

Suites de Cauchy

On dit qu'une suite u est de Cauchy si elle vérifie la propriété suivante

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, |u_p - u_q| \leq \varepsilon.$$

PARTIE A - PREMIERS RÉSULTATS

- ① Lesquelles des suites ci-dessous sont de Cauchy? Justifier.

$$\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \left(\frac{(-1)^n}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}, \quad ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

- ② Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.
- ③ On va montrer que toute suite réelle de Cauchy est convergente.
- (a) Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.
- (b) En déduire que, de toute suite de Cauchy on peut extraire une suite convergente.
- (c) Soit $u_{\varphi(n)}$ une telle suite extraite et c sa limite.
En utilisant la définition de la limite, montrer que u converge vers c .
On pourra forcer l'apparition de $u_{\varphi(n)}$.
- ④ Montrer que toute suite équivalente à une suite de Cauchy est aussi une suite de Cauchy.

PARTIE B - UN PREMIER EXEMPLE

- ① Montrer à l'aide d'une étude succincte de fonction qu'il existe un unique réel a tel que $a^3 + 2a - 1 = 0$.
Que vaut la partie entière de a ?
- ② Soit u la suite définie par récurrence $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2 + u_n^2}$.
Montrer que $\forall n \geq 2, |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{4} |u_n - u_{n-1}|$.
- ③ Montrer que $\forall n \geq 1, |u_{n+1} - u_n| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.
- ④ En déduire que u est une suite de Cauchy. Quelle est sa limite?
- ⑤ Concevoir et écrire en Python un programme permettant de calculer une valeur approchée de a à 10^{-8} près.

PARTIE C - UN AUTRE EXEMPLE

On se donne une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\{-1, 1\}$, et on définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{\varepsilon_k}{2^k}$$

- ① Montrer que pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2, |S_m - S_n| \leq \frac{1}{2^{\min(m, n)}}$.
- ② En déduire que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
- ③ Montrer que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un élément de $[-2, 2]$.