# CIRCUITOS ELÉCTRICOS

## Un enfoque de análisis claro y conciso

Gloria Mata Hernández

DGAPA, UNAM
PAPIME PE100920
Edición Digital
Facultad de Ingeniería

# CIRCUITOS ELÉCTRICOS

## Un enfoque de análisis claro y conciso

Gloria Mata Hernández

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

Dr. Enrique Graue Wiechers
Rector

Dr. Leonardo Lomelí Vanegas
Secretario General

Dr. Fernando Rafael Castañeda Sabido
Director General

Mtra. Brenda Morales Chambert
Directora de Apoyo a la Docencia

Lic. Ana Laura Pasos Hernández
Jefa del Departamento del PAPIME

Dirección General de Asuntos
del Personal Académico

Proyecto PAPIME - Programa de Apoyo a Proyectos para la Innovación y Mejoramiento de la Enseñanza - PAPIME

Esta Edición Digital es un Suplemento de la Edición Interactiva, la cual recibió el apoyo de la DGAPA en el marco de la Convocatoria PAPIME 2020 del 12 de agosto de 2019. Proyecto PE100920

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

Circuitos Eléctricos: Un enfoque de análisis claro y conciso

M.I.Gloria Mata Hernández

DGAPA-PAPIME.
UNAM

Edición Digital 2022 versión 1.0 (Suplemento de la Edición Interactiva)
Desarrollado en la Facultad de Ingeniería

Ing. Fernando Rivera Pérez
Diseño de la Edición Digital

Ing. Víctor Manuel Sánchez Esquivel
Revisión Técnica

**FACULTAD DE ARTES Y DISEÑO**

Dra. Ruth López Pérez
Dirección Creativa de Portadas

Yekatl González Angulo Chávez
Portada Principal y Contraportada
Estudiante de la Facultad de Artes y Diseño



Ciudad Universitaria. Alcaldía Coyoacán

C.P. 04510, México, Distrito Federal

Hecho en México

Ï 2022

Esta edición digital en formato pdf estático es un suplemento de la edición interactiva. Fue auspiciada por la Dirección General de Asuntos del Personal Académico, mediante el programa PAPIME

Puede visualizarse en las siguientes plataformas:
• iPad, iPod, iPhone y Mac (iOS/OSX)
• En formto estático pdf (Windows/Linux)

# Presentación

La asignatura de Circuitos Eléctricos constituye el núcleo conceptual básico de la Ingeniería Eléctrica a partir de la cual se derivan las Ingenierías de Electrónica, de Telecomunicaciones y de Computación, de ahí su importancia en estas licenciaturas que se imparten en la Facultad de Ingeniería de la UNAM, siendo esencial e indispensable como primera asignatura de las Ciencias de Ingeniería, ya que su conocimiento es la base de la tecnología moderna.

El curso curricular da continuidad al de Sistemas y Señales, ahora se abordan los Sistemas Eléctricos, Lineales, Invariantes en el tiempo, de Parámetros concentrados, Causales o no anticipativos. El material está orientado a estudiantes del 5° semestre de las asignaturas de Circuitos Eléctricos.

El Análisis de los Circuitos Eléctricos, se aborda bajo diferentes métodos de análisis:

- Estado de respuesta transitoria y permanente
- De corriente directa (CD) y corriente alterna (CA)
- En el dominio del tiempo y de la frecuencia
- De sistemas eléctricos monofásicos y trifásicos
- Métodos sistemáticos mediante LVK y LCK
- Enfoque de Teoremas de Redes Eléctricas
- Síntesis de los circuitos eléctricos

Para el proceso de aprendizaje de los estudiantes en estos temas se requiere de practicar y ejercitarse de forma sistemática y constante, el material que se utiliza contribuye a este proceso. Las matemáticas requeridas, aunque no son complicadas, si requieren de una clara comprensión y los métodos utilizados se pueden aplicar a circuitos más complejos y avanzados.

Bajo este enfoque se ha diseñado un libro en pdf estático con diversos recursos educativos, un material que aborda los aspectos fundamentales de la teoría, en el que se verifican los análisis y resultados con simulaciones en los diferentes dominios y los conocimientos adquiridos son utilizados en aplicaciones prácticas de manera que los estudiantes asimilan con mayor facilidad y efectividad.

Esta estrategia educativa, la autora la ha denominado el Triángulo del Aprendizaje Efectivo que conjunta de forma eficaz la teoría, la simulación y la aplicación práctica logrando un aprendizaje efectivo y sustancial en los estudiantes.

Contempla un enfoque de análisis claro y conciso con contenidos entendibles de una forma rápida y efectiva, de manera que a los estudiantes se les facilite el aprender, comprender, asociar y asimilar los temas, aplicar e interpretar los circuitos y los resultados obtenidos del análisis. Así mismo, se incluyen en anexos algunas demostraciones fundamentales y formularios que resumen cada capítulo y que pueden ser de gran utilidad para los estudiantes.

Se abordan los fundamentos de los temas de: Sistemas eléctricos, Análisis de circuitos eléctricos en estado sinusoidal permanente, Potencia y circuitos eléctricos trifásicos, Métodos generales de análisis de redes eléctricas, Teoremas de redes eléctricas y Redes de dos puertos o bipuertos.

Es de gran interés para la autora fortalecer el conocimiento en los estudiantes a través de una estrategia visual, no exclusiva, ya que la ingeniería se basa en dibujos de diversa índole como diagramas eléctricos, de bloques, de flujo, siendo que el aspecto gráfico se aprovecha como elemento fundamental para visualizar, comprender el todo, interpretar y con ello poder concluir acerca de los resultados.

Este recurso educativo es un suplemento, como parte de los productos del proyecto PAPIME PE100920 titulado “Desarrollo del Libro Electrónico interactivo para la disciplina de Circuitos Eléctricos” en el que se busca que los estudiantes dispongan de un material accesible, atractivo y juvenil.

El material que se presenta surge a partir de la idea inicial de conjuntar diversos materiales, diapositivas, notas, apuntes de clase, y otros recursos educativos emanados de la experiencia docente de muchos años e integrarlos en un libro digital estático, que es el que se presenta en esta edición, y un libro electrónico interactivo, ambos que puedan ser de utilidad para los estudiantes que por primera vez se acercan al estudio de los circuitos eléctricos.

Este material en el formato digital ha sido editado totalmente con Latex, un lenguaje abierto para la composición de textos, la creación de libros, documentos científicos y técnicos, el cual contiene diversos objetos de aprendizaje y múltiples fórmulas matemáticas, utilizando los diversos recursos educativos proporcionados por la responsable del proyecto, que con gran profesionalismo y compromiso lo ha realizado Fernando Rivera Pérez, incluyendo la elaboración de las gráficas, dibujos en el mismo lenguaje, verificación de resultados de los ejercicios incluidos, edición de formularios que se incluyen al fnal del texto, dándole la oportunidad de presentarlo como Material Didáctico para su titulación en la Modalidad de Apoyo a la Docencia.

En el contexto del proyecto PAPIME, se incluye también Material Visual de Divulgación Complementario del Libro Electrónico Interactivo de Circuitos Eléctricos que se presenta en formato de libro, realizado, a través de la vinculación con la Facultad de Artes y Diseño, con la participación de la Dra. Ruth López Pérez y sus estudiantes, generando atractivos materiales que combinan maravillosamente la información teórica y visual. El Material Visual está integrado con tres Partes: Compendio de Exposición Carteles, Recursos Interactivos Educativos y Compendio de Portadas, alusivos todos a Circuitos Eléctricos.

Por otro lado, una mención especial y agradecimiento al Ing. Víctor Sánchez Esquivel por aceptar realizar la Revisón Técnica de este material, aportando sus acertadas observaciones.

En este sentido, cabe mencionar que, aún cuando hemos revisado exhaustivamente el material que se presenta, sabemos que podríamos no quedar exentos de algún error u omisión, mismo que agradeceríamos al lector nos lo hiciera saber.

Finalmente, agradecemos a la DGAPA, el apoyo otorgado al proyecto PAPIME PE100920 para la realización de este material.

M.I. Gloria Mata Hernández

Responsable del Proyecto PAPIME 100920

# ÍNDICE GENERAL

# CAPÍTULO 1

# SISTEMAS ELÉCTRICOS

## 1.1 Introducción

En este primer capítulo se aborda una introducción a los circuitos eléctricos. Se inicia presentando la clasificación de circuitos desde tres puntos de vista, los tres relacionados, no obstante, permite tener un panorama más claro del contexto tanto de los componentes y circuitos que se utilizan, así como los métodos y técnicas que se emplearán para su análisis. Se hace énfasis en las principales variables eléctricas y cómo están relacionadas. Se describen los 3 componentes básicos de un circuito como elementos de dos terminales modelados matemáticamente mediante las variables de voltaje y de corriente, incluyendo la Ley de Ohm. También se presenta la descripción de elementos activos como son las fuentes de voltaje y de corriente tanto independientes como dependientes.

Posterior a la descripción de los componentes se presentan dos leyes fundamentales para el análisis de circuitos: las Leyes de Kirchhoff, las cuales establecen restricciones en las relaciones entre los voltajes y las corrientes en cada uno de los elementos del circuito.

A partir de estos componentes y las leyes de Kirchhoff se pueden construir modelos de circuitos prácticos, como el divisor de voltaje y el divisor de corriente, mismos que establecen técnicas simples de reducción para el análisis de circuitos eléctricos.

Con estas primeras técnicas de análisis es posible realizar transformaciones con fuentes de voltaje y de corriente, así como de circuitos con conexiones de tres terminales. Hasta este punto se ha abordado un análisis de corriente directa CD, siendo las respuestas en todos los casos también de corriente directa o de valores constantes.

Con el conocimiento adquirido es posible plantear el modelo de circuitos de primero y segundo orden, RL, RC y RLC con y sin excitación, para obtener el comportamiento de la respuesta transitoria y la permanente tanto en el dominio del tiempo como en términos de la variable ‘s’, esto es utilizando la transformada de Laplace.

La transformada de Laplace permite analizar circuitos de una forma algebraica más sencilla que el que se realiza en el dominio del tiempo.

Así mismo, se obtiene la función de transferencia con la cual es posible determinar la respuesta de un circuito a una amplia variedad de señales de entrada. Este análisis se aborda con redes serie paralelo llamadas redes en escalera muy utilizadas en filtros pasivos.

## 1.2 Clasificación de redes eléctricas

Una red eléctrica o circuito eléctrico es una interconexión, o acoplamiento, de elementos eléctricos, los cuales pueden clasificarse de diferentes maneras. Se hace referencia a red eléctrica cuando incluye una interconexión compleja de elementos, mientras que, de forma alterna se describen como circuitos eléctricos a configuraciones eléctricas más sencillas.

Para que una red eléctrica funcione como se espera, es necesario considerar tres enfoques fundamentales, relacionados entre si, según requiera la funcionalidad del circuito: el diseño, el análisis y la síntesis del circuito. La aplicación adecuada de estos conceptos permite el correcto funcionamiento de los circuitos, mismos que son las base de sistemas eléctricos más complejos que se utilizan cotidianamente, facilitando las actividades del ser humano.

Una primera clasificación de redes eléctricas es la que se presenta en la figura 1.1. Los temas que se presentan en este libro abordan estos enfoques.

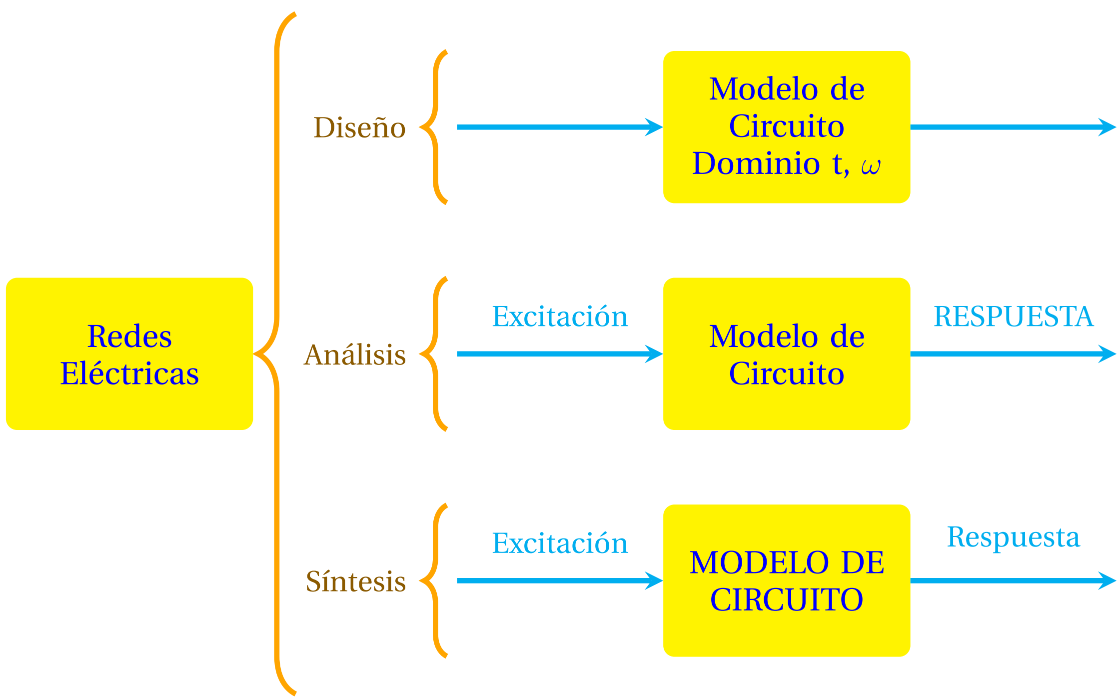



**Figura 1.1:** Clasificación de circuitos eléctricos desde el punto de vista del diseño, análisis y síntesis.

**Diseño:** Se establece el modelo matemático del circuito que cumpla con las características para el comportamiento deseado, a determinada entrada, ya sea en el dominio del tiempo o de la frecuencia.

**Análisis:** Dada la excitación y el modelo del circuito, el análisis permite determinar el comportamiento o respuesta del circuito en cualquiera de los elementos que lo integran.

**Síntesis:** Dada la excitación aplicada y la respuesta que se desea obtener, la síntesis determina el modelo equivalente del circuito que permite lograr la respuesta a esa entrada, habiendo diversas soluciones.

La aplicación adecuada de estos conceptos permite el correcto funcionamiento de los circuitos, mismos que son las base de sistemas eléctricos más complejos que se utilizan cotidianamente, facilitando las actividades del ser humano. Los temas que se presentan en este libro abordan estos enfoques.

Una segunda clasificación es desde el punto de vista de las propiedades básicas de los sistemas eléctricos, las cuales tienen tanto interpretaciones físicas como descripciones matemáticas relativamente simples en el contexto de los circuitos eléctricos.Se describen, de forma general, los sistemas eléctricos de acuerdo con sus propiedades más comúnmente utilizadas para el diseño, el análisis y la síntesis de los circuitos lineales, invariantes en el tiempo, causales y de parámetros concentrados. En la figura 1.2 se presenta esta clasificación.

**Lineal:** Un circuito lineal es aquel que cumple con el principio de aditividad y homogeneidad.

**Causal:** Un red es causal si la entrada es cero para $t < t_0$, entonces la salida también es cero para $t < t_0$.

**Pasivo:** Una red de dos terminales es pasiva si la suma de la energía suministrada a la red $w(t_0, t)$ y la energía almacenada $w(t_0)$ en la red en un tiempo $t_0$ es positiva, para todo $t > t_0$ .

**De parámetros concentrados:** Las variables y componentes que conforman el circuito o sistema eléctrico no dependen de un sistema de coordenadas espaciales, es decir, el tamaño y la geometría de los mismos son despreciales con respecto a la longitud de onda de la señales de excitación. Los sistemas de parámetros concentrados se modelan mediante Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO).

**Invariante en el tiempo:** El comportamiento y las características del circuito se mantienen en el todo tiempo, es decir, no son afectados por los desplazamientos temporales que pudiera tener la señal de entrada. El circuito responderá de tal forma que se mantienen las características dando como respuesta una señal con los mismos desplazamientos en tiempo que la señal de entrada. En este sentido es estático en cuanto a variaciones temporales.

**Finito:** Las ecuaciones diferenciales que resultan de modelar un circuito eléctrico son de orden finito, por lo que son aplicables las técnicas tradicionales de resolución de este tipo de ecuaciones.

**Recíproco:** Los circuitos recíprocos permiten el intercambio entradas por salidas.

Clasificación de Circuitos Eléctricos o Red Eléctrica N

**Lineal**

$\alpha_1 x_1(t) \rightarrow$ Modelo de Circuito $\rightarrow \alpha_1 y_1(t)$

$\alpha_2 x_2(t) \rightarrow$ Modelo de Circuito $\rightarrow \alpha_2 y_2(t)$

$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) \rightarrow$ Modelo de Circuito $\rightarrow \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$

**La red $N$ lineal es causal y pasiva**

N es causal: si la entrada es cero para $t < t_0$ entonces la salida tambien es cero para $t < t_0$.

$$w(t) = \int_{t_0}^{t} v(t')i(t')dt' + w(t_0) \geq 0$$

**Parámetros Concentrados**

1. Las dimensiones físicas de los componentes son despreciables comparadas con la longitud de onda de la frecuencia de operación.
2. Describe una ecuación diferencial ordinaria.

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n y}{dt^n} = \sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m x}{dt^m} = x_f(t)$$

**Invariante en el tiempo**

Describe una ecuación diferencial con coeficientes constantes

Un desplazamiento en la señal de entrada se manifiesta en el mismo desplazamiento en la salida

$x_1(t) \rightarrow y_1(t)$ o bien $x_1(t - t_0) \rightarrow y_1(t - t_0)$

**Finita**

Describe una ecuación diferencial de orden finito

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$$

**Recíproca**

Es posible intercambiar la entrada con la salida

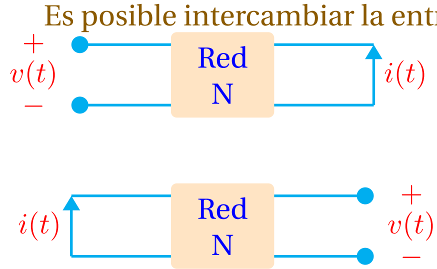



**Figura 1.2:** Clasificación desde el punto de vista de un sistema eléctrico.

Una tercera clasificación se presenta desde el punto de vista de los elementos de dos terminales que constituyen una red eléctrica. Se categorizan como elementos pasivos o activos, mostrada en la figura 1.3. Los elementos pasivos son el resistor, el inductor y el capacitor, los cuales se consideran, idealmente, lineales e invariantes en el tiempo.Las redes eléctricas integradas con estos elementos constituyen un circuito lineal, invariante en el tiempo, de parámetros concentrados y pasivos.Los elementos activos corresponden a las fuentes de voltaje y de corriente.

Se describe de manera general la actuación de los elementos que conforman un circuito eléctrico:

**Elementos Pasivos:** En esta clasificación se encuentran los tres principales componentes que aparecen en todo circuito eléctrico, que son el resistor, inductor y capacitor.

- Resistor: Al circular una corriente eléctrica por este elemento, ocasiona un calentamiento en el mismo por efecto Joule, esta energía es transferida al medio por lo que no se puede recuperar y de allí que se le coloque en la categoría de irreversible en cuanto a transferencia energética.
- Inductor: Un elemento de comportamiento dinámico que almacena e intercambia energía dentro del circuito a través de su campo magnético, de manera específica almacena corriente en su campo magnético, la actuación de este elemento es bidireccional por lo que se le considera reversible en cuanto a transferencia energética.
- Capacitor: Un elemento con características similares que el inductor en cuanto al almacenamiento de energía. Este elemento permite el almacenamiento de voltaje a través de su campo eléctrico para intercambiarlo dentro del circuito.

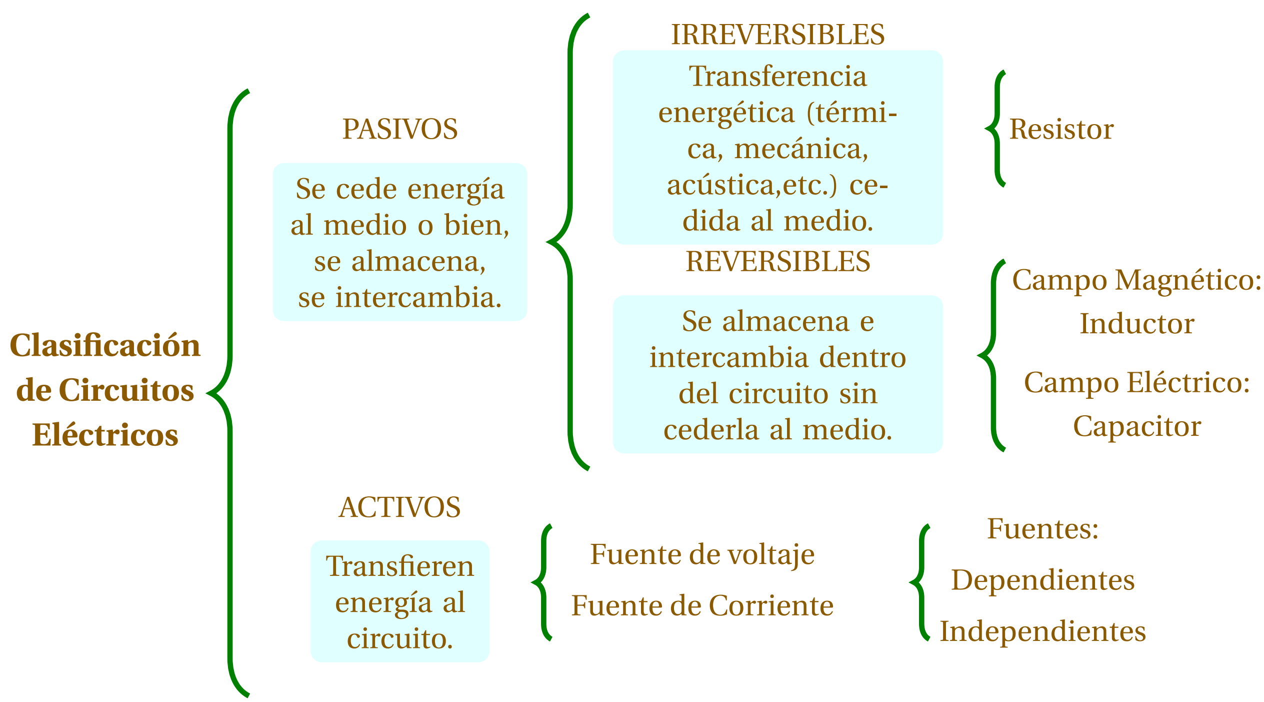



**Figura 1.3:** Una clasificación desde el punto de vista de los elementos que constituyen una red eléctrica.

**Elementos Activos:** Aquí se encuentran los elementos que proporcionan la energía necesaria para la adecuada operación del circuito. Se estudian las fuentes de voltaje y de corriente ideales y reales presentes en cualquier circuito eléctrico así como las fuentes de voltaje y corriente dependientes que son muy comunes en el modelado de circuitos eléctricos y electrónicos.

### Circuito Eléctrico

El análisis de los circuitos eléctricos conlleva la descripción de tres términos fundamentales, los cuales especifican las interconexiones de elementos o componentes eléctricos.

La figura 1.4 a describe un circuito de cinco ramas, es decir, con cinco componentes de dos terminales. La figura 1.4 b describe un circuito con tres nodos principales y el nodo de referencia $n_0$. La figura 1.4 c describe un circuito con dos mallas en las que no se cruzan ninguna rama. La figura 1.4 d integra la descripción de todos los términos del circuito

**Rama:** Uno o más elementos que pueden combinarse para formar una conexión con dos terminales.

**Nodo:** La unión de dos o más componentes de dos terminales (ramas).

**Malla:** Una trayectoria cerrada conformada con ramas.

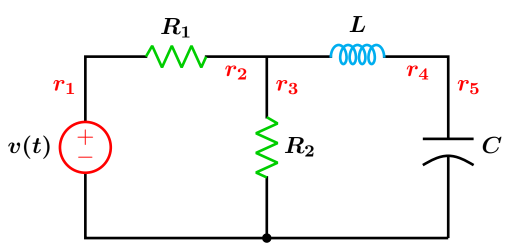



**Figura 1.4 a:** Circuito con cinco ramas.

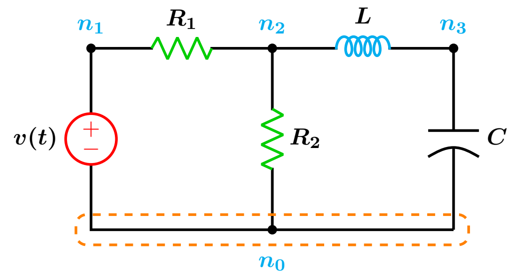



**Figura 1.4 b:** Circuito con tres nodos principales y uno de referencia.

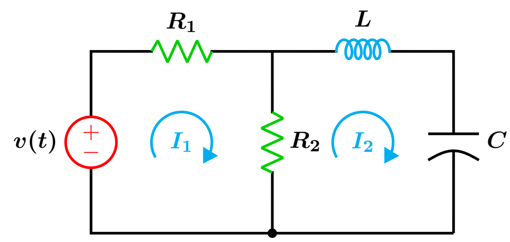



**Figura 1.4 c:** Circuito con dos mallas.

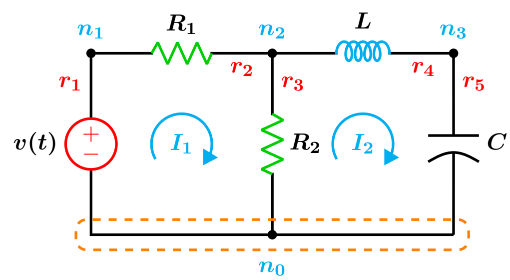



**Figura 1.4 d:** Circuito con sus desriptores.

## 1.3 Variables eléctricas

Las principales variables que intervienen en el estudio de los circuitos eléctricos son la carga eléctrica, la corriente eléctrica, la energía, el voltaje o diferencia de potencial, la potencia y el flujo magnético. En la tabla 1.1 se presentan estas variables, sus unidades, abreviaturas, símbolos y la relación entre ellas.

La carga eléctrica es una propiedad física de las partículas atómicas de las que se compone la materia, la cual se manifiesta mediante fuerzas de atracción y repulsión entre ellas, esta interacción es electromagnética y se lleva a cabo con las cargas positivas y negativas de la partícula. La carga eléctrica constituye el postulado de la Ley de la conservación de la carga, el cual establece que la carga no se crea ni se destruye, solo se transfiere. La carga tiene movimiento, por lo que puede ser transferida de un lugar a otro y ser convertida en otra forma de energía.

Las cargas eléctricas en movimiento crean la corriente eléctrica, la cual se define como la transferencia neta de carga con respecto al tiempo. Por convención se considera la dirección del flujo de la corriente positivo cuando el movimiento es de las cargas positivas a las negativas.

El postulado fundamental de la física de la conservación de la energía establece que la energía no se crea ni se destruye, solo se transforma. La energía eléctrica se produce a partir de muchos otros tipos de energía, ya sea química, mecánica, atómica, etc.

| Variable | Unidad | Abreviatura | Simbolo | Relación |
|---|---|---|---|---|
| Carga | Coulomb | C | $q(t)$ | $q(t) = \int i(t)\,dt$ |
| Corriente Eléctrica | Ampere | A | $i(t)$ | $i(t) = \frac{dq}{dt}$ |
| Energía | Joule | J | $w(t)$ | $w(t) = \int p(t)\,dt$ |
| Voltaje (diferencia de potencial) | Volt | V | $v(t)$ | $v(t) = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{dw}{dq}$ |
| Potencia | Watt | W | $p(t)$ | $p(t) = v(t)i(t) = \frac{dw}{dt}$ |
| Fllujo Magnético | Weber | Wb | $\Phi(t)$ | $\Phi(t) = \int v(t)\,dt$ |

**Tabla 1.1:** Relación entra variables eléctricas básicas.

Las cargas en movimiento requieren de un suministro de energía o bien realizar trabajo para ser transferidas de un punto a otro, manifestándose en la generación de un voltaje. Es decir, se requiere una energía total de un Joule para mover un grupo de partículas con una carga de un Coulomb, de un punto a otro en un circuito para producir una diferencia de potencial de un Volt.

La potencia y la energía se relacionan con el voltaje y la corriente. La potencia se define como la cantidad de trabajo que se realiza en un un determinado tiempo, pudiendo ser potencia positiva o absorbida o bien, potencia negativa o suministrada a un elemento eléctrico.

El flujo magnético es una medida del campo magnético total que pasa a través de una determinada área. Está asociado con la ley de Faraday, la cual establece que el voltaje inducido en un circuito cerrado es directamente proporcional a la variación temporal del flujo magnético que atraviesa una espira.El flujo magnético es una medida del campo magnético total que pasa a través de una determinada área. Está asociado con la ley de Faraday, la cual establece que el voltaje inducido en un circuito cerrado es directamente proporcional a la variación temporal del flujo magnético que atraviesa una espira.

### Convención de signos

La convención de signos es importante para la congruencia en la aplicación de las leyes de circuitos, la obtención de los modelos de los elementos, el análisis que se lleva a cabo y los resultados obtenidos. Se utiliza la convención de signos pasiva para las principales variables que intervienen en el estudio de los circuitos eléctricos, la corriente, el voltaje y la potencia. Un resumen de las variables, la convención de signos y la notación utilizada en circuitos se presenta en la tabla 1.2.

Se denotan con minúscula las variables que son funciones del tiempo, por ejemplo $v(t)$ en corriente alterna $ca$, mientras que las variables del circuito cuyos valores no varían en el tiempo, es decir, son constantes debidas a fuentes de excitación de corriente directa o corriente continua $cc$, se denotan con mayúscula como $V$, por ejemplo para un voltaje de $cc$, y de manera similar para las demás variables.

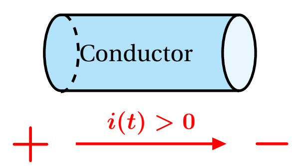
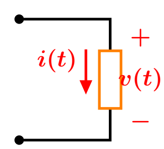
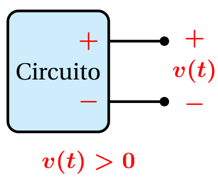
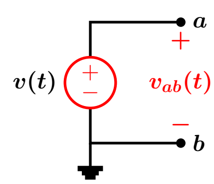
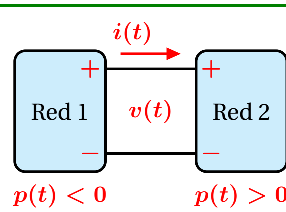
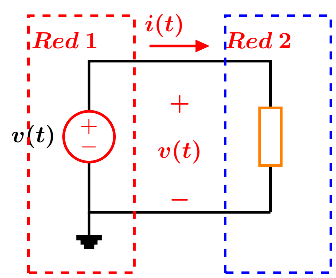
| Variable (ca,cc) | Convención de signos | Notación en circuitos |
|---|---|---|
| Corriente eléctrica<br>$i(t), I$ | <br>La corriente en un conductor<br>será positiva si va de + a − |  |
| Voltaje eléctrico<br>$v(t), V$ | <br>El voltaje es positivo si la diferencia<br>de potencial real entre las dos<br>terminales es tal que el potencial<br>en la terminal superior (+) es mayor<br>que el de la terminal inferior (-) | <br>Si $b$ es el nodo de tierra<br>$v_{ab}(t) = v_a(t)$ |
| Potencia<br>$p(t), P$ | <br>La potencia es negativa si<br>la Red suministra energía.<br>La potencia es positiva si<br>la Red recibe energía. |  |

Tabla 1.2: Convención de signos.

# 1.4 Elementos de dos terminales

## 1.4.1 Elemento Resistivo LIT

Los elementos o componentes eléctricos de dos terminales están definidos por su curva característica, la cual relaciona dos variables eléctricas en cualquier instante de tiempo$t$ . La curva específica es el conjunto los posibles valores que toman las variables en cualquier instante de tiempo.

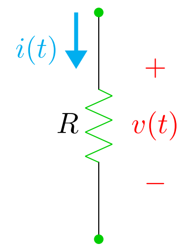



**Figura 1.5:** Símbolo del Resistor

Resistor. Elemento de disipación de Energía. La resistencia es la propiedad física del elemento de impedir el flujo de corriente en un circuito. Se representa con la letra $R$ con unidades de ohms, $\Omega$, como se indica en la figura 1.5. Su inverso es la conductancia $G$ que es la capacidad del elemento para conducir corriente eléctrica, tiene unidades de Siemens.

- Resistencia R $[\Omega]$
- Conductancia $G = \dfrac{1}{R}$ [Siemens]

Ya que responde de acuerdo con la Ley de Omh

$$v(t) = R\, i(t)$$

dependiendo del valor de $R$ adquiere diferentes comportamientos. Las figuras 1.6 a 1.8 presentan el comportamiento para diferentes valores de $R$. Así, cuando R=0 representa un corto circuito y cuando $R = \infty$ representa un circuito abierto. La tabla 1.3 presenta las expresiones que relacionan el voltaje, la corriente y la enegía en el resistor.

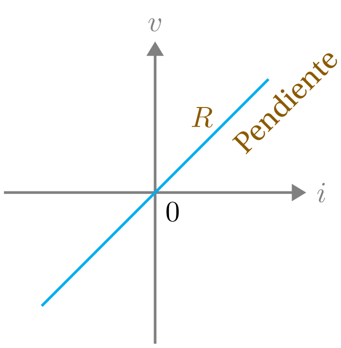



**Figura 1.6:** R es constante

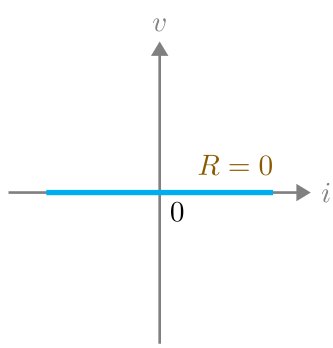



**Figura 1.7:** Corto circuito

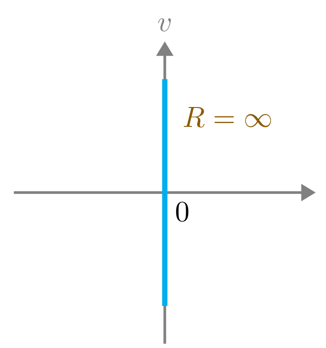



**Figura 1.8:** Circuito abierto

| Directa | Inversa | Energía |
|---|---|---|
| Ley de Ohm $v(t) = Ri(t)$ | $i(t) = \frac{1}{R}v(t) = Gv(t)$ | $w(t) = \int_{-\infty}^{t} v(\tau)i(\tau)\,d\tau$ $w(t) = \int_{-\infty}^{t} Ri^2(\tau)\,d\tau$ |

**Tabla 1.3:** Relaciones básicas del elemento resistivo.

Existe también otro tipo de elementos resistivos que como parte de su funcionamiento presentan un comportamiento no lineal. Estos elementos se describen brevemente y sus relaciones de corriente y voltaje se resumen en la tabla 1.4.

Potenciómetro. Resistor LVIT Lineal Variante o Invariante en el Tiempo: Es un elemento eléctrico resistivo variable, generalmente de tres terminales, que se ajusta manualmente al hacer girar la perilla, o bien, manifiesta variaciones de resistencia si se utiliza como sensor de alguna variable física. En la figura 1.9 se muestra un tipo de potenciómetro. Se comporta como un divisor de voltaje y suele utilizarse en circuitos de corrientes pequeñas.

**Figura 1.9:** Potenciómetro

Diodo. Resistor NLIT No Lineal e Invariante en el Tiempo Es un componente electrónico de dos terminales de tipo semiconductor, el cual permite la circulación de corriente eléctrica a través del mismo en una sola dirección y la impide en el sentido contrario. Esta característica permite que el elemento presente dos estados, polarización directa en dirección de la corriente y polarización Inversa en dirección contraria de la corriente.

Diodo Shockley. Resistor NLVT No Lineal Variante en el Tiempo: Es un dispositivo de dos terminales que presenta dos estados posibles, uno de bloqueo o de alta impedancia, y otra de conducción o de baja impedancia. Se utiliza principalmente en osciladores.

| Elemento | Ejemplo | Directa | Inversa |
|---|---|---|---|
| Resistor LVT | $R(t) = R_1 \cos(\omega t)$ | $v(t) = R(t)i(t)$ | $i(t) = G(t)v(t)$ |
| Resistor NLIT | Diodo | $v(t) = f\left(i_D(t)\right)$ | $i_D = I_0\left(e^{v_D/V_T}\right)$ |
| Resistor NLVT | Diodo Shockley | $v(t) = f\left(i(t), t\right)$ | $i(t) = I_s\left(e^{qv(t)/KT} - 1\right)$ |

**Tabla 1.4:** Tabla de elementos resistivos con diferentes comportamientos.

### 1.4.2 Elemento Inductivo LIT

Inductor. Componente que almacena corriente eléctrica . Es un elemento del circuito capaz de almacenar energía eléctrica en su campo magnético y cederla posteriormente al circuito. Impide los cambios instantáneos de corriente. Se representa como se indica en la figura 1.10, su unidad es el Henry.

- Inductancia L [Henry]
- Inductancia Inversa Γ (Gamma)

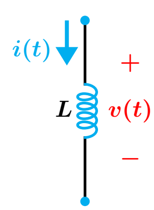



**Figura 1.10:** Símbolo del Inductor

Tiene una característica lineal de flujo magnético - corriente, la cual se presenta en la figura 1.11

Las expresiones de voltaje, corriente y energía se presentan en la tabla 1.5 para un inductor lineal e invariante en el tiempo, LIT, los cuales son los que se utilizarán en este texto.

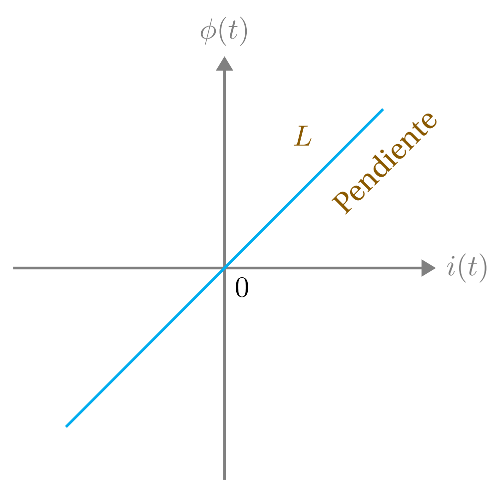



**Figura 1.11:** Relación $\phi(t) = Li(t)$

| Directa | Inversa | Energía |
|---|---|---|
| $v(t) = L\dfrac{di}{dt}$ | $i(t) = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^t v(\tau)\,d\tau + i(0)$ | $w(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} L\dfrac{di}{d\tau} i(\tau)\,d\tau$ <br> $w(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{i(t)} Li(\tau)\,di = \dfrac{Li^2(t)}{2}$ |

**Tabla 1.5:** Relaciones básicas del elemento inductivo LIT.

Los inductores LIT son los que se utilizarán en este libro, no obstante, en la tabla 1.6 describen las relaciones de voltaje-corriente para un inductor lineal, variante en el tiempo, LVT.

| Ley de Faraday | Caracteristica | Voltaje-Corriente |
|---|---|---|
| $v(t) = L\dfrac{d\phi}{dt}$ | $\phi(t) = L(t)i(t)$ | $v(t) = L(t)\dfrac{di}{dt} + i(t)\dfrac{dL}{dt}$ |

**Tabla 1.6:** Relaciones de un inductor LVT.

### 1.4.3 Elemento Capacitivo LIT

Capacitor. Componente que almacena voltaje eléctrico. El capacitor es un elemento del circuito capaz de almacenar energía eléctrica mediante su campo eléctrico e impide las variaciones instantáneas de voltaje. Su unidad es el Farad y su representación de circuito se muestra en la figura 1.12.

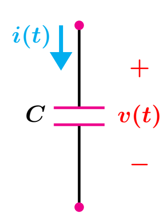



**Figura 1.12:** Símbolo del Capacitor

- Capacitancia C [Farad]
- Elastancia $\dfrac{1}{C} = S\,[Farad^{-1}]$

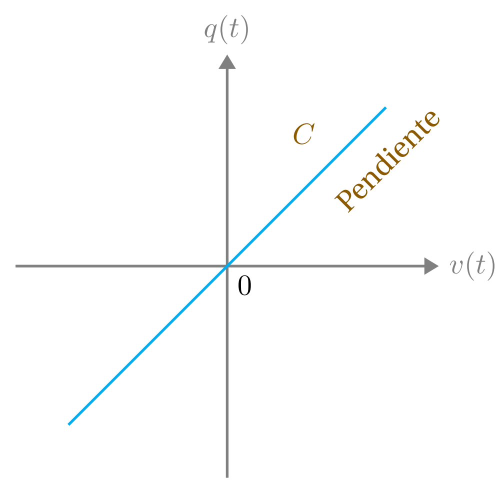



**Figura 1.13:** Relación $q(t) = Cv(t)$

Tiene una característica lineal de carga eléctrica - voltaje, la cual se presenta en la figura 1.13 y las expresiones de voltaje, corriente y energía se presentan en la tabla 1.7 para un capacitor lineal e invariante en el tiempo, LIT.

| Directa | Inversa | Energía |
|---|---|---|
| $i(t) = C\dfrac{dv}{dt}$ | $v(t) = \dfrac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau + v(0)$ | $w(t) = \int_{-\infty}^{t} C\dfrac{dv}{d\tau}v(\tau)\,d\tau$<br>$w(t) = \int_{-\infty}^{v(t)} Cv(\tau)\,dv = \dfrac{Cv^2(t)}{2}$ |

**Tabla 1.7:** Relaciones básicas del elemento Capacitivo LIT.

Los capacitores LIT son los que se utilizarán en este libro, no obstante, en la tabla 1.8 se presenta una relación para las variables de voltaje, corriente y carga en un capacitor LVT.

| Relación Corriente-Carga | Caracteristica | Voltaje-Corriente |
|---|---|---|
| $i(t) = \dfrac{dq}{dt}$ | $q(t) = C(t)v(t)$ | $i(t) = C(t)\dfrac{dv}{dt} + v(t)\dfrac{dC}{dt}$ |

**Tabla 1.8:** Relaciones de un Capacitor LVT.

### 1.4.4 Fuentes de energía independientes ideales

Fuente de voltaje ideal: Es un elemento eléctrico capaz de mantener un voltaje constante en sus terminales, independientemente de la carga esté conectada y de la corriente que circule por dicho elemento. Las figuras 1.14 y la 1.15 muestran la representación y su comportamiento.

Fuente de corriente ideal: Es un elemento eléctrico capaz de mantener una corriente constante en su rama, independientemente de la carga a la cual está conectado y del voltaje presente en sus terminales. Las figuras 1.16 y la 1.17 muestran la representación y su comportamiento.

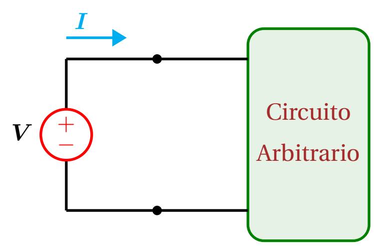



**Figura 1.14:** Fuente de voltaje Independiente

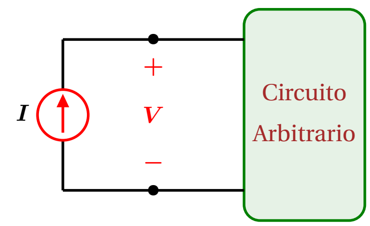



**Figura 1.16:** Fuente de corriente Independiente

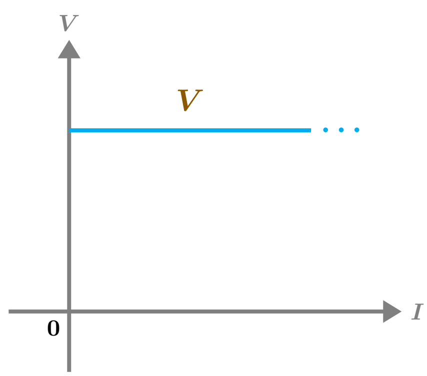



**Figura 1.15:** Relación voltaje-corriente. El voltaje es constante.

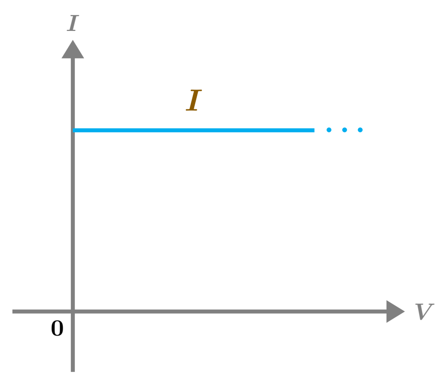



**Figura 1.17:** Relación corriente-voltaje. La corriente es constante.

### 1.4.5 Fuentes de energía independientes reales

Fuente de voltaje real: El valor del voltaje que aparece en la terminales de este elemento, depende de la carga a la cual está conectada y de la corriente que circula por el mismo.

Se representa con una fuente de voltaje ideal en serie con una resistencia $R_s$ de valor mucho menor que la resistencia de carga ($R_s << R_c$), para que se mantenga el voltaje de la fuente. La fuente se muestra en la figura 1.18.

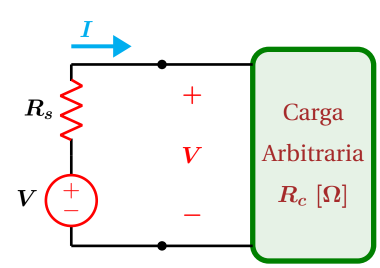



**Figura 1.18:** Fuente de voltaje Independiente Real

Fuente de corriente real: El valor de la corriente que es capaz de suministrar este elemento, depende del voltaje en sus terminales y de la carga que está conectada. Se representa con una fuente de corriente ideal en paralelo con una resistencia $R_s$ de valor mucho mayor a la resistencia de carga ($R_s >> R_c$). La fuente se muestra en la figura 1.19.

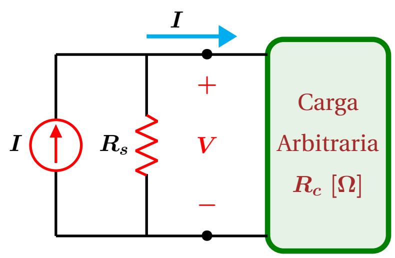



**Figura 1.19:** Fuente de corriente Independiente Real

### 1.4.6 Fuentes de Energía Dependientes

Hasta ahora se han mencionado dos tipos de fuentes ideales en las que el valor de la fuente no se ve afectada de ningún modo por lo que suceda en el resto del circuito.

A continuación se examinan las llamadas fuentes dependientes o controladas, en las que el valor de la fuente se ve modificada por una corriente o voltaje presente en alguna otra parte del circuito.

Fuente de voltaje controlada por voltaje: El parámetro $K$ es un factor de ajuste, no tiene unidades, $v_x$ es el voltaje de dependencia ubicado en alguna otra parte del circuito. El voltaje $V$ entre las terminales de la fuente dependiente está dado por $V = Kv_x$. En la Figura 1.20 se representa el símbolo asociado a dicho elemento.

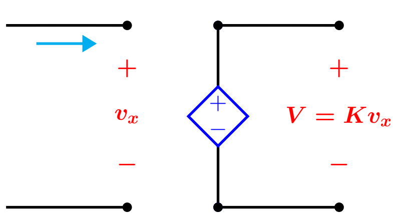



**Figura 1.20:** Fuente de Voltaje controlada por voltaje.

Fuente de corriente controlada por corriente: El parámetro $K$ es un factor de ajuste que no tiene unidades, $i_x$ es la corriente de dependencia ubicado en alguna otra parte del circuito. La corriente $I$ que circula por la fuente dependiente está dada por $I = Ki_x$. En la Figura 1.21 se muestra el símbolo asociado al elemento.

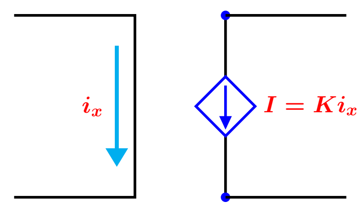



**Figura 1.21:** Fuente de corriente controlada por corriente.

Fuente de voltaje controlada por corriente: El parámetro $r$ es un factor de ajuste con unidades de **V/A**, $i_x$ es la corriente de dependencia ubicado en alguna otra parte del circuito. El voltaje $V$ entre las terminales de la fuente dependiente está dado por $V = ri_x$. En la Figura 1.22 se muestra la representación del dispositivo.

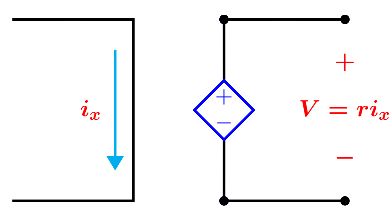



**Figura 1.22:** Fuente de Voltaje controlada por corriente.

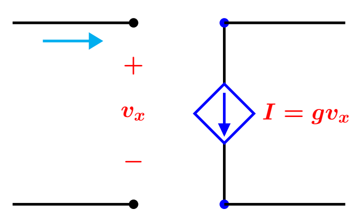



**Figura 1.23:** Fuente de corriente controlada por voltaje.

Fuente de corriente controlada por voltaje: El parámetro $g$ es un factor de ajuste con unidades de **A/V**, $v_x$ es el voltaje de dependencia ubicado en alguna otra parte del circuito. La corriente $I$

que circula por la fuente dependiente está dada por la expresión $I = gv_x$. En la Figura 1.23 se muestra la representación del elemento.

Este tipo de fuentes aparecen en modelos eléctricos equivalentes de varios dispositivos electrónicos, como los transistores, amplificadores operacionales u otros circuitos como los bipuertos, en éstos solo se dispone de las terminales de entrada y salida para su caracterización, considerando el circuito como una caja negra, mismos que serán analizados en el tema 6.

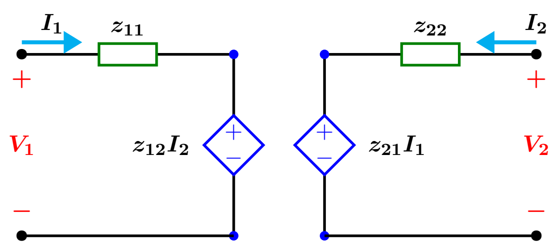



**Figura 1.24:** Red de dos puertos o Bipuerto.

En las Figuras 1.24 y 1.25 se muestran dos aplicaciones en las que se utilizan las fuentes dependientes.

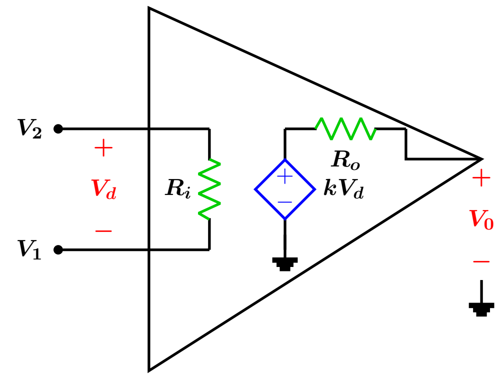



**Figura 1.25:** Modelo simple de un Amplificador operacional.

## 1.5 Leyes de Kirchhoff

### 1.5.1 Ley de voltajes de Kirchhoff (LVK)

La comprensión de las leyes de Kirchhoff constituyen la piedra angular del análisis de circuitos, se basan a su vez en las leyes físicas de la conservación de la energía y de la carga eléctrica. Se describen brevemente a continuación.

Para cualquier circuito de parámetros concentrados, en cualquier trayectoria cerrada y en cualquier tiempo, la suma algebraica de voltajes es igual a cero.
Matemáticamente se expresa como:

$$\sum V_{\circlearrowleft} = 0$$

De manera alternativa, esta ley se puede enunciar como sigue:

Para cualquier trayectoria cerrada, la suma de las elevaciones en el potencial debe ser igual a la suma de las caídas en el potencial.

Se expresa como:

$$\sum V_e = \sum V_c$$

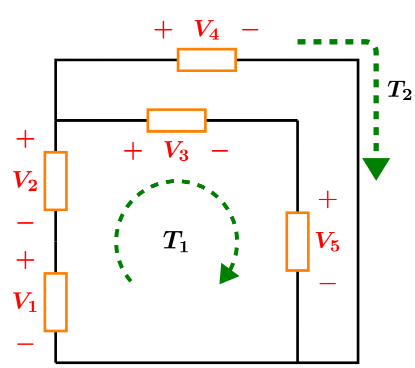



**Figura 1.26:** Ley de voltajes Kirchhoff

En la Figura 1.26 se muestran dos trayectorias que ilustran la aplicación de la LVK.

Siguiendo la trayectoria $T_1$ se tiene:

$$V_1 + V_2 - V_3 - V_5 = 0$$

Siguiendo la trayectoria $T_2$ se tiene:

$$V_1 + V_2 - V_4 = 0$$

## Ejemplo 1.5.1

Para el circuito mostrado en la Figura 1.27, y considerando los voltajes de nodo siguientes:

$$v_{1o} = 2\,[\text{V}] \quad v_{2o} = 4\,[\text{V}] \quad v_{3o} = 7\,[\text{V}]$$

$$v_{4o} = 11\,[\text{V}] \quad v_{5o} = 16\,[\text{V}] \quad v_{6o} = 22\,[\text{V}]$$

$$v_{7o} = 29\,[\text{V}]$$

Obtener:

$$v_x \quad v_{21} \quad v_{12} \quad v_{53} \quad v_{16} \quad v_{67} \quad v_{14}$$

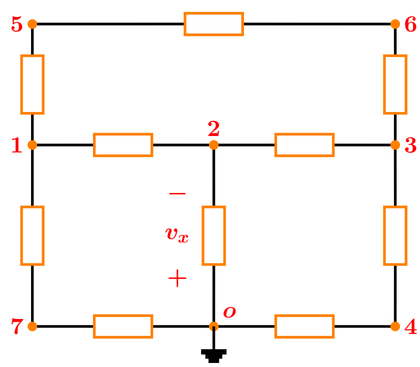



**Figura 1.27:** Aplicación de la LVK

### Solución

El voltaje $v_x$ es el negativo de $v_{2o}$ por lo que:

$$v_x = -v_{2o} = -4\,[V]$$

Cálculo del voltaje $v_{12}$:

$$v_{12} + v_{2o} = v_{1o}$$

$$v_{12} + 4 = 2$$

$$v_{12} = -2\,[V]$$

El voltaje $v_{21}$ es el negativo del voltaje $v_{12}$:

$$v_{21} = 2\,[V]$$

Cálculo del voltaje $v_{53}$:

$$v_{53} + v_{3o} = v_{5o}$$

$$v_{53} + 7 = 16$$

$$v_{53} = 9\,[V]$$

Cálculo del voltaje $V_{16}$:

$$v_{6o} + v_{o1} + v_{16} = 0$$

$$22 - 2 + v_{16} = 0$$

$$v_{16} = -20\,[V]$$

Cálculo del voltaje $v_{67}$:

$$v_{67} = v_{6o} + v_{o7}$$

$$v_{67} = 22 - 29$$

$$v_{67} = -7\,[V]$$

Cálculo del voltaje $v_{14}$:

$$v_{14} + v_{4o} + v_{o1} = 0$$

$$v_{14} + 11 - 2 = 0$$

$$v_{14} = -9\,[V]$$

### 1.5.2 Divisor de voltaje

El divisor de voltaje es un circuito simple en conexión serie de resistores que permite obtener de manera directa el voltaje en cualquier resistencia, en términos de la fuente y los resistores.

Si se tiene una configuración de varias resistencias en serie como el mostrado en la Figura 1.28, entonces la caída de voltaje en cualquier resistencia es proporcional al valor de dicha resistencia.

$$V_N = \left(\frac{R_N}{R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_N}\right) V_s$$

En la ecuación anterior, $R_N$ es la resistencia de interés en la cual se desea conocer el voltaje particular $V_N$.

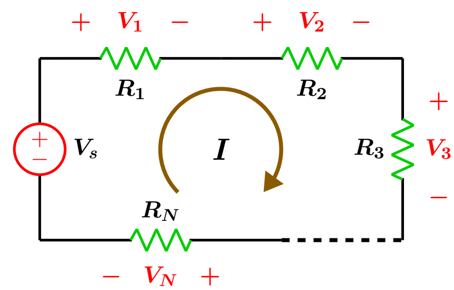



**Figura 1.28:** Circuito divisor de voltaje

## Ejemplo 1.5.2

Para el circuito que se muestra en la Figura 1.29, obtenga el voltaje en cada resistencia y verifique que se cumple la ley de voltajes de Kirchhoff, utilice la regla del divisor de voltaje.

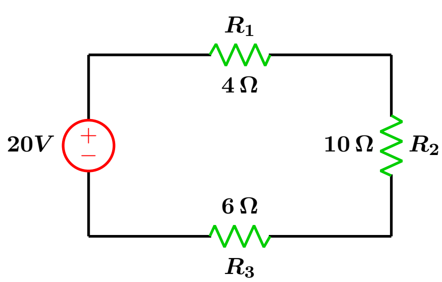



**Figura 1.29:** Divisor de voltaje

**Solución**

Se aplica el divisor de voltaje en cada una de las resistencias con lo que se obtiene:

$$V_{R_1} = \left(\frac{4}{4 + 10 + 6}\right)(20) = 4\,V$$

$$V_{R_2} = \left(\frac{10}{4 + 10 + 6}\right)(20) = 10\,V$$

$$V_{R_3} = \left(\frac{6}{4 + 10 + 6}\right)(20) = 6\,V$$

Como puede observarse fácilmente, la suma total de los voltajes de cada resistencia es igual al voltaje de la fuente, cumpliéndose así la ley de voltajes de Kirchhoff.

### 1.5.3 Ley de corrientes de Kirchhoff (LCK)

Para todo circuito de parámetros concentrados, en cualquier instante de tiempo, la suma algebraica de corrientes presente en una superficie cerrada es cero.

$$\sum I_n = 0$$

De manera alterna se puede enunciar como sigue:

Para todo nodo y en cualquier instante de tiempo, la suma de las corrientes que entran a un nodo es igual a la suma de corrientes que salen del mismo.

Matemáticamente se expresa como:

$$\sum I_e = \sum I_s$$

La LCK aplicada a la superficie cerrada del circuito de la Figura 1.30 es como se indica:

$$i_a(t) + i_c(t) = i_b(t) + i_d(t)$$

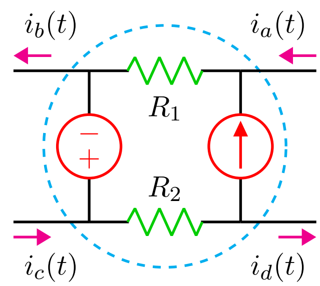



**Figura 1.30:** Ley de corrientes de Kirchhoff

## Ejemplo 1.5.3

Para el circuito mostrado en la Figura 1.31, obtenga el valor de $i_x$, interprete el resultado.

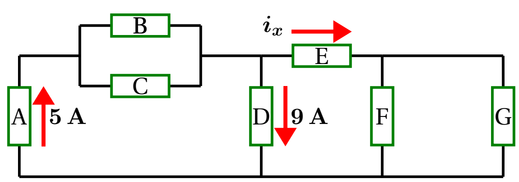



**Figura 1.31:** Aplicación de la LCK

**Solución**

$$i_x + 9 = 5$$
$$i_x = -4\,A$$

En realidad la corriente $i_x$ tiene dirección contraria a como está indicada en el diagrama.

### 1.5.4 Divisor de corriente

A partir del la LCK se deriva el divisor de corriente, el cual es un circuito simple de resistores en paralelo que facilita obtener la corriente que circula por una resistencia, en términos de la fuente de excitación y los resistores.

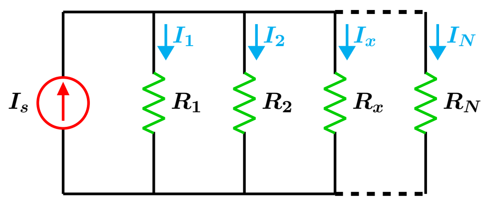



**Figura 1.32 a:** Divisor de corriente

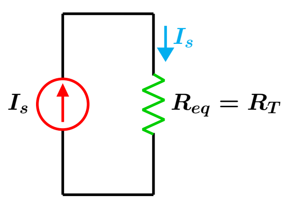



**Figura 1.32 b:** Circuito equivalente

Si se tiene una configuración de varias resistencias en paralelo como el mostrado en la figura 1.32 a en la que se puede determinar una resistencia equivalente $R_{eq}$ indicada en la figura 1.32 b.

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_x} + \ldots \frac{1}{R_N}$$

La corriente $I_N$ que circula en rama $N$ es igual a la resistencia equivalente en paralelo $R_T$ dividida entre la resistencia $R_N$ multiplicada por la corriente que entra al nodo al cual están conectadas las ramas en paralelo.

La expresión del divisor de corriente en su forma general es:

$$I_N = \left(\frac{R_T}{R_N}\right) I_s$$

Para el caso particular de dos resistencias en paralelo como el que se muestra en la Figura 1.33 las corrientes en cada rama son las siguientes:

$$I_1 = \left(\frac{I_s}{R_1 + R_2}\right) R_2$$

$$I_2 = \left(\frac{I_s}{R_1 + R_2}\right) R_1$$

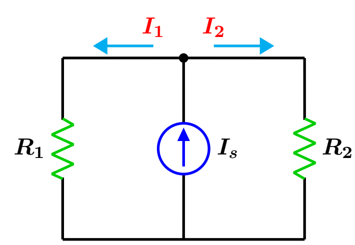



**Figura 1.33:** Dos resistencias en paralelo.

### Ejemplo 1.5.4 El divisor de corriente

Para el circuito que se muestra en la Figura 1.34, obtenga la corriente en cada resistencia y verifique que se cumple la ley de corrientes de Kirchhoff, utilice la regla del divisor de corriente.

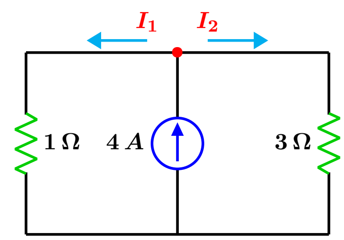



**Figura 1.34:** Divisor de corriente

**Solución**

Se aplica un divisor de corriente en cada resistencia con lo que se obtiene:

$$I_1 = \left(\frac{4}{1+3}\right)(3) = 3\,A$$

$$I_2 = \left(\frac{4}{1+3}\right)(1) = 1\,A$$

Se observa que la corriente proporcionada por la fuente se reparte proporcionalmente en cada resistencia, con lo que se cumple la ley de corrientes de Kirchhoff.

# 1.6 Transformación de fuentes

En el análisis de circuitos eléctricos, algunas veces es conveniente transformar una fuente de voltaje en una fuente de corriente equivalente y a la inversa, esto con la finalidad de simplificar el circuito y los cálculos relacionadas con el mismo.

## 1.6.1 Transformación de fuentes

En la Figura 1.35 se muestra una relación de equivalencia entre una fuente de voltaje y una fuente de corriente. Las fuentes son equivalentes únicamente con respecto a los elementos que están conectados entre sus terminales. La condición necesaria para que ambos diagramas sean equivalentes, es que el voltaje a circuito abierto entre las terminales a-b de los dos circuitos sean los mismos, así también la corriente de corto circuito en ambos esquemas deben ser iguales. El corto circuito simplemente se obtiene uniendo los extremos a-b.

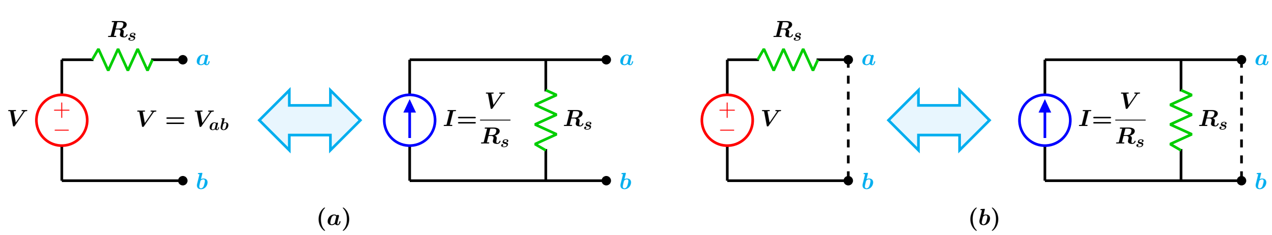



**Figura 1.35:** Fuentes equivalentes de voltaje y corriente: $(a)$ condición de circuito abierto, $(b)$ condición de corto circuito.

## Ejemplo 1.6.1

Compruebe que los circuitos mostrados son equivalentes.

### Solución

Se observa que el voltaje a circuito abierto en el circuito $(a)$ es el voltaje de la fuente de $12\,\mathrm{V}$. Al formar el corto circuito uniendo las terminales a-b la corriente es:

$$I = \frac{12}{2} = 6\,\mathrm{A}$$

En el circuito $(b)$, el voltaje a circuito abierto también es de $12\,\mathrm{V}$, y al formar el corto circuito, la corriente es de $6\,\mathrm{A}$ a través del corto.

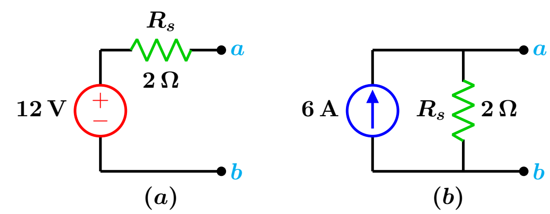



**Figura 1.36:** Circuitos equivalentes.

## Ejemplo 1.6.2

Para el circuito que se muestra a la derecha, cambie la fuente de voltaje por una de corriente y compruebe que los voltajes y corrientes para una resistencia de carga de $13\,\Omega$ son los mismos con ambas fuentes.

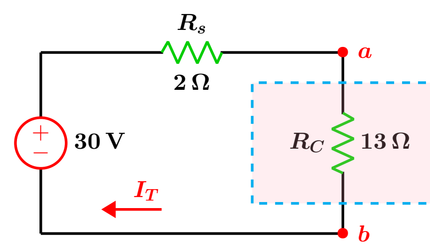



**Figura 1.37:** Circuito original.

### Solución

Para el circuito con la fuente de voltaje se tiene que:

$$R_T = R_s + R_C = 2 + 13 = 15\,\Omega$$

$$I_T = \frac{V}{R_T} = \frac{30}{15} = 2\,\mathrm{A}$$

$$V_{ab} = (R_C)\,(I_T) = (13)\,(2) = 26\,\mathrm{V}$$

Para transformar una fuente de voltaje en una de corriente véase la Figura 1.38, se utiliza la siguiente expresión:

$$I = \frac{V}{R_s} = \frac{30}{2} = 15\,\mathrm{A}$$

A continuación se obtiene la corriente que circula por la resistencia de carga con un divisor de corriente.

$$I_{R_C} = \left(\frac{15}{13+2}\right)(2) = 2\,\mathrm{A}$$

El voltaje en la resistencia de carga es:

$$V_{ab} = (R_C)\,(I_{R_C}) = (13)\,(2) = 26\,\mathrm{V}$$

Como se puede ver, los resultados con ambos modelos de circuito son idénticos.

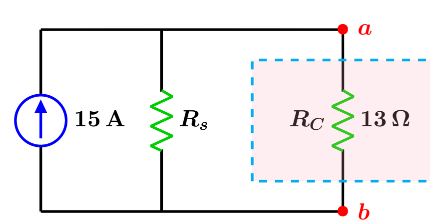



**Figura 1.38:** Fuente de corriente equivalente.

# 1.7 Transformación Estrella a Delta y Delta a Estrella

De un modo similar a la transformación de fuentes, en ocasiones es mas sencillo analizar un circuito después de haberlo transformado en una forma equivalente. En esta sección se explica de manera resumida como transformar una conexión de tipo delta ($\Delta$) a una de tipo estrella (**Y**) y viceversa.

## 1.7.1 Conversión $\Delta$ a Y

Cada resistor de la red estrella es el producto de los resistores de las dos ramas de la red delta adyacentes dividido entre la suma de los tres resistores de la red delta.

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \frac{R_B R_C}{R_A + R_B + R_C} \\
R_2 &= \frac{R_A R_C}{R_A + R_B + R_C} \\
R_3 &= \frac{R_A R_B}{R_A + R_B + R_C}
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

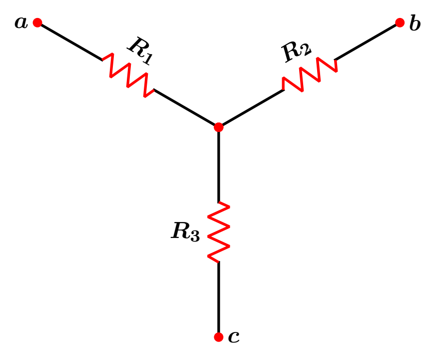



**Figura 1.39:** Configuración estrella.

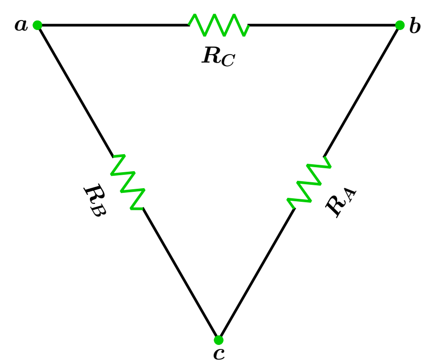



**Figura 1.40:** Configuración delta.

## 1.7.2 Conversión Y a $\Delta$

Cada resistencia de la red delta es la suma de todos los productos posibles de los resistencias de la red estrella tomados de dos en dos, dividido entre la resistencia opuesta en estrella.

$$
\begin{aligned}
R_A &= \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1} \\
R_B &= \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2} \\
R_C &= \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_3}
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

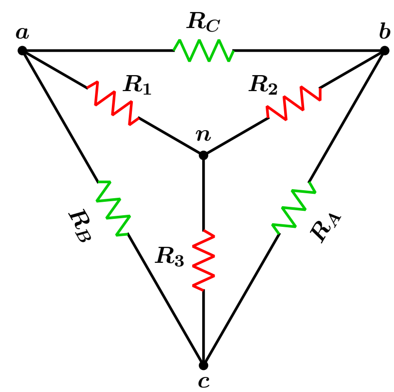



**Figura 1.41:** Configuraciones superpuestas.

## Ejemplo 1.7.1

Para la conexión estrella que se muestra en la Figura 1.42 obtenga su equivalente en delta.

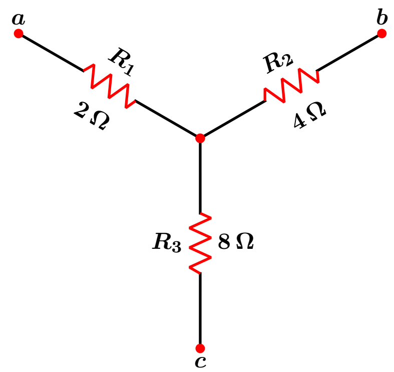



**Figura 1.42:** Configuración estrella.

### Solución

Las ecuaciones que permiten transformar una configuración estrella en su correspondiente delta equivalente son:

$$R_A = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_1}$$

$$R_B = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_2}$$

$$R_C = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_3}$$

Sustituyendo valores numéricos se obtiene:

$$R_A = \frac{(2)(4) + (2)(8) + (4)(8)}{2} = 28\,\Omega$$

$$R_B = \frac{(2)(4) + (2)(8) + (4)(8)}{4} = 14\,\Omega$$

$$R_C = \frac{(2)(4) + (2)(8) + (4)(8)}{8} = 7\,\Omega$$

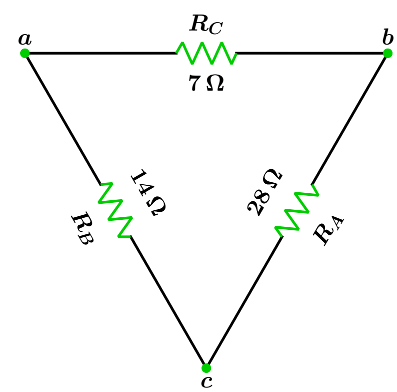



**Figura 1.43:** Configuración equivalente delta.

## Ejemplo 1.7.2

Obtener el equivalente en estrella de la configuración en delta que se muestra en la Figura 1.44.

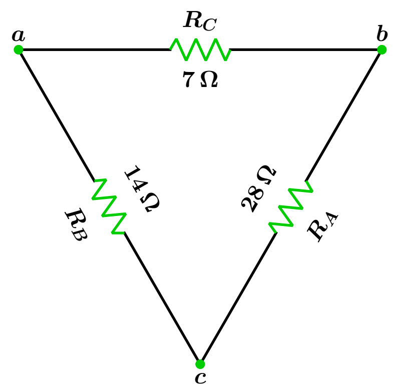



**Figura 1.44:** Configuración delta.

### Solución

Las ecuaciones que permiten transformar una configuración delta en su equivalente estrella son:

$$R_1 = \frac{R_B R_C}{R_A + R_B + R_C}$$

$$R_2 = \frac{R_A R_C}{R_A + R_B + R_C}$$

$$R_3 = \frac{R_A R_B}{R_A + R_B + R_C}$$

Sustituyendo valores numéricos se tiene:

$$R_1 = \frac{(7)\,(14)}{14+7+28} = \frac{98}{49} = 2\,\Omega$$

$$R_2 = \frac{(28)\,(7)}{14+7+28} = \frac{196}{49} = 4\,\Omega$$

$$R_3 = \frac{(14)\,(28)}{14+7+28} = \frac{392}{49} = 8\,\Omega$$

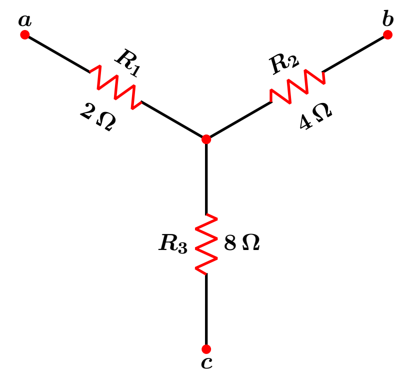



**Figura 1.45:** Configuración equivalente estrella.

# 1.8 Circuitos de primer orden

Los circuitos que contienen capacitores o inductores suelen representarse por medio de ecuaciones diferenciales. Un circuito de primer orden es aquel que contiene solamente un elemento de almacenamiento de energía, ya sea un capacitor o inductor, da lugar a que su ecuación diferencial que lo representa sea de primer orden.

## 1.8.1 Circuito RC sin excitación

Un circuito RC con condiciones iniciales ocurre cuando su fuente de alimentación se desconecta repentinamente, la energía almacenada en el capacitor da como consecuencia la aparición de un voltaje entre las terminales del mismo, estas son las condiciones iniciales con las que el circuito operará para $t \geq 0$, se puede establecer entonces que en $t = 0$ se tiene un voltaje inicial $V_0$ es decir $v(0^+) = V_0$. En la Figura 1.47 se muestra la respuesta natural o transitoria debida unicamente a la energía almacenada en el capacitor. La rapidez con la que el capacitor se descarga depende de su constante de tiempo $\tau$.

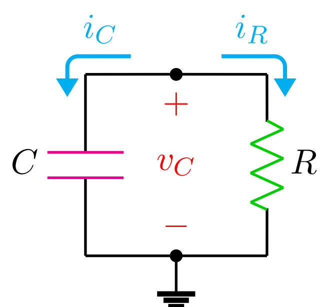



**Figura 1.46:** Circuito RC sin fuente.

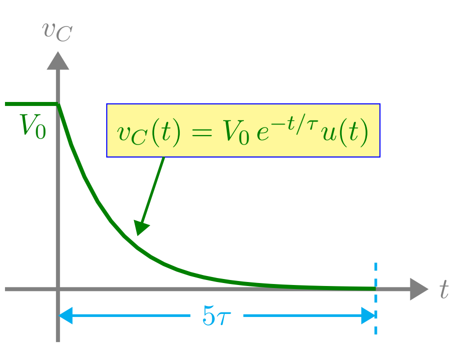



**Figura 1.47:** Respuesta transitoria del circuito RC

La ecuación diferencial que representa al circuito RC en su fase de descarga es:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = 0 \tag{1.3}$$

cuya solución es

$$v_C(t) = V_0\, e^{-t/\tau} u(t)$$

la constante de tiempo $\tau$ del circuito RC es:

$$\tau = RC \tag{1.4}$$

Otras expresiones que se derivan del análisis del circuito son:

$$i_C + i_R = 0$$

$$i_R(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC} u(t)$$

$$p_R(t) = \frac{V_0^2}{R} e^{-2t/RC} u(t)$$

$$w_R(t) = \frac{CV_0^2\left(1 - e^{-2t/RC}\right)}{2}$$

**Respuesta natural:** La respuesta natural se debe únicamente a la configuración del circuito y a la energía almacenada inicialmente en el capacitor, sin fuentes de alimentación externa.

**Constante de tiempo:** Es el tiempo que transcurre para que la respuesta alcance el 63.2 % del valor final a una entrada escalón.

### 1.8.2 Circuito RC con excitación

Considérese el circuito de primer orden con fuente de alimentación y condiciones iniciales nulas $v_c\left(0^-\right) = v(0) = v_c\left(0^+\right) = 0$ mostrado en la Figura 1.48.

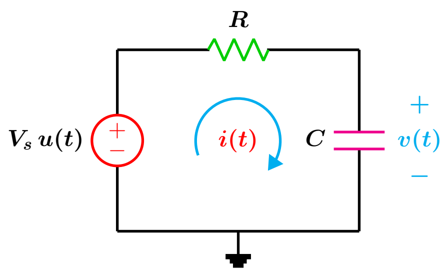



**Figura 1.48:** circuito RC con fuente

La ecuación diferencial que representa a dicho circuito es:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = \frac{V_s}{RC}u(t) \tag{1.5}$$

y su correspondiente respuesta es:

$$v(t) = V_s\left(1 - e^{-t/\tau}\right)u(t) \tag{1.6}$$

la gráfica de esta respuesta incluye la permanente y la transitoria, misma que se muestra en la Figura 1.49.

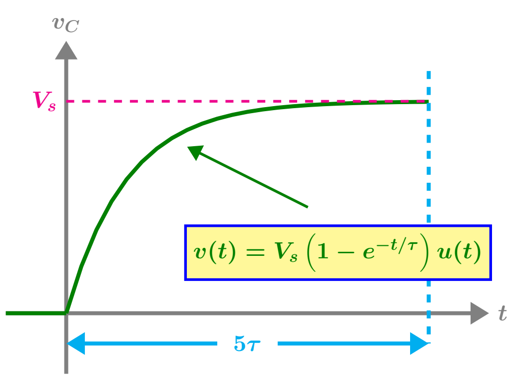



**Figura 1.49:** Respuesta transitoria del circuito RC

La respuesta transitoria de $v(t)$ es:

$$v_t(t) = \left[V_s\,e^{-t/RC}\right]u(t) \tag{1.7}$$

La respuesta de estado permanente es el estado que alcanza el circuito mucho tiempo después de aplicarse una excitación externa. En la práctica suele considerarse cuando la respuesta transitoria ha alcanzado cinco constantes de tiempo $5\tau$, o prácticamentes es cero.

$$v_p(t) = V_s$$

Otras expresiones derivadas del circuito son:

$$v_R(t) = \left(V_s e^{-t/RC}\right)u(t)$$

$$q(t) = CV_s\left(1 - e^{-t/RC}\right)u(t)$$

Como un caso particular, si el capacitor tiene una condición inicial $V_0 \neq 0$ en $t = 0$ las ecuaciones para el voltaje y corriente son respectivamente:

$$\begin{aligned} v_c(t) &= \left[V_s + (V_0 - V_s)\,e^{-t/RC}\right]u(t) \\ i_c(t) &= \left[\frac{V_s - V_0}{R}\,e^{-t/RC}\right]u(t) \end{aligned} \tag{1.8}$$

### 1.8.3 Circuito RL sin excitación

Un circuito RL sin fuente de excitación y con condiciones iniciales $i(0^+) = I_0$ se muestra en la Figura 1.50.

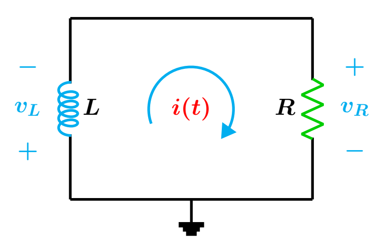



**Figura 1.50:** Circuito RL sin fuente.

Al aplicar LVK se obtiene

$$v_L + v_R = 0$$

y la ecuación diferencial que representa a dicho circuito es:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0 \tag{1.9}$$

que al resolver para $i(t)$ se obtiene:

$$i_L(t) = I_0\, e^{-t/\tau} u(t) \qquad (1.10)$$

La respuesta transitoria debida a la energía almacenada en el inductor se muestra en la Figura 1.51.

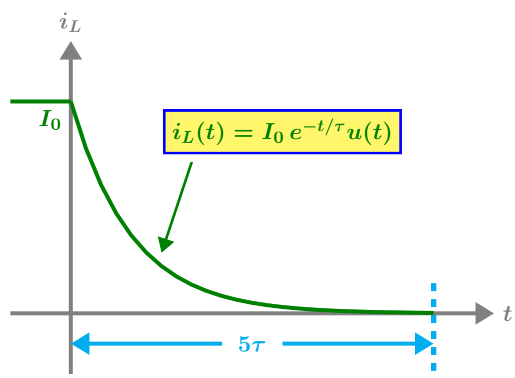



**Figura 1.51:** Respuesta transitoria del circuito RL

La constante de tiempo está dada por:

$$\tau = \frac{L}{R} \qquad (1.11)$$

A partir de la respuesta $i_L(t)$ se pueden obtener:

$$v_R(t) = I_0 R e^{-t/\tau} u(t)$$

$$p_R(t) = I_0^2 R e^{-2t/\tau} u(t)$$

$$w_R(t) = \frac{L I_0^2 \left(1 - e^{-2t/\tau}\right)}{2} u(t)$$

### 1.8.4 Circuito RL con excitación

Considérese el circuito de primer orden con fuente de alimentación y condiciones iniciales nulas $i_L(0^-) = i(0) = i_L(0^+) = 0$ mostrado en la Figura 1.52

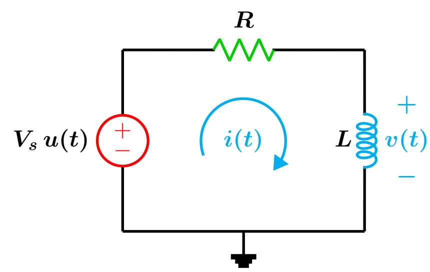



**Figura 1.52:** Circuito RL con fuente

La ecuación diferencial que representa a dicho circuito es:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{V_s}{L} u(t) \qquad (1.12)$$

cuya solución para $t \geq 0$ es:

$$i(t) = \frac{V_s}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) u(t) \qquad (1.13)$$

su representación se muestra en la Figura 1.53.

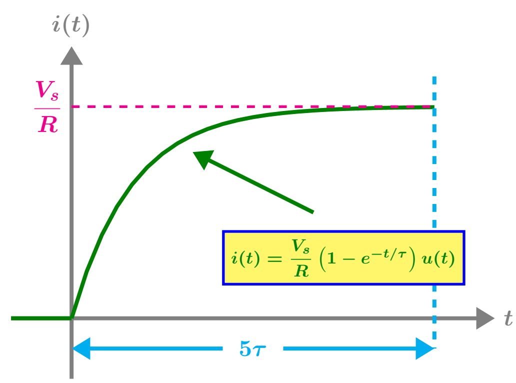



**Figura 1.53:** Respuesta transitoria y permanente del circuito RL

Otras expresiones de utilidad son:

$$v_L(t) = \left(V_s e^{-t/\tau}\right) u(t)$$

$$v_R = V_s \left(1 - e^{-t/\tau}\right) u(t)$$

Como caso particular, cuando el inductor tiene una condición inicial $I_0 \neq 0$ en $t = 0$ la corriente es:

$$i(t) = \left[\frac{V_s}{R} + \left(I_0 - \frac{V_s}{R}\right) e^{-t/\tau}\right] u(t) \qquad (1.14)$$

## Ejemplo 1.8.1

Para el circuito de la Figura 1.54, determine el voltaje $v(t)$ para $t \geq 0$ y la energía en el capacitor $w_c(0)$. El interruptor ha estado en la posición 1 por un largo periodo de tiempo en $t < 0$.

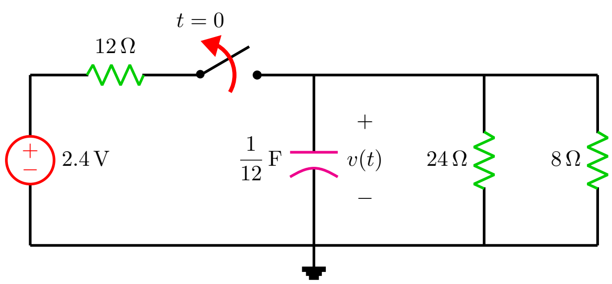



**Figura 1.54:** Circuito RC de primer orden

### Solución

Se calcula el voltaje inicial del capacitor que será la condición inicial para la segunda etapa del análisis. Para $t < 0$ en *CD*, el capacitor se comporta como circuito abierto.

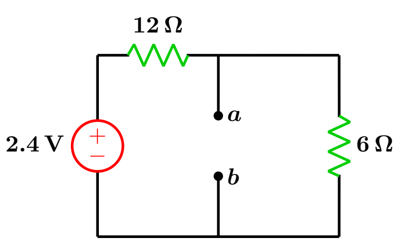



**Figura 1.55:** Condiciones iniciales

Mediante divisor de tensión se obtiene el voltaje $V_{ab}$.

$$V_{ab} = \left(\frac{6}{12+6}\right)(2.4) = 0.8\,[\mathrm{V}]$$

La constante de tiempo del circuito RC es

$$\tau = RC = (6)\left(\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{2} = 0.5$$

La ecuación de voltaje del capacitor en la fase de descarga es

$$v_C(t) = V_0\, e^{-t/RC}\, u(t)$$

Sustituyendo valores se tiene que

$$v_C(t) = 0.8\, e^{-2t}\, u(t)$$

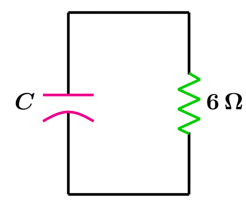



**Figura 1.56:** Segunda etapa del análisis

La energía almacenada en el capacitor en $t = 0$ es

$$w_C(0) = \frac{1}{2}CV^2 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{12}\right)(0.8)^2$$

$$w_C(0) = 0.0266 \;\; [\mathrm{J}]$$

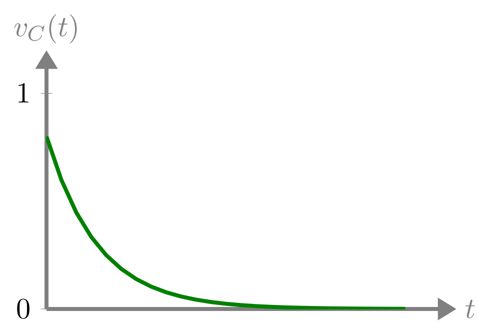



**Figura 1.57:** Respuesta transitoria del circuito RC

## Ejemplo 1.8.2

Para el circuito que se muestra en la Figura 1.58, obtener $i_L(t)$, $v(t)$ e $i_x(t)$ para $t \geq 0$. El interruptor ha estado en la posición abierta por un largo periodo de tiempo en $t < 0$.

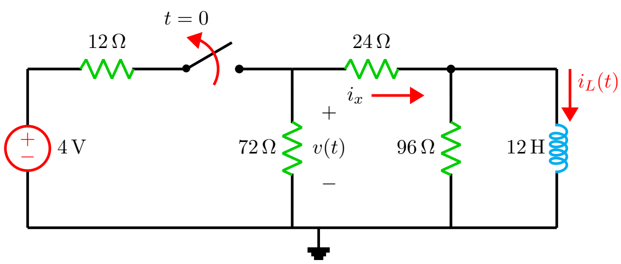



**Figura 1.58:** Circuito de primer orden RL

## Solución

Primero se determinan las condiciones iniciales del inductor. Para $t < 0$ en CD el inductor se ve como corto circuito.

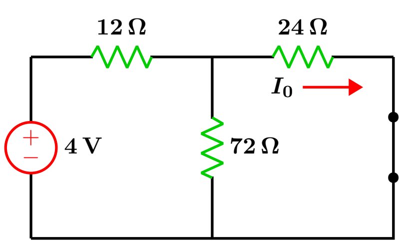



**Figura 1.59:** Condiciones iniciales

Mediante divisor de corriente se determina la corriente $I_0$ que es la condición inicial del inductor con la cual iniciará la segunda etapa del análisis.

$$I_0 = \frac{1}{10} = 0.1\,[\mathrm{A}]$$

Para $t \geq 0$ el interruptor esta abierto, el circuito se muestra en la Figura 1.60.

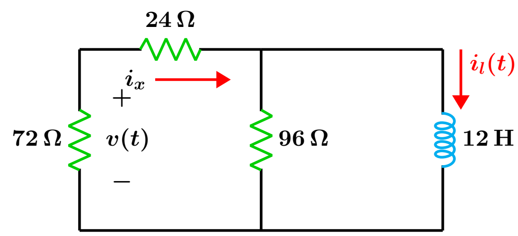



**Figura 1.60:** Circuito visto para $t \geq 0$

simplificando la parte resistiva se tiene:

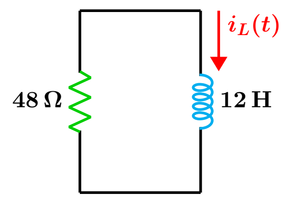



**Figura 1.61:** Circuito equivalente RL.

La resistencia total vista por el inductor es

$$R_T = 48\,\Omega$$

La constante de tiempo es

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$$

La ecuación de la corriente en el transitorio de descarga está dada por la siguiente expresión:

$$i_L(t) = I_0\, e^{-t/\tau}\, u(t)$$

El circuito para la fase transitoria de descarga se muestra en la Figura 1.61. Sustituyendo valores se tiene que

$$i_L(t) = \frac{1}{10}\, e^{-4t}\, u(t) = 0.1\, e^{-4t}\, u(t)$$

$$i_x(t) = \frac{0.1\, e^{-4t}\, u(t)}{2} = 0.05\, e^{-4t}\, u(t)$$

$$v(t) = -72\, i_x(t) = -3.6\, e^{-4t}\, u(t)$$

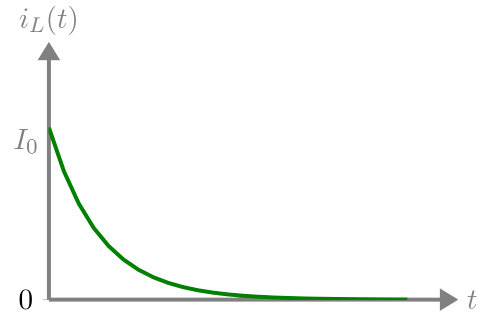



**Figura 1.62:** Respuesta transitoria del circuito RL

## Ejemplo 1.8.3

Para el circuito de la Figura 1.63 determine $v_C(t)$ para $t > 0$. El interruptor ha estado en la posición 1 por un largo periodo de tiempo en $t < 0$.

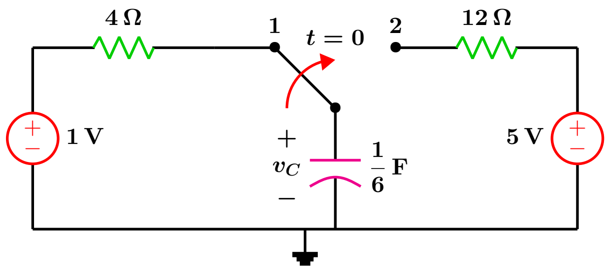



**Figura 1.63:** Circuito RC

### Solución

Para $t < 0$, el interruptor se encuentra cerrado y el capacitor ha alcanzado el estado permanente, por lo que se comporta como circuito abierto con una condición de voltaje inicial de $V_0 = 1\,\mathrm{V}$.

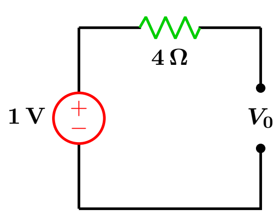



**Figura 1.64:** Condición inicial

Para $t \geq 0$, el interruptor cambia a la posición 2 que se muestra en la Figura 1.65.

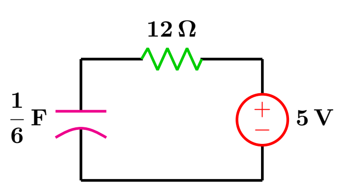



**Figura 1.65:** Análisis segunda etapa

Ahora se tiene un circuito RC con fuente y una condición inicial diferente de cero. La constante de tiempo es:

$$\tau = RC = (12)\left(\frac{1}{6}\right) = 2\,[\mathrm{s}]$$

La ecuación diferencial que modela el circuito está dada por:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{2} = \frac{5}{2}\,u(t)$$

cuya forma de respuesta es:

$$v_C(t) = \left[V_s + (V_0 - V_s)\,e^{-t/\tau}\right] u(t)$$

Al sustituir valores y simplificar se obtiene:

$$v_C(t) = \left(5 - 4e^{-t/2}\right) u(t)$$

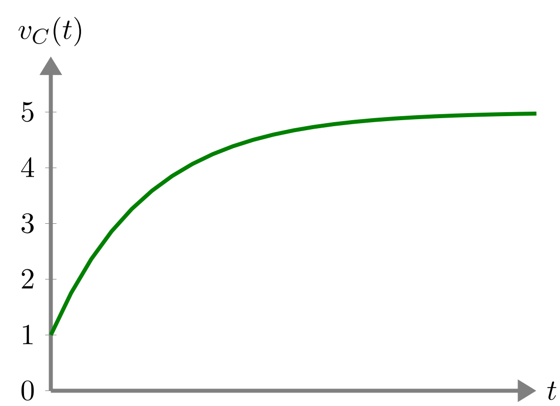



**Figura 1.66:** Respuesta transitoria y pemanente del circuito RC

## Ejemplo 1.8.4

Para el circuito de la Figura 1.67 determine $i_{R_1}(t)$ y $v_{R_2}(t)$. El interruptor ha estado en la posición cerrada por un largo periodo de tiempo en $t < 0$.

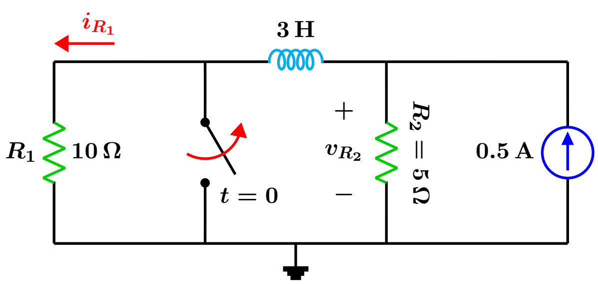



**Figura 1.67:** Circuito RL

### Solución

Para $t < 0$, el interruptor se encuentra cerrado y el inductor actúa como corto circuito, del diagrama original se ve claramente que la condición inicial es:

$$I_0 = 0.5$$

Para la segunda etapa del análisis se cambia la fuente de corriente por su equivalente en fuente de voltaje.

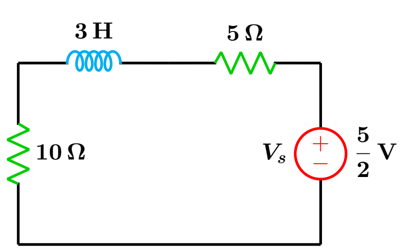



**Figura 1.68:** Segunda etapa, cambio de fuente

La resistencia total vista por la fuente de voltaje es

$$R_T = 15\,\Omega$$

La constante de tiempo es

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

La expresión para calcular la corriente en el inductor es:

$$i_L(t) = \left[\frac{V_s}{R} + \left(I_0 - \frac{V_s}{R}\right) e^{-t/\tau}\right] u(t)$$

sustituyendo valores y simplificando.

$$i_L(t) = i_{R_1}(t) = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\, e^{-5t}\right) u(t)$$

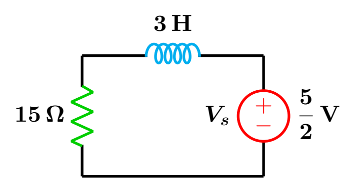



**Figura 1.69:** Circuito RL con fuente.

El voltaje en el inductor es

$$v_L(t) = L\,\frac{di}{dt} = 3\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\, e^{-5t}\right)$$

efectuando operaciones y simplificando se obtiene:

$$v_L(t) = -5\, e^{-5t}\, u(t)$$

Del circuito original se tiene que el voltaje $v_{R_2}$ es:

$$v_{R_2}(t) = \left(v_L(t) + 10\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\, e^{-5t}\right)\right) u(t)$$

efectuando operaciones y simplificando se tiene:

$$v_{R_2}(t) = \frac{5}{3}\left(1 - e^{-5t}\right) u(t)$$

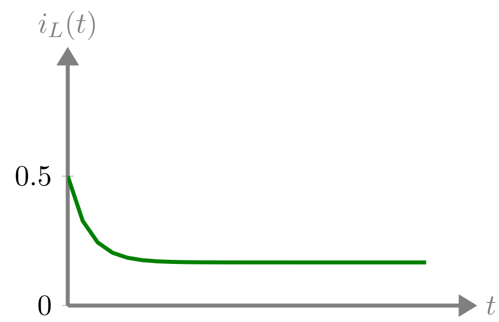



**Figura 1.70:** Respuesta transitoria del circuito RL

## 1.9 Circuitos de segundo orden

Un circuito de segundo orden es aquel que es caracterizado por una ecuación diferencial de segundo orden, en la que el circuito físico contiene dos elementos que almacenan energía de diferente tipo tales como inductores o capacitores, o bien dos elementos del mismo tipo que no pueden reducirse a una sola forma equivalente. Debido a que existen en la práctica diversas configuraciones de circuitos que dan lugar a ecuaciones diferenciales de segundo orden, en este texto se va a considerar la red serie clásica R-L-C para comprender los principios básicos.

### 1.9.1 Circuito RLC en serie sin fuente

Considérese el circuito mostrado en la Figura 1.71 el cual opera con condiciones iniciales $I_0 \neq 0$ y $V_0 \neq 0$.

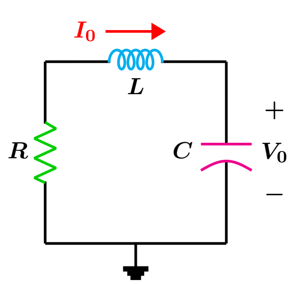



**Figura 1.71:** Circuito serie.

en función de la corriente que circula por el circuito, la ecuación diferencial de segundo orden es:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0 \tag{1.15}$$

de donde la ecuación característica es:

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0 \tag{1.16}$$

Las soluciones para la ecuación característica son las siguientes:

$$\begin{aligned} s_1 &= -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \\ s_2 &= -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \end{aligned} \tag{1.17}$$

A las raíces $s_1$ y $s_2$ se les conocen como frecuencias naturales . De forma compacta dichas raíces se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} s_1 &= -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \\ s_2 &= -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \end{aligned} \tag{1.18}$$

de donde se pueden establecer las relaciones siguientes:

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{1.19}$$

A $\alpha$ se le conoce como factor de amortiguamiento o frecuencia neperiana, sus unidades son $(\mathrm{Np/s})$.

A $\omega_0$ se le llama frecuencia de resonancia o frecuencia natural no amortiguada, sus unidades son $(\mathrm{rad/s})$.

De las expresiónes (1.18) se deduce que existen tres posibles soluciones dependiendo de si $\alpha > \omega_0$ o $\alpha = \omega_0$ o bien $\alpha < \omega_0$ cada una con su respectivo nombre y forma de respuesta estas son:

**Caso sobreamortiguado** $\alpha > \omega_0$

Para este caso se tiene que las raíces $s_1$, $s_2$ son reales y distintas, esto implica que $C > \dfrac{4L}{R^2}$. La respuesta es:

$$i(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} \tag{1.20}$$

**Caso críticamente amortiguado** $\alpha = \omega_0$

Para este caso se tiene que las raíces de la ecuación característica son iguales $s_1 = s_2$ esto implica que $C = \dfrac{4L}{R^2}$. La respuesta es:

$$i(t) = (K_2 + K_1 t)\, e^{-\alpha t} \tag{1.21}$$

**Caso subamortiguado** $\alpha < \omega_0$

Para este caso se tiene que las raíces de la ecuación característica son iguales complejas conjugadas teniendo la forma $s_1, s_2 = -\alpha \pm j\omega_d$ donde $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ la cual se conoce como frecuencia de amortiguamiento. Esto implica que $C < \dfrac{4L}{R^2}$, la respuesta es:

$$i(t) = e^{-\alpha t}\left(K_1 \cos(\omega_d t) + K_2 \sin(\omega_d t)\right) \tag{1.22}$$

Para obtener las constantes $K_1$ y $K_2$ se requieren de las condiciones iniciales de $i(t)$ y de su primera derivada, las cuales se obtienen mediante:

$$i(0^+) = I_0 \qquad \left.\frac{di(t)}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{-\left(RI_0 + V_0\right)}{L} \tag{1.23}$$

**Circuito LC sin pérdidas** $\alpha = 0$

Considere el caso teórico sin pérdidas de un circuito LC el cual se muestra en la Figura 1.72, en el que la respuesta es infinitamente oscilatoria.

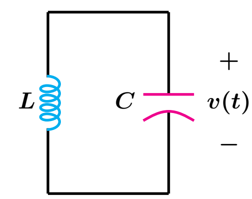



**Figura 1.72:** Circuito LC sin pérdidas.

El circuito es irrealizable físicamente ya que siempre existe una resistencia debido a los propios conductores y al material con que están construidos los elementos que terminara por agotar la energía almacenada llevándola a cero.

Considerando que las condiciones iniciales del circuito son $I_0 = 0$ y $V_0 \neq 0$ si la respuesta o señal de salida es el voltaje del capacitor $v(t)$, entonces la ecuación diferencial que representa a dicho circuito es:

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{v}{LC} = 0 \tag{1.24}$$

y su correspondiente ecuación característica es:

$$s^2 + \frac{1}{LC} = 0 \tag{1.25}$$

Para este caso se tiene que las raíces de la ecuación característica son imaginarias puras $s_1, s_2 = \pm j\omega_d$, la respuesta es:

$$v(t) = K_1 \cos(\omega_d t) + K_2 \sin(\omega_d t) \tag{1.26}$$

Para obtener las constantes $K_1$ y $K_2$ se requieren las condiciones iniciales siguientes:

$$v(0^+) = V_0 \qquad \left.\frac{dv(t)}{dt}\right|_{t=0^+} = 0 \tag{1.27}$$

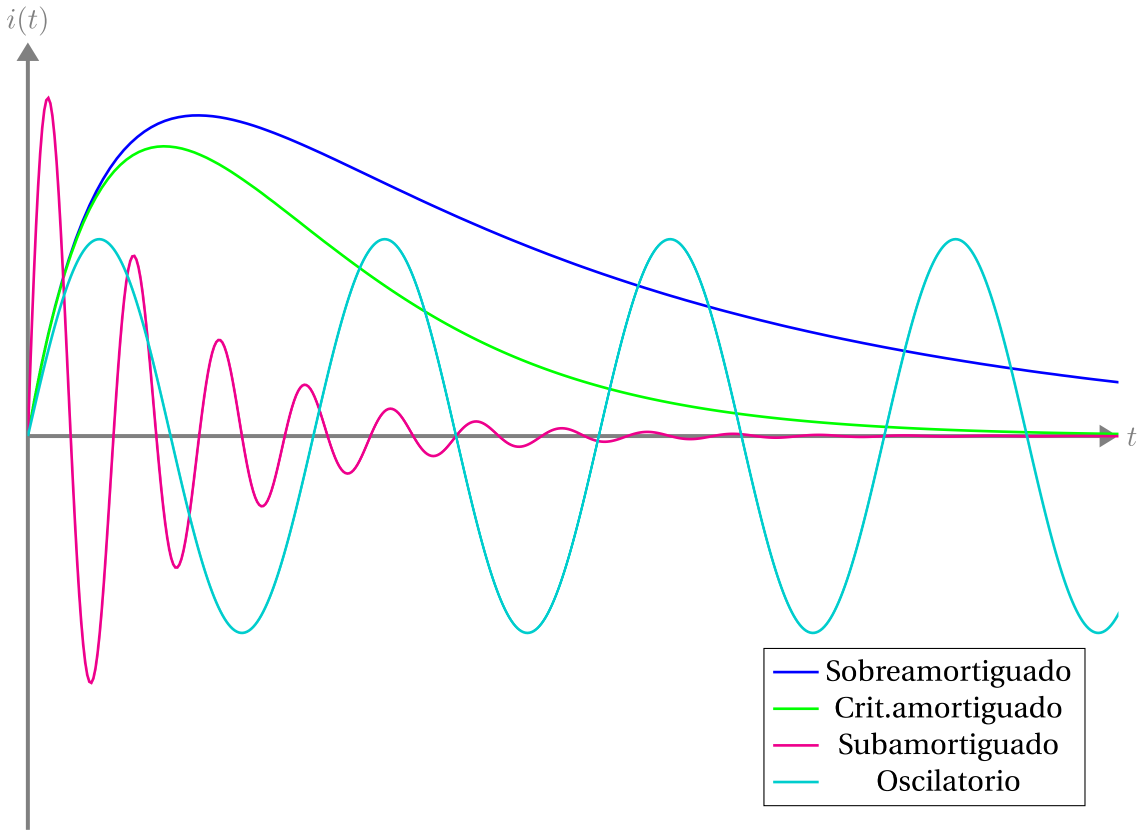



**Figura 1.73:** Gráficas de las posibles respuestas para un circuito de segundo orden.

## Ejemplo 1.9.1

Considere el circuito de la Figura 1.72 con un voltaje inicial en el capacitor de 4V y corriente cero. Obtenga una expresión de $v(t)$ para $t > 0$, siendo $L = 2\,\mathrm{H}$ y $C = \frac{1}{2}\,\mathrm{F}$.

**Solución**

De las ecuaciones (1.19) se tiene que $\alpha = 0$ y $\omega_0 = 1$, por lo que se tiene un caso de tipo oscilatorio cuya respuesta está dada por:

$$v(t) = K_1\cos(\omega_d)t + K_2\sin(\omega_d t)$$

De la condición inicial $v(0) = V_0 = 4\,\mathrm{V}$ se tiene que:

$$v(0) = 4 = K_1\cos(0) + K_2\sin(0)$$

$$K_1 = 4$$

$$v(t) = 4\cos(t) + K_2\sin(t)$$

Para obtener $K_2$ se requiere de la condición incial de la corriente en el capacitor, la cual involucra la derivada del voltaje:

$$i_C(t) = C\frac{dv(t)}{dt}\Big|_{t=0} = 0$$

Se deriva la función y se iguala a cero:

$$v'(t) = -4\sin(t) + K_2\cos(t)$$

$$v'(0) = -4\sin(0) + K_2\cos(0)$$

$$K_2 = 0$$

por lo que se obtiene que el voltaje en el capacitor es:

$$v(t) = 4\cos(t)\,u(t)$$

## Ejemplo 1.9.2

Para un circuito RLC en serie con valores de $L = 2\,\mathrm{H}$ y $C = \frac{1}{2}\,\mathrm{F}$, determine los valores de la resistencia que harían tener una respuesta sobreamortiguada y subamortiguada.

**Solución**

Se obtiene primero la resistencia para obtener el caso críticamente amortiguado, es decir cuando $\alpha = \omega_0$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{1}{2}\right)}} = 1$$

$$\frac{R}{2L} = 1 \Longrightarrow R = 2(2) = 4\,\Omega$$

Para valores de $R > 4$ se obtiene la respuesta sobreamortiguada, y para valores menores la respuesta subamortiguada.

### 1.9.2 Circuito RLC en paralelo sin fuente

Considérese el circuito mostrado en la Figura 1.74 con condiciones iniciales $I_0 \neq 0$ y $V_0 \neq 0$, en función del voltaje presente en los elementos, la ecuación diferencial de segundo orden es:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = 0 \qquad (1.28)$$

y su correspondiente ecuación características es:

$$s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC} = 0 \qquad (1.29)$$

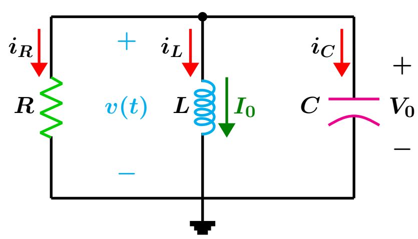



**Figura 1.74:** Circuito paralelo.

Las soluciones para la ecuación características son:

$$s_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$
$$s_2 = -\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \qquad (1.30)$$

De forma compacta las raíces se puede expresar como:

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$
$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \qquad (1.31)$$

Se pueden establecer las siguientes relaciones:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (1.32)$$

El análisis que se hace y las ecuaciones que se obtienen son básicamente las mismas que para el caso anterior, solo que aquí se trabaja con voltajes en vez de corrientes.

Al igual que en el circuito RLC serie aquí también se tiene tres posibles formas de onda para la respuesta, dependiendo de si $\alpha > \omega_0$ o $\alpha = \omega_0$ o bien $\alpha < \omega_0$.

**Caso sobreamortiguado** $\alpha > \omega_0$

Para este caso se tiene que las raíces $s_1$, $s_2$ son reales y distintas, esto implica que $L > 4R^2C$. La respuesta es:

$$v(t) = K_1e^{s_1t} + K_2e^{s_2t} \qquad (1.33)$$

**Caso críticamente amortiguado** $\alpha = \omega_0$

Para este caso se tiene que las raíces de la ecuación característica son iguales $s_1 = s_2$ esto implica que $L = 4R^2C$. La respuesta es:

$$v(t) = (K_2 + K_1t)\, e^{-\alpha t} \qquad (1.34)$$

**Caso subamortiguado** $\alpha < \omega_0$

Para este caso se tiene que las raíces de la ecuación característica son complejas conjugadas teniendo la forma $s_1, s_2 = -\alpha \pm j\omega_d$ donde $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ la cual se conoce como frecuencia de amortiguamiento. Esto implica que $L < 4R^2C$, la respuesta es:

$$v(t) = e^{-\alpha t}\left(K_1 \cos\omega_d t + K_2 \sin\omega_d t\right) \qquad (1.35)$$

Para obtener las constantes $K_1$ y $K_2$ se requieren de las condiciones iniciales de $v(t)$ y de su primera derivada, las cuales se obtienen mediante:

$$v(0) = V_0 \qquad \frac{dv(0)}{dt} = \frac{-(RI_0 + V_0)}{RC} \qquad (1.36)$$

Las formas de onda para el voltaje son similares a las que se muestran en la Figura 1.73.

### 1.9.3 Circuito RLC en serie con fuente

Se considera el circuito RLC en serie con una fuente de excitación, en el cual la variable de salida es el voltaje en el capacitor como se ilustra en la Figura 1.75.

Al aplicar la LVK al circuito en dirección de la corriente se tiene el modelo siguiente:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = \frac{V_s}{LC} \tag{1.37}$$

y su correspondiente ecuación características es:

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0 \tag{1.38}$$

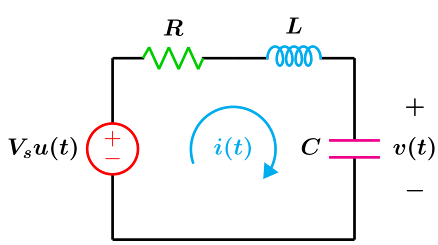



**Figura 1.75:** Circuito RLC con fuente.

Obsérvese la similitud que existe entre las ecuaciones (1.15) y (1.37) para el modelo del circuito y entre sus respectivas ecuaciones características (1.16) y (1.38), los coeficientes son los mismos pero la variable de salida es diferente.

La respuesta correspondiente al voltaje en el capacitor es igual a la respuesta permanente, un valor constante debido a la fuente de excitación, más la respuesta transitoria debida al comportamiento del circuito, dada por las raíces de la ecuación característica. En este sentido, se tienes tres casos:

**Caso sobreamortiguado**

$$v(t) = V_s + K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$$

**Caso Crit. Amortiguado**

$$v(t) = V_s + (K_2 + K_1 t)\, e^{-\alpha t}$$

**Caso Subamortiguado**

$$v(t) = V_s + e^{-\alpha t}\,(K_1 \cos\omega_d t + K_2 \sin\omega_d t)$$

Las constantes $K_1$ y $K_2$ se obtienen de las condiciones iniciales $v(0)$ y $\left.\frac{dv(0)}{dt}\right|_{t=0^+}$.

### 1.9.4 Circuito RLC paralelo con fuente

Considere el circuito paralelo con fuente de excitación mostrado en la Figura 1.76. La variable de salida es $i(t) = i_L(t)$, la corriente en el inductor. Al aplicar la LCK en el nodo superior se tiene que la ecuación diferencial es:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = \frac{I_s}{LC} \tag{1.39}$$

y su ecuación características es:

$$s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC} = 0 \tag{1.40}$$

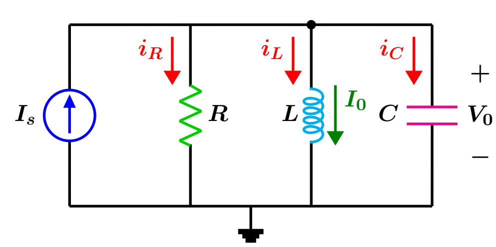



**Figura 1.76:** Circuito paralelo con fuente.

De nueva cuenta observe la similitud con las ecuaciones (1.28) y (1.29). Los coeficientes son los mismos pero la variable de salida es la corriente.

La respuesta correspondiente a la corriente en el inductor se compone de dos términos. Uno corresponde al tipo de señal proveniente de la fuente de excitación, que en este caso es una señal escalón. Un segundo término se debe al comportamiento del propio circuito eléctrico, por lo que se tiene la respuesta completa con tres posibles casos, estás son:

**Caso Sobreamortiguado**

$$i(t) = I_s + K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$$

**Caso Críticamente Amortiguado**

$$i(t) = I_s + (K_2 + K_1 t)\, e^{-\alpha t}$$

**Caso Subamortiguado**

$$i(t) = I_s + e^{-\alpha t} \left(K_1 \cos \omega_d t + K_2 \sin \omega_d t\right)$$

## Ejemplo 1.9.3

En el circuito de la Figura 1.77 el interruptor ha estado cerrado durante mucho tiempo y en $t = 0$ cambia a la posición 2, obtenga $i(t)$ y $v(t)$ para $t > 0$. Considere al capacitor inicialmente descargado.

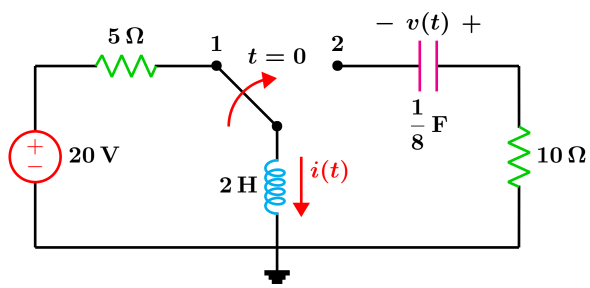



**Figura 1.77:** Circuito RLC.

### Solución

Para $t < 0$ el circuito ha alcanzado el estado permanente y el inductor actúa como corto circuito, la corriente en esta etapa será la condición inicial que tiene el inductor para la segunda parte del análisis es decir para $t > 0$ la corriente es:

$$i(0) = I_0 = \frac{20}{5} = 4\,\mathrm{A}$$

Para $t > 0$ el interruptor cambia a la posición 2 como se muestra en la Figura 1.78.

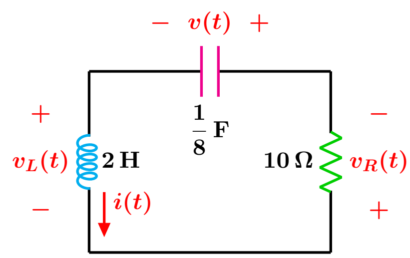



**Figura 1.78:** Circuito RLC.

Se empieza por obtener los valores de $\alpha$ y $\omega_0$ para determinar que tipo de respuesta o forma de onda es la que se espera de acuerdo a los valores de los componentes. Con las ecuaciones (1.19) se tiene.

$$\alpha = \frac{10}{(2)(2)} = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(2)(0.125)}} = 2$$

Como $\alpha > \omega_0$ se tiene el caso sobreamortiguado cuya respuesta es:

$$i(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$$

Ahora se obtienen las raíces de la ecuación característica con las expresiones (1.18).

$$s_{1,2} = -2.5 \pm \sqrt{(2.5)^2 - (2)^2}$$

$$s_1 = -1 \qquad s_2 = -4$$

Sustituyendo las raíces anteriores en la forma de onda se obtiene:

$$i(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-4t}$$

Para obtener las constantes $K_1$ y $K_2$ se utilizan las condiciones iniciales de la función y de su primera derivada. Comenzando con $i(0) = 4$ A se obtiene:

$$i(0) = K_1 e^0 + K_2 e^0$$

$$K_1 + K_2 = 4 \cdots (1)$$

Recordando que la condición inicial de la primera derivada está dada por:

$$\left.\frac{di(t)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{-(RI_0 + V_0)}{L}$$

sustituyendo valores se tiene:

$$\left.\frac{di(t)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{-(10(4)+0)}{2} = -20$$

Se obtiene la derivada de $i(t)$ lo cual da:

$$\frac{di(t)}{dt} = -K_1 e^{-t} - 4K_2 e^{-4t}$$

la derivada se evalúa en $t = 0$:

$$i'(0) = -K_1 e^0 - 4K_2 e^0$$

igualando con la condición inicial resulta:

$$K_1 + 4K_2 = 20 \cdots (2)$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones simultáneas dado (1) y (2) luego se sustituyen los valores en $i(t)$ obteniéndose lo siguiente:

$$i(t) = \left(-\frac{4}{3}e^{-t} + \frac{16}{3}e^{-4t}\right) u(t)$$

Para obtener $v(t)$ se aplica la LVK al circuito de la Figura 1.78 lo que resulta en:

$$v_L(t) + v_R(t) + v(t) = 0$$

$$v(t) = -\left(v_L(t) + v_R(t)\right)$$

donde $v_L(t) = L\,\frac{di}{dt}$ es el voltaje en el inductor y $v_R(t) = R\,i(t)$ es el voltaje en la resistencia. Efectuando las operaciones indicadas se obtiene que:

$$v(t) = \frac{32}{3}e^{-4t}\left(-1 + e^{3t}\right) u(t)$$

## 1.10 Análisis mediante la Transformada de Laplace

La Transformada de Laplace es una de las herramientas matemáticas más poderosas para diseñar, analizar y sintetizar sistemas en general y circuitos eléctricos en particular. En la presente sección se utiliza esta herramienta para el análisis de circuitos eléctricos en el dominio "s" como método alterno al uso de las ecuaciones diferenciales en el dominio del tiempo.

Los modelos matemáticos asociados a los sistemas lineales e invariantes en el tiempo son representados por ecuaciones diferenciales lineales, ordinarias y de coeficientes constantes de la forma dada por la siguiente expresión.

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} \tag{1.41}$$

en donde $y(t)$ es la señal de salida, $x(t)$ es la señal de entrada. Como un caso particular, cuando $N = 1$ y $M = 0$ se tiene una ecuación diferencial de primer orden

$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 x(t)$$

cuya transformada de Laplace es

$$a_1 \left(s\,Y(s) - y(0^-)\right) - a_0 Y(s) = b_0 X(s)$$

Para el caso de un sistema de segundo orden con $N = 2$ y $M = 0$ se tiene la ecuación diferencial

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 x(t)$$

Cuya transformada de Laplace es

$$a_2 \left(s^2\,Y(s) - s\,y(0^-) - y\,'(0^-)\right) + a_1 \left(s\,Y(s) - y(0^-)\right) - a_0 Y(s) = b_0 X(s)$$

en donde $y(0^-)$ representa el valor o condición inicial de la salida $y(t)$ en $t = 0^-$, $y\,'(0^-)$ es el valor de la primera derivada de $y\,'(t)$ evaluada en $t = 0^-$.

Al aplicar la transformada de Laplace se considera el tiempo $t = 0^-$ en las condiciones iniciales para incluir el efecto de cualquier discontinuidad en $t = 0$ como en el caso del impulso, de una señal escalón u otra. En este sentido, la notación utilizada en este texto para las variables de voltaje y corriente en los elementos que almacenan energía, serán denotadas como $v(0^-) = v(0^+) = V_0$ , $i(0^-) = i(0^+) = I_0$, respectivamente, y de manera similar las correspondientes condiciones iniciales de las derivadas.

De manera similar se obtendría la transformada de Laplace de sistemas de mayor orden.

Algunas de las señales de entrada $x(t)$ más comunes son la señal de directa *cd* y la forma de onda senoidal, no obstante, se pueden presentar y analizar otras formas de onda.

Por otro lado, al aplicar la transformada de Laplace en el análisis de circuitos eléctricos es común omitir las unidades por simplicidad, no obstante se debe cumplir con las unidades correspondientes del Sistema Internacional.

En este sentido vale la pena mencionar y recordar, para la homogeneidad de unidades, que la variable "$s = \sigma + j\omega$" está expresada en $s^{-1}$, o bien $rad/s$.

## Procedimiento para aplicar la Transformada de Laplace

1. Se transforma el circuito del dominio temporal al dominio "s".

2. Se resuelve el circuito en el dominio “s”.
3. Se aplica la Transformada Inversa de Laplace al resultado y se obtiene así la respuesta en el dominio del tiempo.

En seguida se presentan las equivalencias de los componentes entre ambos dominios así como la interpretación de los valores iniciales que tienen los elementos que almacenan energía.
[1]

### 1.10.1 Inductor en el dominio “s”

Para obtener las relaciones de corriente-voltaje en un inductor entre ambos dominios se parte de la ecuación (1.42).

$$v(t) = L\,\frac{di(t)}{dt} \tag{1.42}$$

Al obtener la Transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación se obtiene que:

$$V(s) = L\left(sI(s) - i(0^-)\right)$$
$$V(s) = L\left(sI(s) - \frac{s}{s}i(0^-)\right)$$

Con un poco de álgebra se tienen las expresiones siguientes.

$$\begin{aligned} V(s) &= sLI(s) - Li(0^-) \\ I(s) &= \frac{1}{sL}V(s) + \frac{i(0^-)}{s} \end{aligned} \tag{1.43}$$

Las equivalencias en el dominio “s” se muestran en la Figura 1.79, en donde la condición inicial está presente como una fuente de voltaje en la conexión en serie o una fuente de corriente en la conexión en paralelo.

Dependiendo de la configuración del circuito que se está analizando, será conveniente utilizar una u otra equivalencia que facilite los cálculos posteriores.

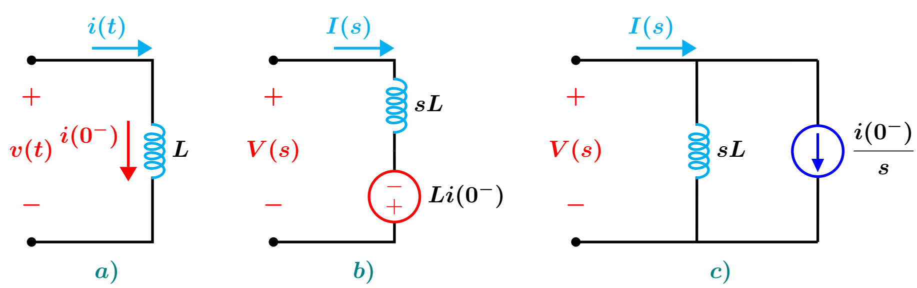



**Figura 1.79:** Representación de un inductor: a) dominio del tiempo, b) y c) equivalentes en el dominio “s”.

[1]Nota: Si no se especifica ningún valor inicial en un elemento que almacene energía, se asumirá por defecto que sus condiciones iniciales son nulas.

### 1.10.2 Capacitor en el dominio "s"

Para obtener las relaciones de corriente-voltaje en un capacitor entre ambos dominios se parte de la ecuación (1.44).

$$i(t) = C\,\frac{dv(t)}{dt} \tag{1.44}$$

Al obtener la Transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación se obtiene que:

$$I(s) = C\left(sV(s) - v(0^-)\right)$$

$$I(s) = sCV(s) - \frac{s}{s}Cv(0^-)$$

Con un poco de álgebra se tienen las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} I(s) &= sCV(s) - Cv(0^-) \\ V(s) &= \frac{1}{sC}I(s) + \frac{v(0^-)}{s} \end{aligned} \tag{1.45}$$

Las equivalencias en el dominio "s" se muestran en la Figura 1.80, en donde al igual que con el inductor, la condición inicial está presente como una fuente de voltaje en la conexión en serie o una fuente de corriente en la conexión en paralelo.

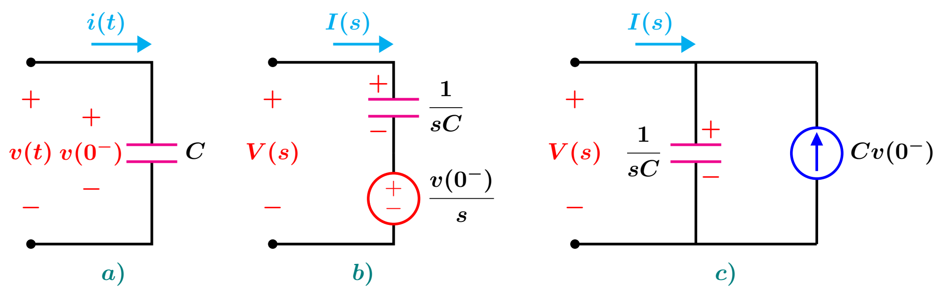



**Figura 1.80:** Representación de un capacitor: a) dominio del tiempo, b) y c) equivalentes en el dominio "s".

### 1.10.3 Resistencia y fuentes en el dominio "s"

Para obtener la relación voltaje-corriente en una resistencia se parte de la ecuación (1.46).

$$v(t) = Ri(t) \tag{1.46}$$

Al obtener la Transformada de Laplace a ambos lados se obtiene que:

$$V(s) = RI(s) \tag{1.47}$$

En la Figura 1.81 se presentan las representaciones del resistor y de las fuentes de voltaje y de corriente en el dominio del tiempo y en el dominio de $''s''$.

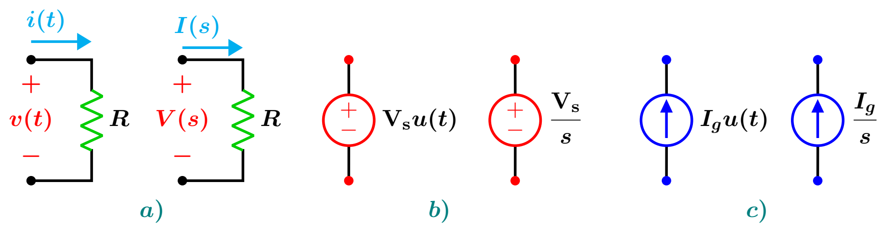



**Figura 1.81:** Representación de una resistencia: a) dominio del tiempo y "s", b) Equivalente de una fuente de voltaje y c) Equivalente de una fuente de corriente.

### 1.10.4 Impedancia y Admitancia

En el dominio "s" la impedancia está definida como el cociente de la transformada del voltaje a la transformada de la corriente, considerando las condiciones iniciales nulas, tiene la siguiente forma:

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} \tag{1.48}$$

De las ecuaciones (**1.43**), (**1.45**) y (**1.47**), considerando nulas las condiciones iniciales, se tienen las impedancias de los tres elementos básicos que son:

$$\begin{array}{ll} \text{Resistencia} & Z(s) = R \\ \text{Inductor} & Z(s) = sL \\ \text{Capacitor} & Z(s) = \dfrac{1}{sC} \end{array} \tag{1.49}$$

La admitancia se define como el recíproco de la impedancia y tiene la forma siguiente:

$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)} = \frac{I(s)}{V(s)} \tag{1.50}$$

## Ejemplo 1.10.1

Considere nuevamente el circuito de la Figura 1.77 después de que el interruptor se encuentra en la posición 2 y el inductor tiene la condición inicial $i(0^-) = i(0^+) = I_0 = 4\,\text{A}$. En este ejemplo se utiliza el método de la Transformada de Laplace o del dominio "s" para obtener $i(t)$ y $v(t)$ de una manera más rápida y sencilla que en el dominio del tiempo.

### Solución

Se transforma el circuito de la Figura 1.78 del dominio del tiempo al de la frecuencia "s", para ello se reemplaza cada componente por su equivalente en el dominio "s" véase la Figura 1.82.

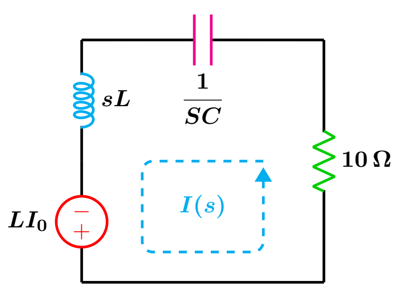



**Figura 1.82:** Circuito en el dominio "s".

$$V(s) = \left(\frac{8}{s}\right) I(s)$$

$$V(s) = \frac{32}{s^2 + 5s + 4}$$

La fuente de voltaje es la representación de la condición inicial del inductor y se dibuja con la polaridad indicada de modo que la corriente entre por la terminal negativa.

Aplicando la LVK en sentido antihorario para encontrar $I(s)$ que es la corriente en el dominio "s".

$$-8 + 10\,I(s) + \frac{8}{s}\,I(s) + 2s\,I(s) = 0$$

$$I(s) = \frac{4s}{s^2 + 5s + 4}$$

Se obtiene la transformada inversa de Laplace para regresar al dominio del tiempo

$$i(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4s}{s^2 + 5s + 4}\right\}$$

$$i(t) = \left(-\frac{4}{3}e^{-t} + \frac{16}{3}e^{-4t}\right) u(t)$$

El procedimiento para obtener $v(t)$ es similar al que se utilizó para encontrar $i(t)$.

$$v(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{32}{s^2 + 5s + 4}\right\}$$

$$v(t) = \frac{32}{3}e^{-4t}\left(-1 + e^{3t}\right) u(t)$$

# 1.11 La Función de Transferencia

Un análisis alternativo al del dominio del tiempo, para obtener la respuesta de un sistema es a través de la Transformada de Laplace, el cual se lleva a cabo mediante el uso de la variable compleja “s”. Al transformar la ecuación (1.41) y considerando las condiciones iniciales nulas, se obtiene:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n s^n Y(s) = \sum_{m=0}^{M} b_m s^m X(s) \tag{1.51}$$

Al tomar el cociente entre $Y(s)$ y $X(s)$ se obtiene una expresión importante llamada función de transferencia que se denota como $H(s)$ siendo una función racional de $s$ y $M < N$, tiene la forma siguiente:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m s^m}{\sum_{n=0}^{N} a_n s^n} \tag{1.52}$$

Una función de transferencia depende de las variables que se establezcan como salida y como entrada.

Para el caso de circuitos eléctricos las variables de entrada y de salida son voltajes y corrientes, por lo que se tienen cuatro posibles funciones de transferencia que son:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \quad \text{Función de transferencia de voltajes} \\ H(s) &= \frac{I_0(s)}{I_i(s)} = \quad \text{Función de transferencia de corrientes} \\ H(s) &= \frac{V_0(s)}{I_i(s)} = \quad \text{Función de transferencia de impedancia} \\ H(s) &= \frac{I_0(s)}{V_i(s)} = \quad \text{Función de transferencia de admitancia} \end{aligned} \tag{1.53}$$

También, es posible expresar la función de transferencia como una razón de polinomios en “s”, en donde el polinomio del numerador contiene los coeficientes de la entrada y de sus derivadas, $b_m$, y el polinomio del denominador incluye los coeficientes de la salida y de sus derivadas, $a_n$.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_M s^M + b_{m-1} s^{M-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{1.54}$$

Como caso particular cuando $M = 0$ y $N = 2$ se tiene la Función de Transferencia para un circuito de segundo orden que es:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \tag{1.55}$$

La Función de Transferencia es de suma importancia, ya que permite determinar la respuesta a cualquier entrada, formando simplemente el producto $Y(s) = H(s)X(s)$.

## Ejemplo 1.11.1

Considere un circuito eléctrico de primer orden cuyo comportamiento está dado por la ecuación diferencial $\frac{di(t)}{dt} + i(t) = u(t)$ y condiciones iniciales nulas, obtenga la función de transferencia de admitancia.

### Solución

Al resolver la ecuación diferencial para $i(t)$ se tiene que:

$$i(t) = \left(1 - e^{-t}\right) u(t)$$

Al obtener la Transformada de Laplace a la función anterior se tiene:

$$I(s) = \frac{1}{s^2 + s}$$

La Transformada de Laplace de $u(t)$ es $\frac{1}{s}$, por lo que la función de transferencia de admitancia es:

$$H(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{s+1}$$

## Ejemplo 1.11.2

Como un ejemplo de aplicación de la función de transferencia, para la red en escalera siguiente en la que se determine la función de transferencia de corrientes.

Considerando que los elementos tienen los valores siguientes:

$$Z_1 = Z_4 = 22\,\mu\text{F} \quad Z_2 = Z_3 = 100\,\Omega$$

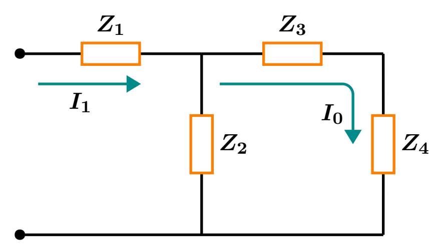



**Figura 1.83:** Circuito con impedancias

### Solución

Por divisor de corriente se tiene que:

$$I_0 = \frac{I_1 Z_2}{Z_2 + Z_3 + Z_4}$$

$$\frac{I_0}{I_1} = \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3 + Z_4}$$

La impedancia capacitiva es $\frac{1}{sC}$, por lo que sustituyendo valores en la expresión anterior y simplificando se tiene:

$$H(s) = \frac{11s}{22s + 5000}$$