero** por estar en el denominador.

Si realiza el gráfico asociado a dicha función, cuya tabla de valores usted completó, obtendrá los puntos resaltados a continuación:



Estos puntos **no** pertenecen a una recta, por lo que son conectados, como se muestra en la representación, por medio de una curva que se llama **hipérbola**.

¿La curva obtenida corta en algún punto al eje de las x?

....

Por lo tanto, ¿la función dada por: $y = \frac{3}{x}$ tiene ceros?

....

Si observa la hipérbola representada verá que dicha curva no corta a los ejes de coordenadas.

Esta función, y en general las funciones de proporcionalidad inversa, **no cortan** al eje x en ningún punto, es decir, no presentan **ceros**.

PENSAR

• *En una función de proporcionalidad inversa, en general, si aumenta el valor de una variable, el valor de la otra disminuye en igual proporción, y viceversa: por ejemplo, si el valor de la variable x se* ***duplica,*** *el valor de la variable y* ***disminuye a la mitad,*** *y viceversa.*

• *Además, sabemos que* ***el producto*** *de los valores correspondientes de ambas variables es un* ***valor constante****: x . y = k.*

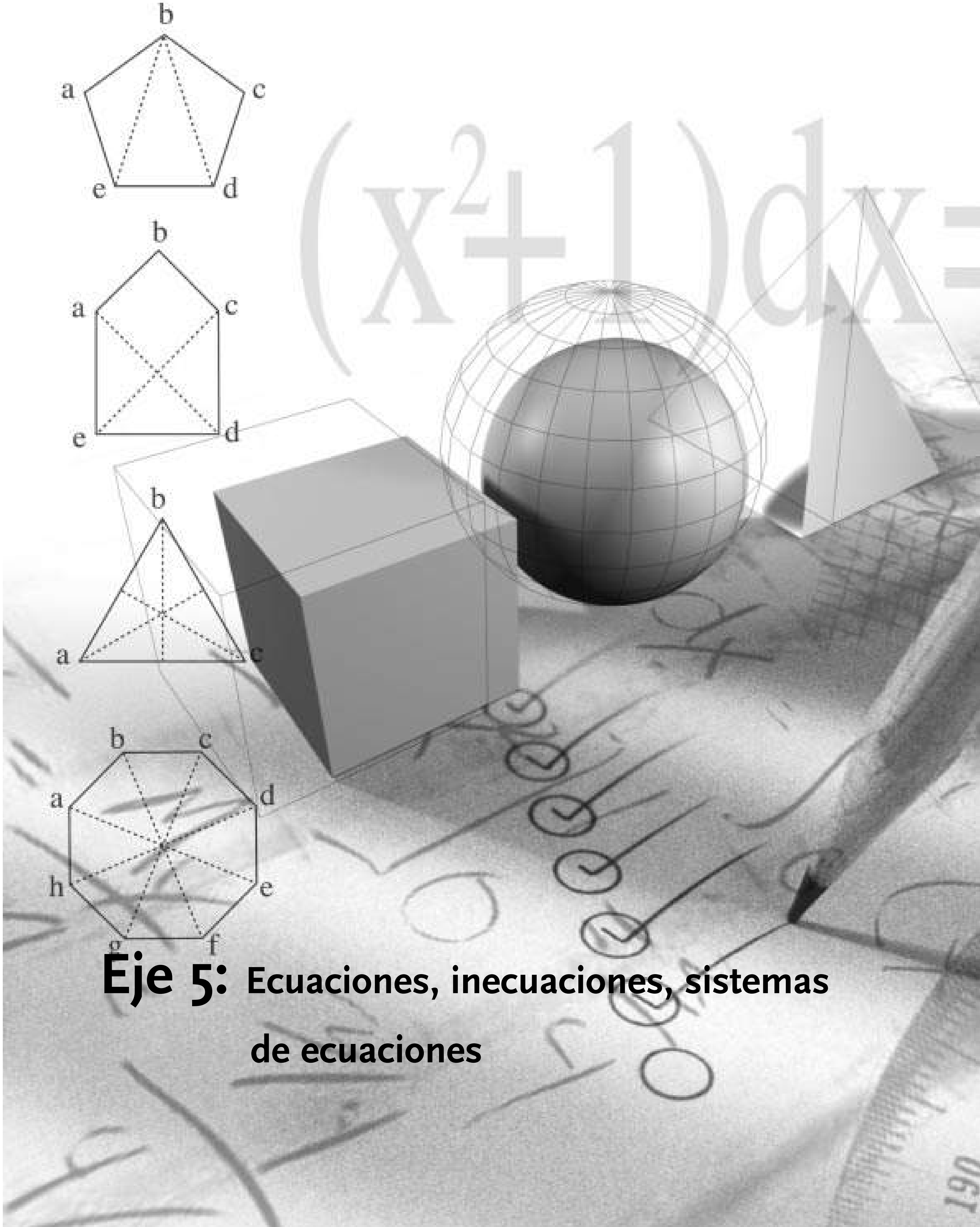
Nota.
En el gráfico de una hipérbola la curva se aproxima cada vez más a los ejes de coordenadas, pero no "toca" a ninguno de ellos.

NOTAS

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Actividad 11

Explique por qué la función cuya fórmula es: $y = \frac{3}{x}$ no es continua.
....
....
....
....
....



Eje 5: Ecuaciones, inecuaciones, sistemas de ecuaciones

ECUACIONES

NOTAS

Las expresiones algebraicas son muy empleadas en el planteo de ecuaciones para resolver situaciones problemáticas. Es decir para expresar en lenguaje algebraico lo que está expresado en lenguaje coloquial para luego poder abordarlo matemáticamente.

¿QUÉ ES UNA ECUACIÓN?

Son ejemplos de ecuaciones, expresiones como:

a) $x + 23 = 15$ b) $x - y = 8$

c) $2x + x - 5 = 4x$ d) $\frac{5}{8}x - \frac{1}{4}x + 25 = 4x$

e) $\frac{1}{2}x = 30 + 6x$

Una ecuación es una igualdad (en la expresión debe estar el signo igual) que contiene uno o más valores numéricos desconocidos llamados incógnitas y representados por medio de letras.

¿Para qué se emplean las ecuaciones?

Las ecuaciones frecuentemente surgen de expresar en lenguaje algebraico una situación problema planteada en lenguaje coloquial. Una vez codificada la situación problema en un lenguaje propio de la matemática es posible trabajar con dicha expresión para llegar a la solución buscada.

Por ello es muy importante traducir o codificar correctamente del lenguaje coloquial al algebraico.

¿Qué significa resolver una ecuación?

Resolver una ecuación significa encontrar el valor de la o las incógnitas que satisfacen o verifican la igualdad planteada.

¿Cómo se resuelve una ecuación?

Para explicar cómo se resuelve una ecuación primero es necesario considerar tres puntos básicos: las partes de una ecuación, las propiedades de la suma y la multiplicación en el conjunto de los números racionales, y algunas operaciones sencillas con expresiones algebraicas.

• Las partes que tiene una ecuación

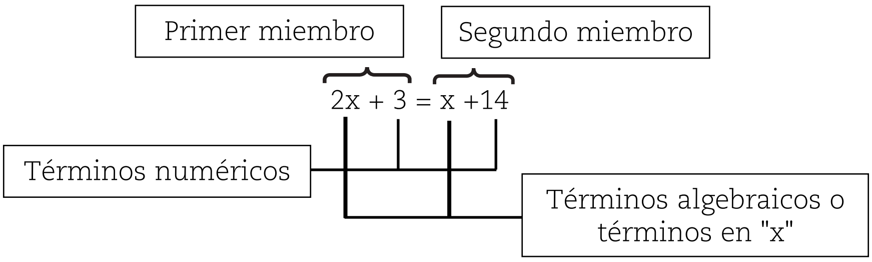
Como toda ecuación es una igualdad, siempre existen dos partes básicas de la misma: el primer miembro, que es la parte de la ecuación que se encuentra a la izquierda del signo igual, y el segundo miembro, que es la parte de la ecuación que se encuentra

NOTAS

a la derecha del signo igual. Observe los miembros señalados en la siguiente ecuación:

$$\underbrace{2x + 3}_{\text{Primer miembro}} = \underbrace{x + 14}_{\text{Segundo miembro}}$$

A su vez en cada miembro puede haber términos numéricos y/o términos algebraicos:



• Las propiedades de la adición y de la multiplicación en el conjunto de los números reales

Debe conocer las propiedades, tanto de la suma como de la multiplicación, porque son empleadas para resolver las ecuaciones. A continuación se nombran, pero si necesita volver a leer el tema, hágalo.

Para la adición:
- Elemento neutro
- Elemento opuesto o inverso aditivo
- Uniforme
- Cancelativa

Para la multiplicación:
- Elemento neutro
- Elemento inverso multiplicativo
- Uniforme
- Cancelativa
- Distributiva de la multiplicación con respecto a la suma y a la resta

• Algunas operaciones sencillas con expresiones algebraicas

Recordar simplemente que para operar con expresiones como:

$$5x - 3x + 1x$$

Como todos los términos son semejantes (tienen la misma parte literal – letras) se suman o restan los coeficientes, es decir los números que están a la izquierda de cada x en cada término - en este caso (5 – 3 + 1)-. La expresión anterior puede escribirse como 3x. Es decir:

$5x - 3x + 1x = 3x$

Nota.
Son expresiones equivalentes:
$x = 1x$
$3.x = 3x$

NOTAS

Luego de esta revisión abordaremos la resolución de ecuaciones, para lo cual lo invitamos a resolver situaciones en las que, en un principio, se lo guiará para llegar a la solución y que luego se le pedirá resolverlas sin ayuda.

ECUACIÓN DE PRIMER GRADO

"La juventud de Diofanto duró $\frac{1}{6}$ de su vida. Tras $\frac{1}{12}$ más, le creció la barba. Después de $\frac{1}{7}$ más de su vida se casó y cinco años más tarde él y su esposa tuvieron un hijo. Éste vivió exactamente $\frac{1}{2}$ de lo que vivió su padre y Diofanto murió cuatro años después que su hijo. ¿Qué edad tenía Diofanto cuando murió? Wheel/er. Matemática, un lenguaje cotidiano. CECSA" [(2)]

Este pequeño párrafo nos hace pensar en la existencia de situaciones problema en las que, a veces, hay números "escondidos" que se pueden representar mediante el uso de una letra, puede ser "x"o "y" o cualquier otra.

Del lenguaje coloquial al simbólico

Los matemáticos no siempre contaron con una forma simbólica de poder expresar frases dadas en lenguaje coloquial, lo cual dificultaba resolver situaciones como la antes propuesta. Así, la utilización del lenguaje simbólico permitió resolver problemas de manera más simple y con mayor grado de precisión.

Comenzaremos considerando algunas situaciones en las que se hace necesaria una traducción al lenguaje matemático (algebraico) para que a partir de las mismas se pueda ir en busca de una respuesta.

Situación 1[(3)]

Entre los problemas hallados en los papiros egipcios se encontró, en el de Rhind (1650 a.C.), un enunciado que decía: "Un montón y una séptima parte del mismo es 24." Utilizando el lenguaje simbólico moderno, podemos representar con x ese "montón" y traducir el enunciado mediante la ecuación:

[(2)]. *SARICO, Daniel (1989)*, ***Matemática 3. Guía de aprendizaje y evaluación****, Kapeluz. pág. 216.65.*
[(3)]. *LATORRE, María Laura y otros (1998)*, **Matemática 9***, Santillana EGB, pág. 50.*

NOTAS

$$x + \frac{1}{7}x = 24$$

Situación 2

El doble de un número más tres es igual a 11. ¿Cuál es ese número?

• Lo invitamos a **traducir** la situación al lenguaje simbólico (algebraico)

A continuación, le mostramos una forma posible de hacerlo:

Si llamamos **n** al número desconocido, anotamos:
$2 . n + 3 = 11$

¿Usted pensó en otra posibilidad? ¿Cuál? Escríbala
....

ACTIVIDADES

1. Escribir en lenguaje algebraico los siguientes enunciados:

La edad de Pedro	x
La edad de Pedro dentro de dos años	
La edad de Pedro hace cuatro años	
El triple de la edad de Pedro, aumentado en cuatro	
La mitad de la edad de Pedro disminuida en uno	
La tercera parte de la mitad de la edad de Pedro	

Importante: siempre que quiera expresar en lenguaje algebraico una situación, primero debe identificar cuál es la incógnita y qué letra le asignará.

2. Escriba una expresión algebraica que represente cada una de las siguientes situaciones (no le pedimos que las resuelva).

a) Entre Juan y Hugo compran una computadora pagando un total de $1500. Juan pagó $400 más de lo que pagó Hugo.
....

b)Un terreno de forma rectangular debe ser alambrado en su perímetro. La cantidad de alambre necesario para dar 2 vueltas es de 400 metros. Se sabe que la medida de la cantidad de longitud del frente es el doble de la medida de la cantidad de longitud del fondo.
....

c) De una cantidad desconocida de personas que trabaja en una empresa se tiene la siguiente información:

- La tercera parte trabaja en la administración.
- La cuarta parte trabaja en mantenimiento.
- Las dos quintas partes, en contaduría.
Dos personas en atención al público.
....

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

NOTAS

Una ecuación es **una igualdad** (en la expresión debe estar el signo igual) que contiene uno o más valores numéricos desconocidos llamados incógnitas y representados por medio de letras.

Resolver una ecuación significa encontrar el valor de la o las incógnitas que satisfacen o verifican la igualdad planteada.

Una ecuación puede tener:

- Una solución única
- Más de una solución
- Infinitas soluciones
- Ninguna solución

Consideramos a continuación situaciones problema que se puedan resolver mediante una ecuación que tenga solución única.

Situación 1

La mitad de la edad de Mario aumentada en 20 es igual a 50. ¿Cuál es la edad de Mario?

¿Cuál es la incógnita?
....

Asígnele una letra.
....

¿Qué expresión algebraica podría utilizar para traducir la situación planteada? Escríbala.
....

Es muy probable que haya pensado en algo así:

(llamamos **x**: edad de Mario)

También podría haber escrito:

$$\frac{1}{2}x + 20 = 50 \qquad \frac{x}{2} + 20 = 50$$

Ahora que tiene la expresión escrita, trataremos de hallar un valor para **x**. Pruebe, mediante el **tanteo**, asignarle valores a x,

NOTAS

completando a continuación la línea punteada, para que se verifique la igualdad:

$$\frac{1}{2}\ldots\ldots + 20 = 50$$

¿Lo consiguió? ¿Cuál es el número que nos dice la edad de Mario? Escríbalo ....

Por lo tanto, la edad de Mario es ....

Como habrá notado, hallar el valor de x en este caso fue sencillo, pues con unos pocos intentos y un poco de paciencia, el tanteo nos permitió ir probando hasta llegar a nuestro objetivo. Hemos usado el **ensayo y error**.

Lamentablemente, las ecuaciones no siempre son tan sencillas de resolver utilizando el tanteo.

Por ello, le propondremos una variedad de situaciones-problema que involucren ecuaciones y le mostraremos cómo puede resolverlas mediante la utilización de las propiedades de la adición y de la multiplicación en el conjunto de los números reales.

Si no recuerda estas propiedades no avance sin leer nuevamente el tema.

Retomemos entonces la ecuación de la edad de Mario:

$$\frac{1}{2}x + 20 = 50$$

Como nuestro objetivo es hallar el valor de **x**, trataremos de dejar en uno de los miembros de la igualdad (en el miembro izquierdo) sólo el término en el que aparece la variable. Para ello haremos lo siguiente:

$\frac{1}{2}x + 20 = 50$	*Para calcular el valor de "**x**" debemos "sacar" el término 20.Para ello sumamos a ambos miembros el opuesto de 20, (propiedad uniforme).*
$\frac{1}{2}x + 20 + (-20) = 50 + (-20)$	*En el primer miembro aplicamos la propiedad del elemento opuesto.*
$\frac{1}{2}x + 0 = 30$	*En el primer miembro aplicamos la propiedad del elemento neutro y en el segundo miembro sumamos los términos numéricos.*
$\frac{1}{2}x = 30$	*Observe que $\frac{1}{2}$ está multiplicando a **x**. Para dejar a **x** sola se multiplican ambos miembros, o a ambos lados de la igualdad*

	(propiedad uniforme) por el ***inverso multiplicativo de*** $\frac{1}{2}$*. Hay que multiplicar por 2.*
$2.\frac{1}{2}.x = 2.30$	*Se aplica la propiedad del inverso multiplicativo en el primer miembro y se resuelve el cálculo del segundo miembro.*
1 . x = 60	*Como el* **1** *es elemento neutro en la multiplicación, en* $\mathbb{R}$ *queda:*
x = 60	*Finalmente* **x** *nos ha quedado "sola" y se llega a la solución de la ecuación.*

NOTAS

• Para verificar si el valor encontrado es el correcto se reemplaza el valor de "x" encontrado (60) en la ecuación inicial, se resuelven los cálculos numéricos y se analiza si se verifica o no la igualdad. Así se tiene:

$\frac{1}{2}$ x + 20 = 50

$\frac{1}{2}$ 60 + 20 = 50 como x = 60, se sustituye a x por 60.

30 + 20 = 50

50 = 50 Se ha verificado la igualdad.

En el caso de no verificarse la igualdad significa que el valor hallado para x no es el correcto. Esto quiere decir que se debe volver a resolver la ecuación inicial.

• Luego de la verificación puede dar la respuesta a la situación problema planteada. Escríbala a continuación
....

Situación 2

Ana gasta la quinta parte de su dinero en supermercado y la tercera parte del mismo en medicamentos, gastando un total de $40. ¿Cuánto dinero tenía?

Identifique la incógnita y asígnele una letra
....

Proponga una expresión algebraica que represente la situación planteada:
....

Si llamamos **x** al total de dinero que tenía Ana, ¿pensó en algo así para escribir la situación en símbolos?

$$\frac{1}{5}.x + \frac{1}{3}.x = 40$$

NOTAS

Otras formas pueden ser: $\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right).x=40$ o $\frac{x}{5}+\frac{x}{3}=40$

Quizás usted haya escrito otra. Pueden haber varias formas diferentes de expresar la misma situación.

Ahora bien, vamos a resolver la primera ecuación que planteamos:

$\frac{1}{5}.x+\frac{1}{3}.x=40$	*El primer miembro de la igualdad está formado por dos términos, cada uno de los cuales son* ***semejantes****, es decir que tienen la misma parte literal (letra). Por ello, se suman (o en otro caso, se restan) sus coeficientes, es decir los números que están a la izquierda de cada* ***x*** *en cada término:* $\frac{1}{5}+\frac{1}{3}=$........ *(Resuelva dicha suma)* *Coincidimos en este resultado, pues* $\frac{1}{5}+\frac{1}{3}$ *es igual a* $\frac{8}{15}$
$\frac{8}{15}.x=40$	• *Así queda ahora la ecuación.* *¿Recuerda qué propiedad aplicamos si aparece un número que multiplica a la* ***x*** *para que ésta quede sola? Escriba el nombre de la propiedad* ....
........$\cdot\frac{8}{15}\cdot x=$........$\cdot 40$	• *Complete la línea punteada, aplicando dicha propiedad a ambos miembros de la igualdad.*
$\frac{15}{8}\cdot\frac{8}{15}\cdot x=\frac{15}{8}\cdot 40$	*Seguramente propuso multiplicar por el inverso multiplicativo de* $\frac{8}{15}$ *es decir, multiplicar ambos miembros por* $\frac{15}{8}$. • *En el primer miembro simplifique y en el segundo miembro resuelva.*
x=..........	• *Complete.*

• Verifique la ecuación (reemplace el valor hallado de la variable en la ecuación original y verifique la igualdad).

....

• Comunique la respuesta a la situación problema.

....

Así como puede existir más de una forma de escribir la ecuación, una misma ecuación se puede resolver utilizando pasos diferentes.

Situación 3

Un vendedor de revistas vendió las dos quintas partes del total de revistas que tenía. Ese día le quedaron 48 revistas sin vender. ¿Cuántas revistas tenía al principio?

Intente escribir la ecuación que permitiría resolver la situación propuesta y resuélvala.

....
....
....
....

Le mostramos a continuación una de las alternativas de solución:

Llamamos **x** al **total de revistas**.

Planteamos una ecuación como la siguiente (recuerde que pueden haber otras ecuaciones equivalentes):

$\frac{2}{5}\cdot x+48=x$	*Observe que encontramos la* **x** *en ambos miembros.* *Para poder resolver la ecuación debemos agrupar los términos semejantes (términos con x)* ***en un mismo miembro****.* *Para ello aplicamos propiedades convenientemente (elemento opuesto, uniforme).*
$\frac{2}{5}\cdot x+\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot x+48=x+\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot x$	• *Se aplicó la propiedad del opuesto aditivo de* $\frac{2}{5}\cdot x$*, esto es, se sumó en ambos miembros* $\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot x$
	• *A continuación sume los términos semejantes del segundo miembro y aplique la propiedad del elemento opuesto y neutro en el primer miembro.*
$48=\frac{3}{5}\cdot x$	• *Seguramente le quedó así.*
	• *Aplique la propiedad uniforme con el inverso multiplicativo de* $\frac{3}{5}$*, y resuelva.*
...........=*x*	• *Complete.*

• Verifique si el valor encontrado de **x** es el correcto, reemplazando el valor de **x** en la expresión inicial de la ecuación.
....

• Escribir la respuesta de la situación
....

Seguramente habrá llegado al último paso de la ecuación obteniendo 80 = **x**. Esto significa que la cantidad de revistas que tenía al principio era de 80 revistas.

Situación 4

La construcción de un camino se proyectó en tres etapas. En

NOTAS

NOTAS

la primera se construyó un tercio de la longitud total del camino, en la segunda, los dos quintos del mismo y en la tercera se construyeron los últimos 300 km. ¿Cuál es la cantidad de longitud del camino?

• Identifique la incógnita y los datos. Para ello, le puede ayudar completar la siguiente tabla:

Complete	*Lenguaje algebraico*
• *Medida de la cantidad de longitud del camino*	x
• *Primera etapa*	
• *Segunda etapa*	
• *Tercera etapa*	

• Relacione todos los datos de la tabla, escribiendo la ecuación correspondiente

....

• Intente resolverla.

• Verifique la solución hallada.

• Comunique su respuesta.

Para que compare su resultado, le presentamos a continuación una forma de resolver la situación planteada:

• Podemos razonar que la medida de la cantidad de longitud total del camino puede expresarse como la **suma** de las medidas de longitud **de cada una de las etapas**. Así, la expresión algebraica que representa lo dicho queda:

$$x = \frac{1}{3} \cdot x + \frac{2}{5} \cdot x + 300$$

$$x = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right) \cdot x + 300$$

$$x = \frac{11}{15} \cdot x + 300$$

$$x + \left(-\frac{11}{15}\right) \cdot x = \frac{11}{15} \cdot x + \left(-\frac{11}{15}\right) \cdot x + 300$$

$$\frac{4}{15} \cdot x = 0 + 300$$

$$\frac{4}{15} \cdot x = 300$$

$$\frac{15}{4} \cdot \frac{4}{15} \cdot x = \frac{15}{4} \cdot 300$$

Nota.
Hay otras ecuaciones posibles, si cambiamos la forma de razonamiento. Por ejemplo:

$$x - \frac{1}{3} \cdot x - \frac{2}{5} \cdot x = 300$$

Nota.
Observe los pasos que se han realizado. Usted ya sabe qué propiedades se han aplicado en cada uno de ellos.

NOTAS

$1 \cdot x = 1125$

$x = 1125$

Luego de verificar que el valor encontrado hace verdadera la ecuación original, y corresponde a la medida de la longitud total del camino, podemos dar respuesta a la situación propuesta de la siguiente manera:

La cantidad de longitud del camino es de 1125 km.

Situación 5

La medida de la cantidad de capacidad total del tanque de combustible de una camioneta es tal, que la mitad de la suma entre ésta y 5 es igual a 40. ¿Cuál es la capacidad total del tanque?

• Identifique la incógnita y los datos, relacionándolos mediante una expresión algebraica adecuada.

• Resuelva la ecuación planteada.

• Verifique.

• Comunique la respuesta a la situación.
....

Le mostramos a continuación dos formas diferentes de resolver la misma ecuación.

Llamamos **x** a la medida de la cantidad de capacidad total del tanque de combustible.

Forma 1:

$\frac{1}{2}(x+5)=40$	• *El enunciado dice: "la mitad de la suma...." Esto se representa escribiendo $\frac{1}{2}$ multiplicando a un paréntesis que indica la suma pedida.*
$\frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 5 = 40$	• *Como el objetivo de una ecuación siempre es "encontrar el valor de x", y ésta se encuentra dentro de un paréntesis, lo que se debe hacer es "eliminar" el paréntesis. Así, si aplicamos la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición obtendremos:*
	• *Observe los pasos seguidos y recuerde las propiedades que se aplican. Anótelas en cada caso.*
$\frac{1}{2} \cdot x + \frac{5}{2} = 40$	....

NOTAS

$\frac{1}{2}\cdot x+\frac{5}{2}+\left(-\frac{5}{2}\right)=40+\left(-\frac{5}{2}\right)$	....
$\frac{1}{2}\cdot x+0=\frac{75}{2}$	....
$2\cdot\frac{1}{2}\cdot x=2\cdot\frac{75}{2}$	....
$x=75$	....

Forma 2:

$\frac{1}{2}(x+5)=40$	*El primer miembro es un único* ***término****. Como está multiplicando a todo el paréntesis, podemos aplicar la propiedad del inverso multiplicativo, multiplicando ambos* ***miembros por 2****.*
$2\cdot\frac{1}{2}\cdot(x+5)=2\cdot 40$	• *queda así.*
	Observe los pasos seguidos y recuerde las propiedades que se aplican. Anótelas en cada caso.
$x+5=80$	....
$x+5+(-5)=80+(-5)$	....
$x+0=75$	....
$x=75$	....

Recuerde que siempre debe verificar el valor encontrado para la incógnita, para luego dar la respuesta al problema.

La capacidad total del tanque de combustible es de 75 litros.

INECUACIONES

A veces hay situaciones de la vida diaria en las que no se emplean expresiones tales como "es igual a" o "tiene tanto como", que expresadas en lenguaje algebraico dan lugar a una igualdad. Estas otras situaciones emplean expresiones como "pagué algo más que $ 40", "el largo de la mesa no llega a los dos metros", "tiene más de 5 metros" o bien expresiones tales como "es menor que" "es mayor que" o "es menor o igual que", que al ser traducidas al lenguaje algebraico dan lugar a una desigualdad.

Para profundizar en este tema lo invitamos a leer las siguientes situaciones:

NOTAS

Situación 1

Mario compra 8 lápices del mismo precio cada uno. En total pagó $10 ¿Cuántos pesos pagó por cada lápiz?

....

Situación 2

Mario compra 8 lápices (del mismo precio cada uno). Paga con $10 y le dan vuelto. ¿Cuántos pesos puede ser que pagó por cada lápiz?

....

ACTIVIDADES

1. Resuelva cada una de las situaciones planteadas.

a) ¿Qué diferencia nota entre la respuesta dada para la situación 1 y la dada para la situación 2?

....

2. Para reflexionar sobre la situación 2.

a) ¿Escribió alguna expresión algebraica que represente la relación entre los datos y lo que pide el problema?................... ¿cuál?...

b) ¿Puede utilizar una ecuación? .... ¿le sirve para resolver la situación? ....

c) ¿Qué dificultad encuentra?

....

d) Si no pudo escribir una expresión algebraica adecuada, le ayudamos un poco: pruebe usar alguno de los siguientes símbolos "<" (es menor que), ">" (es mayor que), "≤" (es menor o igual que) o "≥" (es mayor o igual que). Escriba la expresión algebraica a continuación.

....

Le mostramos una forma de plantear en lenguaje simbólico la **situación 2**:

- Llamamos p, al número de pesos que se paga por cada lápiz.
- Al decir que paga con $10 y le dan vuelto estamos diciendo que el total a pagar por los 8 lápices es menor a $10.
- Expresamos en símbolos la situación: $8 \,.\, p < 10$

NOTAS

Como puede ver, la expresión anterior no es una igualdad (no se usó el signo =). Se ha escrito una **desigualdad**.

En una desigualdad se utilizan los símbolos "<" (es menor que), ">" (es mayor que), "≤" (es menor o igual que) o "⩾ " (es mayor o igual que).

Una inecuación es una desigualdad (expresión en la que aparece algunos de los símbolos anteriores) que contiene uno o más valores numéricos desconocidos llamados incógnitas y representados por medio de letras.

• Seguramente, usted pudo dar algunos valores que correspondan al costo de cada lápiz mediante el tanteo. Ahora podemos precisar un poco más y responder a la siguiente pregunta:

- ¿Qué se puede afirmar acerca del precio de cada lápiz?

Para ello, hay que **resolver la inecuación**, es decir encontrar los valores de la incógnita que satisfacen o verifican la **desigualdad** planteada.

Le proponemos que resuelva la inecuación planteada anteriormente, utilizando las mismas "reglas" que usa para resolver ecuaciones, pero empleando el símbolo "<".

$8 . p < 10$

....

....

• Seguramente habrá llegado al último paso, en el que queda: $p < 1,25$

a) ¿Cómo interpreta la expresión obtenida?
....

b) Luego responda a la pregunta: ¿qué se puede afirmar acerca del precio de cada lápiz?
....

Así, podremos decir que el precio de cada lápiz es menor a $1,25 y puede dar respuesta a la situación 2, indicando cuántos pesos puede ser que pagó por cada lápiz.

Al dar respuesta a la situación habrá notado que no es posible dar un único resultado, porque hay más de un valor posible de monto pagado por cada uno de los ocho lápices y que en total no supere los $10. Así, son posibles soluciones: $1, $1,10, $0,75; $1,20, por nombrar algunas. Es por eso que la respuesta posible de dar es que: el número de pesos que se pagó por cada lápiz es menor a 1,25 o que por cada lápiz se pagó menos de $1,25.

Es por eso que cuando se trata de una inecuación se habla de un conjunto solución y es posible expresar la solución de la inecuación ($p < 1,25$), de manera numérica a través de un intervalo: $(-\infty, 1,25)$*. Pero al contextualizar la solución a la situación problema, recuerde que se trata de número de pesos y que Mario recibe vuelto, por lo que "***p***" no puede tomar el valor cero ni tampoco ningún valor negativo. Por lo tanto los posibles valores de "***p***" pertenecen al intervalo abierto: (0, 1,25).

> ***Nota.***
> *∞,este símbolo indica infinito*
>
> **Se sugiere leer el tema Intervalos, ya abordado.*

Habrá observado que hay situaciones que se pueden traducir mediante una igualdad y otras mediante una desigualdad. Luego, una alternativa para resolver una situación problema puede ser plantear una ecuación, o en otro caso, puede ser plantear una inecuación.

Pero, ¡cuidado! Hay situaciones que requieren de otros "modelos" para poder expresar algebraicamente las relaciones entre sus datos y sus incógnitas.

NOTAS

ACTIVIDADES

1. Expresar en lenguaje simbólico los siguientes enunciados:

Enunciado	*Lenguaje simbólico*
a) Federico tiene menos de 50 años.	$e < 50$
b) La edad de Paula es el triple de la edad de Amalia.	
c) Hay más de 350 personas en el teatro.	
d) En el cajón hay por lo menos 25 kg de papas.	
e) El libro tiene, a lo sumo, 60 páginas.	
f) El doble de la cantidad de niños es 32.	
g) La altura del árbol no sobrepasa los 3 metros.	

2. Exprese en lenguaje algebraico y resuelva.

a) El triple de la distancia recorrida es de 600 metros. ¿Cuál es la distancia recorrida?

....

....

b) La distancia recorrida más los 200 metros que faltan, no superan los 350 metros. ¿Qué puede decir acerca *de la distancia recorrida?*

....

....

c) La mitad de la distancia recorrida excede a los 400 metros. ¿Qué puede decir acerca de la distancia recorrida?

....

....

Las inecuaciones que trabajaremos tienen una sola incógnita (una sola variable) y esa variable tiene exponente uno, es decir que está elevada a la primera potencia, por ello reciben el nombre de **inecuaciones de primer grado con una incógnita**.

En las inecuaciones es posible distinguir dos miembros:

$$\underbrace{8 \,.\, p}_{\boxed{\text{Primer miembro}}} < \underbrace{10}_{\boxed{\text{Segundo miembro}}}$$

RESOLUCIÓN DE UNA INECUACIÓN

Situación 1

La distancia recorrida más los 200 metros que faltan, no supera los 350 metros. ¿Qué puede decir acerca de la distancia recorrida?

Si llamamos d a la distancia recorrida, y considerando la expresión "no supera", seguramente habrá planteado una inecuación similar a la siguiente: $d + 200 \leq 350$.

Esta inecuación se resuelve aplicando las mismas propiedades que se usan para resolver ecuaciones. Observe a continuación las propiedades aplicadas en cada paso hasta resolver la inecuación:

$d + 200 \leq 350$	
$d + 200 + (-200) \leq 350 + (-200)$	*Aplicamos la propiedad uniforme sumando en ambos miembros el opuesto aditivo de 200.*
$d + 0 \leq 150$	*Aplicamos la propiedad del elemento neutro.*
$d \leq 150$	*La variable queda "sola".*

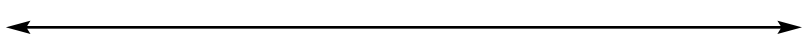
Por lo tanto queda: $d \leq 150$.

El conjunto solución de la inecuación puede expresarse a través de un intervalo: $(-\infty, 150]$.

Pero -teniendo en cuenta la situación de la cual partimos- entonces la distancia recorrida es menor o igual a 150 metros, y considerando que la distancia recorrida no puede tomar un valor negativo, el conjunto solución es el intervalo abierto cerrado:(0, 150].

Represente el conjunto solución en la recta numérica dada a continuación:

Recuerde. *que debe asignar a cada punto de la recta un número.*



Responda:

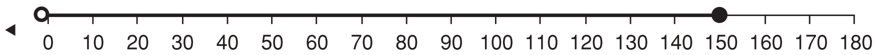
¿El extremo 0 del intervalo (0, 150] pertenece al intervalo?

....

¿El extremo 150 del intervalo (0, 150] pertenece al intervalo?

....

Compare su representación con la que le mostramos a continuación:



Responda:

¿Por qué al representar en la recta numérica dicho intervalo se muestra un segmento con un extremo señalado con una circunferencia sin pintar su región interior y en el otro se emplea un círculo?

....

....

Veamos otra situación...

NOTAS

ACTIVIDADES

Agustín compra un cuatriciclo. Quiere pasear con un acompañante, su amigo Luis. En el manual de instrucciones del mismo se recomienda no llevar una carga superior a los 140 kg. ¿Cuánto puede pesar el acompañante si Agustín pesa 72 kg?

a) Plantee la situación mediante una expresión algebraica y resuélvala aplicando las propiedades correspondientes. No olvide dar la respuesta y verificar.

b) Exprese el conjunto solución de la inecuación por medio de un intervalo

c) ¿Según la situación y lo que se busca (peso del acompañante de Agustín), necesita modificar dicho intervalo? .... Si es así, hágalo:

d) Represente gráficamente en la recta numérica el conjunto solución de la situación propuesta. Es decir, el conjunto al cual pertenece el peso del acompañante de Agustín.

NOTAS

Situación 2

Se quiere representar en la recta numérica el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$8\ x + 10 < 6\ x - 3.$

Para ello:

1) Se debe resolver la inecuación. Observe a continuación los pasos seguidos para resolverla:

$8\ x + 10 < 6\ x - 2$

$8\ x + (-6\ x) + 10 < 6\ x + (-6\ x) - 2$

$2\ x + 10 + (-10) < 0 - 2 + (-10)$

$2\ x + 0 < -12$

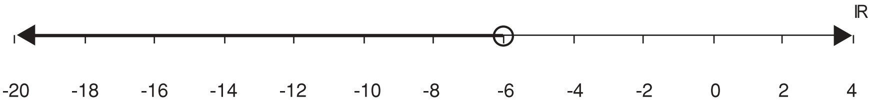
$2x.\frac{1}{2} < -12.\frac{1}{2}$

$x < -6$

2) Escriba el conjunto solución de la inecuación como intervalo:

3) Represente dicho conjunto solución en la recta numérica.

Observe la siguiente representación del conjunto solución $(-\infty, -6)$.



Nota.

Si la desigualdad fuera $x \leq -6$, en la representación gráfica el extremo – 6 estaría representado en la recta numérica por el punto asociado a -6 y resaltado con un círculo (circunferencia con región interior sombreada).

ACTIVIDADES

1. Resuelva en cada caso el cálculo indicado y complete según lo que se indica en cada encabezado de columna.

Complete con <, >, ≥ , ≤	*Complete con "igual" o "distinto"*
$-3 < -1$ $-3 \cdot 4$ ...... $-1 \cdot 4$	*Multiplicamos ambos miembros de una desigualdad por el mismo **número real positivo** y obtenemos una desigualdad de .... sentido que la dada.*
$5 > -2$ $5 \cdot (-3)$ .... $-2 \cdot (-3)$	*Multiplicamos ambos miembros de una desigualdad por el mismo **número real negativo** y obtenemos una desigualdad de .... sentido que la dada.*
$3 \geq 1$ $3 \cdot \frac{1}{2}$ .... $1 \cdot \frac{1}{2}$	*Multiplicamos ambos miembros de una desigualdad por el mismo **número real positivo** y obtenemos una desigualdad de .... sentido que la dada.*
$-15 \leq 15$ $-15 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$ .... $15 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$	*Multiplicamos ambos miembros de una desigualdad por el mismo **número real negativo** y obtenemos una desigualdad de .... sentido que la dada.*

Lo observado en el cuadro, al multiplicar a ambos miembros de una desigualdad por un número real positivo o negativo, es válido también cuando dividimos a ambos miembros de una desigualdad por un número real positivo o negativo.

2. Busque un ejemplo para verificar lo que ocurre en el caso de dividir a ambos miembros de una desigualdad por un número real positivo y otro para el caso de un número real negativo.

3. Teniendo en cuenta lo observado en el cuadro de la actividad anterior, complete con < o > según corresponda.

$x > 4$ $2x$ 8	$-12\ x < -36$ x 3	$-2\ x < 8$ x ..... -4

Conclusión. Para resolver inecuaciones de primer grado con una incógnita utilizamos las mismas propiedades que en ecuaciones, pero con la diferencia de que si multiplicamos (o dividimos)ambos miembros de una desigualdad por un número negativo, entonces la relación de desigualdad se invierte, es decir, cambia su sentido.

4. Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones, exprese el conjunto solución como un intervalo y *represente dicho intervalo en la recta numérica.*

a) $8 - 5x < 38$

b) $2x - 4 \leq 14$

NOTAS

ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Lea atentamente las siguientes situaciones y realice las actividades que le vamos proponiendo.

Situación 1

En una librería, Juan compra 3 lapiceras y dos cuadernos y paga por el total de su compra $30. Cuando regresa a su casa, trata de acordarse cuál era el precio de cada artículo pero no logra hacerlo. ¿Podrías ayudar a Juan a resolver su problema?

Usted ya tiene experiencia en identificar los datos, las incógnitas y en proponer expresiones algebraicas que representen enunciados de situaciones problema.

¿Podría escribir una expresión algebraica que represente a la situación anterior?
....

En situaciones como esta, no se identifica una sola incógnita, sino que hay más de una que se representan con distintas letras (por ejemplo **x** e **y**). Si antes no escribió la expresión algebraica correspondiente a la situación, inténtelo de nuevo
....

Es muy probable que haya escrito algo así:

Si acordamos que **l** : cantidad de lápices y **c**: cantidad de cuadernos, la expresión queda:

$3 \,.\, l + 2 \,.\, c = 40$

o también usando otras letras para representar las incógnitas:

$3 \,.\, x + 2 \,.\, y = 40$

Lo felicitamos, pues ha llegado a la expresión de una ecuación lineal con **dos incógnitas**, cuya forma difiere de la ya conocida ecuación lineal con una incógnita. Luego veremos cómo resolverla.

La expresión correspondiente a la ecuación indicada tiene la forma:

Ecuación de primer grado (lineal) con dos incógnitas:

Coeficiente de y

3 . x + 2 . y = 40

Coeficiente de x *término independiente*

Y, en general, una ecuación lineal con dos incógnitas tiene la forma:

Ecuación de primer grado (lineal) con dos incógnitas:

Coeficiente de y

a . x + b . y = c

Coeficiente de x *término independiente*

Siendo a, b y c números reales

Como verá, en esto de expresar algebraicamente un enunciado hay gran variedad de opciones. Nosotros queremos mostrarle siempre que existe más de una posibilidad para cualquier situación, pues cuanto más conozca más sencillo será su uso.

Situación 2

A continuación se muestra una tabla que registra la relación entre la medida de la cantidad de peso de un paquete de azúcar con el número de pesos que cuesta el mismo.

Medida de la cantidad de peso del paquete	*Número de pesos que cuesta*
1	0,90
2	1,80
3	2,70
4	3,60
4,5	4,05

Nota.
Al expresar 12 kg., se está indicando una cantidad de peso, donde 12 (el número) es la medida de dicha cantidad y kg. es la unidad para medir empleada.

RECORDAR

Como puede observarse en la tabla, la variación del número de pesos que cuesta un paquete de azúcar depende de las

NOTAS

NOTAS

distintas medidas de la cantidad de peso de cada uno de los paquetes de azúcar.

Además, a cada medida de la cantidad de peso del paquete se le puede asignar **un solo** número de pesos correspondiente al costo del mismo. A este tipo de dependencia se la llama dependencia funcional.

Así, a la medida de la cantidad de peso del paquete se la llama **variable independiente**, y la representamos con **x**.

Al número de pesos que cuesta cada paquete se la llama **variable dependiente**, y la representamos con **y**.

Por lo tanto, podemos decir que el número de pesos que cuesta cada paquete de azúcar **(y) está en función de la medida de la cantidad de peso del paquete (x)**.

Lo anotamos en símbolos así: $y = f(x) \rightarrow$ Se lee: "y es igual a efe de x" y significa: "el número de pesos que cuesta cada paquete de azúcar" **y** es función (o depende) (**f**) de la medida de la cantidad de peso del paquete (**x**)".

Así entonces, podemos escribir la siguiente expresión para la situación planteada: $y = 0{,}90 \cdot x$

Estamos diciendo que para averiguar el número de pesos que cuesta un paquete, debemos multiplicar 0,90 por la medida de la cantidad de peso del paquete.

Como vemos, esa expresión es una ecuación pero con dos incógnitas, una es representada por **x** y la otra por **y**.

Podemos buscar una posible solución a esta ecuación reemplazando a **x** e **y** por algunos pares de números mostrados en la tabla. Así tendríamos:

$x = 1$, $y = 0{,}90$, que verificando en la ecuación queda:
$y = 0{,}90 \cdot x$
$0{,}90 = 0{,}90 \cdot 1$

$x = 2$, $y = 1{,}80$
$y = 0{,}90 \cdot x$
$1{,}80 = 0{,}90 \cdot 2$

Si continuamos reemplazando por distintos valores veríamos que existen infinitas soluciones para esta ecuación. Entonces, los pares de valores mostrados en la tabla considerada representan algunos de los infinitos pares de números (x, y) que son solución para esta ecuación. Se pueden obtener nuevas soluciones asignando a **x** cualquier valor numérico adecuado y calculando el correspondiente valor de **y**. Existen, como dijimos, infinitos pares ordenados (**x, y**) que son solución de la ecuación dada. Como existen infinitos pares de números (x, y) que satisfacen la ecuación es imposible nombrar una a una todas las soluciones posibles y es por ello que generalmente se recurre a la representación gráfica para mostrar el conjunto solución de una ecuación lineal de primer grado con dos incógnitas.

Para analizar la representación gráfica del conjunto solución se le propone considerar las siguientes situaciones:

Situación 3

En la estación meteorológica se han registrado las medidas de temperatura correspondientes a algunos días. Se confecciona una tabla que resume en la primer columna las medidas de temperatura tomadas en grados Celsius y en la otra columna su correspondiente medida de temperatura tomada en grados Farenheit. La tabla es la siguiente:

Medidas de cantidades de temperaturas registradas en grados Celsius	*Medidas de cantidades de temperaturas registradas en grados Fahrenheit*
-10	14
-5	23
-2	28,4 ≈ 28
0	32
2	35,6 ≈ 36
5	41
10	50
15	59
20	68
25	77

Nota.
Al expresar 10° C se está indicando una cantidad de temperatura, donde 10 (el número) es la medida de dicha cantidad y °C (grados Celsius) es la unidad para medir empleada.

Observe que a cada medida de temperatura registrada en grados Celsius le corresponde una y sólo una medida de temperatura en grados Fahrenheit, lo cual nos indica que existe un vínculo muy especial entre las medidas; se trata de un vínculo funcional. Esta relación que existe entre las medidas de la temperatura en grados Celsius y las medidas de la temperatura en grados Fahrenheit es una **función**.

La tabla de medidas de temperaturas anterior se origina a partir de una fórmula que permite expresar una cantidad de

NOTAS

NOTAS

temperatura dada en grados Celsius en grados Fahrenheit, modificando las medidas por medio de una expresión como la que se muestra:

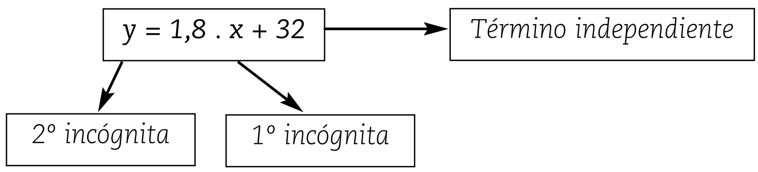
$$f(x) = 1{,}8 \cdot x + 32$$

Si pensamos en f(x) como la imagen de x por la función f, es decir f(x) = y tendríamos también la expresión equivalente a la anterior:

$$y = 1{,}8 \cdot x + 32$$

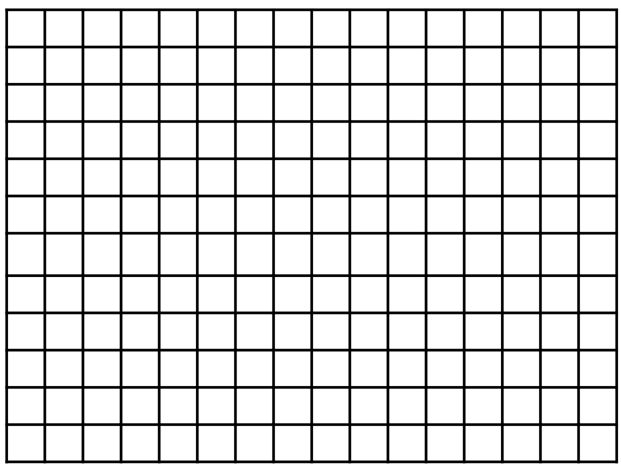
Si la relación que existe entre las variables **x** (variable independiente) e **y** (variable independiente) es tal que para cada valor de x, existe uno y sólo un valor de y, que le corresponde en dicha relación, entonces la relación recibe el nombre especial de función. Es decir que podemos pensar en una función definida entre el conjunto de medidas de temperaturas en grados Celsius como conjunto de partida y el conjunto de medidas de temperaturas en grados Fahrenheit como conjunto de llegada y dada por la fórmula: $y = 1{,}8 \cdot x + 32$.

Observe que la fórmula que define la función coincide con la fórmula de la ecuación lineal con dos incógnitas.



Esta función puede ser representada en el plano de coordenadas cartesiano, que asocia a cada par de números (x, y) un punto del plano. Le proponemos representar en un sistema de coordenadas, empleando el siguiente cuadriculado, la función anterior cuyos valores se muestran en la tabla. ¿Se anima a hacerlo?

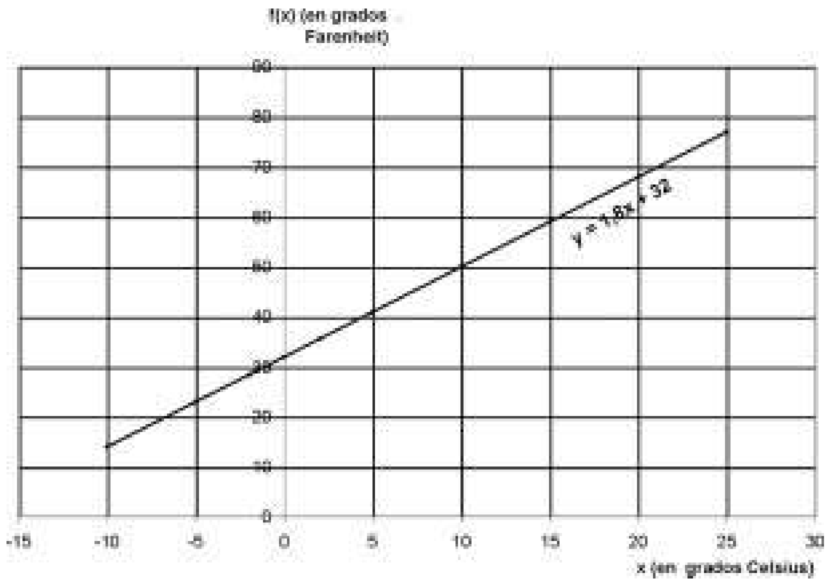
Recuerde que a cada valor de **x** y su correspondiente valor de **y** le corresponde un punto del plano de coordenadas (**x**, **y**).



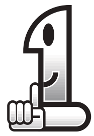
¿Cómo resultó la gráfica? ¿Qué obtuvo?

....

Seguramente coincidirá con nosotros en la obtención de esta gráfica:



RECORDAR



En los gráficos, se representan en el eje de las abscisas (**x**) los valores asignados a la variable independiente y en el eje de las ordenadas (**y**) se representan los valores asignados a la variable dependiente.

La representación gráfica de la función dada no es otra cosa que puntos alineados, puntos que pertenecen a una recta. Se trata entonces de una función lineal.

Note que cada punto representado tiene asociado un par de números que satisfacen la igualdad: $y = 1{,}8 \cdot x + 32$. Esto significa que es una solución posible de la ecuación: $y = 1{,}8 \cdot x + 32$. Por lo tanto cada punto de la gráfica corresponde a la representación gráfica de una de las soluciones de la ecuación. Generalmente se dice que la recta graficada es la representación gráfica del conjunto solución de la ecuación.

Es decir que una ecuación de primer grado con dos incógnitas tiene infinitas soluciones que pueden ser obtenidas analíticamente (tabla con los valores correspondientes de **x** y de **y**) o gráficamente (recta) representando la función lineal cuya fórmula coincide con la solución de la ecuación.

Aprovechando el momento, le comentamos que esta expresión, si la consideramos como la fórmula de la función lineal, es la ecuación explícita de una recta en la que podemos distinguir:

NOTAS

NOTAS

$$y = 1{,}8 \,.\, x + 32$$

Pendiente | *Ordenada al origen*

Recuerde que la ecuación explicita de la recta es:

$$y = a \,.\, x + b$$

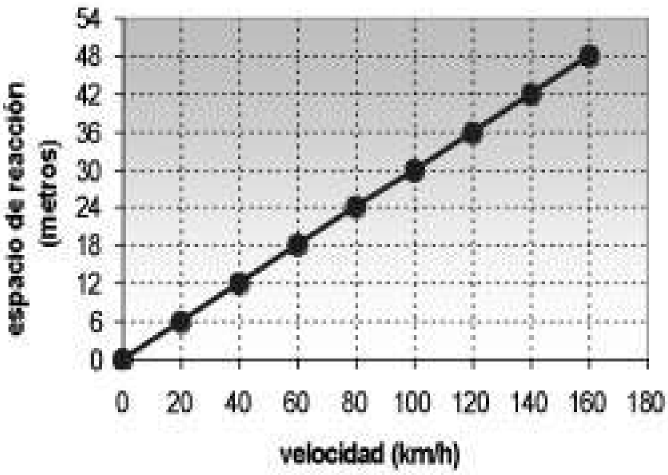
Ordenada al origen
Indica cuántas unidades por encima (si b es positivo) o por debajo (si b en negativo) del punto (0, 0) pasa la recta.
Si b = 0 la recta pasa por el punto (0, 0).

Pendiente
Indica la inclinación que tiene la recta respecto del eje de las abscisas (de las x).

Situación 4

A partir de que un automovilista advierte la necesidad de detener su auto ante la presencia de un obstáculo en su camino y hasta que el vehículo comienza ciertamente a frenar pasan unos instantes, durante los cuales se recorre una cierta distancia llamada **espacio de reacción**.

El espacio de reacción depende de la velocidad del vehículo: coincidirá que si el vehículo se desplaza a menos velocidad necesitará menos distancia para detenerse. El siguiente gráfico muestra el **espacio de reacción** (expresado en metros) en función de la velocidad del vehículo (expresada en kilómetros por hora):



Esta función dada a través de este gráfico tiene la fórmula **y = 0,3 . x** , expresión que permite determinar que la pendiente es …… y la ordenada al origen es cero porque la fórmula anterior puede escribirse de manera equivalente como **y = 0,3 . x + 0**.

NOTAS

Si pensamos en la ecuación: **y = 0,3 . x**, responda:

¿Cuántas incógnitas tiene esta ecuación?

....

¿Qué tipo de ecuación es?

....

¿Cuántas soluciones tiene?

....

Cada par de números tales que verifiquen la igualdad: **y = 0,3 . x** es solución. Para encontrar algunas soluciones sólo basta con darle valores a **x** y calcular el producto entre dicho valor y 0,3 para hallar el correspondiente valor de **y**.

Así por ejemplo si pensamos en **x = 30**, entonces **y = 0,3 . 30**, es decir **y = 9**, es decir que el par (30, 9) es solución de la ecuación indicada. De esta manera pueden obtenerse otras soluciones.

Escriba por lo menos tres soluciones de la ecuación **y = 0,3 .x**

Ubique en la representación anterior el par ordenado (30, 9), solución de la ecuación indicada. Dicho par de números corresponden a las coordenadas de un punto del plano cartesiano. ¿Dicho punto pertenece a la recta representada?

....

Por ello se dice que la recta representada es la representación gráfica del conjunto solución de la ecuación **y = 0,3 . x**.

ACTIVIDADES

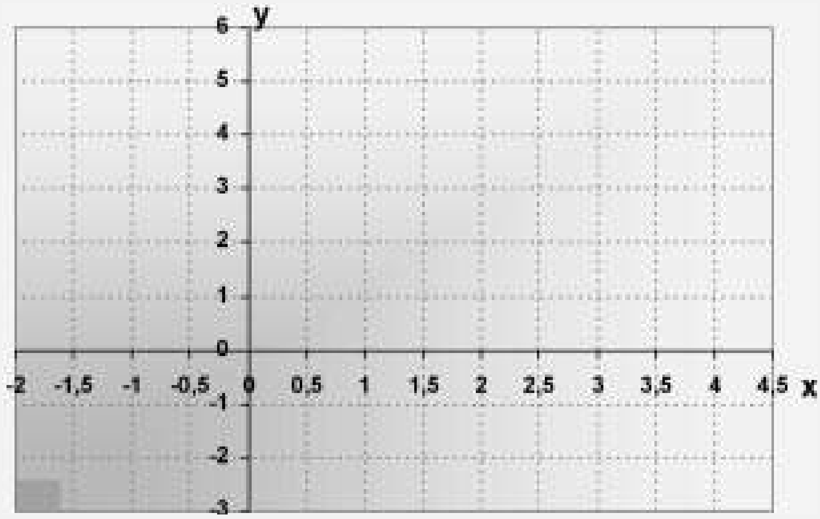
1. Por lo general se puede registrar o se conoce el consumo de electricidad promedio de algunos electrodomésticos. Por ello, cuando un ama de casa compra un artefacto eléctrico generalmente pregunta acerca del consumo en kilovatios (kw), para evitar un alto consumo de energía eléctrica. A continuación le presentamos una tabla que registra la medida de la cantidad de tiempo de uso (en horas) de un artefacto eléctrico (del tipo de la plancha o secador eléctrico) y la medida de la cantidad de energía que consume (en kw). La tabla es la siguiente:

Medida de la cantidad de tiempo de uso (horas)	*Medida de la cantidad de energía consumida (kw)*
0,5	0,6
1	1,2
1,2	1,44
2	2,4
2,5	3
4	4,8

Podemos decir que el consumo de energía está en función del tiempo de uso del artefacto. Se trata de una función y podemos escribir la fórmula que la define y poder con ella completar otros valores del tipo de la tabla de manera más simple. La fórmula es :

y = x . 1,2

a) Represente mediante un sistema de referencia cartesiano el conjunto solución de la ecuación y = x . 1,2. Utilice para ello los valores dados en la tabla y el cuadriculado que se da a continuación:



b) ¿Qué obtuvo al representar el conjunto solución de la ecuación dada?

....

c) A cada punto de la recta obtenida le corresponden sus coordenadas, un valor de abscisa y un valor de ordenada. Estos valores, ¿qué relación tienen con la ecuación?

....

d) ¿Qué tipo de ecuación es y = x . 1,2?

....

e) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación?

....

f) ¿Cómo se representa cada solución de la ecuación?

....

g) ¿Cuál es la ecuación explícita de la recta obtenida en la gráfica?

....

2. Dada la ecuación y = x . 2 – 5, se pide:

a) Complete la tabla siguiente para obtener algunas de las soluciones de la misma.

x	y
5	....
....	....
3	....
....	....
....	....

c) Grafique los pares de datos obtenidos en la tabla en un sistema de coordenadas cartesianas.

d) ¿Cómo están los puntos de la gráfica: alineados o no alineados?

....

e) Si tiene una función definida de $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$ *dada por la fórmula* $y = x \cdot 2 - 5$ *¿Qué puede decir del "tipo" de función que relaciona ambas variables?*

....

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

NOTAS

Hay situaciones en la vida que no tienen las características para ser resueltas a través de una ecuación de primer grado (la incógnita está elevada a la potencia uno) con una o con dos incógnitas. Tales situaciones pueden ser: la caída de una pelota desde que es lanzada al aire hacia arriba, el disparar un arma verticalmente y estudiar el comportamiento de la bala o las órbitas de los cometas; algunos aspectos económicos de una empresa como ganancias e ingresos son estudiados a través de las funciones de segundo grado (la incógnita está elevada a la potencia dos) o también llamadas funciones cuadráticas y de las ecuaciones de segundo grado o cuadráticas.

Lea atentamente las siguientes situaciones:

Situación 1[4]

"En el mes de mayo del año 1961, el estadounidense Alan Shepard se convirtió en el segundo hombre que viajó al espacio. La nave espacial en la que viajaba, llamada Freedom 7, no realizó una órbita alrededor de la Tierra; sólo trazó un gran arco que la proyectó a una cierta altura, para luego aterrizar en el mar, a 485 km del lugar del lanzamiento. El siguiente gráfico muestra la altura de la nave espacial (en km) a lo largo del tiempo (en minutos):"

[4]. *ARAGÓN, Mariana y otros.* ***Matemática 9. Carpeta de actividades,*** *Estrada, 2004. Pág 151.*

NOTAS

Situación 2[5]: la orca

"En los parques acuáticos podemos observar orcas y delfines que nos asombran con sus maravillosos saltos.

La curva representada en el gráfico muestra los niveles de altura que alcanza una orca en función del tiempo durante un salto."

Luego de leer las situaciones propuestas, le preguntamos:

¿La gráfica que representa cada situación es una curva o una recta?

....

¿Recuerda cómo se llama?

....

Busque información sobre la parábola. Escríbala a

[5]. ARAGÓN, *Mariana y otros.* ***Matemática 9. Carpeta de actividades,*** *Estrada, 2004. Pág 151.*

continuación:

....
....
....
....

NOTAS

Situación 3

Le decimos que el cuadrado de un número es 16 y le preguntamos cuál es ese número.

Exprese algebraicamente la situación

....

Probablemente haya escrito lo siguiente:

$x^2 = 16$

¿Qué número o qué números reales elevados al cuadrado dan por resultado 16?

....

¿Existe un único valor que haga verdadera esa igualdad?

....

¿Cuáles son los valores?

....

Como observa, encontramos dos valores que al reemplazar en la variable, hacen que la igualdad sea verdadera, esto debido a que la incógnita está elevada al cuadrado. Esos valores son: **4** o **(-4)**.

Observe que $4^2 = 16$ y que $(-4)^2 = 16$

En este camino de aprendizaje le proponemos leer atentamente la siguiente situación y completar lo que corresponda.

Situación 4

Juan es un gran inventor de adivinanzas. El otro día me plantea lo siguiente:

"Si a un número cualquiera se le resta su cuadrado se obtiene su mitad. ¿Cuál es ese número?".

¿Le interesaría descubrir el número que dice Juan?

....

Proponga alguna forma de resolverlo y no olvide escribir su

NOTAS

respuesta. No se desanime si no llega a dar la respuesta, lo importante es intentarlo. Luego le ayudaremos.

....

....

¿Se le ocurrió utilizar una expresión algebraica?...... ¿cuál?

....

Probablemente haya escrito algo como esto u otra forma equivalente:

$$x - x^2 = \frac{1}{2}x$$

¿Es esta expresión una ecuación? ..... ¿Por qué?

....

¿Cuántas incógnitas tiene?

....

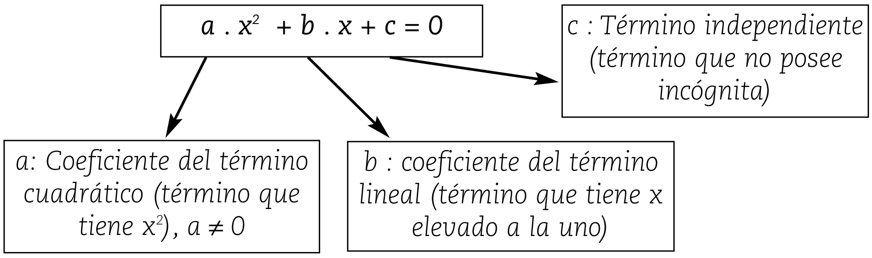
¿Qué diferencia tiene esta ecuación con las ecuaciones ya estudiadas?

....

Efectivamente, en este tipo de ecuación, además de aparecer la **x** como ya conocía, aparece elevada al cuadrado o a la dos (**x^2**). Esta es la razón por la que se denomina **ecuación de segundo grado** o **ecuación cuadrática** de una incógnita.

Una ecuación cuadrática, como profundizaremos más adelante, puede tener dos soluciones como en el caso anterior, una solución o bien ninguna solución en el conjunto de los números reales.

La ecuación cuadrática tiene como forma general y completa la expresión que sigue:



Le contamos que de este tipo de ecuaciones no sólo nos interesa su resolución, sino también la representación gráfica de una función real (definida en el conjunto de los números reales) asociada que está definida por la fórmula $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. Por ello, lo invitamos a trabajar en las siguientes situaciones:

Situación 5

NOTAS

El producto de 2 números naturales consecutivos menos dos da como resultado 18. ¿Cuáles son los números?
....

Como punto de partida le sugerimos buscar una expresión algebraica que represente lo enunciado en la situación problema.
....

Le damos una ayuda: para expresar simbólicamente un número desconocido y su consecutivo, podría utilizar:

x	*x+1*
(número desconocido)	*(consecutivo del número desconocido)*

Con esta ayuda, ya estaría en condiciones de completar en la línea punteada.

.... - .... = ...

Seguramente habrá escrito algo así:

$x \cdot (x + 1) - 2 = 18$

Mirando la expresión hallada, ¿recuerda qué propiedad debería aplicar para eliminar los paréntesis que en ella aparecen?

Escriba el nombre de la propiedad
....

En efecto, la propiedad es la distributiva de la multiplicación respecto de la adición.

Al aplicarla en la expresión dada, tenemos:

$x \cdot (x + 1) - 2 = 18$

$x^2 + x - 2 = 18$

Recuerde.
$x \cdot x = x^2$
$x \cdot 1 = x$

¿Qué propiedad (o propiedades) debería aplicar ahora para que la ecuación quede igualada a 0 (cero)?
....

En efecto, la propiedad que necesita aplicar es la uniforme y la propiedad del opuesto aditivo de 18. Hacemos entonces:

$x^2 + x - 2 + (-18) = 18 + (-18)$

Asocie los términos semejantes, resuelva y escriba cómo queda la expresión de la ecuación.

NOTAS

Llegados a este punto nos interesa ahora analizar la resolución de este tipo de ecuaciones. Para ello utilizaremos una fórmula que nos permite buscar la solución de la misma. No es objetivo de este libro la demostración de dicha fórmula, simplemente haremos uso de ella.

Teniendo en cuenta la forma completa de la ecuación cuadrática:

$$a \,.\, x^2 + b \,.\, x + c = 0, \text{ con } a \neq 0$$

La fórmula que permite encontrar la solución de las ecuaciones cuadráticas, llamada **fórmula resolvente**, es:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Observe que aparecen las letras **a, b** y **c** que representan los coeficientes de la ecuación cuadrática completa: **a** es el coeficiente del término cuadrático, **b** es el coeficiente del término lineal y **c** es el término independiente.

A su vez, la incógnita tiene dos subíndices ($\mathbf{x}_{1,2}$) debido a que nos permite encontrar los dos posibles valores que son solución de la ecuación cuadrática. Los dos valores se obtienen a partir de que en el numerador de la fórmula resolvente aparece un doble signo antes de la raíz. Esto significa que: al término **–b** hay que **sumar**, y por otro lado hay que restar, lo que indica la raíz y así se obtienen ambas soluciones. Es decir que las expresiones que permiten encontrar las posibles soluciones son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Como se verá más adelante estas soluciones pueden restringirse a una o a ninguna solución, según los distintos casos que se presenten.

Retomando la ecuación a la que usted llegó, se tiene:

$$x^2 + x - 20 = 0$$

Identifique en ella los coeficientes correspondientes, completando:

a = ... , b = ... y c = ...

Reemplace dichos coeficientes en la fórmula **resolvente** y realice los cálculos necesarios para encontrar las soluciones correspondientes:

NOTAS

¿Qué resultados obtuvo?

Complete: $x_1 =$ .... y $x_2 =$.............

Si no pudo llegar a las respuestas, le mostramos cómo lo puede hacer:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-20)}}{2.1}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+80}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 9}{2}$$

Al llegar a este punto, lo que queda es resolver, en el numerador, por un lado la suma y por otro la resta.

$$x_1 = \frac{-1+9}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{-1-9}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

Es posible verificar las soluciones obtenidas reemplazando a **x** por el número **4** en la igualdad planteada originalmente, como se muestra a continuación:

$$x\,.\,(x+1) - 2 = 18$$
$$4\,.\,(4+1) - 2 = 18$$
$$4\ .\ 5 - 2 = 18$$
$$20 - 2 = 18$$
$$18 = 18$$

y haciendo lo mismo pero con (-5). Reemplace y resuelva:

$$x\,.\,(x+1) - 2 = 18$$
$$\text{..............} - 2 = 18$$

Ahora le pedimos que escriba la respuesta de la **situación 5**.

....

¡Cuidado!: si lee nuevamente el enunciado de la **situación 5** verá que se trata de un **número natural** y su consecutivo. Por lo tanto:

¿Qué puede decir de los dos valores: x_1 y x_2, obtenidos como solución de la ecuación original?

....

¿Cuál es la respuesta correcta al problema?

....

Sin duda, no podemos decir que el número (-5) es parte de la respuesta a la situación, ya que (-5) **no** es un número natural.

Por lo tanto, la respuesta a la situación es: los números son 4 y su consecutivo 5.

NOTAS

GRÁFICA DE LAS FUNCIONES CUADRÁTICAS

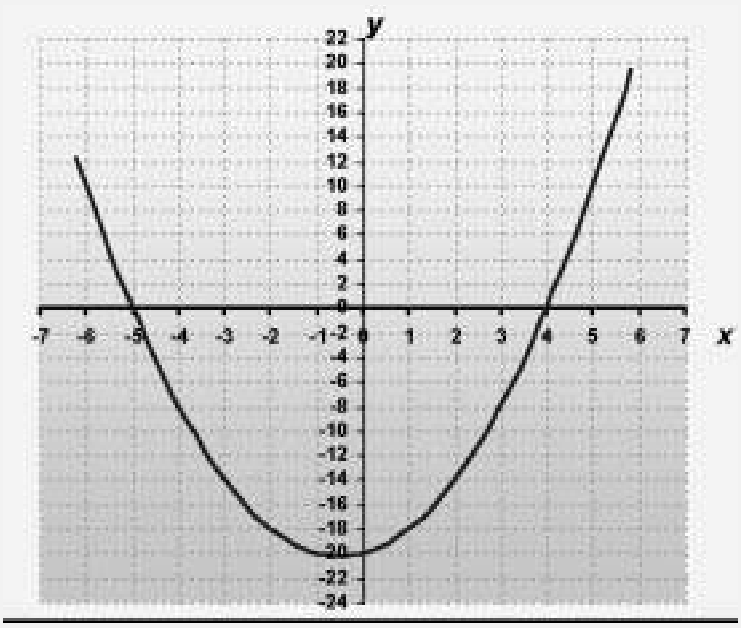
Como mencionamos en un comienzo, nos interesa tanto la resolución de ecuaciones cuadráticas como la representación gráfica de la función cuadrática real (asociada).

Desde ahora en más al referirse a una función cuadrática se considerará una función real, es decir una función definida en el conjunto de los números reales. Es importante que tenga presente que el dominio que se considerará en todas las funciones cuadráticas que se analizarán es $\mathbb{R}$.

ACTIVIDADES

1. Complete la siguiente tabla que corresponde a la función cuadrática asociada a la **situación 5**. *Nosotros le mostramos parte de su representación gráfica.*

x	$y = x^2 + x - 20$
-6	
-5	
-4	
-2	
0	
1	
2	
3	
4	
5	



a) Marque, en el gráfico, con color cada punto correspondiente a los valores mostrados en la tabla.

b) ¿Qué forma tiene la gráfica?
....

c) Observe nuevamente la gráfica y marque los puntos que tienen contacto con el eje de las abscisas o eje de las x, puntos donde la gráfica "corta" al eje de las x.

d) ¿Qué valor de abscisa o de x tienen dichos puntos señalados?
....

Nota.
La ubicación de un punto en el plano queda determinada por sus coordenadas (x, y), siendo x e y números reales tales que el primer número indica la posición de la dirección horizontal y el segundo la posición de la dirección vertical.
Al primer número se lo llama abscisa y al segundo número se lo llama ordenada.

Así Por ejemplo: el punto de coordenadas (5, 10)
Tiene abscisa 5 y ordenada 10.

e) ¿Qué valor de ordenada o de y tienen dichos puntos señalados?

....

Los valores de x indicados, valores de abscisa de los puntos cuya ordenada es cero, se llaman ceros o raíces de la función. En este caso los ceros de la función **$f(x) = x^2 + x - 20$** *son* $x_1 = 4$ *y* $x_2 = -5$

f) ¿Qué puede decir de los ceros de la función comparándolos con las soluciones de ecuación encontradas en la **situación 5** *($x^2 + x - 20 = 0$)?*

....

Es posible concluir que:

• Los valores solución de la ecuación cuadrática asociada a una función cuadrática dada coinciden con las abscisas de los puntos en los que el gráfico de la función intersecta o "corta" al eje x.

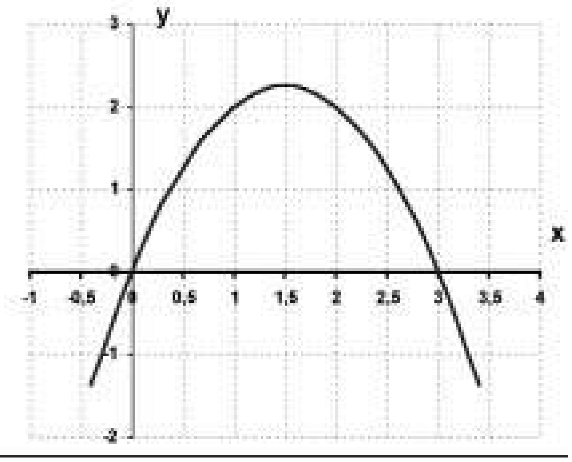
• Podemos entonces decir que la imagen de $\mathbf{x_1}$ = (-5) es cero y que la imagen $\mathbf{x_2}$ = 4 también es cero, lo anotamos **f (-5) = 0 y f (4) = 0** y entonces **x_1 = (-5)** y **x^2 = 4** se llaman **ceros** o **raíces** de la función.

NOTAS

RECORDAR

Los **ceros** o **raíces** de una función son aquellos valores de la variable independiente cuya **imagen es cero**. (nota: según la función, ésta puede tener una raíz, varias o ninguna).

• Los **ceros** o **raíces de la función** cuadrática son los valores de x a los que les corresponde cero como imagen; y ellos **son soluciones de la ecuación** cuadrática asociada.



Para hacer....

Actividad 2: Se ha representado una parte de una parábola. Esta gráfica corresponde a una función cuadrática..

NOTAS

La parábola "corta" al eje x en dos puntos, es decir, presenta **dos ceros** o raíces:

- ¿Cuáles son las abscisas de dichos puntos?

x_1 = ...
x_2 = ...

- ¿Cuáles son las ordenadas de dichos puntos?

....

- Por lo tanto, ¿cuáles son los ceros o raíces de la función?

....

La fórmula de la función de esta gráfica es:

$y = 3x - x^2$

La ecuación cuadrática asociada es: $3x - x^2 = 0$, o expresada en forma equivalente colocando el término cuadrático en primer lugar sería: $-x^2 + 3x = 0$.

Si se escribe la expresión completa de la forma explícita de la ecuación de segundo grado queda:

$-x^2 + 3x + 0 = 0$.

Recuerde.
$x^2 = 1 \cdot x^2$
$- x^2 = -1 \cdot x^2$

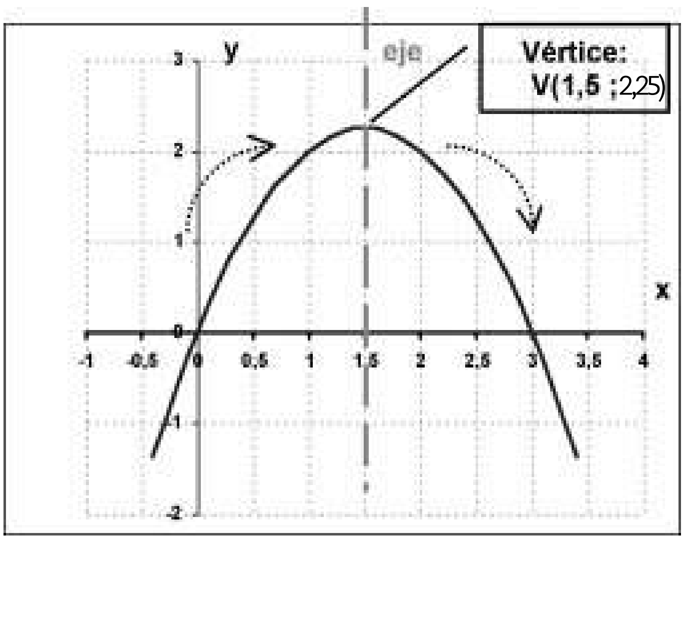
Observe que los valores correspondientes a: **a** = – 1; **b** = 3 y **c** = 0.

Conociendo dichos valores y si aplicara la fórmula resolvente para hallar la solución a la ecuación dada, ¿qué soluciones encontraría, dado que ya conoce los ceros de la función cuadrática asociada?

....

Verifique dichos valores, aplicando la fórmula resolvente:

....



• Lea con atención la descripción de la gráfica de la función cuadrática $y = 3x - x^2$ definida en $\mathbb{R}$.

• Para los valores de x menores que 1,5 (**$x < 1,5$**), la función **es creciente**.

• Para los valores de x mayores que 1,5 (**$x > 1,5$**), la función **es decreciente**.

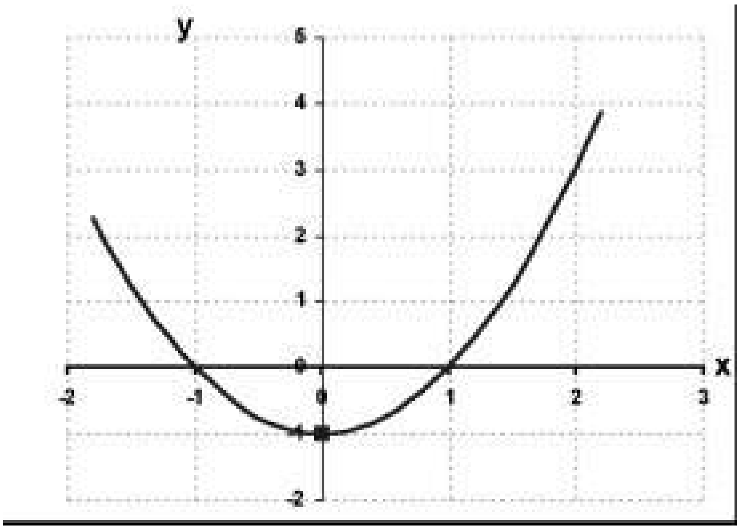
• Tiene un **vértice**, que es el punto donde se encuentra el **máximo** de la parábola.

• Tiene un **eje de simetría vertical**.

• Sus **ramas** están hacia abajo.

Mostramos la representación de otra función cuadrática, en este caso la **parábola** tiene sus **ramas** hacia arriba. La función cuadrática está definida como sigue:

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \rightarrow y = x^2 - 1$



La parábola "corta" al eje x en dos puntos, es decir que presenta **dos ceros** o raíces:

• ¿Cuáles son las abscisas de dichos puntos?
x_1 = ... x_2 = ...

• ¿Cuáles son las ordenadas de dichos puntos?
....

• Por lo tanto, ¿cuáles son los ceros o raíces de la función?
....

• ¿Cuáles son las coordenadas del vértice de la parábola?

NOTAS

NOTAS

....

•¿El vértice es un mínimo o un máximo de la función?

....

• Complete con lo que se pida en cada caso.

La fórmula de la función de esta gráfica es: **y = ……………..**

La ecuación cuadrática asociada es: $x^2 - 1 = 0$.

Recuerde.
$x^2 = 1 \, . \, x^2$

Observe los valores correspondientes a: **a** = 1; **b** = 0 y **c** = -1.

Conociendo dichos valores y si aplicara la fórmula resolvente para hallar la solución a la ecuación dada, ¿qué soluciones encontraría, dado que ya conoce los ceros de la función cuadrática asociada?

....

Si desea puede verificar dichos valores aplicando la fórmula resolvente:

....

Situación 6

Luis sabe que para resolver un problema de tipo geométrico –el que involucra un triángulo rectángulo– tiene que usar una expresión como la siguiente:

$$2x^2 + 12x + 18 = 0$$

Su problema radica en que no recuerda cómo se solucionan este tipo de ecuaciones.

¿Podría ayudar a Luis a resolver el problema?

La ecuación… ¿está igualada a cero?........

(Si no lo está, primero debe aplicar las propiedades necesarias para que así sea).

Identifique en ella los coeficientes a, b y c

....

Escriba la fórmula resolvente que se utiliza para resolver esta ecuación:

....

Reemplace por los datos necesarios

....

Resuelva

....

¿Qué puede decir de la solución hallada?

....

Ahora le proponemos que piense en la función cuadrática asociada y escriba la fórmula correspondiente: **y =** ……………….

Complete la tabla que se muestra a continuación para obtener las imágenes que esta función le asigna a algunos valores de la variable independiente.

x	$y = 2x^2 + 12x + 18$
-6	
-5	
-4	
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	

Observe parte de la representación gráfica de dicha función y marque con color en la parábola cada punto correspondiente a los valores mostrados en la tabla. Recuerde que cada punto de la gráfica tiene asociadas sus coordenadas: un valor de abscisa y un valor de ordenada.

¿Qué forma tiene la gráfica?

....

Identifique en la parábola los ceros de la función

....

- ¿Cuáles son las coordenadas del vértice de la parábola?

....

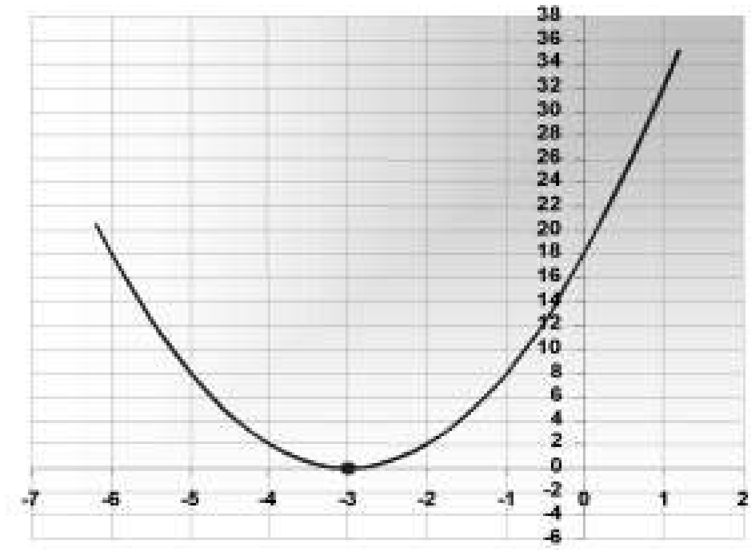
- ¿El vértice es un mínimo o un máximo de la función?

....

Observe que la parábola "toca" al eje de las x en un único punto.

NOTAS

NOTAS



Ahora le pedimos que compare las **situaciones 5 y 6** para responder:

¿Qué puede decir con el número de los ceros de las funciones analizadas en dichas situaciones?
....

¿Qué diferencia encuentra entre el número de soluciones de la **situación 5** y la **situación 6**?
....

Se puede concluir que:

• La solución de la ecuación de la **situación 6** es un **único** valor, **x = (-3)**, a diferencia de la **situación 5**, la que tiene **dos valores como solución**. Más adelante escribiremos algunas conclusiones.

A medida que vaya adquiriendo práctica para resolver una ecuación de segundo grado, usted podrá elegir entre dos caminos alternativos de solución:

• Uno sería utilizar la fórmula resolvente, y el otro,

• Realizar la gráfica, en la que podrá visualizar las soluciones a la ecuación mediante la identificación de los ceros de función cuadrática.

Situación 7

De un número desconocido se tiene la siguiente información:

El doble de su cuadrado menos su triple más 5 es igual a 0. ¿Cuál es ese número?

NOTAS

Le proponemos

• Escribir la expresión algebraica que representa la situación problema
....

• Resolver utilizando la fórmula resolvente
....
....
....

Seguramente que al resolver la ecuación **$2x^2 - 3x + 5 = 0$** tuvo una dificultad. ¿Cuál?
....

Probablemente llegó a una expresión como la que se muestra a continuación:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{-31}}{4}$$

¿Qué puede decir de la raíz cuadrada de un número negativo ($\sqrt{-31}$)?
....

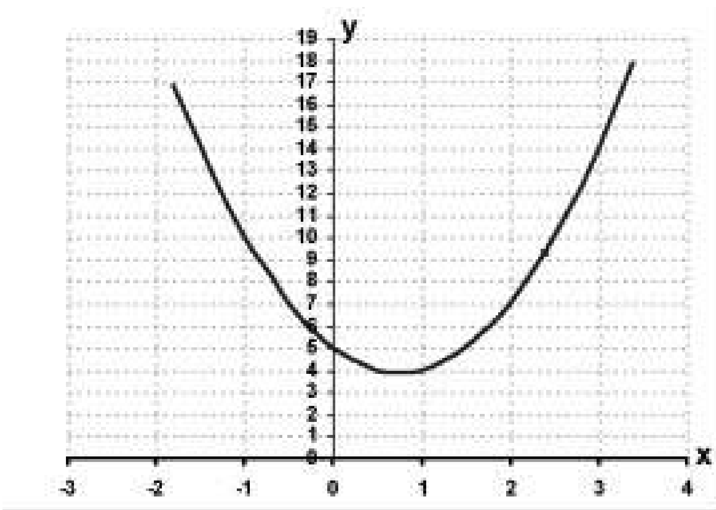
Efectivamente, no tiene solución en el conjunto de números reales. Es decir, ningún número real elevado al cuadrado nos da como resultado un número negativo.

Por lo tanto, la ecuación no tiene solución en el conjunto de los números reales.

Ahora escriba la fórmula de la función cuadrática asociada a esta ecuación:

y = ……….

Observe parte del gráfico correspondiente a dicha función:



NOTAS

• ¿Qué forma tiene la gráfica?

....

• Identifique en la parábola los ceros de la función. ¿Qué ocurre?

....

• En el gráfico, marque de color rojo el vértice de la parábola.

•¿El vértice es un mínimo o un máximo de la función?

....

Observe que la parábola no "toca" al eje de las x.

ACTIVIDADES

1. Regrese nuevamente a las situaciones 5, 6 y 7 y complete:

Situación	*Expresión de la ecuación*	*Reemplace por los coeficientes a, b y c y resuelva.*	*Completar con < , > ó =*
		$b^2 - 4\ a\ .\ c$	
5			 0
6			 0
7			 0

La expresión anotada en la tabla anterior: $b^2 - 4\ a\ .\ c$, que corresponde al radicando de la raíz de la fórmula resolvente, se denomina **discriminante** y permite discriminar el tipo de soluciones de una ecuación cuadrática o de segundo grado.

Según sea el valor del discriminante se tiene:

• $b^2 - 4\ a\ .\ c > 0$, la ecuación tiene **dos** soluciones que son números reales diferentes. Estas ecuaciones están asociadas a funciones cuadráticas que tienen dos ceros o raíces y cuyo gráfico "corta" en dos puntos el eje de las abscisas o de las x.

• $b^2 - 4\ a\ .\ c = 0$, la ecuación tiene **una** solución única que es un número real. Estas ecuaciones están asociadas a funciones cuadráticas que tienen un cero o raíz y cuyo gráfico "toca" en un único punto al eje de las abscisas o eje de las x.

• $b^2 - 4\ a\ .\ c < 0$, la ecuación **no tiene** solución en el conjunto de los números reales. Estas ecuaciones están asociadas a funciones cuadráticas que **no** tienen ceros o raíces y cuyo gráfico **no** "toca" al eje de las abscisas o eje de las x.

ACTIVIDADES

1. Represente gráficamente las siguientes funciones cuadráticas (con dominio $\mathbb{R}$*), señale en la gráfica el vértice de la parábola y resuelva la ecuación de segundo grado asociada a cada función.*

a) $y = x^2 - 5x + 6$
b) $y = 2x^2$
c) $y = -x^2 + 4x$
d) $y = -2x^2 - 7x - 3$

2. Observe las gráficas y las fórmulas de las funciones cuadráticas anteriores y complete con lo pedido.

a) ¿En qué funciones el coeficiente del término cuadrático (a) es mayor que cero?

....

b) Observe las representaciones gráficas de dichas funciones: los vértices de las parábolas correspondientes, ¿son un mínimo o un máximo?

....

c) ¿En qué funciones el coeficiente del término cuadrático (a) es menor que cero?

....

d) Observe las representaciones gráficas de dichas funciones: los vértices de las parábolas correspondientes, ¿son un mínimo o un máximo?

....

Cuando se trabaja con funciones cuadráticas en las que el dominio es el conjunto de los números reales se tiene que:

• Si el valor del coeficiente del término cuadrático de una función cuadrática o de segundo grado **a es mayor que cero** ($a > 0$), la parábola tiene un **mínimo** en el vértice.

• Si el valor del coeficiente del término cuadrático de una función cuadrática o de segundo grado **a es menor que cero** ($a < 0$), la parábola tiene un **máximo** en el vértice.

A veces es necesario resolver situaciones en las que se requiere averiguar el valor máximo o mínimo de las funciones cuadráticas con dominio $\mathbb{R}$. Como este valor corresponde a un máximo o a un mínimo como antes se analizó, existen fórmulas que permiten determinar las coordenadas del vértice sin realizar la representación gráfica, empleando las soluciones de la ecuación de segundo grado asociada o bien los coeficientes de los términos

NOTAS

NOTAS

de la ecuación. Estas fórmulas son las siguientes:

La abscisa del vértice se obtiene empleando cualquiera de estas expresiones:

$$x_v = \frac{(x_1 + x_2)}{2} \quad \text{o} \quad x_v = \frac{-b}{2a},$$

Y la ordenada del vértice: $y_v = f(x_v)$, es decir se reemplaza el valor de la abscisa del vértice en la fórmula de la función y se encuentra la imagen correspondiente.

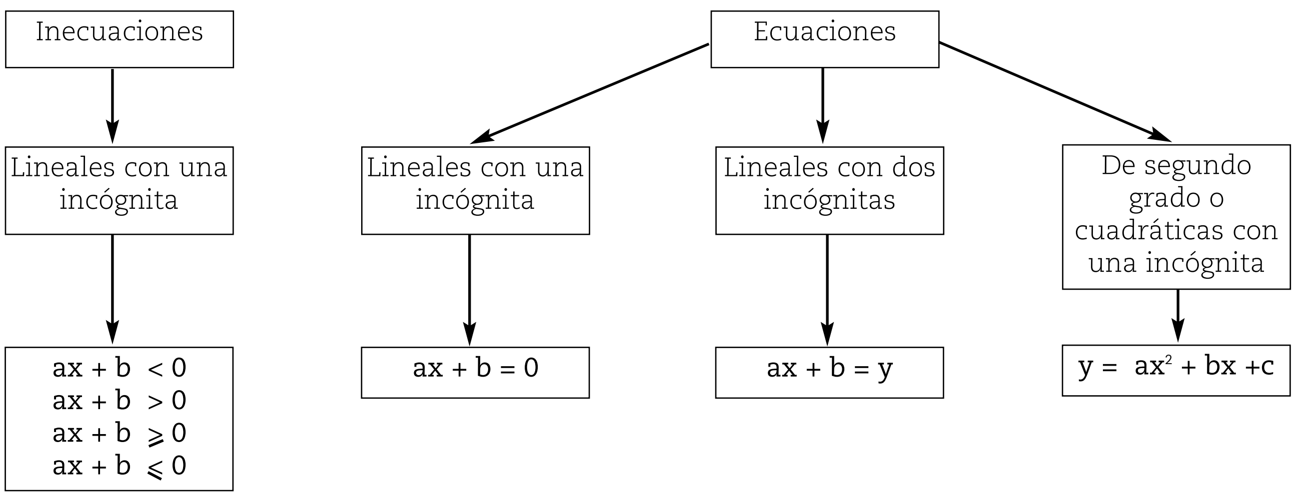
ACTIVIDADES

1. Encuentre las coordenadas del vértice de las funciones de la actividad anterior, es decir de:

a) $y = x^2 - 5x + 6$
b) $y = 2x^2$
c) $y = -x^2 + 4x$
d) $y = -2x^2 - 7x - 3$

Determine si se trata de un máximo o de un mínimo de la función.

• Le mostramos el camino recorrido hasta ahora:



SISTEMA DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

Lea atentamente la siguiente situación.

Situación 1

Dos ómnibus de larga distancia que se encuentran a una distancia de 340 km entre sí, inician su recorrido habitual.

Vehículo 1 ⇄ *Ruta 7* ⇄ *Vehículo 2*

Parte de la ciudad de Mendoza hacia la ciudad de Córdoba a una velocidad de 90 km/h	*Parte de la ciudad de Córdoba hacia la ciudad de Mendoza a una velocidad de 80 km/h*

Se considera que ambos vehículos **mantienen su velocidad** en forma constante y que **salen** de sus respectivos lugares de partida **al mismo tiempo**.

Nota.
Mantener la velocidad constante significa recorrer la misma distancia en cada unidad de tiempo (en el ejemplo: el vehículo 1 recorre 90 km en cada hora que transcurre).

Si se quiere averiguar la distancia a la que se encuentra cada uno de los vehículos de la ciudad de Mendoza –un cierto número de horas, "x"– después de haber iniciado el viaje, podemos escribir las siguientes expresiones:

Vehículo 1 ⟶ $dv_1\ (x) = 90\ .\ x$

Vehículo 2 ⟶ $dv_2\ (x) = 340 - 80\ .\ x$

Nota.
Si se multiplica la medida de la velocidad por el número de horas transcurrido desde la partida, se obtiene la distancia recorrida, en dicho tiempo.

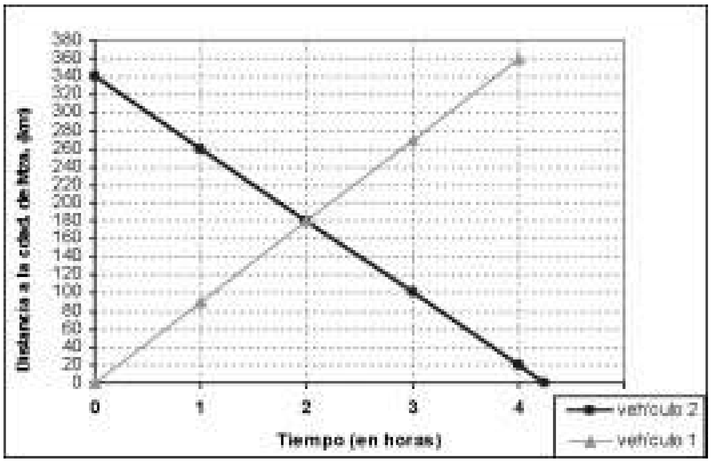
Para obtener la expresión correspondiente al vehículo 2 es necesario imaginar que dicho vehículo "retrocede" desde la ciudad de Córdoba hacia la ciudad de Mendoza. Es por ello que la expresión correspondiente para determinar a qué distancia de Mendoza se encuentra el vehículo 2 implica que a los 340 (distancia de Mendoza al momento de partir) se le resta la distancia que recorre (80 . x). Esto se debe a que al transcurrir por ejemplo una hora, ha recorrido una distancia de 80 km, por lo que está a menos de 340 km de Mendoza, exactamente a 260 km.

Ahora se pide conocer a qué distancia de Mendoza se encuentran ambos colectivos en la ruta y a cuánto tiempo de haber partido. Para ello se realiza la representación de las expresiones antes mencionadas en un sistema de referencia cartesiano. Para confeccionarla se pensó en la representación gráfica del conjunto solución de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (recuerde que tienen infinitas soluciones) en un mismo sistema de referencia cartesiano.

Una de las ecuaciones es **y = 90 . x** y la otra ecuación es **y = 340 - 80 . x**. Recuerde que estas expresiones corresponden a ecuaciones de rectas, por ello es que la gráfica que se obtiene es:

NOTAS

NOTAS



Responda:

¿Cuál es la variable independiente x?

....

¿Cuál es la variable dependiente y?

....

¿Cuáles son las coordenadas del punto de intersección de ambas rectas?

....

Esto significa que los colectivos se encuentran a las .... horas de haber comenzado su recorrido y a .... km de la ciudad de Mendoza.

Note que los puntos que pertenecen a la recta correspondiente al vehículo 1 verifican o son solución de la ecuación $y = 90 \, . \, x$ y los puntos que pertenecen a la otra recta (vehículo 2), verifican o son solución de la ecuación
$y = 340 - 80 \, . \, x$.

Hay dos ecuaciones lineales o de primer grado con dos incógnitas (en este caso x e y) que, al considerarlas simultáneamente, se dice que forman un **sistema de ecuaciones** lineales de primer grado con dos incógnitas y se expresan así:

$$\begin{cases} y = 90 \, . \, x \\ y = 340 - 80 \, . \, x \end{cases}$$

En el gráfico puede observarse que el punto de coordenadas (2, 180) pertenece a ambas rectas, por ser su punto de intersección (punto donde "se cortan" las rectas), y por ello es solución de ambas ecuaciones, es decir que satisface al mismo tiempo ambas ecuaciones del sistema. Luego, se dice que dicho punto es **solución** del sistema de ecuaciones.

NOTAS

Es decir que el par ordenado (2,180) es la solución del sistema y, según la situación planteada, significa que a 2 horas de haber iniciado el recorrido ambos vehículos se encuentran en la ruta y están a 180 km de Mendoza. A partir de este encuentro uno de los vehículos sigue su viaje a Córdoba y el otro a Mendoza.

Situación 2

Gabriela y Ana viven a una distancia de 16 km. Todos los días salen a trotar desde sus casas por el mismo camino con la idea de encontrarse, ya que ambas recorren largas distancias para reforzar su entrenamiento.

Un día acuerdan partir al mismo tiempo. Gabriela trota a una velocidad de 5 km/h y Ana a una velocidad de 3 km/h. Se desea saber cuánto tiempo después de haber partido se encuentran y a qué distancia de la casa de Ana.

Esta situación es similar a la anterior: hay dos incógnitas, el tiempo (x) y la distancia (y), y tiene asociado un sistema de ecuaciones. Intente escribir dicho sistema:

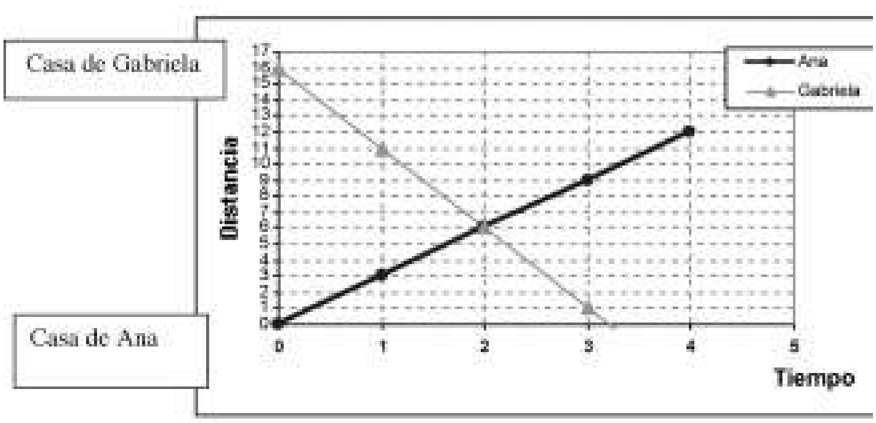
Ana recorre una distancia que depende del tiempo y de su rapidez de trote: **y = 3 . x**

De manera similar Gabriela recorre una distancia que se expresa: **y = ….. - … . x**

Luego, el sistema es:

$$\begin{cases} y = \ldots\ldots \,.\, x \\ y = 16 - 5 \,.\, x \end{cases}$$

Si se representa gráficamente el conjunto solución de ambas ecuaciones en un mismo sistema de referencia cartesiana, se obtiene lo siguiente:



NOTAS

Si observa la representación gráfica verá que hay un punto que pertenece a ambas rectas, lo que significa que es solución, al mismo tiempo de ambas ecuaciones. Las coordenadas de dicho punto es la solución del sistema de ecuaciones planteado.

¿Cuáles son las coordenadas del punto de intersección de ambas rectas?

....

Luego la solución del sistema es **x = ….. e y = ……..**

Que de acuerdo a la situación planteada significa que Ana y Gabriela se encuentran a las **2** horas de haber salido de sus casas y en ese momento están ambas a **6** kilómetros de la casa de Ana.

Hasta este punto se ha mostrado la **resolución gráfica** de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, pues cada una de las ecuaciones lineales con dos incógnitas está asociada a la gráfica de una recta. Pero existen métodos algebraicos para resolver un sistema de este tipo.

RECORDAR

Consideraremos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas al conjunto de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Si llamamos **x** a una de las incógnitas e **y** a la otra, **resolver** el sistema significa encontrar un valor de **x** y uno de **y** que verifiquen (sean solución) las dos ecuaciones al mismo tiempo.

Para resolver este tipo de sistemas puede emplearse la representación gráfica (método de resolución gráfico) o métodos algebraicos.

Situación 3

En una librería ofrecen un kit escolar integrado por tres cuadernos y tres repuestos de hojas a $39 y otro kit formado por dos cuadernos y un repuesto de hojas, de iguales características que los anteriores, a sólo $21. Se quiere saber:

a) ¿Cuál es el precio de un cuaderno?

b) ¿Cuál es el precio de un repuesto?

Si partimos de considerar que el precio de cada cuaderno representa una variable y el precio de cada repuesto de hoja otra, proponga dos ecuaciones que representen cada uno de los kits escolares:

NOTAS

Kit 1: ....

Kit 2: ....

¿Qué tipo de ecuaciones son? ¿Por qué?
....

Con ambas ecuaciones complete el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} \ldots . \, x + \ldots . \, y = 39 \\ \ldots . \, x + \ldots . \, y = 21 \end{cases}$$

Veremos la resolución por el método gráfico y por el **método de igualación**, que es uno de los métodos algebraicos que existen. De todos los métodos de resolución que existen sólo abordaremos este método con el propósito de mostrar que estos sistemas pueden resolverse algebraicamente y de tener otra forma alternativa, además del método gráfico.

MÉTODO GRÁFICO

Para poder representar las dos rectas asociadas al sistema de ecuaciones y determinar la solución del mismo siga los pasos que se indican a continuación:

1°- Considere la primera ecuación **3 . x +3 . y = 39** y despeje la incógnita **y**, que de esta forma le permitirá encontrar la ecuación explícita de la recta correspondiente. Complete la línea de puntos hasta despejar **y**:

$$3 .\, x + (-\, 3 .\, x) + 3 .\, y = 39 + (-\, 3 .\, x)$$

$$\ldots\ldots = 39 - 3 .\, x$$

$$3 .\, y \,.\, \frac{1}{3} = (39 - \ldots\ldots) \,.\, \frac{1}{3}$$

$$y = 39 .\, \frac{1}{3} - 3 .\, x .\, \ldots\ldots$$

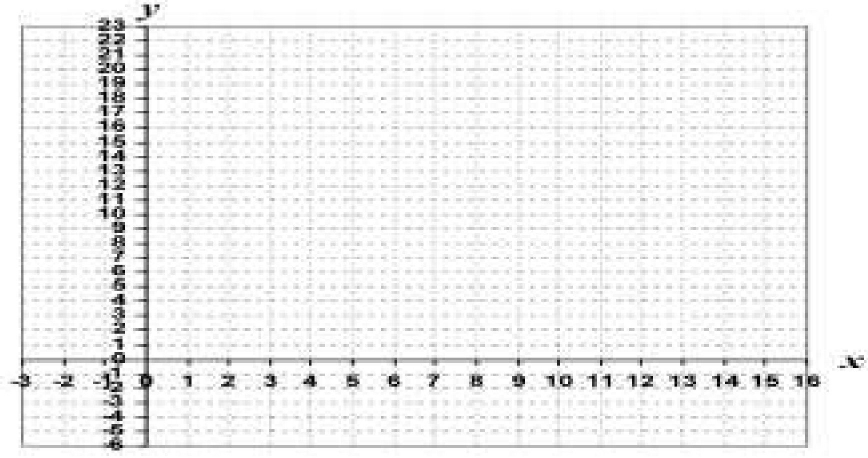
$$y = 13 - \ldots\ldots$$

2°- Considere la segunda ecuación **2 . x +1 . y = 21** y despeje la incógnita **y**, de manera similar a lo hecho en el caso de la primera ecuación.

3°- Represente gráficamente ambas rectas.

$y = 13 - 1 .\, x$
$y = 21 - 2 .\, x$

NOTAS



¿Tienen las rectas representadas un punto en común?

....

¿Cuáles son las coordenadas de dicho punto?

....

¿Cuál es la solución del sistema de ecuación?

....

Verifique dicha solución reemplazando el valor de **x** y de **y** obtenido en cada ecuación del sistema y compruebe que se cumple la igualdad.

¿Cuál es la solución de la situación problema planteada?

....

RECORDAR

La solución de un sistema de ecuaciones mediante el uso de la representación gráfica de las rectas en el plano está dada por el conjunto intersección de dichas rectas.

METODO DE IGUALACIÓN

Dado el sistema planteado:

$$\begin{cases} 3 \,.\, x + 3 \,.\, y = 39 \\ 2 \,.\, x + 1 \,.\, y = 21 \end{cases}$$

Los pasos a seguir para resolverlo aplicando este método son:

1°- Se despeja de ambas ecuaciones la misma incógnita (**x** o **y**)

NOTAS

Al despejar y, se obtienen las siguientes expresiones como se mostró :

$y = 13 - 1 . x \longrightarrow$ de la primera ecuación
$y = 21 - 2 . x \longrightarrow$ de la segunda ecuación

(Se puede despejar cualquiera de las dos incógnitas; en este caso se seleccionó **y**)

2°- Se igualan los **segundos miembros** de las expresiones anteriores, quedando de esta forma una ecuación con una sola incógnita. En este ejemplo queda:

$$13 - 1 . x = 21 - 2 . x$$

3°- Se resuelve la ecuación y se obtiene el valor de una de las incógnitas del sistema de ecuaciones.

$$13 - 1 . x = 21 - 2 . x$$
$$13 + (-13) - 1 . x = 21 - 2 . x + (-13)$$
$$- 1 . x + 2 . x = 8 - 2 . x + 2 . x$$
$$1 . x = 8$$
$$x = 8$$

4°- El valor obtenido se reemplaza en cualquiera de las dos expresiones en que aparece despejada la otra incógnita (cualquiera de las expresiones del paso 1°).

En este caso, si se selecciona la expresión $y = 13 - 1 . x$
Al sustituir **x** por 8 queda: $y = 13 - 1 . 8$
$y = 5$

5° - Se ha obtenido así la solución del sistema: **x** = 8 e **y** = 5.

ACTIVIDADES

1. Resuelva el siguiente sistema aplicando el método de igualación:

$$\begin{cases} 2 . x + 10 . y = 14 \\ 3 . x - 5 . y = 11 \end{cases}$$

Le ayudamos escribiendo los pasos que debe seguir:

*1°- Se despeja de ambas ecuaciones la misma incógnita (**x** o **y**).*
Se puede despejar cualquiera de las dos incógnitas. En este caso se selecciona..........

2°- Se igualan los segundos miembros de las expresiones anteriores y queda de esta forma una ecuación con una sola incógnita.

En este ejemplo queda:

………………..= ………………

3°- Se resuelve la ecuación y se obtiene el valor de una de las incógnitas del sistema de ecuaciones.

……………………..
……………………
……………………
…………………..

4°- El valor obtenido se reemplaza en cualquiera de las dos expresiones en que aparece despejada la otra incógnita (cualquiera de las expresiones del paso 1°).

……………………..
……………………
……………………
…………………..

5° - Se ha obtenido así la solución del sistema:

x = ………. *e* y = ……….

NOTAS

………………………………………
………………………………………
………………………………………
………………………………………
………………………………………
………………………………………
………………………………………
………………………………………
………………………………………
………………………………………
………………………………………
………………………………………
………………………………………
………………………………………
………………………………………
………………………………………
………………………………………
………………………………………
………………………………………
………………………………………
………………………………………
………………………………………
………………………………………
………………………………………
………………………………………

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS SEGÚN EL NÚMERO DE SOLUCIONES

Los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas pueden tener una, más de una o ninguna solución, y según sea el número de éstas, como veremos, reciben un nombre particular.

Para avanzar en el tema vuelva a leer la **situación 3** antes propuesta y conteste:

¿Por qué cree que en el caso de la **situación 3** la intersección de las rectas está dada por un conjunto unitario (formado por un solo punto)?
……………………………………………………………………………………………

Efectivamente, el punto de coordenadas (8, 5) representa la solución al sistema propuesto. Ambas ecuaciones se verifican sólo para esos valores.

RECORDAR

Este tipo de sistema se denomina "sistema **compatible**

determinado". Las rectas se intersectan en un único punto (son secantes), por lo que el sistema tiene **solución única**.

Situación 4

Se quieren hallar números tales que su suma sea igual a cuatro y que la suma de sus triples sea igual a doce.

Le proponemos resolver esta situación a través de su **representación gráfica** o **método gráfico**:

• Identifique los datos y las incógnitas, y las relaciones que existen entre ellos.

• Exprese algebraicamente mediante un sistema de ecuaciones.

• Despeje y en ambas ecuaciones para lograr las formulas de la función lineal.

• Represente ambas rectas en el mismo sistema de referencia cartesiana.

¿Qué puede decir de las rectas obtenidas?
....

¿Qué puntos tienen en común "ambas" rectas?
....

¿Para qué pares de valores (**x, y**) se verifican ambas ecuaciones al mismo tiempo?
....

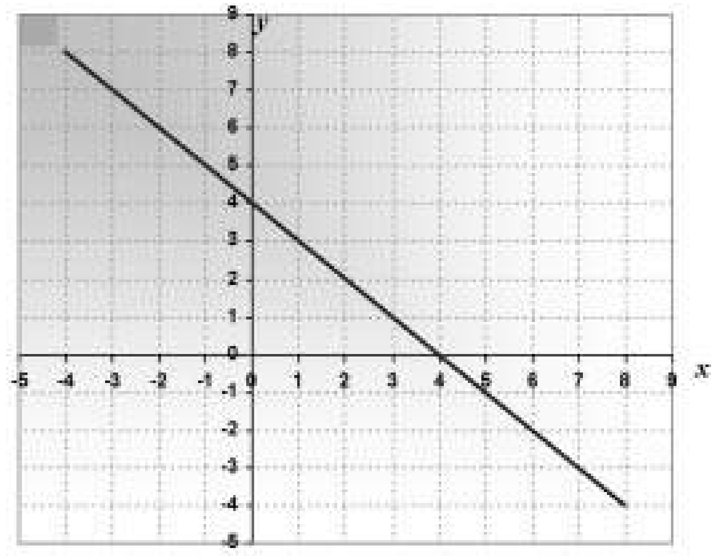
Como vemos, al escribir las ecuaciones y luego despejar la variable y en ambas obtenemos las expresiones de la misma función lineal:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + 3y = 12 \end{cases} \xrightarrow{\text{Despejamos } \mathbf{y}:} \begin{cases} y = 4 - x \\ y = 4 - x \end{cases}$$

Por lo que si se representan en el sistema de coordenadas cartesianas, obtenemos una sola recta:

NOTAS

NOTAS



Significa que existen **infinitos** pares de valores (**x, y**) que verifican ambas condiciones.

Así, por ejemplo, para (**1**,**3**), (**2**,**2**), (**-4**,**8**), por nombrar algunos. Luego, podríamos seguir proponiendo más pares de números que satisfagan ambas ecuaciones al mismo tiempo.

Si para un sistema de ecuaciones existen infinitas soluciones, el sistema se denomina "sistema compatible indeterminado".

Situación 5

Juan y Pedro van a la librería y realizan una compra. Juan compra dos cuadernos y una lapicera y paga $5. Por otro lado, Pedro compra seis cuadernos y tres lapiceras iguales a las que compró Juan y paga $18. Cuando salen de la librería, Pedro decide regresar y le dice al vendedor que hay una equivocación. ¿Podría decir por qué?

....

....

Escriba el sistema de ecuaciones relacionado a esta situación y resuelva aplicando el método gráfico de resolución

NOTAS

¿Qué puede decir de las rectas representadas?

....

¿Cuál es la intersección de ambas?

....

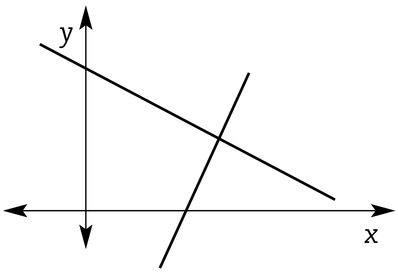
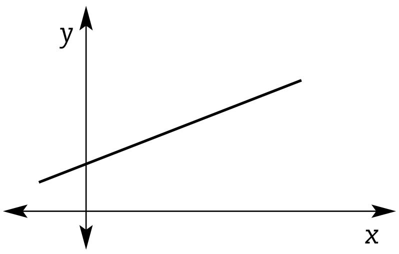
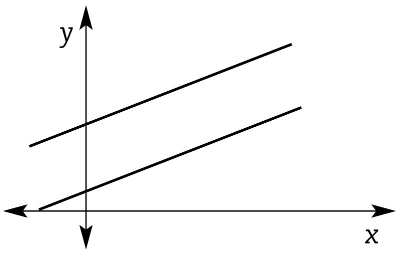
¿Cuál es la pendiente en cada caso?

....

Al representar las rectas ocurre que las dos son paralelas disjuntas; vemos que no existen puntos en común, es decir que no existe ningún par ordenado de valores que verifique ambas ecuaciones al mismo tiempo. El sistema **no** tiene solución, por ello se denomina "sistema **incompatible**".

En síntesis....

Luego de este recorrido por las situaciones propuestas, le proponemos completar la siguiente síntesis:

Ejemplo de representación del sistema	Descripción
	**Las rectas son secantes** Tienen pendientes diferentes. El sistema es compatible determinado. La solución es única.
	**Las rectas son paralelas coincidentes (una sola recta)** Tienen .... pendiente e .... ordenada al origen. El sistema es .... Tiene .... soluciones.
	**Las rectas son paralelas ....** Tienen .... pendiente pero .... ordenada al origen. El sistema es .... Tiene .... soluciones.

ACTIVIDADES

1. Le proponemos a continuación algunas situaciones problema para que usted resuelva aplicando el método de igualación y /o gráfico:

A) El lunes María compra 2 pantalones y 3 camisas de vestir en un comercio y gasta $780. El día martes su hermana compra en el mismo comercio 10 pantalones y 8 camisas del mismo tipo que las que compró María y gastó $1320. Si el comercio no había variado el precio de sus productos, ¿cuánto cuesta cada pantalón?, ¿cuánto cuesta cada camisa?

B) Resuelva aplicando el método de igualación.

$$\begin{cases} 2 \,.\, x + 4 \,.\, y = 10 \\ 2 \,.\, x - 2 \,.\, y = 4 \end{cases}$$

C) Resuelva gráficamente y clasifique los siguientes sistemas:

I) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2 \,.\, x + 2 \,.\, y = 6 \end{cases}$

II) $\begin{cases} y - x = 2 \\ 6 + y = x \end{cases}$

BIBLIOGRAFÍA UTILIZADA EN LA ELABORACIÓN DEL MATERIAL

ARAGÓN, Laurito (2004), **Matemática 9**. Carpeta de actividades, Bs.As., Estrada.

LATORRE, María Laura y otros (1998), **Matemática 9**, Bs.As., Santillana EGB.

SARICO, Daniel (1989), **Matemática 3**. Guía de aprendizaje y evaluación, Bs.As., Kapeluz.