

SEMAINE DU 1/12 AU 7/12

FONCTIONS RÉELLES DÉRIVABLES

Ici f est une fonction réelle dérivable.

- ① Définition de la dérivabilité en un point, équation de la tangente, Caractérisation de la dérivée à partir de f'_g et f'_d , définition des classes $\mathcal{C}^k$ et $\mathcal{C}^\infty$
- ② Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient et de la composition de deux fonctions dérivables et dérivée de la réciproque d'une fonction bijective, Formule de Leibniz,
- ③ Définitions d'extremum local et de point critique, Extremum local $\Rightarrow$ point critique.
- ④ Théorème de Rolle, Théorème des accroissements finis, Inégalité des accroissements finis.
- ⑤ Limite de la dérivée et prolongement $\mathcal{C}^k$ ou $\mathcal{C}^\infty$.
- ⑥ Application du TAF aux suites récurrentes.

PREUVES

Seules les preuves dans cette section sont à savoir par coeur par les étudiants. Les autres preuves peuvent être demandées, en proposant une méthode et/ou en aidant l'étudiant durant la réalisation de la preuve.

La question de cours sera composée d'un énoncé rapide (définition, propriété ou théorème), suivi d'une démonstration (ou exemple) de cours choisie parmi :

- ① En fonction de la valeur de $n \in \{0, 1, 2, 3\}$, dire si la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ suivante est-elle continue, dérivable, de classe $\mathcal{C}^1$?

$$f_n = x \mapsto \begin{cases} x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- ② Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable, telle que f s'annule en au moins $n + 1$ points distincts de I . Montrer que la dérivée n -ième de f s'annule au moins une fois sur I .
- ③ Montrer que la dérivée n ième de la fonction $x \mapsto (x^2 - x + 1) e^{-x}$, est la fonction $x \mapsto (-1)^n (x^2 - (2n + 1)x + n^2 + 1) e^{-x}$.
- ④ Montrer que $\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.