

# Espaces préhilbertiens réels Espaces euclidiens

Dans tout le chapitre,  $E$  désigne un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$

## 1 PRODUIT SCALAIRE

### Définition 1

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Un **produit scalaire sur  $E$**  est une application  $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y) \longmapsto \langle x \mid y \rangle$ .

**Bilinéaire**  $\forall x_1, x_2, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \langle \lambda x_1 + x_2 \mid y \rangle = \lambda \langle x_1 \mid y \rangle + \langle x_2 \mid y \rangle$   
 et  
 $\langle y \mid \lambda x_1 + x_2 \rangle = \lambda \langle y \mid x_1 \rangle + \langle y \mid x_2 \rangle$ .

**Symétrique**  $\forall x, y \in E, \quad \langle x \mid y \rangle = \langle y \mid x \rangle$ .

**Positive**  $\forall x \in E, \quad \langle x \mid x \rangle \geq 0$ .

**Définie positive**  $\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \quad \langle x \mid x \rangle > 0$ .

**Notation** Le produit scalaire des vecteurs  $x$  et  $y$  peut aussi être noté  $(x \mid y), \langle x, y \rangle$  ou encore  $x \cdot y$ .

### En pratique

On montre toujours dans cet ordre :

- ① que la forme est bien définie (si c'est une intégrale, intégrale généralisée, une limite etc),
- ② la symétrie
- ③ la linéarité d'un côté, la symétrie donnant la linéarité de l'autre côté,
- ④ la positivité
- ⑤ que la forme bilinéaire est définie positive

Pour le dernier point, il suffit de montrer que la forme est définie. Pour cela, on utilise souvent

- Si une somme de termes positifs est nulle, alors tous les éléments de cette somme sont nuls.
- Une fonction continue positive, d'intégrale nulle sur  $[a, b]$  (où  $a \neq b$ ) est nulle sur  $[a, b]$ .
- Si un polynôme a une infinité de racines, alors c'est le polynôme nul.

Entraînez vous sur les exemples suivants.

**Exemple 1**

Le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^3$  est, pour  $\vec{u} = (x, y, z)$  et  $\vec{v} = (x', y', z')$ ,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ .

**Exemple 2**

Le produit scalaire canonique sur  $\mathbb{R}^n$  est  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n x_k y_k$

et peut s'écrire matriciellement

$$X \cdot Y = X^T Y.$$

**⚠ ATTENTION** Il n'y a pas un seul produit scalaire. De nombreux produits scalaires peuvent exister sur un même espace vectoriel. L'application  $(X, Y) \mapsto {}^t X \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} Y$  est par exemple un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^2$  distinct du produit scalaire canonique.

**Exemple 3**

Sur  $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ , où  $a < b$ , un produit scalaire usuel est

$$(f | g) = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

**Exemple 4**

Sur  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ , le produit scalaire canonique est  $(A | B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{ij} b_{ij}$ .

C'est en fait le même produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^{np}$  si on regarde l'isomorphisme entre  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  et  $\mathbb{R}^{np}$ .

Son expression matricielle est

$$({}^t A | B) = \text{Tr}({}^t A B).$$

**Définition 2 : Espace préhilbertien / euclidien**

Un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  muni d'un produit scalaire s'appelle **un espace préhilbertien réel**.

Un **espace euclidien** est un espace préhilbertien réel de dimension finie.

**Exemple 5**

Munit des produits scalaires canoniques,  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  sont des espaces euclidiens.

**⚠ ATTENTION** Muni du produit scalaire défini ci-dessus,  $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$  n'est pas un espace euclidien car ce n'est pas un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. C'est seulement un espace préhilbertien réel.

**En dimension finie**

En dimension, Norme et produit scalaire peuvent toujours s'exprimer dans une base de  $E$ , ce qui nous donne une forme canonique du produit scalaire.

Posons  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien, et  $\mathcal{B} := \{b_1, \dots, b_n\}$  une base de  $E$ .

On a alors, pour tout  $x, y \in E$ , de coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  et  $(y_1, \dots, y_n)$  dans la base  $\mathcal{B}$ , et par bilinéarité,

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i b_i, \sum_{j=1}^n y_j b_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle b_i, b_j \rangle.$$

Donc, par définition du produit matriciel,

$$\langle x, y \rangle = {}^t \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle b_1, b_1 \rangle & \cdots & \langle b_1, b_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle b_n, b_1 \rangle & \cdots & \langle b_n, b_n \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Cela donne une forme très canonique d'un produit scalaire en dimension finie, qui donc donné seulement par une matrice  $\dim E \times \dim E$ .

## 2 NORME

On munit à partir de maintenant  $E$  muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

### Définition 3 : Norme et distance associée à un produit scalaire

Soit  $E$  un **espace préhilbertien réel**.

On appelle norme sur  $E$ , associée au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , l'application  $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ , définie pour tout  $x \in E$  par  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

On dit qu'un vecteur  $x$  de  $E$  est **unitaire** si  $\|x\| = 1$ .

Pour tous  $x, y \in E$ , le réel  $\|x - y\|$ , souvent noté  $d(x, y)$ , est appelé la **distance entre  $x$  et  $y$** , associée au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

### Définition d'une norme

On remarque que la norme euclidienne, c'est à dire définie à partir d'un produit scalaire,  $x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  vérifie les trois conditions de la définition d'une norme sur  $E$ , c'est-à-dire que,

**Positive** C'est une application à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ .

**Axiome de séparation**  $\forall x \in E, \quad ( \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0 )$ .

**Positivement homogène**  $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ .

**Sous-additive**  $\forall (x, y) \in E^2, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

**⚠ ATTENTION** Comme écrit, la distance n'est pas forcément celle qu'on croit! Elle dépend d'un choix de produit scalaire.

Par exemple, pour le produit scalaire  $(X, Y) \mapsto {}^t X \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} Y$  sur  $\mathbb{R}^2$ ,  $\|(1, 0)\| = \sqrt{3} \neq 1$ .

### Relations Norme / produit scalaire

Vous pouvez montrer ces relations. C'est un bon exercice d'utilisation de la bilinéarité et de la symétrie. On a les identité remarquables

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \quad \text{et} \quad \langle x + y, x - y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2,$$

et l'identité de polarisation

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

**Exemple 6****Égalité du parallélogramme**

Montrer que pour tous vecteurs  $x, y \in E$  on a  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

La somme du carré des longueurs des diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des longueurs des côtés.

**Proposition 1 : Inégalités**

Pour tout  $x, y \in E$ ,

- ① **Inégalité de Cauchy-Schwarz**  $|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ , avec égalité, si et seulement si la famille  $\{x, y\}$  est liée.
- ② **Inégalités triangulaires**  $||x\| - \|y\|| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ , la deuxième inégalité étant une égalité si et seulement si  $x$  et  $y$  sont colinéaires de même sens.

Preuve.

- ① Souvenez-vous de la preuve ? On pose un polynôme  $P = \|a + Xb\|^2$ , et ...

- ② On a  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \stackrel{①}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$ , puis on prend la racine, fonction croissante sur  $[0, +\infty[$ .

D'après ①, en cas d'égalité, il faut que  $x$  et  $y$  soit colinéaires. Supposons que  $y = \lambda x$ , pour un certain  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a alors  $\lambda\|x\|^2 = \langle x, \lambda x \rangle = \langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| = \|x\| \cdot \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|^2$ , donc  $\lambda = |\lambda| \geq 0$ . La réciproque est immédiate. Enfin, pour la première inégalité, on se rappelle...

$$\|x\| = \|(x + y) + (-y)\| \leq \|x + y\| + \|-y\| = \|x + y\| + \|y\|,$$

$$\text{donc } \|x\| - \|y\| \leq \|x + y\|, \quad \text{et de même } \|y\| - \|x\| \leq \|x + y\|.$$

□

**Exemple 7**

Cela donne pour certains produits scalaires déjà connus,

$$\forall (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}.$$

$$\forall (f, g) \in \mathcal{C}([a, b])^2, \quad \left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} \sqrt{\int_a^b g(t)^2 dt}.$$

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^\Omega, \quad \mathbb{E}(XY) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)} \sqrt{\mathbb{E}(Y^2)}.$$

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}), \quad \text{Tr}({}^t AB) \leq \sqrt{\text{Tr}({}^t AA)} \sqrt{\text{Tr}({}^t BB)}.$$

Arrivez-vous à reconnaître les produits scalaires concernés ?

**Exemple 8**

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$ .

Pour tout  $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ , on a  $|f(b)^2 - f(a)^2| \leq 2 \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} \sqrt{\int_a^b f'(t)^2 dt}$ .

En effet, appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz à  $f$  et  $f'$  dans l'espace préhilbertien réel  $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$  muni du produit scalaire  $(u, v) \mapsto \int_a^b u(t)v(t)dt$ ,

$$\frac{1}{2} |f^2(b) - f^2(a)| = \left| \int_a^b f(t)f'(t)dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} \sqrt{\int_a^b f'(t)^2 dt}.$$

### 3 ORTHOGONALITÉ

#### 3.1 DÉFINITIONS ET BASE ORTHONORMALE

##### Définition 4 : Orthogonalité

Soient  $E$  un espace préhilbertien réel,  $x, y \in E$ ,  $X$  et  $Y$  deux parties de  $E$  et  $(x_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs de  $E$ .

**Orthogonalité de deux vecteurs**  $x$  et  $y$  sont dit **orthogonaux** si  $\langle x, y \rangle = 0$ . On le note  $x \perp y$ .

**Orthogonalité de deux parties** Les parties  $X$  et  $Y$  sont dites **orthogonales**, si pour tous  $x \in X$  et  $y \in Y$ ,  $\langle x, y \rangle = 0$ . On le note  $X \perp Y$ .

**Famille orthogonale** La famille  $(x_i)_{i \in I}$  est dite **orthogonale**, si pour tous  $i, j \in I$  distincts,  $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ .

**Orthogonal d'une partie** L'ensemble  $Y^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in Y, \langle y, x \rangle = 0\}$  est appelé **orthogonal de la partie  $Y$  de  $E$** .

**Famille orthonormale** La famille  $(x_i)_{i \in I}$  est dite **orthonormale** (ou orthonormée) si elle est orthogonale et constituée de vecteurs unitaires, autrement dit, si pour tous  $i, j \in I$ ,  $\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$ .

**Vocabulaire** Une **base orthonormale** est alors une famille libre et génératrice qui vérifie la condition d'orthonormalité.

##### Exemple 9

Pour le produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^n$ , la base canonique  $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $\mathbb{R}^n$  est orthonormale car, pour tous  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  ${}^t b_i e_j = \delta_{ij}$ .

##### Exemple 10

Pour le produit scalaire canonique de  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ , la base canonique  $(E_{i,j}^{n,m})_{1 \leq i,j \leq n}$  de  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$  est orthonormale car, pour tous  $i, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $j, l \in \llbracket 1, m \rrbracket$ ,  $(E_{i,j}^{n,m} \mid E_{k,l}^{n,m}) = \text{tr} \left( E_{j,i}^{m,n} E_{k,l}^{n,m} \right) = \delta_{i,k} \text{tr} \left( E_{j,l}^{m,m} \right) = \delta_{i,k} \delta_{j,l}$ .

##### Exemple 11

On munit  $\mathbb{R}[X]$  du produit scalaire  $\langle P, Q \rangle := \int_0^1 \tilde{P}(t) \tilde{Q}(t) dt$ , pour tout  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ .

Trouvons le réel  $a$  afin que les polynômes  $X^2$  et  $X - a$  soient orthogonaux, et trouver la norme de chacun de ces vecteurs.

Il faut donc que  $\langle X^2, X - a \rangle = 0$ , soit  $0 = \int_0^1 t^3 - at^2 dt = \left[ \frac{t^4}{4} - a \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{4} - a/3$ , d'où  $a = \frac{3}{4}$ .

On a alors  $\|X^2\|^2 = \int_0^1 t^4 dt = \frac{1}{5}$  et  $\left\| X - \frac{3}{4} \right\|^2 = \int_0^1 \left( t - \frac{3}{4} \right)^2 dt = \frac{7}{12}$

##### Exemple 12

La famille des fonctions  $S_n = t \mapsto \sin(nt)$ , avec  $n$  décrivant  $\mathbb{N}^*$ , est orthonormale dans  $\mathcal{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$  pour le produit scalaire  $(f, g) \mapsto \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$ . En effet, pour tous  $m, n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\langle S_m, S_n \rangle = \begin{cases} \|S_n\|^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2nt)}{2} dt = 1 - \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin(2nt)}{4n} \right]_{t=0}^{t=2\pi} = 1 & \text{si } m=n \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos((m-n)t) - \cos((m+n)t)) dt = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\sin((m-n)t)}{m-n} - \frac{\sin((m+n)t)}{m+n} \right]_{t=0}^{t=2\pi} & \text{si } m \neq n \end{cases}$$

**Proposition 2 : Propriétés**

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel. Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$  et  $F$  et  $G$  deux sous-espaces de  $E$ .

① **Théorème de Pythagore**  $\forall x, y \in E, x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$

Pour toute famille orthogonale  $(x_1, \dots, x_n)$  de  $E$ ,  $\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.$

② **Liberté d'une famille orthogonale** Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de  $E$  est libre. Donc, si  $\dim E = n$ , toute famille orthogonale de  $n$  vecteurs non nuls de  $E$  est une base de  $E$ .

③ **Structure d'espace vectoriel** L'orthogonal d'une partie de  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

④ **Inclusion**  $A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp.$  De plus,  $A^\perp = (\text{Vect } A)^\perp$  et  $A \subset A^{\perp\perp}.$

⑤ **Intersection**  $F^\perp \cap G^\perp = (F + G)^\perp$  et  $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.$

Preuve.

① Il s'agit seulement de simplifier les identités remarquables. A vous les stylos !

② Soient  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille orthogonale de vecteurs non nuls et  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_{\mathbb{R}^n}.$

On a alors  $0 = \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid x_k \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x_i \mid x_k \rangle = \lambda_k \|x_k\|^2.$  Comme  $x_k \neq 0_E, \lambda_k = 0.$  En procédant pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on obtient que la famille est libre.

③ On a  $0_E \in A^\perp$ , car pour tout  $a \in A, \langle 0_E, a \rangle = 0.$

De plus, soient  $x_1, x_2 \in A^\perp$  et  $\lambda \in \mathbb{R}.$  Pour tout  $a \in A, \langle \lambda x_1 + x_2, a \rangle = \lambda \langle x_1, a \rangle + \langle x_2, a \rangle = \lambda \cdot 0 + 0 = 0,$   
Donc  $\lambda x_1 + x_2 \in A^\perp.$

④ Si  $A \subset B$ , alors  $\forall x \in B^\perp$ , pour tout  $a \in A, \langle x, a \rangle = 0$ , car  $a \in B.$

Comme  $A \subset \text{Vect } A$ , il suffit de montrer que  $A^\perp \subset (\text{Vect } A)^\perp.$  Soient  $x \in A^\perp$  et  $y \in \text{Vect } A.$  Il existe alors,  $a_1, \dots, a_l \in A$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_l \in \mathbb{R}$ , tels que  $y = \sum_{k=1}^l \lambda_k a_k.$  On a alors,  $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^l \lambda_k \langle x, a_k \rangle = 0$ , d'où l'inclusion.

Enfin,  $A \subset A^{\perp\perp}$  signifie juste que tout vecteur de  $A$  est orthogonal à tout vecteur de  $A^\perp$ , ce qui est évident par définition de  $A^\perp.$

⑤ (C) Si  $x \in F^\perp \cap G^\perp, f \in F$  et  $g \in G$ , alors  $\langle x \mid f + g \rangle = \langle x \mid f \rangle + \langle x \mid g \rangle = 0.$

Ainsi  $F^\perp \cap G^\perp \subset (F + G)^\perp.$

(D) Si  $x \in (F + G)^\perp$ , alors, pour tout  $f \in F$  et tout  $g \in G, \langle x \mid f \rangle = \langle x \mid f + 0_E \rangle = 0$

$\langle x \mid g \rangle = \langle x \mid 0_E + g \rangle = 0$

D'où  $(F + G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp.$

□

**⚠ ATTENTION** Le théorème de Pythagore admet une réciproque pour 2 vecteurs, mais cette réciproque ne perdure pas pour plus de vecteurs.

Si  $v_1 = (2, 0), v_2 = (2, 0)$  et  $v_3 = (-1, 2)$  de  $\mathbb{R}^2$  muni du produit scalaire canonique.

Alors  $\|v_1 + v_2 + v_3\|^2 = \|(3, 2)\|^2 = 13 = \|(2, 0)\|^2 + \|(2, 0)\|^2 + \|(-1, 2)\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \|v_3\|^2$ , et pourtant ces vecteurs ne sont pas orthogonaux entre eux.

L'hypothèse de non nullité, dans ②, n'est pas là pour décorer. Un vecteur nul peut se cacher dans une famille orthogonale, sans contredire l'orthogonalité de cette famille.

Contrairement aux apparences, il n'est pas vrai en général que  $F^{\perp\perp} = F.$

**Exemple 13**

Pour tout espace préhilbertien réel  $E$ ,  $\{0_E\}^\perp = E$  et  $E^\perp = \{0_E\}$ .

Pour la seconde égalité, rappelons que  $0_E$  est le seul vecteur de  $E$  orthogonal à tout vecteur.

**Exemple 14**

Dans l'espace euclidien canonique  $\mathbb{R}^3$ , le plan vectoriel d'équation  $5x - 7y + 3z = 0$  n'est jamais que l'orthogonal  $\{(5, -7, 3)\}^\perp$  car pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,  $\langle (5, -7, 3), (x, y, z) \rangle = 5x - 7y + 3z$ .

On a d'autres écritures des plans (et en particulier des hyperplans).

**Exemple 15**

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel euclidien  $E$ . Que penser de  $(F \cup G)^\perp$  ? Y a-t-il une expression en fonction de  $F^\perp$  et  $G^\perp$  ?

On peut remarquer que  $F, G \subset F \cup G$  donc  $(F \cup G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$ .

Prenons maintenant  $x \in F^\perp \cap G^\perp$ . Pour tout  $y \in F \cup G$ , en discutant selon l'appartenance de  $y$  à  $F$  ou  $G$ , on a  $\langle x | y \rangle = 0$  donc  $x \in (F \cup G)^\perp$ . Ainsi  $F^\perp \cap G^\perp \subset (F \cup G)^\perp$ .

Donc  $(F \cup G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$

**En dimension finie**

En reprenant l'expression obtenue dans la remarque **En dimension finie** de la page 2, et en supposant que la base soit orthonormale, on a

$$\langle x, y \rangle = {}^t \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1 \quad \cdots \quad x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

On obtient donc les formules du produit scalaire et de la norme écrits dans une base orthonormée

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k = {}^t X Y$$

et

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} = \sqrt{{}^t X X}.$$

Elles sont très utiles en pratique pour leur forme canonique. De plus, on a aussi, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\langle x, b_k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i b_i, b_k \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \langle b_i, b_k \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \delta_{ki} = x_k,$$

ce qui nous donne une autre formule très utile

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{k=1}^n \langle x, b_k \rangle b_k.$$

**Exemple 16**

Soit  $a_0, \dots, a_n$  des réels deux à deux distincts. Considérons, pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , le polynôme interpolateur de Lagrange

$$L_i(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

Définissons le produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ ,  $\langle P | Q \rangle = \sum_{i=0}^n P(a_i) Q(a_i)$ . Alors, pour tous  $i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$ .

Donc la famille  $(L_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  est orthonormale pour ce produit scalaire.

Or toute famille orthogonale à  $n$  vecteurs est une base, donc la famille  $(L_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  est une base orthonormale.

**3.2 GRAM-SCHMIDT ET EXISTENCE D'UNE BASE ORTHONORMALE****Théorème 1 : Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt**

Soient  $E$  un espace préhilbertien réel,  $(e_1, \dots, e_n)$  une famille libre de  $E$ , et  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $b_k := \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ . On peut transformer  $(e_1, \dots, e_n)$  en une famille  $(u_1, \dots, u_n)$  orthonormale de  $E$ , t.q.  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = b_k$ .

**Algorithme** Les vecteurs  $u_1, \dots, u_n$  peuvent être construits de proche en proche depuis  $u_1$  jusqu'à  $u_n$ , et pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on n'a que deux choix possibles pour  $u_k$ .

Si on pose  $\hat{u}_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, u_i \rangle u_i$ , alors  $u_k$  est soit le vecteur  $\frac{\hat{u}_k}{\|\hat{u}_k\|}$ , soit son opposé.

**On apprend par coeur sans comprendre ? Toujours pas !**

Le vecteur  $\hat{u}_k$  est seulement le vecteur  $e_k$  auquel on enlève toutes les parties qui ne sont pas orthogonales aux  $u_i$  précédent, pour  $i < k$ .  
Ensuite on le rend de norme 1, en divisant par sa norme.

On obtient directement le résultat très utile suivant.

**Corollaire 1.1 : Existence de bases orthonormales en dimension finie**

Soit  $E \neq \{0_E\}$  un espace euclidien. Alors  $E$  possède une base orthonormale.  
De plus, toute famille orthonormale de  $E$  peut être complétée en une base orthonormale de  $E$ .

*Preuve.* Faisons une preuve par récurrence du Théorème 1.

Au début, pas besoin de rendre le vecteur orthogonal. La famille  $(e_1)$  est libre, donc  $e_1 \neq 0_E$ . On pose  $u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$ .

On a alors  $\text{Vect}(e_1) = \text{Vect}(u_1)$ . Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Supposons qu'on ait réussi à construire une famille orthonormale  $(u_1, \dots, u_{k-1})$  pour laquelle  $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ , pour tout  $p \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ . Nous sommes à la recherche d'un vecteur  $u_k$  pour lequel  $(u_1, \dots, u_k)$  est orthonormale et  $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ .

**Analyse** Supposons qu'un tel  $u_k$  existe. Comme  $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \stackrel{\text{HDR}}{=} \text{Vect}(u_1, \dots, u_{k-1}, e_k)$ , alors

$u_k$  est combinaison linéaire de  $u_1, \dots, u_{k-1}, e_k$ , disons  $u_k = a_{kk}e_k + \sum_{i=1}^{k-1} a_{ik}u_i$  pour certains  $a_{1k}, \dots, a_{kk} \in \mathbb{R}$ .

Calculons les  $a_{i,j}$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$ , sachant que  $u_k$  et  $u_i$  sont orthogonaux, on a

$$0 = \langle u_k, u_i \rangle = \left\langle a_{kk}e_k + \sum_{j=1}^{k-1} a_{jk}u_j, u_i \right\rangle = a_{kk} \langle e_k, u_i \rangle + \sum_{j=1}^{k-1} a_{jk} \langle u_j, u_i \rangle = a_{kk} \langle e_k, u_i \rangle + a_{ik},$$

d'où  $a_{ik} = -a_{kk} \langle e_k, u_i \rangle$ . Donc  $u_k = a_{kk}\hat{u}_k$ , avec  $\hat{u}_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, u_i \rangle u_i$ . Enfin on veut  $\|u_k\| = 1$ , donc

$u_k = \pm \frac{\hat{u}_k}{\|\hat{u}_k\|}$ . Le vecteur  $u_k$ , s'il existe, est finalement déterminé au signe près par  $u_1, \dots, u_{k-1}$  et  $e_k$ .

**Synthèse** Réciproquement, posons  $\hat{u}_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, u_i \rangle u_i$ .

La liberté de  $(e_1, \dots, e_n)$  nous assure que  $\hat{u}_k \neq 0$ .

Nous pouvons ainsi poser  $u_k = \frac{\hat{u}_k}{\|\hat{u}_k\|}$  on pourrait aussi choisir  $u_k = -\frac{\hat{u}_k}{\|\hat{u}_k\|}$ . Montrons que la famille  $(u_1, \dots, u_k)$  est orthonormale. On sait que  $(u_1, \dots, u_{k-1})$  l'est par hypothèse de récurrence et  $u_k$  est unitaire. Il nous suffit donc de montrer que  $u_k$  est orthogonal à  $u_1, \dots, u_{k-1}$ . Et, pour tout  $j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$ , on a

$$\langle u_k, u_j \rangle = \frac{1}{\|\hat{u}_k\|} \langle \hat{u}_k, u_j \rangle = \frac{1}{\|\hat{u}_k\|} \left\langle e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, u_i \rangle u_i, u_j \right\rangle = \frac{1}{\|\hat{u}_k\|} (\langle e_k, u_j \rangle - \langle e_k, u_j \rangle \langle u_j, u_j \rangle) = 0.$$

Enfin  $\text{Vect}(u_1, \dots, u_{k-1}) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1})$ , et  $u_k$  est combinaison linéaire de  $u_1, \dots, u_{k-1}$  et  $e_k$  avec un coefficient non nul devant  $e_k$ , donc  $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ .

□

### Exemple 17

Soit  $e_1 = (3, 4, 0)$ ,  $e_2 = (5, 0, 0)$  et  $e_3 = (0, 0, 1)$  des vecteurs qui forment une base de  $\mathbb{R}^3$ , muni du produit scalaire canonique. Déterminons la base orthonormalisée  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  associée par l'algorithme de Gram-Schmidt.

**Etape 1** Commençons par normaliser  $e_1$  pour obtenir  $\varepsilon_1$ ;  $\|e_1\| = 5$  donc  $\varepsilon_1 = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)$ .

**Etape 2** On sait qu'ensuite  $\varepsilon_2$  est de la forme  $\lambda(e_2 + \mu\varepsilon_1)$  avec  $\mu = -\langle e_2 | \varepsilon_1 \rangle = -3$ . Pour obtenir  $\varepsilon_2$ , il suffit alors de normaliser  $e_2 - 3\varepsilon_1$ . Comme  $\|e_2 - 3\varepsilon_1\| = 4$ , on obtient  $\varepsilon_2 = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0)$ .

**Etape 3** Ici,  $e_3$  est déjà orthogonal à  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  et est de norme 1. C'est déjà fini !

La base recherchée est donc  $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)$ ,  $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0)$  et  $(0, 0, 1)$ .

### Exemple 18

La famille  $(1, \sqrt{3}(2X-1), \sqrt{5}(6X^2-6X+1))$  est orthonormale pour le produit scalaire  $(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)dt$  sur  $\mathbb{R}[X]$ , mais pas la base canonique.

Déterminons la base orthonormalisée  $(P_0, P_1, P_2)$  associée par l'algorithme de Gram-Schmidt, à partir de la famille libre  $(1, X, X^2)$ .

**Etape 1** Posons  $P_0 = \frac{1}{\|1\|}$ . Comme  $\|1\|^2 = \int_0^1 dt = 1$ , on a  $P_0 = 1$ .

**Etape 2** Comme  $\langle X, P_0 \rangle = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$ , on pose  $\hat{P}_1 = X - \langle X, P_0 \rangle P_0 = X - \frac{1}{2}P_0$ .

Sa norme est  $\left\|X - \frac{1}{2}\right\|^2 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{12}$ , donc  $P_1 = \sqrt{3}(2X-1)$ .

**Etape 3** De même, comme  $\langle X^2, P_0 \rangle = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$  et  $\langle X^2, P_1 \rangle = \int_0^1 t^2 \times \sqrt{3}(2t-1)dt = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ , on pose  $\hat{P}_2 = X^2 - \langle X^2, P_0 \rangle P_0 - \langle X^2, P_1 \rangle P_1 = X^2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{3}(2X-1) = X^2 - X + \frac{1}{6}$ .

Sa norme est  $\left\|X^2 - X + \frac{1}{6}\right\|^2 = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 dt = \frac{1}{180}$ , donc  $P_2 = \sqrt{5}(6X^2-6X+1)$ .

### 3.3 SUPPLÉMENTAIRE ORTHOGONAL

#### Cas d'un sous-espace vectoriel quelconque

##### Proposition 3 : Existence d'un supplémentaire orthogonal

Soient  $E$  un espace préhilbertien réel et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

- ①  $F$  et  $F^\perp$  sont en somme directe.
- ② Si  $F$  un sous-espace vectoriel **de dimension finie** de  $E$ , il existe toujours un supplémentaire orthogonal à  $F$ , c'est  $F^\perp$  et c'est le seul ! En particulier, si  $E$  lui-même est de dimension finie  $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$ .
- ③ Si  $F$  un sous-espace vectoriel **de dimension finie** de  $E$ ,  $F^{\perp\perp} = F$

**⚠ ATTENTION** L'hypothèse d'espace vectoriel pour  $F$  n'est pas là pour décorer. Il n'y a pas de raison de parler de somme directe pour une partie de  $E$ ...

Il n'est pas vrai en général que  $F$  et  $F^\perp$  sont supplémentaires dans  $E$ , ils sont seulement en somme directe.

En dimension finie, il existe un unique supplémentaire orthogonal, mais tout plein de supplémentaires ! Ne l'oubliez pas !

*Preuve.*

- ① Pour tout  $x \in F \cap F^\perp$ ,  $x \perp x$ , donc  $\langle x, x \rangle = 0$ . On a donc  $x = 0_E$ , par définie positivité.

- ② Montrons que  $E \subset F + F^\perp$ .

Nous pouvons supposer  $F \neq \{0_E\}$  car  $\{0_E\}^\perp = E$ , et comme  $F$  est de dimension finie, nous donner une base orthonormale  $(b_1, \dots, b_n)$  de  $F$ . Soit  $x \in E$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\left\langle x - \sum_{k=1}^n \langle x, b_k \rangle b_k, b_i \right\rangle = \langle x, b_i \rangle - \sum_{k=1}^n \langle x, b_k \rangle \langle b_k, b_i \rangle = \langle x, b_i \rangle - \sum_{k=1}^n \langle x, b_k \rangle \delta_{ki} = \langle x, b_i \rangle - \langle x, b_i \rangle = 0,$$

donc  $x - \sum_{k=1}^n \langle x, b_k \rangle b_k$  est orthogonal à  $b_1, \dots, b_n$ , donc élément de  $F^\perp$ . Donc  $x \in F + F^\perp$ .

Montrons que  $F^\perp$  est le seul supplémentaire de  $F$  dans  $E$  orthogonal à  $F$ . Soit  $G$  un tel supplémentaire. On a alors  $G \subset F^\perp$ , car  $F \perp G$ .

Inversement, soit  $x \in F^\perp$ . Comme  $E = F + G$ , alors  $x = f + g$ , pour certains  $f \in F$  et  $g \in G$ .

Donc  $\langle f, f \rangle = \langle f + g, f \rangle = \langle x, f \rangle = 0$ , d'où  $f = 0_E$ , et donc  $x = g \in G$ .

- ③ Il suffit de montrer  $F^{\perp\perp} \subset F$ . Soit  $x \in F^{\perp\perp}$ . Posons  $x = f + f'$  avec  $f \in F$  et  $f' \in F^\perp$ .

On a donc  $\langle f', f' \rangle = \langle f + f', f' \rangle = \langle x, f' \rangle = 0$ , donc  $f' = 0_E$ , et  $x = f \in F$ .

□

#### Exemple 19

Dans l'espace euclidien canonique  $\mathbb{R}^4$ , cherchons l'orthogonal du plan vectoriel  $P$  d'équations  $\begin{cases} x - y - z - t = 0, \\ 2x + y + z - t = 0. \end{cases}$

On a, en réécrivant un peu l'expression de  $P$ ,

$$\begin{aligned} P &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \langle (1, -1, -1, -1), (x, y, z, t) \rangle = 0 \text{ et } \langle (2, 1, 1, -1), (x, y, z, t) \rangle = 0\} \\ &= \{(1, -1, -1, -1), (2, 1, 1, -1)\}^\perp = \text{Vect}((1, -1, -1, -1), (2, 1, 1, -1))^\perp \end{aligned}$$

or  $\mathbb{R}^4$  est euclidien, donc  $P^\perp = \text{Vect}((1, -1, -1, -1), (2, 1, 1, -1))^{\perp\perp} = \text{Vect}((1, -1, -1, -1), (2, 1, 1, -1))$ .

**Exemple 20**

On munit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de sa structure euclidienne canonique. Cela veut dire qu'on travaille avec le produit scalaire canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On rappelle que l'ensemble  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ , respectivement  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ , des matrices symétriques, respectivement antisymétriques, de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On se rappelle aussi que  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ . En fait,  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp$ . Montrons le.

En effet, pour tous  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

$$\langle S, A \rangle = \langle A, S \rangle = \text{tr}({}^t AS) = -\text{tr}(AS) = -\text{tr}(SA) = -\text{tr}({}^t SA) = -\langle S, A \rangle = -\langle A, S \rangle,$$

donc  $\langle A, S \rangle = 0$ , ce qui montre que  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp$ , mais ce n'est pour le moment qu'une inclusion. Mais on sait que  $\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp$ , donc on a l'égalité.

**Exemple 21**

Considérons le produit scalaire  $\langle P | Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$  sur  $\mathbb{R}[X]$  et définissons  $\mathcal{P}$ , respectivement  $\mathcal{I}$ , l'espace vectoriel des polynômes pairs, respectivement impairs.

Montrons que  $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}^\perp$ .

En effet, pour tous  $P \in \mathcal{P}$  et  $Q \in \mathcal{I}$ ,  $\langle P | Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt = \int_1^{-1} P(-t)Q(-t)(-dt) = -\langle P | Q \rangle$ .

D'où  $\langle P | Q \rangle = 0$ . Or,  $\mathcal{P} \perp \mathcal{I}$  et ils sont supplémentaires donc  $\mathcal{I} = \mathcal{P}^\perp$ .

**Cas particulier d'un hyperplan**

On considère dans cette partie le cas particulier où  $F = H$  est un hyperplan de  $E$ .

On rappelle qu'un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire sur  $E$ .

**Proposition 4 : Vecteurs normaux à un hyperplan**

Si  $E \neq \{0_E\}$  un espace euclidien de dimension  $n$  et  $H$  un hyperplan de  $E$ , alors  $H^\perp$  est une droite vectorielle.

**Vocabulaire**

Tout vecteur dans  $H^\perp$  est dit **normal** à  $H$ .

*Preuve.* Comme  $E$  est de dimension finie,  $E = H \oplus H^\perp$ , et par conséquent, comme  $H$  est un hyperplan  $\dim H^\perp = \dim E - \dim H = 1$ .  $\square$

**Exemple 22**

Dans l'espace euclidien canonique  $\mathbb{R}^3$ , le plan  $H$  d'équation  $2x - y + 5z = 0$  admet pour vecteur normal  $(2, -1, 5)$ . Ce vecteur dirige la droite  $H^\perp$ .

**Proposition 5**

Soit  $E$  un espace euclidien. L'application  $\Phi : E \rightarrow E^*$  est un isomorphisme.

$$a \mapsto (x \mapsto \langle a | x \rangle),$$

Autrement dit,  $\forall \varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}), \exists ! a \in E, \forall x \in E, \varphi(x) = \langle a | x \rangle$ .

*Preuve.* Rappelons que  $E$  et  $E^*$  sont de même dimension. Il suffit donc de démontrer que  $\Phi$  est injective. Pour cela considérons  $a \in E$  tel que  $\Phi(a) = 0_{E^*}$ , c'est-à-dire tel que  $\langle a | x \rangle = 0$  pour tout  $x \in E$ . En prenant  $x = a$ , on obtient immédiatement que  $a = 0_E$  donc que  $\text{Ker } \Phi = \{0_E\}$ .  $\square$

### Quel rapport avec les hyperplans ?

Soit  $H$  un hyperplan de  $\mathbb{R}^n$ . Considérons une forme linéaire  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}^n$  telle que  $H = \text{Ker } \varphi$ .  
D'après la proposition précédente, il existe un unique  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  non nul tel que  $\forall x \in E, \quad \varphi(x) = \langle a \mid x \rangle$ .  
Alors, un vecteur  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  appartient à  $H$  si, et seulement si,  $\langle a \mid x \rangle = 0$ , c'est-à-dire si

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$$

on a ainsi trouvé une équation de l'hyperplan vectoriel  $H$ .

Le vecteur  $a$  qui définit la forme linéaire n'est rien d'autre qu'un vecteur qui dirige  $H^\perp$ , soit un vecteur normal à  $H$ .

## 4 PROJECTION ORTHOGONALE SUR UN SOUS-ESPACE DE DIMENSION FINIE

### Définition 5 : Projection orthogonale, symétrie orthogonale, réflexion

Soient  $E$  un espace préhilbertien réel et  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$ .

On appelle **projection orthogonale sur  $F$**  ou projecteur orthogonal sur  $F$  la projection sur  $F$  parallèlement à  $F^\perp$ .

On appelle **symétrie orthogonale par rapport à  $F$**  la symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $F^\perp$ .

**Vocabulaire** On appelle **réflexion par rapport à  $H$**  une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan  $H$ .

### Proposition 6 : Projeté orthogonal dans une base orthonormale

Soient  $E$  un espace préhilbertien réel,  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension finie non nulle de  $E$  et  $\mathcal{B}_F := (b_1, \dots, b_r)$  une base orthonormale de  $F$ .

Si on note  $p$  la projection orthogonale sur  $F$ , alors pour tout  $x \in E$ ,  $p(x) = \sum_{k=1}^n \langle x, b_k \rangle b_k$ .

*Preuve.* Soit  $x \in E$ . Le vecteur  $x - \sum_{k=1}^n \langle x, b_k \rangle b_k$  est orthogonal à  $b_1, \dots, b_n$ , donc appartient à  $F^\perp$ .

$$\text{Ainsi } x = \underbrace{\sum_{k=1}^n \langle x, b_k \rangle b_k}_{\in F} + \underbrace{\left( x - \sum_{k=1}^n \langle x, b_k \rangle b_k \right)}_{\in F^\perp}, \quad \text{donc } p(x) = \sum_{k=1}^n \langle x, b_k \rangle b_k. \quad \square$$

**⚠ ATTENTION** La base de  $F$  doit être orthonormale pour utiliser le théorème !

### Exemple 23

Munissons  $\mathbb{R}[X]$  du produit scalaire intégral défini par  $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \quad (P \mid Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$ .

Posons  $F = \text{Vect}(1, X)$  et calculons  $p_F(X^2)$ .

La base  $(1, X)$  est orthogonale. Normalisons les deux vecteurs.

$$\int_{-1}^1 dt = 2, \text{ donc posons } B_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}, \text{ donc posons } B_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} X.$$

Comme  $(B_1, B_2)$  forme une base orthonormale de  $F$ , on a

$$p_F(X^2) = (X^2, B_1) B_1 + (X^2, B_2) B_2 = \frac{\sqrt{2}}{3} B_1 = \frac{1}{3}.$$

**En pratique, quand c'est orthogonal c'est génial !**

En général, c'est plus simple de calculer un projeté orthogonal, qu'un projeté quelconque. On peut le calculer essentiellement de deux manières un projeté orthogonal.

Soient  $E$  un espace préhilbertien réel,  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension finie non nulle de  $E$ ,  $(b_1, \dots, b_n)$  une base pas forcément orthonormale de  $F$  et  $x \in E$ .

Calculons la projection orthogonal de  $x \in E$  sur  $F$ .

**Méthode 1** On orthonormalise  $(b_1, \dots, b_n)$ , puis on utilise la proposition précédente.

**Méthode 2** On fait comme avant : Le projeté  $p(x)$  est caractérisé par deux assertions  $p(x) \in F$  et  $x - p(x) \in F^\perp$ .

On pose  $p(x) = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ , pour  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ , puis on les calcule avec  $\langle x - p(x), f_j \rangle = 0$ , pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

Ces relations nous fournissent un système de  $n$  équations à  $n$  inconnues. Plus qu'à résoudre !

**Exemple 24**

Reprenons l'exemple 23, en modifiant le produit scalaire pour  $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \quad (P | Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ .

Reprenons  $F = \text{Vect}(1, X)$  et calculons  $p_F(X^2)$ .

**Méthode 1**  $B_1 := 1$  est déjà normalisé.

On a déjà Gram-Schmidt pour  $X$  dans l'exemple 18 et on a trouvé  $B_2 := \sqrt{3}(2X - 1)$ .

On peut donc appliquer la proposition, et on obtient

$$p_F(X^2) = (X^2, B_1) B_1 + (X^2, B_2) B_2 = \frac{1}{3} B_1 + \frac{\sqrt{3}}{6} B_2 = \frac{1}{3} + X - \frac{1}{2} = X - \frac{1}{6}.$$

**Méthode 2** Il existe  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $p_F(X^2) = a + bX$ .

En utilisant l'orthogonalité, on a 
$$\begin{cases} (1 | X^2 - a - bX) = 0 \\ (X | X^2 - a - bX) = 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a + \frac{b}{2} = \frac{1}{3} \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{3} = \frac{1}{4} \end{cases}, \quad \text{d'où } a = -\frac{1}{6} \text{ et } b = 1.$$

Ainsi,  $p_F(X^2) = X - \frac{1}{6}$ .

**5 DISTANCE À UN SOUS ESPACE VECTORIEL DE DIMENSION FINIE****Définition 6 : Distance à une partie**

Soient  $E$  un espace préhilbertien réel,  $A$  une partie non vide de  $E$  et  $x \in E$ .

On appelle distance de  $x$  à  $A$ , notée  $d(x, A)$ , le réel  $d(x, A) := \inf_{a \in A} \|x - a\|$ .

**Mais qu'est ce que cela veut dire ?**

Intuitivement, la distance d'un vecteur  $x$  à une partie  $A$  est la plus petite distance séparant  $x$  d'un élément de  $A$ , ce qui peut faire penser à poser la définition  $d(x, A) = \min_{a \in A} \|x - a\|$ .

Mais comment savoir cette "plus petite distance" entre  $x$  et un élément de  $A$  existe ?

En fait, elle n'existe pas nécessairement et c'est pourquoi on a utilisé la borne inférieure. Pensez à la distance euclidienne entre 2 et  $[0, 1[$  dans  $\mathbb{R}$ . Elle est égale à 1, mais ne correspond à aucune distance entre 2 et un élément de  $[0, 1[$ .

**⚠** Mais comment a-t-on pu poser une borne inférieure sans montrer son existence ?

Remédions à cela tout de suite. L'ensemble  $\{\|x - a\| \mid a \in A\}$  est une partie de  $\mathbb{R}$  non vide, puisque  $A \neq \emptyset$ . Elle est aussi minorée par 0, donc elle admet une borne inférieure, d'après le théorème du même nom !

**Proposition 7 : Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie**

Soient  $E$  un espace préhilbertien réel,  $F$  un sous-espace vectoriel  $E$  de **dimension finie** de  $E$  et  $x \in E$ .  
 Si  $p_F$  la projection orthogonale sur  $F$ , alors  $d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \sqrt{\|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2}$ .  
 Aussi, pour tout  $y \in F$ ,  $d(x, F) \leq d(x, y)$ .

**Intuitivement**

Cela veut dire que la distance de  $x$  à  $F$  est donc un minimum, atteint au point projeté orthogonal de  $x$  sur  $F$ , et seulement en ce point.

**⚠ ATTENTION** L'hypothèse de la dimension finie n'est pas là pour décorer.  
 Le problème, si  $F$  est de dimension infinie, réside dans le fait que le projeté  $p_F(x)$  n'est pas dans  $E$  en général.

*Preuve.* Le but est alors de trouver la borne inférieure de  $\mathcal{D} := \{\|x - f\| \mid f \in F\}$ . Or on a  $\|x - p_F(x)\| \in \mathcal{D}$ , car  $p_F(x) \in F$ .

De plus, pour tout  $f \in F$ ,  $x - f = \underbrace{(x - p_F(x))}_{\in \text{Ker } p_F = F^\perp} + \underbrace{(p_F(x) - f)}_{\in \text{Im } p_F = F}$ . On a donc, d'après le théorème de Pythagore,

$$\|x - f\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - f\|^2.$$

Donc, pour tout  $f \in F$ ,  $\|x - f\| = \sqrt{\|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - f\|^2} \geq \|x - p_F(x)\|$ . Donc  $\mathcal{D}$  est minoré par  $\|x - p_F(x)\|$ , qui est donc son plus petit élément.

Enfin, ce minimum n'est pas atteint ailleurs, car, pour tout  $f \in F \setminus \{p_F(x)\}$ ,

$$\|x - f\| = \sqrt{\|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - f\|^2} > \|x - p_F(x)\| \quad \text{car} \quad \|p_F(x) - f\| > 0.$$

□

**Exemple 25**

Reprenons l'exemple 23. La distance de  $X^2$  à  $F$  est exactement la distance de  $X^2$  à son projeté orthogonal sur  $F$ , soit  $\frac{1}{3}$ . On a donc

$$d\left(X^2, \frac{1}{3}\right) = \left\|X^2 - \frac{1}{3}\right\| = \left(\int_{-1}^1 \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dt\right)^{1/2} = \left(\int_{-1}^1 \left(t^4 - \frac{2}{3}t^2 + \frac{1}{9}\right) dt\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{9}} = \sqrt{\frac{8}{45}}$$

**Exemple 26**

Reprenons  $E = \mathcal{C}([-1; 1], \mathbb{R})$ , munit du produit scalaire, défini pour  $f, g \in E$ , par  $(f \mid g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$ .

Définissons  $\psi : E \rightarrow E$ , par  $\psi(f)(x) = f(-x)$ , pour tout  $x \in [-1; 1]$ .

Il est classique de montrer que  $\psi$  est linéaire.

De plus,  $\psi^2 = \text{Id}$  donc  $\psi$  est une symétrie. Est elle orthogonale ? Oui ! Si on pose  $\mathcal{P}$  l'espace des fonctions paires et  $\mathcal{I}$  celui des fonctions impaires,

$$\forall f \in \mathcal{P}, \quad \psi(f) = f \quad \text{et} \quad \forall f \in \mathcal{I} = (\mathcal{P})^\perp, \quad \psi(f) = -f$$

donc  $\psi$  est la symétrie orthogonale par rapport à  $\mathcal{P}$ .

**Exemple 27**

**Quand on utilise l'algèbre en analyse !**

Calculer  $\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 (t^3 - (at^2 + bt + c))^2 dt$  semble être une question difficile. Mais s'il on remarque que

$$\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 (t^3 - (at^2 + bt + c))^2 dt = d(X^3, F)^2$$

où  $F = \text{Vect}(1, X, X^2)$  et où la distance  $d$  est celle associée au produit scalaire de défini, pour  $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ , par  $(P|Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$ , alors on sait quoi faire !

Soit  $P$  le projeté orthogonal de  $X^3$  sur  $F$ . On peut écrire  $P = a + bX + cX^2$  et on a par orthogonalité

$$(X^3 - P | 1) = (X^3 - P | X) = (X^3 - P | X^2) = 0$$

On en déduit que  $P = \frac{3}{5}X$  puis que  $d(X^3, F)^2 = \frac{8}{175}$ .

### Corollaire 7.1 : Distance à un hyperplan affine

Soient  $E$  un espace euclidien,  $H$  un hyperplan de vecteur normal **unitaire**  $a$ . Pour tout  $x \in E$ ,  $d(x, H) = |\langle x, a \rangle|$ .

*Preuve.* Immédiat, puisque  $x = p_f(x) + \langle x, a \rangle a$ , par décomposition dans une base orthonormale composée d'une base orthonormale de  $H$  et du vecteur  $a$ .  $\square$

**⚠ ATTENTION** On n'utilise pas ce résultat les yeux fermés! On vérifie que le vecteur normal est unitaire.

### Exemple 28

Dans l'espace euclidien canonique  $\mathbb{R}^3$ , calculons la distance du point  $(4, 3, 2)$  au plan d'équation  $2x + y + 2z = 0$ . Notons le plan en question  $P$ . C'est un hyperplan de  $\mathbb{R}^3$  de vecteur normal unitaire  $\tilde{a} = (2, 1, 2)$ . Ce vecteur n'est pas unitaire pour le produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^3$ . On a  $\|\tilde{a}\| = 3$ , donc on pose  $a = \frac{1}{3} (2, 1, 2)$ . Si on pose  $x = (2, 4, 2)$ , on a  $d(x, P) = |\langle x, a \rangle| = \frac{1}{3}(4 + 4 + 4) = 5$ .