



**Grupo de TermoFluidoDinámica.
Departamento de Ciencias Térmicas.
Escuela de Ingeniería Mecánica. Facultad de Ingeniería.
Universidad de Los Andes. Mérida - Venezuela**



Jean-François DULHOSTE

Tabla de Contenido

Tala de Contenido.....	3
Introducción	9
Tema 1. Introducción a los Sistemas de Control.....	11
Sistema de Control	11
Definición	11
Ejemplo de un Sistema de Control.....	11
Ventajas de un control automático.....	11
Términos Básicos.....	11
Elementos de un Sistema de Control.....	11
Clases de sistemas de control.....	12
Sistema de control Pasivo, sistema de control de Lazo Abierto y sistema de control Retroalimentado.....	12
Sistema de Control Continuo vs. Sistema de Control Discontinuo	14
Sistemas de Control Analógicos vs. Sistemas de Control Digitales.....	17
Sistemas de Control Reguladores vs. Sistemas de Control Seguidores	17
Sistemas de control invariantes en el tiempo vs. Sistemas de control variable en el tiempo.....	18
Sistemas de control con parámetros concentrados vs. Sistemas de control con parámetros distribuidos	19
Sistemas de control lineales vs. Sistemas de control no lineales	19
Sistemas de control una entrada y una salida (SISO) vs. Sistemas de control de múltiples entradas y salidas (MIMO).....	19
Sistemas de control determinísticos vs. Sistemas de control estocásticos	20
Características de los sistemas de control.....	20
Estabilidad	20
Exactitud	21
Velocidad de Respuesta	21
Lazos de control comúnmente utilizados en procesos industriales	21
Control en cascada.....	22
Control de relación	22
Control de rango partido.....	23
Ejercicios	23
Tema 2. Modelado Matemático	25
Introducción.....	25

Sistemas Mecánicos	25
Sistemas Mecánicos Rotativos.....	26
Sistemas Eléctricos	27
Analogía Electromecánica.....	29
Diagrama de impedancias.....	29
Sistemas Térmicos	30
Sistemas Hidráulicos	32
Sistemas Neumáticos.....	34
Ejercicios	36
Tema 3. Formas de representación del modelo matemático.....	38
Introducción.....	38
Representación de un modelo matemático con la Función de Transferencia.....	39
La Matriz de Transferencia	40
Polos y ceros de un sistema LTI, SISO.	41
Representación de un modelo matemático en Espacio de Estado.....	43
Definiciones.....	44
Representación de sistemas dinámicos en el espacio de estado	45
Relación entre función de transferencia y espacio de estado	50
No unicidad del conjunto de variables de estado	52
Tema 4. Diagramas de Bloque.....	59
Introducción.....	59
Elementos de un diagrama de bloques	59
Ejemplos de diagrama de bloques	60
Forma canónica de un sistema de control retroalimentado	60
Álgebra de bloques	61
Simplificación de diagramas de bloque.....	63
Diagramas de bloque de varias entradas.....	64
Entradas y salidas múltiples.....	65
Construcción de un diagrama de bloques a partir de las funciones de transferencia de los elementos del sistema.....	68
Tema 5. Respuesta de Sistemas.....	74
Introducción.....	74
Tipos de excitación	74
Entrada en escalón.....	74
Entrada en rampa	75

Entrada sinusoidal.....	75
Entrada en pulso	75
Entrada en impulso.....	76
Entrada en onda cuadrada	76
Respuestas de sistemas de primer y segundo orden	77
Respuesta de sistemas de Primer Orden.....	77
Respuesta de sistemas de Segundo Orden.....	83
Solución de las ecuaciones en representación de estado.....	91
Tema 6. Estabilidad de Sistemas	98
Introducción.....	98
Definiciones de estabilidad BIBO.....	98
Estabilidad limitada	99
Conclusión.....	99
Criterio de Estabilidad Routh	100
Observaciones al criterio de Routh.....	101
Criterio de estabilidad de Hurwitz.....	103
Análisis de estabilidad de sistemas en Espacio de Estado.....	105
Determinación de los valores propios de una matriz.....	105
Ejercicios	106
Tema 7. Análisis de la respuesta en frecuencia	109
Introducción.....	109
Calculo de la respuesta en frecuencia.....	109
Procedimiento para la obtención de la respuesta en frecuencia	110
Diagramas de BODE	110
Diagramas de Bode de Funciones comunes.....	111
Procedimiento general para trazar diagramas de Bode	114
Análisis de estabilidad utilizando los diagramas de Bode.....	114
Diagrama de Nyquist.....	122
Diagramas de Nyquist de Funciones comunes	123
Formas generales de los diagramas polares.....	125
Ejemplos	126
Análisis de estabilidad utilizando diagramas de Nyquist	126
Ejemplos	128
Tema 8. Controlabilidad y Observabilidad.....	133

Controlabilidad.....	133
Observabilidad.....	136
Dualidad.....	137
Teoría de la realización.....	137
Formas canónicas de representación de estado.....	138
Ejercicios.....	141
Tema 9. Acciones de Control.....	143
Introducción.....	143
Tipos de acción de control.....	143
1. Acción de control discontinua o de dos posiciones (ON-OFF).....	143
2. Acción de control proporcional (P).....	144
3. Acción de control derivativa (D).....	145
4. Acción de control integral (I).....	146
5. Control proporcional más derivativa (PD).....	147
6. Control proporcional más integral (PI).....	147
7. Control proporcional más integral más derivativo (PID).....	148
Resumen.....	148
Ejemplo de estudio del efecto de una acción de control en un sistema.....	149
Si el controlador es proporcional.....	149
Si el controlador es proporcional mas derivativo.....	151
Si el controlador es proporcional más integral.....	153
Si el controlador es proporcional más integral más derivativo.....	155
Tema 10. Ajuste de Controladores PID.....	159
Introducción.....	159
Métodos de Ziegler - Nichols.....	159
Método de Ziegler - Nichols basado en la respuesta al escalón.....	159
Método de Ziegler - Nichols basado en la respuesta frecuencial.....	160
Métodos por asignación de Polos Dominantes.....	161
Polos Dominantes.....	161
Método aproximado para designar polos dominantes.....	164
Ejercicio.....	166
Tema 11. Control por Retorno de Estado.....	169
Retorno de estado lineal.....	169
El control modal.....	170

Control de salidas con valor constante no nulo	174
Control Parcial.....	177
Ejercicios:.....	177
Observadores	178
Síntesis del Observador	178
Control por retorno de salida.....	181
Estructura del control.....	182
Inserción de un pre-compensador	183
Ejercicios.....	185
Tema 12. Introducción a los Sistemas Digitales	187
Introducción.....	187
Convertidores Análogo-digital y digital-análogo.....	189
Convertidor Análogo-Digital.....	189
Convertidor Digital-Análogo.....	190
Ecuaciones recurrentes.....	192
La transformada en Z.....	193
Sistemas Digitales en Lazo Cerrado.....	200
La representación de Estado Digital	201
Estabilidad de los Sistemas Digitales	201
Controlabilidad y Observabilidad de Sistemas Digitales	206
Determinación de un Controlador Digital	206
Implementación del Control Digital	210
Bibliografía:.....	213

Introducción

El control de procesos, que en sus inicios estaba restringido a máquinas sofisticadas y procesos muy complejos y costosos, está hoy en día en prácticamente todas las actividades humanas. Entre estas actividades las actividades de la Ingeniería Mecánica tienen una importancia primordial, pues estas van desde las maquinarias industriales, pasando por los automóviles hasta llegar a los equipos simples de los hogares como hornos, neveras, calentadores, etc.

A la vez de su difusión en las actividades humanas las técnicas del control de procesos han evolucionado, y se ha vuelto una ciencia que para ser manejado en su globalidad requiere de estudios especiales de este dominio, sin embargo casi todos los ingenieros mecánicos se topan en su carrera con sistemas automatizados a los cuales deberán operar, mantener o incluso modificar. En vista de esto la carrera de Ingeniero mecánico incluye en su pensum dos asignaturas referidas a esta ciencia, la primera **Instrumentación** cuyo objetivo es el aprendizaje de la ciencia de las mediciones de variables y la segunda **Teoría de Control** cuyo objetivo es el aprendizaje de los fundamentos primordiales del control de procesos.

Este documento se presenta como una ayuda a la enseñanza de la asignatura Teoría de Control para la carrera de Ingeniería Mecánica, para lo cual se ha hecho un intento de presentar de una forma simple los conocimientos primordiales que debería poseer un Ingeniero Mecánico para trabajar con sistemas de control de procesos en todos sus ámbitos de trabajo, y que deben ser adquiridos en el transcurso de un semestre académico. No pretende por lo tanto ser un documento extenso sobre el tema, como lo son libros fundamentales sobre el tema.

Con este objetivo el documento se desarrolla en tres unidades que engloban estos conocimientos primordiales del control de procesos.

Una primera unidad referida a la **Representación Matemática de Sistemas** Lineales, la cual presenta las diversas formas de representación de sistemas lineales desde el punto de vista matemático y gráfico, útiles para las diversas técnicas existentes en el control de procesos, y además comienza con una somera introducción al control de procesos, esta se divide en cuatro temas: Tema 1 Introducción a los sistemas de control, Tema 2 Modelado Matemático, Tema 3 Formas de representación de modelos matemáticos y Tema 4 Diagramas de Bloque.

Una segunda unidad referida al Análisis de la Dinámica de los Sistemas, en la cual se presentan los principales criterios de estudio en referencia a los sistemas desde el punto de vista de sus diversas representaciones. Esta incluye los siguientes temas: Tema 5 Respuesta de sistemas, Tema 6 Estabilidad de sistemas, Tema 7 Análisis de la respuesta en frecuencia y Tema 8 Observabilidad y Controlabilidad.

Una tercera unidad referida a las Técnicas de Control, en la cual se presentan las principales técnicas de control desde el punto de vista del control clásico o del control moderno, y culmina con una introducción a los sistemas digitales. Esta unidad está organizada en los siguientes temas: Tema 9 Acciones de control, Tema 10 Ajuste de Controladores PID, Tema 11 Control por retorno de estado y Tema 12 Introducción a los Sistemas Digitales.

Tema 1. Introducción a los Sistemas de Control

Sistema de Control

Los controles automáticos o sistemas de control constituyen una parte muy importante en los procesos industriales modernos, donde se les usa principalmente para regular variables tales como la presión, temperatura, nivel, flujo, viscosidad, densidad etc.

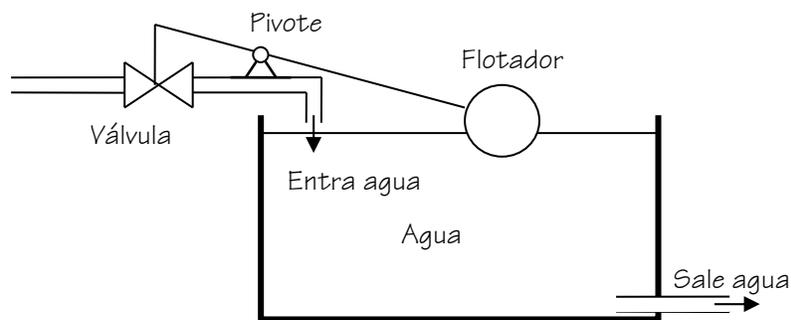
Definición

Una definición de un sistema de control puede ser:

“Es un arreglo de componentes físicos conectados de tal manera, que el arreglo pueda comandar, dirigir o regular a sí mismo o a otro sistema”.

Ejemplo de un Sistema de Control.

Control de nivel de un tanque de agua.



Ventajas de un control automático

Las ventajas de un control automático son principalmente económicas, ya que permite:

- Mejorar la calidad de los productos.
- Disminuir los tiempos de operación.
- Reducir la dependencia de operarios para manejar procesos.
- Reducir costos de producción.

Términos Básicos

Planta. Es un equipo o conjunto de equipos que permiten realizar una operación determinada. Cuando se tiene un conjunto de equipos interactuando para generar un producto se tiene una planta industrial.

Proceso. Está constituido por una serie de operaciones coordinadas sistemáticamente para producir un resultado final que puede ser un producto.

Sistema. Es una combinación de componentes físicos que actúan conjuntamente para cumplir un determinado objetivo.

Elementos de un Sistema de Control

Proceso a controlar. Es como su nombre lo indica el proceso que se quiere controlar o regular. En el ejemplo del tanque se trata de un proceso flujo a través de un tanque en donde se quiere un nivel dado.

Variable controlada. Es aquella que se mantiene en una condición específica deseada, es la que se quiere controlar. En el ejemplo es el nivel del líquido.

Variable manipulada. Es la señal sobre la cual se actúa o se modifica con el fin de mantener la variable controlada en su valor. Esta cambia continuamente para hacer que la variable controlada vuelva al valor deseado. En el ejemplo es el flujo de entrada del líquido o la apertura de la válvula.

Señal de referencia (set point). Es el valor en el cual se quiere mantener la variable controlada. En el ejemplo sería el nivel deseado del tanque.

Error o señal actuadora. Es la diferencia entre la señal de referencia y la variable controlada. En el ejemplo sería el error en el nivel deseado.

Perturbación. Es un agente indeseable que tiende a afectar adversamente el valor de la variable controlada. En el ejemplo podría ser un cambio en el flujo de salida, lluvia, evaporación, etc.

Elemento de medición. Es el encargado de determinar el valor de la variable controlada. En el ejemplo es el flotador.

Controlador. Es el encargado de determinar el error y determinar qué tipo de acción tomar. En el ejemplo sería el juego de barras y pivote que une el flotador con la válvula. Este si el nivel baja hace abrir la válvula, por el contrario si el nivel sube hace cerrar la válvula.

Elemento final de control. Es el encargado de realizar la acción de control modificando la variable manipulada. En el ejemplo es la válvula.

Entrada. Es el estímulo o excitación que se aplica a un sistema desde una fuente de energía externa, generalmente con el fin de producir, de parte del sistema, una respuesta específica. En el ejemplo existen dos entradas: la apertura de la válvula y la perturbación.

Salida. Es la respuesta obtenida de parte del sistema. En el ejemplo la salida es el nivel de líquido.

Clases de sistemas de control

Existen diversas formas de clasificar un sistema de control entre las cuales están:

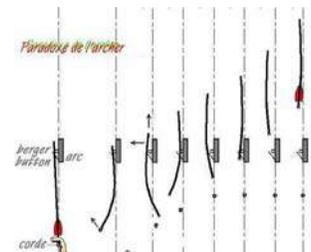
Sistema de control Pasivo, sistema de control de Lazo Abierto y sistema de control Retroalimentado.

Sistema de control Pasivo

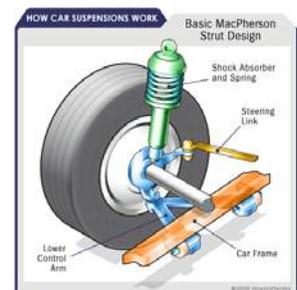
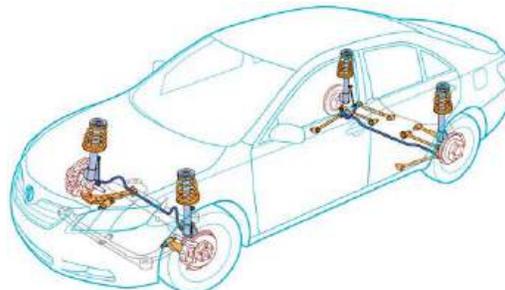
Es cuando la variable el sistema se diseña para obtener una determinada respuesta ante entradas conocidas, una vez diseñado el elemento no existe ningún elemento que realice o modifique la acción de control. No existe un sistema de que modifique la acción de control en función de las variables del sistema.

Algunos ejemplos de control pasivo son:

El direccionamiento de flechas o cohetes pirotécnicos. En este caso el diseño de los elementos con una vara larga y unas plumas en la parte posterior permite direccionar las flechas o cohetes en dirección longitudinal.



Los sistemas de suspensión de vehículos. En este caso se diseña un sistema de resorte y amortiguador que permite absorber el efecto de los defectos de la vía. En algunos casos se ha



sustituido este sistema pasivo por un sistema activo.

Sistema de control de lazo abierto

Es cuando el sistema de control utiliza la información de la entrada para realizar una acción de control, sin tomar en cuenta el valor de la variable controlada.

Este se puede esquematizar en el siguiente diagrama de bloques

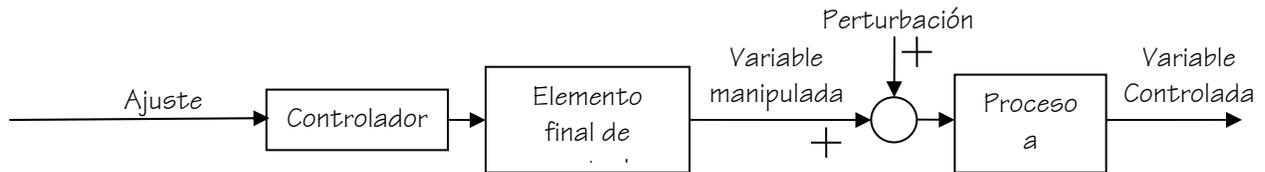
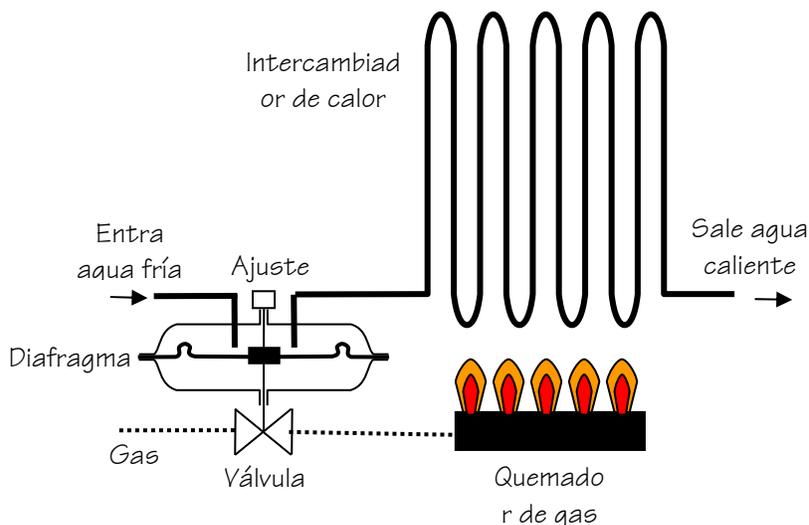


Diagrama de bloques típico de un sistema de control de lazo abierto

Un ejemplo de este tipo de control es un calentador de agua a gas.



Esquema de un calentador de agua a gas

El funcionamiento del calentador es el siguiente: Cuando se consume agua el diafragma siente una disminución de presión y se desplaza hacia arriba de manera que la válvula permite el paso de gas hacia el quemador, haciendo que este encienda, y caliente el agua. La lama será proporcional al flujo de agua que pase por el calentador según el ajuste dado previamente al tornillo de ajuste. Pero este no mide si se está llegando o no al valor de la temperatura deseada.

Otro ejemplo de este tipo de sistemas de control es por ejemplo una lavadora automática. En este caso el aparato tiene un control que permite seleccionar el tipo de programa de lavado, selección que realiza el usuario en función del tipo y condiciones de la ropa a lavar. Una vez seleccionado el programa este se ejecuta independientemente de la limpieza obtenida para la ropa.



Sistema de control retroalimentado (Activo)

Es cuando la variable controlada se compara continuamente con la señal de referencia y cualquier diferencia produce una acción que tiende a reducir la desviación existente. En otras palabras la acción de control realizada por el sistema de control depende del valor de la variable controlada en todo instante, por lo tanto también toma el nombre de control dinámico.

Esto se puede representar en forma de un diagrama de bloques que muestra la interacción lógica de los elementos que conforman un sistema de control retroalimentado.

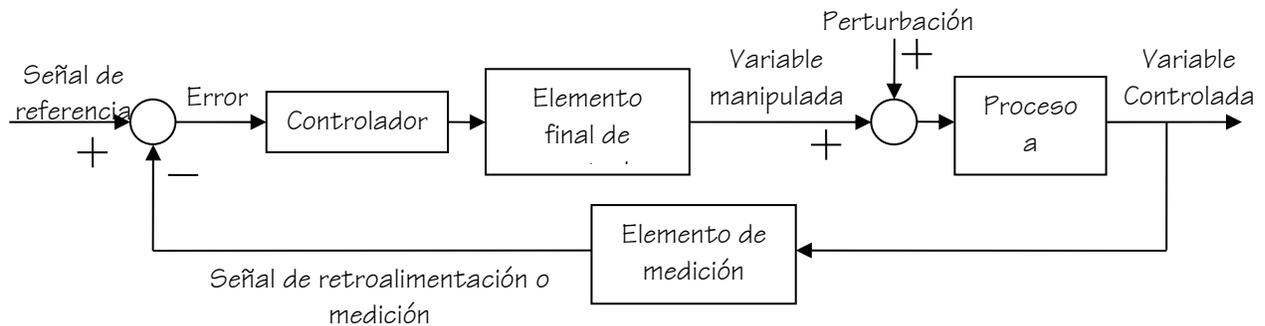
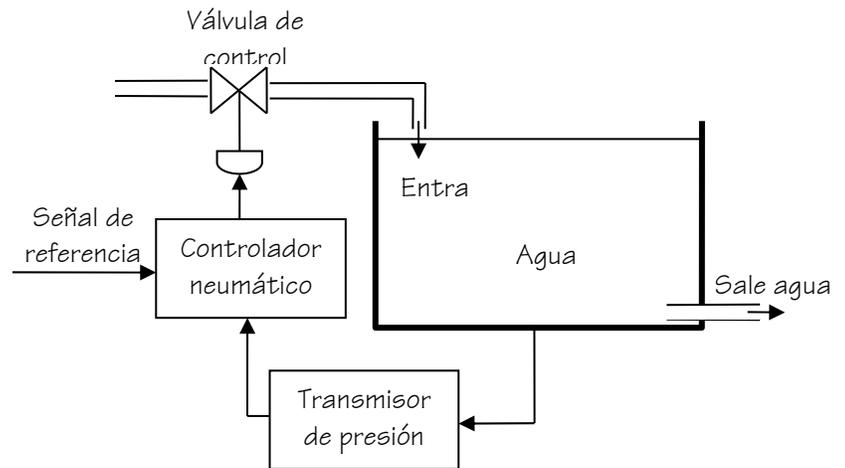


Diagrama de bloques típico de un sistema de control retroalimentado

Un ejemplo de sistema de control retroalimentado

En donde:

- Proceso es el flujo de nivel a través del tanque con un nivel constante.
- Controlador es el controlador neumático.
- Elemento final de control es la válvula de control.
- La variable manipulada es el caudal de entrada.
- Perturbación puede ser un cambio en el caudal de salida, evaporación o lluvia.
- Variable controlada es el nivel.
- Elemento de medición es el transmisor de presión.
- Señal de referencia es la presión de referencia.
- Error es la diferencia entre la presión de referencia y la presión medida.



Sistema neumático de control de nivel

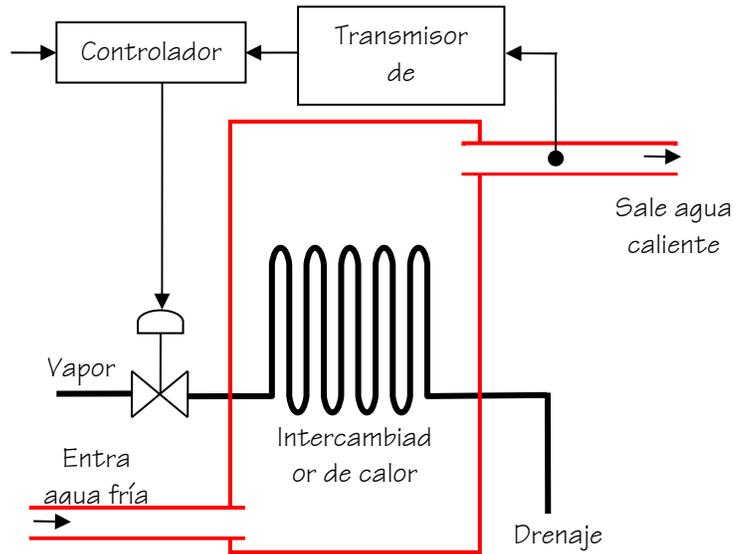
Sistema de Control Continuo vs. Sistema de Control Discontinuo

Sistema de control continuo

Es aquel en que la modificación de la variable manipulada se efectúa continuamente.

Por ejemplo un controlador de temperatura con vapor.

Este instrumento calienta el agua con la ayuda de un serpentín por el cual pasa un flujo de vapor. Este flujo de vapor es aumentado o disminuido por una válvula de control, la cual se abre o cierra suavemente en una cierta proporción según el mensaje enviado por el controlador, el cual trabaja con la diferencia entre una señal de referencia y el valor de la temperatura del agua de salida. La temperatura del agua es medida por un transmisor de temperatura. Como la apertura de la válvula puede tomar una infinidad de valores entre totalmente cerrada y totalmente abierta, entonces el control es continuo.

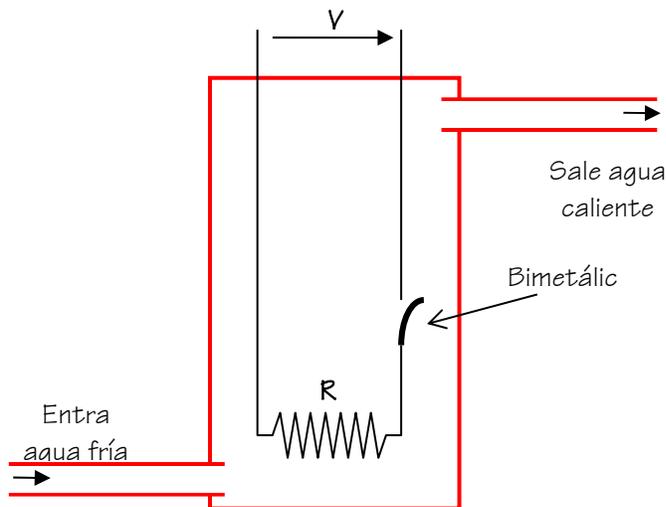


Esquema de un calentador de agua a vapor

Sistema de control discontinuo (ON-OFF)

Es aquel en que la modificación de la variable manipulada no es continua sino que solo puede tomar un valor máximo o un valor mínimo. Estos valores pueden ser: abierto o cerrado, conectado o desconectado, etc.

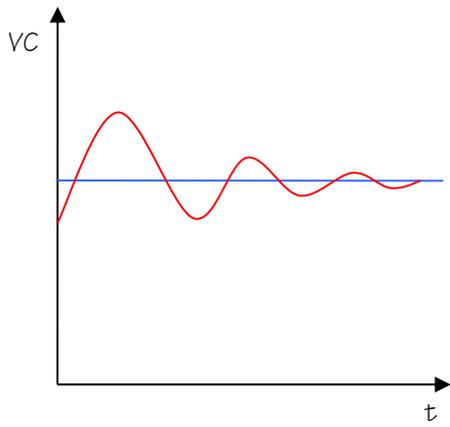
Un ejemplo de estos sistemas es el calentador de agua eléctrico.



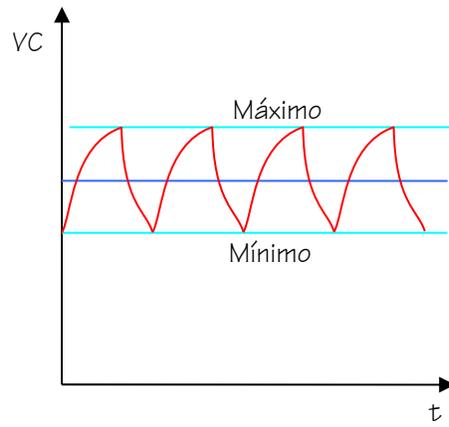
Esquema de un calentador de agua eléctrico

El sistema funciona calentando agua mediante una resistencia eléctrica la cual se conecta o se desconecta, según el valor de la temperatura en el recipiente, por la acción de un bimetalico (comúnmente conocido como termostato), el cual al calentarse se deforma. Este elemento sirve a la vez de instrumento de medición, controlador y elemento final de control. Ya que cuando el agua se calienta hasta el valor deseado su deformación hace que se desconecte el circuito eléctrico apagando la

resistencia eléctrica y cuando el agua se enfría se vuelve a enderezar conectando de nuevo el circuito con lo cual la resistencia vuelve a calentar el agua.



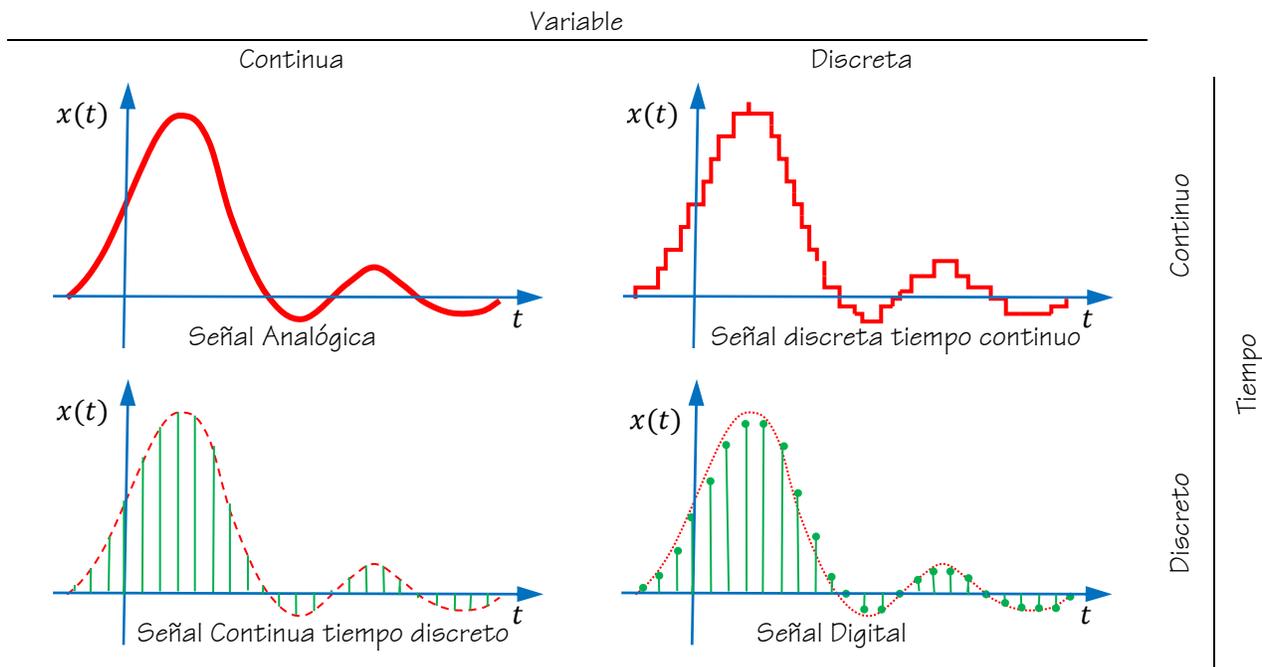
Sistema continuo



Sistema discontinuo

Sistemas de Control Analógicos vs. Sistemas de Control Digitales

Un sistema de control Analógico es aquel en que todas las variables son continuas y en función de un tiempo continuo. En cambio, en un sistema de control digital las variables son discretas, es decir solo pueden tomar valores predeterminados en función de la precisión del sistema, y estas variables se conocen solo en algunos instantes de tiempo. Los sistemas de control que usan una computadora son en esencia sistemas digitales.



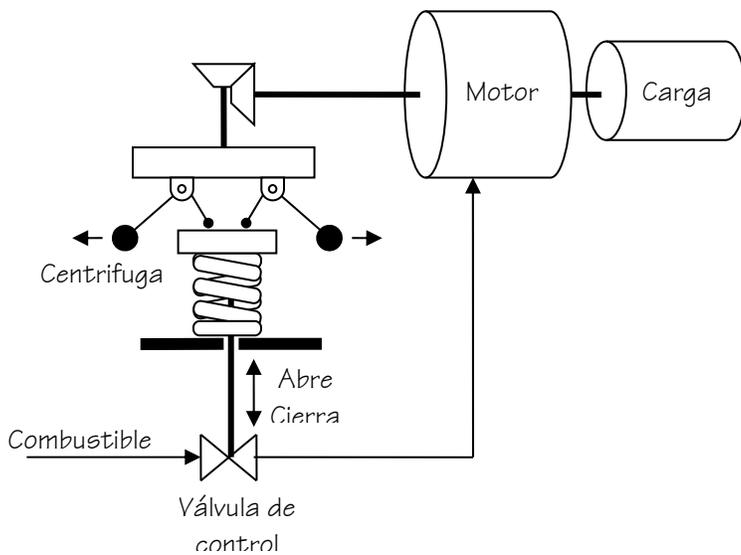
Sistemas de Control Reguladores vs. Sistemas de Control Seguidores

Sistema Regulador

Es aquel cuya función es mantener la variable controlada en un valor constante

Un ejemplo de este tipo de control es el regulador de Watt, que permite controlar la velocidad de motor, manteniéndola en un valor constante cualquiera sea la carga.

En este sistema el motor está conectado mecánicamente a un sistema de centrifugas. Si la velocidad del motor aumenta entonces la fuerza centrífuga ejerce una fuerza que hace cerrar la válvula de paso de combustible, esto hasta que la velocidad se estabilice nuevamente en el valor deseado. Lo contrario ocurre si



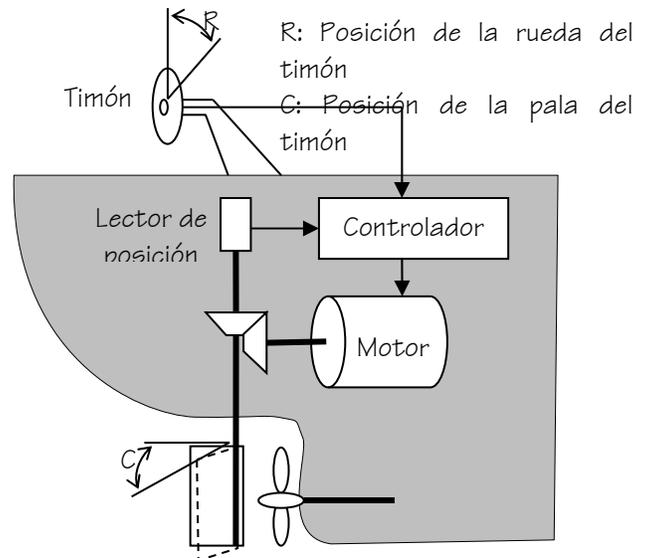
Esquema de un regulador de velocidad de Watt

la velocidad del motor disminuye.

Sistema seguidor

Es cuando la señal de referencia varía constantemente y el sistema de control trata de mantener la igualdad entre la variable controlada y la señal de referencia. El control trata de seguir el punto de ajuste. Por ejemplo el control de dirección de un barco.

En un barco grande es imposible llevar el timón en forma manual. Luego el movimiento se realiza mediante un sistema hidráulico. La rueda del timón indica la posición deseada (señal de referencia que en este caso cambia continuamente) y es el motor hidráulico el que se encarga de mover la pala.



Control de dirección de un barco

Sistemas de control invariantes en el tiempo vs. Sistemas de control variable en el tiempo

Un sistema de invariante en el tiempo (con coeficientes constantes) es aquel en que los parámetros no varían en el tiempo. En cambio para un sistema de control variable en el tiempo los parámetros varían en el tiempo. Por ejemplo en un sistema de control de vehículo espacial, en el cual la masa disminuye al consumirse el combustible durante el vuelo.



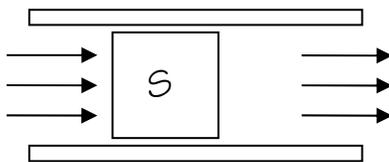
Sistema Invariante en el Tiempo



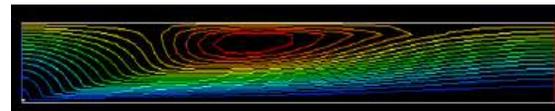
Sistema Variable en el Tiempo

Sistemas de control con parámetros concentrados vs. Sistemas de control con parámetros distribuidos

Los sistemas de control que pueden describirse mediante ecuaciones diferenciales ordinarias son sistemas de control de parámetros concentrados. Mientras que los sistemas que requieren la utilización de ecuaciones diferenciales parciales para su representación son sistemas de control de parámetros distribuidos.



Parámetros Concentrados



Parámetros Distribuidos

Sistemas de control lineales vs. Sistemas de control no lineales

Se denomina sistema lineal aquel la relación entre la entrada y la salida puede definirse mediante una ecuación lineal.

Sistema Lineal: $y = ax + b$

Sistema No lineal: $y = x^3$

Se dice que una ecuación es lineal si a esta se le puede aplicar el principio de superposición.

El principio de superposición establece que la respuesta producida por dos funciones excitadoras distintas es la suma de las respuestas individuales.

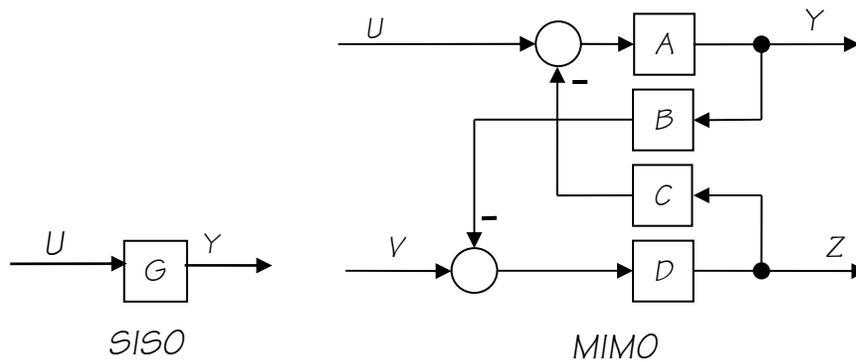
Si $s = f(e)$ entonces $e = a + b \rightarrow s = f(a) + f(b)$

Es de notar que los sistemas reales son todos no lineales, sin embargo en muchos casos la extensión de la variación de las variables del sistema no es amplia y se puede linealizar el sistema dentro de un rango relativamente estrecho de valores de variables.

Sistemas de control una entrada y una salida (SISO) vs. Sistemas de control de múltiples entradas y salidas (MIMO)

Un sistema puede tener una entrada y una salida, por ejemplo los controles de temperatura vistos anteriormente. Pero existen también sistemas con múltiples entradas y salidas, por ejemplo el control de

una caldera en donde las variables controladas (salidas) son la temperatura y la presión, las cuales son controladas a través de un flujo y del calentamiento.



Sistemas de control determinísticos vs. Sistemas de control estocásticos

Un sistema de control es determinístico si la respuesta a la entrada es predecible y repetible. De no serlo el sistema de control es estocástico.



Sistema determinístico



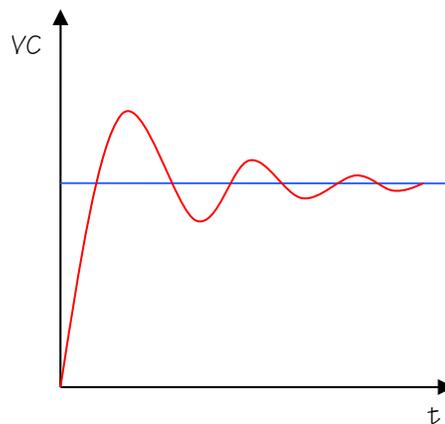
Sistema Estocástico

Características de los sistemas de control

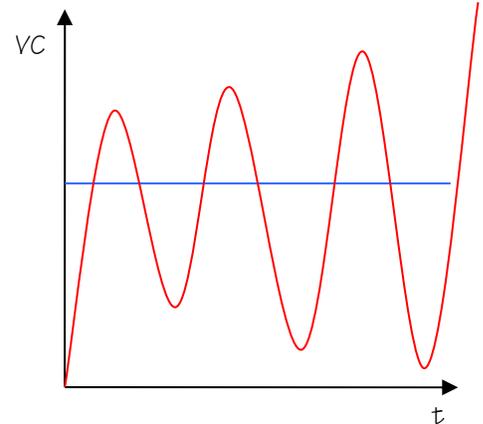
En un sistema de control existen tres características fundamentales que son: La estabilidad, la exactitud y la velocidad de respuesta.

Estabilidad

Se dice que un sistema de control estable es aquel que responde en forma limitada a cambios limitados en la variable controlada.



Estable



Inestable

Es decir si ocurre un cambio en la señal de referencia o se produce una perturbación el sistema al principio se desvía de su valor y volverá luego a alcanzar el valor correcto.

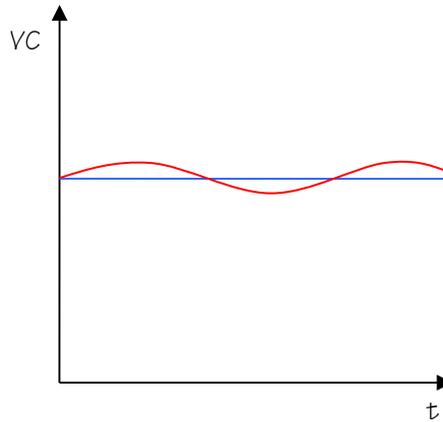
Un sistema inestable en cambio producirá oscilaciones persistentes o de gran amplitud de la variable controlada.

Exactitud

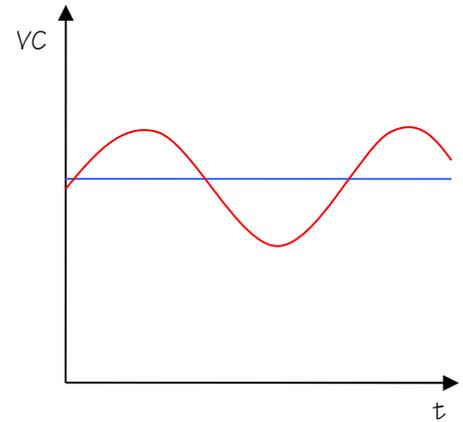
Un sistema exacto es aquel capaz de mantener el error en un valor mínimo, o en todo caso aceptable.

En la realidad no existen sistemas absolutamente exactos debido a las pequeñas imperfecciones de sus componentes, pero se consideran sistemas exactos aquellos que satisfacen los requerimientos del sistema.

Por lo general el costo de un sistema tiende a aumentar con la exactitud.



Exacto



Inexacto

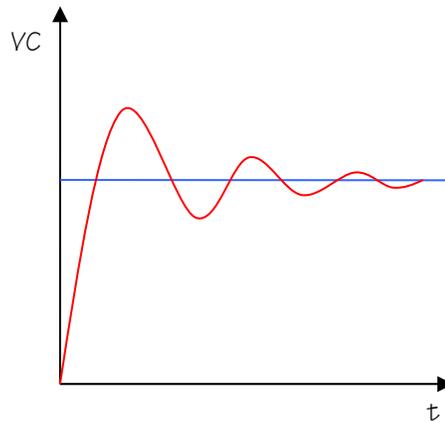
Velocidad de Respuesta

Es la rapidez con que la variable controlada se aproxima a la señal de referencia.

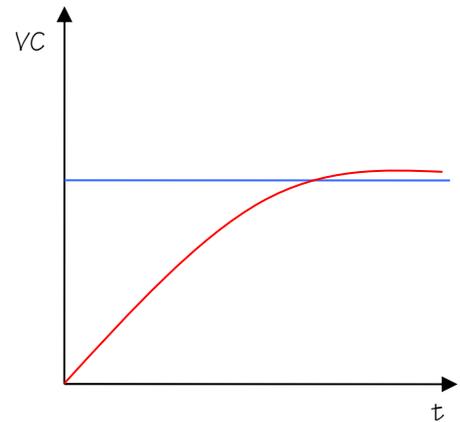
Un sistema debe responder a cualquier entrada en un tiempo aceptable, ya que aunque un sistema sea estable y tenga la exactitud requerida, si este es demasiado lento no tiene ningún valor.

Por lo general la estabilidad y la velocidad de respuesta son características que

se contraponen, es decir mientras más rápido sea un sistema mayor será la tendencia a la inestabilidad y viceversa.



Alta velocidad de



Baja velocidad de

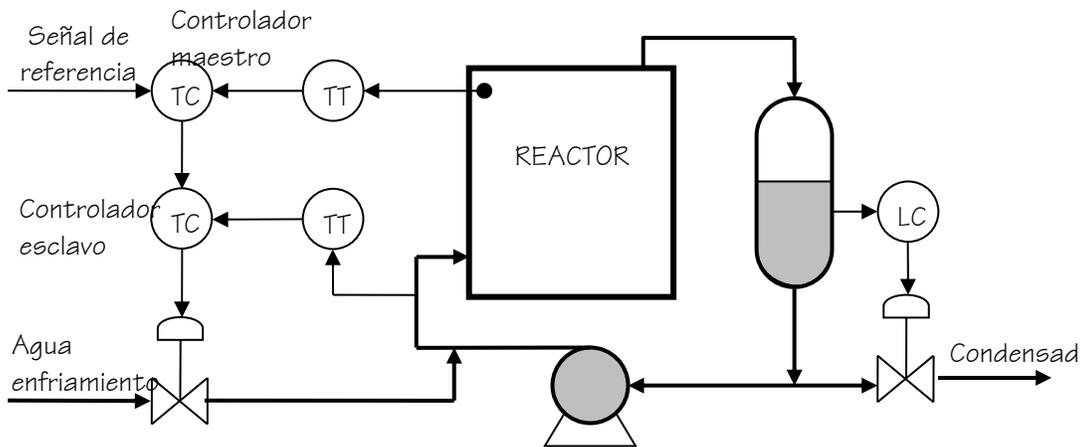
Lazos de control comúnmente utilizados en procesos industriales

Existen disposiciones de los sistemas de control diferentes a la básica, en donde pueden por ejemplo coexistir varios controladores, elementos de medición u algún otro componente. Estas disposiciones o comúnmente llamados lazos de control permiten controlar sistemas más complejos de una manera práctica. Los lazos más comunes son.

Control en cascada

Es aquel en el cual un controlador primario (maestro) manipula el punto de ajuste (señal de referencia) de un controlador secundario (esclavo).

Por ejemplo el control de temperatura de un control isotérmico



Control de temperatura en cascada para reactor isotérmico

En este caso el controlador maestro actúa de acuerdo a la diferencia entre el valor deseado y la temperatura del reactor, dando como señal de salida el valor deseado en el controlador esclavo, es decir la temperatura necesaria para el agua de enfriamiento que se introducir al reactor. Este controlara la temperatura del agua de enfriamiento por intermedio de una válvula de control que controla la proporción de agua fría y agua caliente (recirculación).

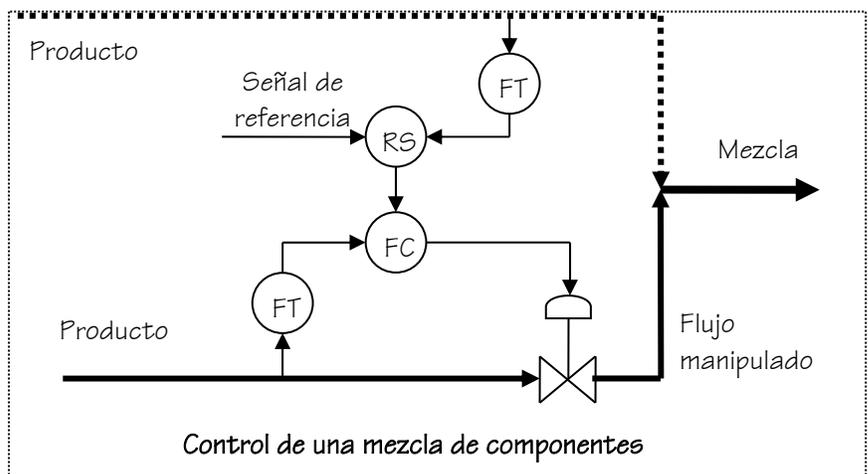
Control de relación

Es aquel en el que se controla una variable en relación a otra. El objetivo es mantener la relación entre dos variables en un valor específico. El control se efectúa manipulando una válvula que afecta a una de las variables mientras que la otra permanece constante.

Por ejemplo en un control de una mezcla de componentes se controla la proporción de uno (o varios) de ellos en función del componente principal para así mantener constante la proporción.

En este caso una de las variables es la controlada mientras que la otra se utiliza para generar el valor deseado. La no controlada es

multiplicada por un coeficiente ajustable en un instrumento llamado estación de relación (RS). La señal de salida de la estación de relación es la señal de referencia del controlador de flujo.



Control de una mezcla de componentes

Control de rango partido

En este caso el controlador tiene una entrada y dos salidas. Una de las salidas actuará desde un valor A hasta uno B y el otro desde uno B hasta uno C.

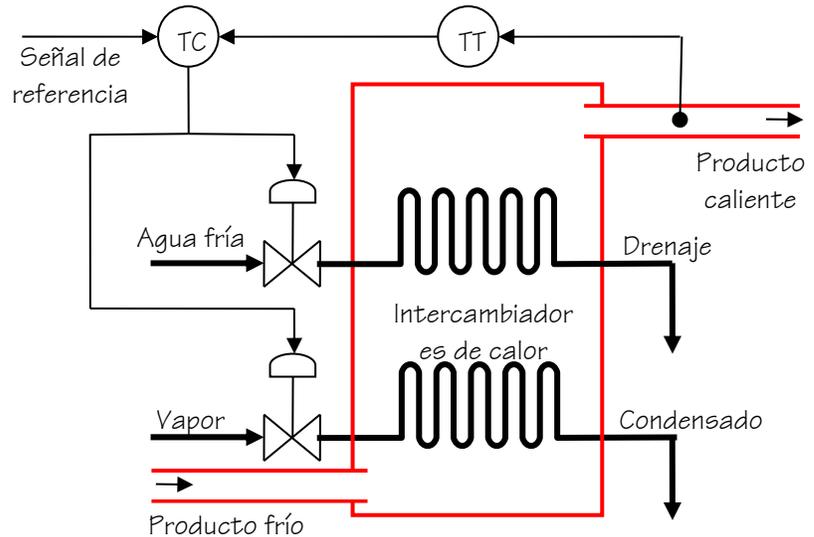
Por ejemplo en un control de rango partido de temperatura.

En este la señal de salida del controlador se conecta a dos válvulas de control. Si la señal de salida del controlador esta en el rango de 3 a 15 psi, se ajustan las válvulas de la siguiente forma:

1. La válvula de vapor se mueve desde completamente abierta hasta completamente cerrada cuando la señal oscile entre 3 y 9 psi.
2. La válvula de agua fría se mueve entre completamente cerrada y completamente abierta cuando la señal oscile entre 9 y 15 psi.

El controlador se ajusta de tal manera que produzca una señal de 9 psi cuando error sea nulo.

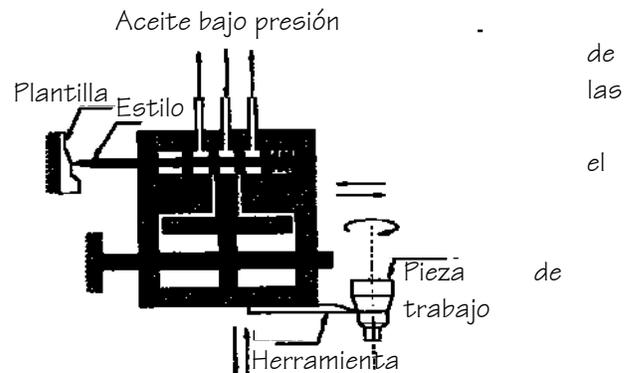
En este momento las dos válvulas estarán cerradas, cualquier variación en el error abra una u otra válvula para enfriar o calentar el producto.



Esquema de un control de temperatura de rango partido

Ejercicios

- 1) Muchas máquinas, tales como tornos, fresadoras y esmeriles, están provistos trazadores para reproducir el contorno de plantillas. La figura es un diagrama esquemático de un trazador hidráulico en cual la herramienta duplica la forma de la plantilla sobre la pieza de trabajo.
 - a) Explique el funcionamiento del sistema
 - b) Haga el diagrama de bloque e identifique los elementos del sistema
 - c) Clasifique el sistema de control



- 2) Las neveras para mantener el producto a una temperatura dada poseen un sistema de control.
 - a) Explique como es o como cree que debe que debe ser el sistema de control (Haga un esquema).
 - b) Haga el diagrama de bloque típico de un sistema de control e identifique los componentes en el sistema de la nevera.
 - c) Clasifique el sistema de control.

- 3) Los motores de combustión interna requieren, para funcionar correctamente, de un sistema de enfriamiento, que mantenga la temperatura del motor en un valor adecuado. Ni muy alto ni muy bajo. Existen varios sistemas para controlar esa temperatura, los dos más conocidos son:
- El clásico que usa un termostato que regula el flujo de refrigerante (agua), y donde el ventilador está acoplado mecánicamente al motor.
 - En los vehículos más recientes se usa, además del termostato, un controlador de temperatura que prende y apaga un electroventilador.

Seleccione uno de los dos sistemas antes mencionados y:

- a) Explique su funcionamiento, utilizando figuras.
- b) Haga el diagrama de bloque típico de un sistema de control retroalimentado identificando los componentes del sistema.
- c) Clasifique el sistema de control.

Tema 2. Modelado Matemático

Introducción

Par el estudio de los sistemas de control es necesario conocer el comportamiento de los elementos que eventualmente pueden formar parte de un sistema a controlar y del sistema de control. Este comportamiento se puede expresar en forma de un modelo matemático.

Se conoce como modelo matemático a las expresiones que representan el comportamiento dinámico de un sistema.

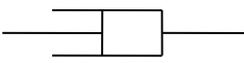
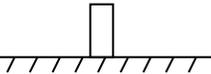
El estudio dinámico consiste entonces en determinar analíticamente la respuesta (salida) cuando la entrada experimenta una variación en el tiempo (excitación). Dicho de otra manera poder representar la respuesta transitoria del sistema.

Los modelos matemáticos de los sistemas físicos son ecuaciones diferenciales, que pueden ser ordinarias para los sistemas a parámetros concentrados o parciales para los sistemas distribuidos. Estas ecuaciones diferenciales pueden ser lineales o no lineales según el rango de funcionamiento en el cual se quiere estudiar al sistema.

En este capítulo estudiaremos los modelos matemáticos, lineales y simplificados de algunos tipos de sistemas más comunes. Quedan fuera del alcance de este capítulo los modelos matemáticos no lineales de los sistemas físicos, los cuales son más precisos pero más complejos para la correcta comprensión del resto de la asignatura.

Sistemas Mecánicos

Un sistema mecánico está conformado por los elementos siguientes:

Elementos	Representación gráfica	Ecuación fundamental
Resorte		$F = Kx$
Amortiguador		$F = CV = C \frac{dx}{dt}$
Fricción		$F = BV = B \frac{dx}{dt}$
Masa		$F = Ma = M \frac{d^2x}{dt^2}$

Donde:

F : Fuerza

a : Aceleración

B : Coeficiente de fricción

x : Desplazamiento

K : Constante del resorte

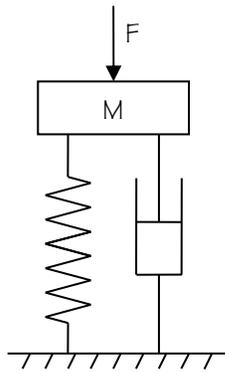
M : Masa

V : Velocidad

C : Constante del amortiguador

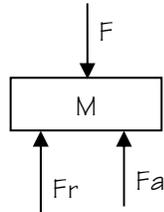
El modelo matemático se obtiene haciendo un diagrama de cuerpo libre sobre cada masa del sistema.

Ejemplo 1:



El sistema posee en este caso una sola masa, se hace entonces un diagrama de cuerpo libre en la masa:

El modelo matemático del sistema será:



$$F - Kx - C \frac{dx}{dt} = M \frac{d^2x}{dt^2}$$

O escrito en. Orden común de una ecuación diferencial ordinaria:

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + C \frac{dx}{dt} + Kx = F$$

Esta ecuación es una relación del desplazamiento de la masa (salida) en función de la fuerza aplicada (entrada).

Para simplificar la escritura de la ecuación diferencial se puede utilizar el operador matemático de derivada:

$$D = \frac{d}{dt}$$

Que para una derivada de segundo orden es: $D^2 = \frac{d^2}{dt^2}$

Con esta representación la ecuación de nuestro sistema mecánico se escribe: $MD^2x + CDx + Kx = F$

Sistemas Mecánicos Rotativos

Un sistema mecánico rotativo está conformado por los elementos siguientes:

Elementos	Representación gráfica	Ecuación fundamental
Ejes		$T = G\theta$
Cojinete		$T = C\omega = C \frac{d\theta}{dt}$
Masa o Volante de inercia		$T = I\alpha = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$
Tren de engranes		$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{N_2}{N_1}$ relación de velocidad $T_1\theta_1 = T_2\theta_2$ relación de trabajo

Donde:

T : Torque o momento

ω : Velocidad angular

G : Coeficiente de deformación de ejes

θ : Desplazamiento angular o deformación angular

α : Aceleración angular

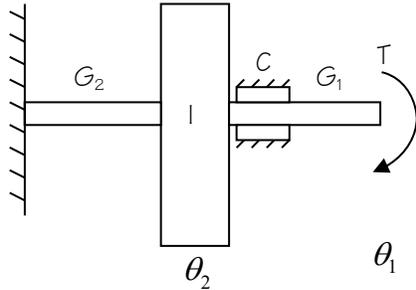
C : Coeficiente de fricción viscosa

I : Momento de inercia de masas

N : Numero de dientes de engrane

El modelo matemático se obtiene haciendo un diagrama de cuerpo libre sobre cada volante de inercia del sistema.

Ejemplo 2:



Se hace el diagrama de cuerpo libre sobre el volante de inercia:

$$G_1(\theta_1 - \theta_2) - G_2\theta_2 - C \frac{d\theta_2}{dt} = I \frac{d^2\theta_2}{dt^2}$$

Y se escribe adicionalmente la ecuación que relaciona el momento aplicado con al extremo del eje con el que momento que recibe el volante de inercia:

$$T = G_1(\theta_1 - \theta_2)$$

Con estas dos ecuaciones se puede hallar una expresión entre el momento aplicado al sistema (entrada) y el movimiento angular

del momento de inercia:

$$I \frac{d^2\theta_2}{dt^2} + C \frac{d\theta_2}{dt} + G_2\theta_2 = T$$

O escrito utilizando el operador matemático: $ID^2\theta_2 + CD\theta_2 + G_2\theta_2 = T$

También se puede definir una salida diferente por ejemplo el desplazamiento angular en el extremo del eje. En este caso se combinan las dos ecuaciones de una forma diferente:

Se obtiene primero la expresión $\theta_2 = \theta_1 - \frac{T}{G_1}$

La cual se sustituye en la primera relación obtenida:

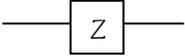
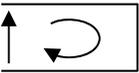
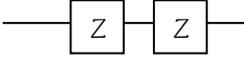
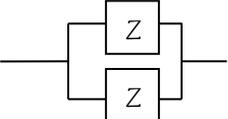
$$ID^2\left(\theta_1 - \frac{T}{G_1}\right) + CD\left(\theta_1 - \frac{T}{G_1}\right) + G_2\left(\theta_1 - \frac{T}{G_1}\right) = T$$

$$ID^2\theta_1 + CD\theta_1 + G_2\theta_1 = \frac{I}{G_1}D^2T + \frac{C}{G_1}DT + \left(\frac{G_2}{G_1} + 1\right)T$$

Sistemas Eléctricos

Un sistema eléctrico está conformado por los elementos siguientes:

Elementos	Representación gráfica	Ecuación fundamental
Resistencia		$V = RI, Z_R = R$
Capacitor		$V = \frac{1}{C} \int_0^t Idt; Z_C = \frac{1}{CD}$
Bobina		$V = L \frac{dI}{dt}, Z_L = LD$

Elemento cualquiera		$V = ZI$
En un nodo		$\sum I = 0$
En una malla		$\sum V = 0$
Elementos en serie		$Z_T = \sum Z_i$
Elementos en paralelo		$Z_T = \frac{1}{\sum 1/Z_i}$

Donde:

- V : Voltaje o diferencia de potencial
- I : Intensidad
- Z : Impedancia
- R : Resistencia
- C : Capacitancia
- L : Inductancia

Ejemplo 3: Hallar $V = f(I)$ y $V = f(V_3)$

Primera parte $V = f(I)$

Sabemos inicialmente que:

$$V = Z_T I$$

Donde

$$Z_T = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4$$

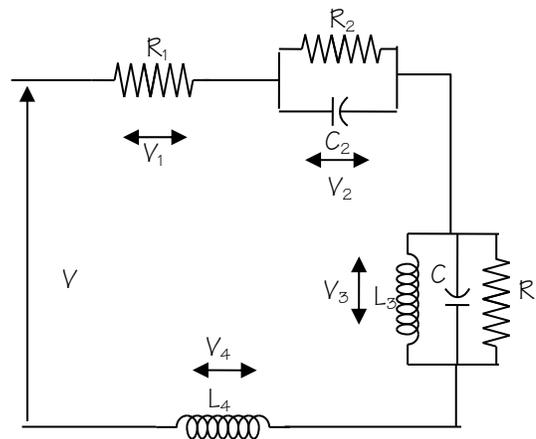
$$Z_1 = R_1; \quad Z_2 = \frac{1}{1/R_2 + C_2 D};$$

$$Z_3 = \frac{1}{1/R_3 + C_3 D + 1/L_3 D}; \quad Z_4 = L_4 D$$

Luego

$$V = \left(R_1 + \frac{1}{1/R_2 + C_2 D} + \frac{1}{1/R_3 + C_3 D + 1/L_3 D} + L_4 D \right) I$$

Segunda parte $V = f(V_3)$



Hallamos primero $I = f(V_3)$

$$V_3 = Z_3 I \Leftrightarrow I = \frac{V_3}{Z_3}$$

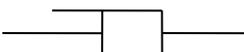
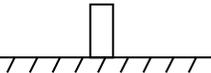
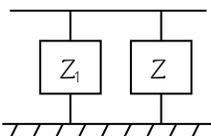
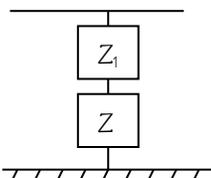
Luego

$$V = Z_T \frac{V_3}{Z_3}$$

Analogía Electromecánica

Este es un método que permite resolver en forma relativamente más sencilla problemas mecánicos, como si se tratase de sistemas eléctricos. En este caso hacemos:

V análogo a F , e I análogo a x

Elementos	Representación gráfica	Ecuación fundamental
Resorte		$Z_R = K$
Amortiguador		$Z_A = CD$
Fricción		$Z_F = BD$
Masa		$Z_M = MD^2$
Elemento cualquiera		$F = Zx$
Elementos en serie		$Z_T = \sum Z_i$
Elementos en paralelo		$Z_T = \frac{1}{\sum 1/Z_i}$

El método sirve para sistemas con una sola fuerza y se resuelven los problemas haciendo primero el diagrama de impedancias.

Diagrama de impedancias

Para realizar el diagrama de impedancias:

- Se coloca en la parte superior una línea horizontal que representa la coordenada donde está aplicada la fuerza.
- Se coloca en la parte inferior una línea que representa la tierra, o referencia.
- Se colocan entre las dos anteriores líneas que representen las otras coordenadas existentes.
- Se colocan las impedancias correspondientes a cada elemento y se hace la conexión de este a las coordenadas correspondientes. Nótese que cada elemento estará conectando siempre dos coordenadas. En el caso de las masas estas siempre irán conectando la tierra y la coordenada donde se encuentran, mientras que los otros elementos pueden conectar dos coordenadas diferentes a la tierra.

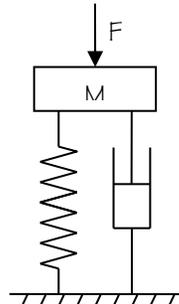
Ejemplo 4:

La ecuación del sistema obtenida por éste método será:

$$F = (Z_R + Z_A + Z_M)x;$$

$$F = (K + CD + MD^2)x$$

$$F = Kx + CDx + MD^2x$$



Esquema

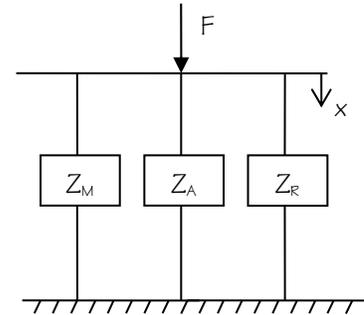


Diagrama de Impedancias

Sistemas Térmicos

Un sistema térmico está conformado por los elementos siguientes:

Elementos	Representación gráfica	Ecuación fundamental
Pared delgada (no absorbe calor)		Si $T_1 > T_2$: $Q = \frac{T_1 - T_2}{R_t}$
Pared gruesa (con almacenamiento de calor)		$\sum Q = C_T \frac{dT}{dt}$ $Q_1 = \frac{T_1 - T_p}{R_{t1}}; Q_2 = \frac{T_p - T_2}{R_{t2}}$ $Q_1 - Q_2 = C_T DT_p$

Donde:

Q : Flujo de calor

R_T : Resistencia térmica específico)

T : Temperatura

C_T : Capacitancia térmica (masa por calor

Ejemplo 5: Termómetro de mercurio con pozo térmico de cobre.

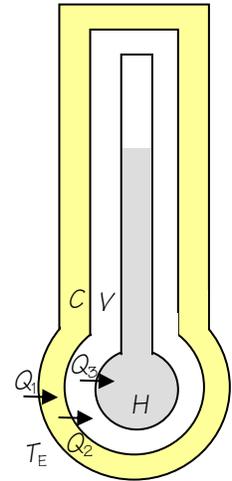
El termómetro está formado de tres paredes que absorben calor, más un elemento receptor que también absorbe calor:

- **Hg**: Mercurio T_{Hg} , C_{Hg}
- **V**: Vidrio T_V , C_V
- **C**: Cobre T_C , C_C

Entre cada elemento se consideran resistencias térmicas:

- R_1 : resistencia térmica entre el ambiente y el cobre
- R_2 : resistencia térmica entre el cobre y el vidrio
- R_3 : resistencia térmica entre el vidrio y el mercurio

Se requiere en este caso relacionar $T_{Hg} = f(T_E)$



Las ecuaciones fundamentales serán en este caso:

$$(1) \quad Q_1 - Q_2 = C_C DT_C$$

$$(2) \quad Q_2 - Q_3 = C_V DT_V$$

$$(3) \quad Q_3 = C_{Hg} DT_{Hg}$$

$$(4) \quad Q_1 = \frac{T_E - T_C}{R_1}$$

$$(5) \quad Q_2 = \frac{T_C - T_V}{R_2}$$

$$(6) \quad Q_3 = \frac{T_V - T_{Hg}}{R_3}$$

Obtenemos entonces 6 ecuaciones con 7 variables ($T_E, T_C, T_V, T_{Hg}, Q_1, Q_2, Q_3$)

Para obtener una expresión de $T_{Hg} = f(T_E)$ debemos entonces reducir nuestro sistema de ecuaciones a una ecuación con dos variables:

- Con 4 y 5 en 1 obtenemos $T_E = f(T_V, T_C)$: (7) $\frac{T_E}{R_1} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + C_C D \right) T_C - \frac{T_V}{R_2}$
- Con 5 y 6 en 2 obtenemos $T_{Hg} = f(T_V, T_C)$: (8) $\frac{T_{Hg}}{R_3} = \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + C_V D \right) T_V - \frac{T_C}{R_2}$
- Con 6 en 3 obtenemos $T_V = f(T_{Hg})$: (9) $T_V = R_3 \left(\frac{1}{R_3} + C_{Hg} D \right) T_{Hg}$
- Con 9 en 7 obtenemos $T_C = f(T_{Hg}, T_E)$: (10) $T_C = \frac{\frac{R_3}{R_2} \left(\frac{1}{R_3} + C_{Hg} D \right) T_{Hg} + \frac{T_E}{R_1}}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + C_C D \right)}$
- Con 9 y 10 en 8 obtenemos $T_{Hg} = f(T_E)$:

$$\frac{T_{Hg}}{R_3} = \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + C_V D \right) R_3 \left(\frac{1}{R_3} + C_{Hg} D \right) T_{Hg} - \frac{R_3 \left(\frac{1}{R_3} + C_{Hg} D \right) T_{Hg} + \frac{T_E}{R_1}}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + C_C D \right)}$$

$$T_E = a_1 D^3 T_{Hg} + a_2 D^2 T_{Hg} + a_3 D T_{Hg} + a_4 T_{Hg}$$

Con:

$$a_1 = R_1 R_3 C_{Hg} C_V C_C$$

$$a_2 = R_1 \left(\frac{R_3 C_{Hg} C_V}{R_1} + \frac{R_3 C_{Hg} C_V}{R_2} + \frac{R_3 C_{Hg} C_C}{R_2} + C_{Hg} C_C + C_V C_C \right)$$

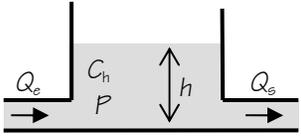
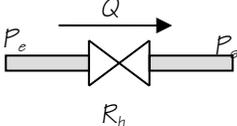
$$a_3 = R_1 \left(\frac{R_3 C_{Hg}}{R_1 R_2} + \frac{C_{Hg}}{R_1} + \frac{C_V}{R_1} + \frac{R_3 C_{Hg}}{R_2^2} + \frac{C_{Hg}}{R_2} + \frac{C_V}{R_2} + \frac{C_C}{R_2} + \frac{C_C}{R_3} - R_3 C_{Hg} - \frac{C_C}{R_3} \right)$$

$$a_4 = R_1 \left(\frac{1}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} - 1 \right)$$

Sistemas Hidráulicos

Un sistema hidráulico está conformado por los elementos siguientes:

Elementos	Representación gráfica	Ecuación fundamental
-----------	------------------------	----------------------

Tanques		$\sum Q = C_h \frac{dP}{dt}; Q_e - Q_s = C_h DP$ $\Delta P = \gamma h$
Ductos		$Q = \frac{\Delta P}{R_h}; Q = \frac{P_e - P_s}{R_h}$

Donde:

Q : Flujo o caudal

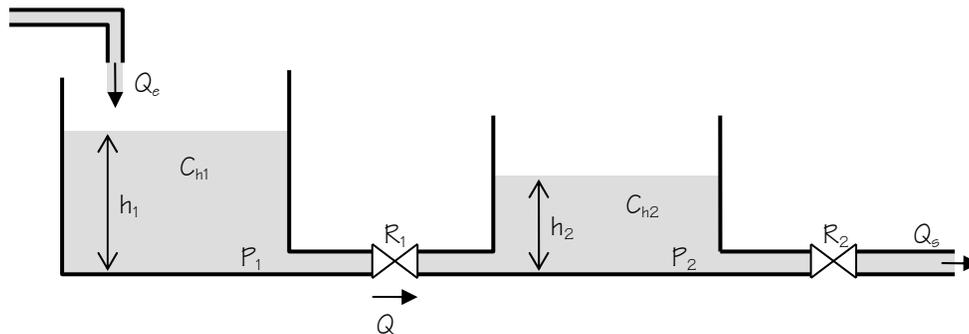
P : Presión

h : Nivel

R_h : Resistencia hidráulica (perdidas que se producen en tuberías y accesorios)

C_h : Capacitancia hidráulica (volumen que es capaz de absorber)

Ejemplo 6: Hallar $h_2 = f(Q_e)$



El sistema hidráulico está conformado por dos tanques conectados entre sí. Estos tienen una entrada de agua por el primer tanque y una salida por el segundo. Las ecuaciones fundamentales del sistema, considerando presiones manométricas ($P_{atm} = 0$) serán:

$$(1) P_1 = \gamma h_1$$

$$(2) P_2 = \gamma h_2$$

$$(3) Q_e - Q = C_{h1} DP_1$$

$$(4) Q - Q_s = C_{h2} DP_2$$

$$(5) Q = \frac{P_1 - P_2}{R_1}$$

$$(6) Q_s = \frac{P_2}{R_2}$$

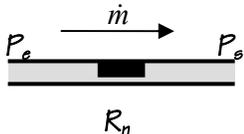
Tenemos por lo tanto 6 ecuaciones con 7 variables ($h_1, h_2, P_1, P_2, Q_e, Q, Q_s$).

Debemos entonces reducir el sistema a una ecuación que relacione $h_2 = f(Q_e)$:

- Con 5 en 3 obtenemos $Q_e = f(P_1, P_2)$: (7) $Q_e = \left(\frac{1}{R_1} + C_{h1}D\right)P_1 - \frac{P_2}{R_1}$
 - Con 5 en 4 obtenemos $Q_s = f(P_1, P_2)$: (8) $Q_s = -\frac{P_1}{R_1} - \left(C_{h2}D - \frac{1}{R_1}\right)P_2$
 - Con 6 en 8 obtenemos $P_1 = f(P_2)$: (9) $P_1 = R_1\left(-C_{h2}D + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)P_2$
 - Con 9 en 7 obtenemos $Q_e = f(P_2)$: (10) $Q_e = \left(\frac{1}{R_1} + C_{h1}D\right)R_1\left(-C_{h2}D + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)P_2 - \frac{P_2}{R_1}$
- $$Q_e = -R_1C_{h1}C_{h2}D^2P_2 + \left(C_{h1} - C_{h2} + \frac{R_1C_{h1}}{R_2}\right)DP_2 + \frac{1}{R_2}P_2$$
- Con 2 en 10 obtenemos $Q_e = f(h_2)$: $Q_e = -R_1C_{h1}C_{h2}\gamma D^2h_2 + \left(C_{h1} - C_{h2} + \frac{R_1C_{h1}}{R_2}\right)\gamma Dh_2 + \frac{\gamma}{R_2}\gamma h_2$

Sistemas Neumáticos

Un sistema neumático está conformado por los elementos siguientes:

Elementos	Representación gráfica	Ecuación fundamental
Tanques		$\sum \dot{m} = C_n \frac{dP}{dt}; \quad \dot{m}_e - \dot{m}_s = C_n DP$
Ductos		$\dot{m} = \frac{\Delta P}{R_n}; \quad \dot{m} = \frac{P_e - P_s}{R_n}$

Donde:

\dot{m} : Flujo másico

P : Presión

R_n : Resistencia neumática (perdidas que se producen en tuberías y accesorios)

C_n : Capacitancia neumática (V/RT)

Ejemplo 7: Hallar $\dot{m}_2 = f(P_1)$

El sistema consta de dos tanque de aire comprimido interconectados entre sí. Existe una entrada de aire y una salida en el tanque 2.

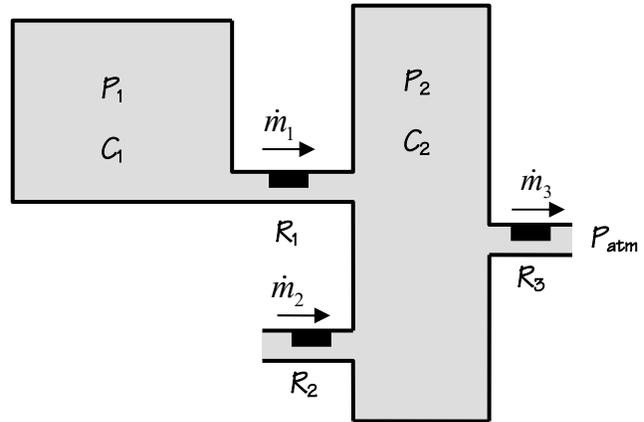
Las ecuaciones fundamentales del sistema, suponiendo presiones manométricas, son:

$$(1) \quad \dot{m}_1 = \frac{P_1 - P_2}{R_1}$$

$$(2) \quad \dot{m}_3 = \frac{P_2}{R_3}$$

$$(3) \quad -\dot{m}_1 = C_1 D P_1$$

$$(4) \quad \dot{m}_1 + \dot{m}_2 - \dot{m}_3 = C_2 D P_2$$



Nota: \dot{m}_2 debe ser conocido (entrada), o en su defecto la presión de entrada debe ser conocida.

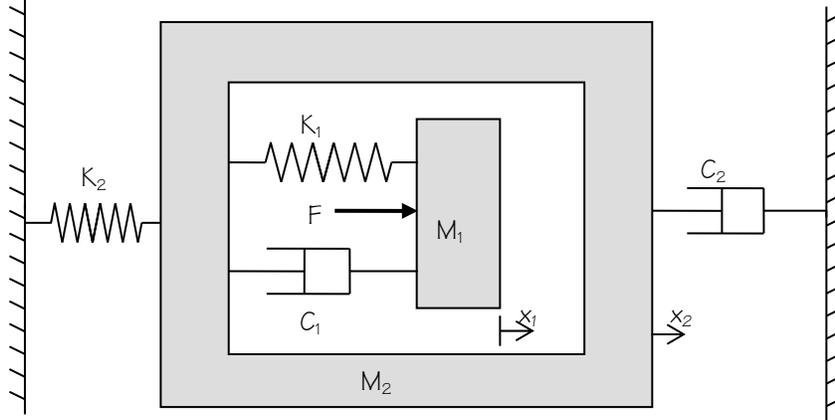
Tenemos por lo tanto 4 ecuaciones con 5 variables ($P_1, P_2, \dot{m}_1, \dot{m}_2, \dot{m}_3$).

Debemos entonces reducir el sistema a una ecuación que relacione $\dot{m}_2 = f(P_1)$:

- Con 1 en 3 obtenemos $P_1 = f(P_2)$: (5) $P_2 = \left(1 + \frac{C_1}{R_1} D\right) P_1$
 - Con 1 y 2 en 4 obtenemos $\dot{m}_2 = f(P_1, P_2)$: (6) $\dot{m}_2 = \frac{P_1}{R_1} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + C_2 D\right) P_2$
 - Con 5 en 6 obtenemos $\dot{m}_2 = f(P_1)$: $\dot{m}_2 = \frac{P_1}{R_1} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + C_2 D\right) \left(1 + \frac{C_1}{R_1} D\right) P_1$
- $$\dot{m}_2 = \frac{C_1 C_2}{R_1} D^2 P_1 + \left(\frac{C_1}{R_1^2} + \frac{C_1}{R_1 R_3} + C_2\right) D P_1 + \left(\frac{2}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right) P_1$$

Ejercicios

1. Sistema mecánico



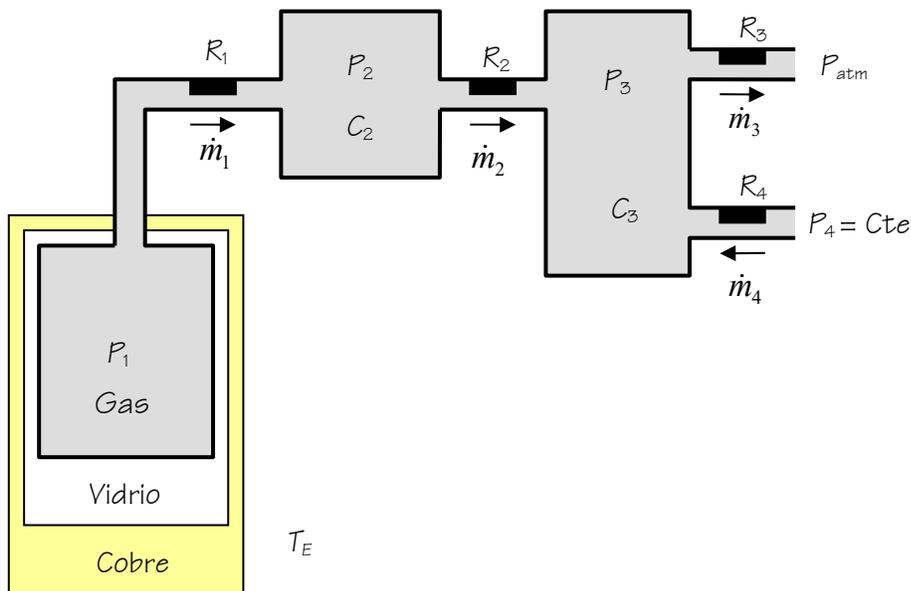
Hallar:

$$x_2 = f(F) \text{ y}$$

$$x_1 = f(F)$$

Por los dos métodos

2. Sistema termo-neumático



Hallar:

$$\dot{m}_3 = f(T_E, P_4)$$

Nota: la ecuación de relación entre los dos sistemas:

$$Pv = mRT$$

$$P = \rho RT$$

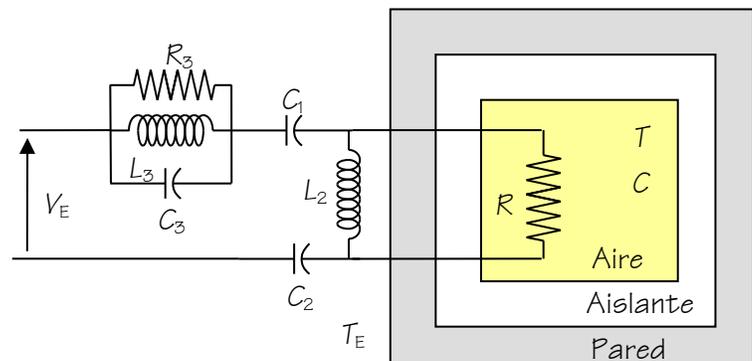
Donde se supone:

$$\rho R = \text{Constante}$$

3. Sistema termo-eléctrico

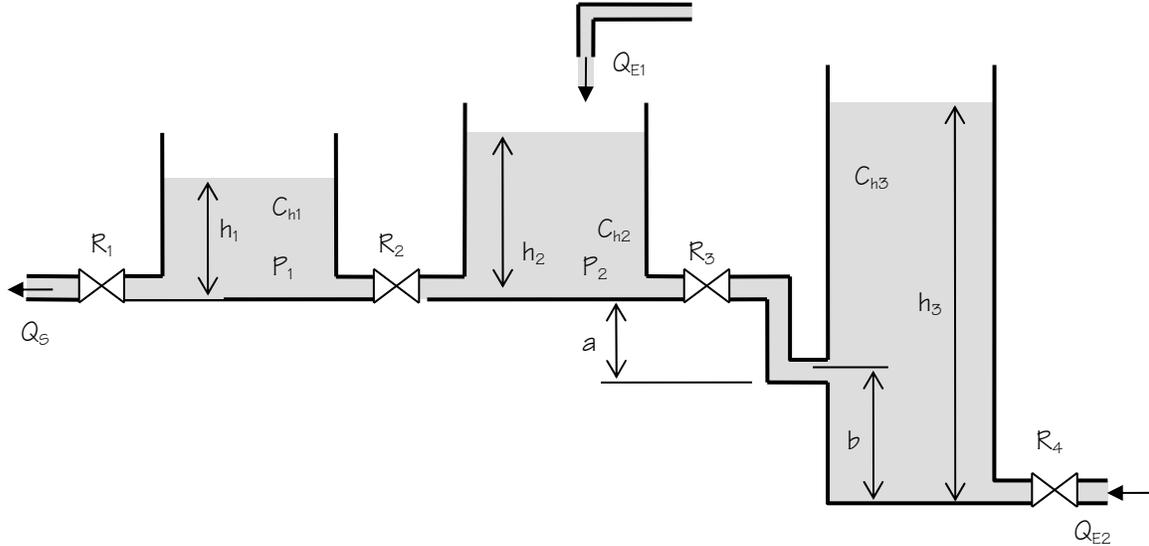
Hallar $T = f(V_E, T_E)$

Nota: la ecuación de relación de los dos sistemas es:



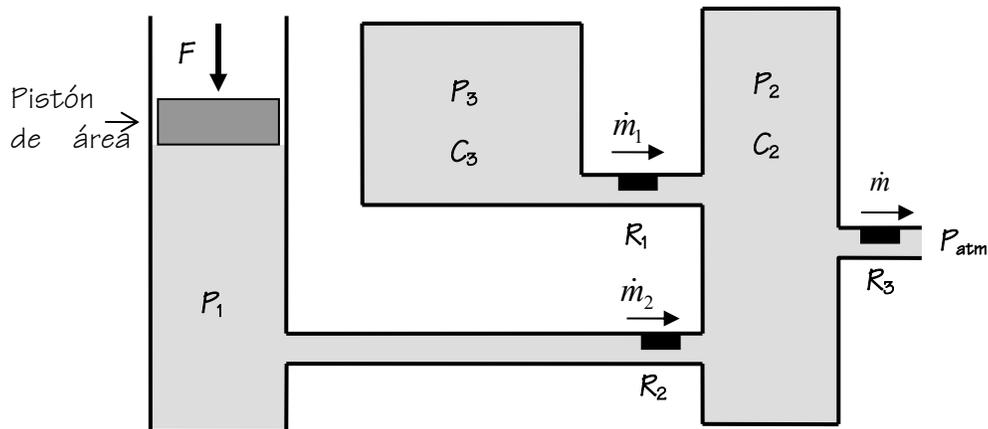
$$Q_R = VI = I^2R = V^2/R$$

4. Sistema hidráulico



Hallar $Q_S = f(Q_{E1}, Q_{E2})$

5. Sistema neumático con pistón



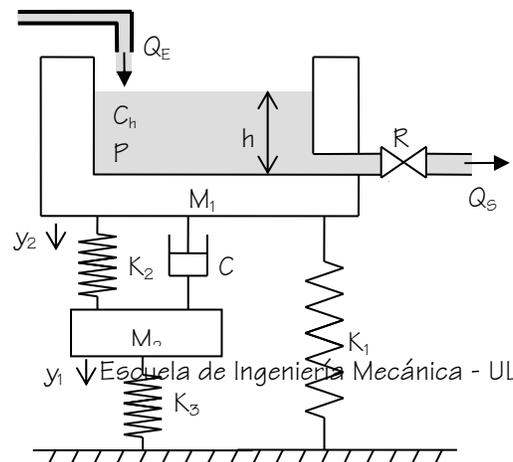
Hallar $\dot{m} = f(F)$

Nota la ecuación que relaciona el sistema neumático con el pistón es: $P = F/A$

6. Sistema Mecánico Hidráulico

Hallar $y_1 = f(Q_E)$

Nota: para la relación entre el sistema mecánico y el hidráulico $C_h = \text{Área del tanque}$



Utilizar el método de la silla (analogía electromecánica)

Tema 3. Formas de representación del modelo matemático

Introducción

El modelo matemático de un sistema físico es una ecuación diferencial, en el caso simple de ecuaciones diferenciales lineales será una ecuación diferencial ordinaria invariante en el tiempo, cuya expresión general se puede escribir como:

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = b_0 \frac{d^m x}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_{n-1} \frac{dx}{dt} + b_n x \quad n \geq m$$

Existen diversas formas de representar esa ecuación diferencial, ya sea simplemente con nomenclaturas diferentes, por ejemplo utilizando el operador matemático D :

$$a_0 D^n y + a_1 D^{n-1} y + \dots + a_{n-1} D y + a_n y = b_0 D^m x + b_1 D^{m-1} x + \dots + b_{n-1} D x + b_n x$$

O utilizando puntos para representar las derivadas:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-2} \ddot{y} + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + \dots + b_{m-2} \ddot{x} + b_{m-1} \dot{x} + b_m x$$

Pero también existen otras formas de representar las ecuaciones diferenciales cuyas características facilitan su estudio bajo ciertas condiciones, vamos a ver a continuación dos de estas formas de representación: la función de transferencia y la representación en espacio de estado. Adicionalmente con el desarrollo de los sistemas de control mediante computadoras se ha desarrollado la representación de los modelos matemáticos de forma discreta

Se utiliza la representación de un modelo matemático mediante funciones de transferencia en la denominada **teoría de control clásica** mientras que se representan los modelos matemáticos mediante ecuaciones en espacio de estado en la denominada **teoría de control moderna**.

La teoría de control moderna surge a partir de los años 60 para permitir el control de sistemas cada vez más complejos, con múltiples entradas y salidas, y con requisitos de funcionamiento cada vez más severos. Su desarrollo y aplicabilidad se han ido acrecentando con el uso de las computadoras personales.

Las diferencias entre la teoría de control moderna y la teoría de control clásica son las siguientes:

Teoría de control clásica	Teoría de control moderna
Sistemas lineales	Sistemas lineales y no lineales
Sistemas invariantes en el tiempo (LTI)	Variables o invariables en el tiempo
Una sola entrada y salida (SISO)	Múltiples entradas y salidas (MIMO)
Procedimientos en el dominio de la frecuencia complejas	Procedimientos en el dominio del tiempo

Adicionalmente con el desarrollo de los sistemas de control mediante computadoras se ha desarrollado la representación de los modelos matemáticos de forma discreta, estos modelos discretos también se pueden representar en forma de ecuaciones, funciones de transferencia discreta o representación estado discreta. Se incluirá en este tema un aparte completo a la representación de sistemas e forma discreta.

Representación de un modelo matemático con la Función de Transferencia

Esta representación se conoce también con el nombre de representación externa, pues no considera variables internas al sistema. Las funciones de transferencia son funciones que permiten caracterizar las relaciones entrada salida de componentes o sistemas que pueden describirse por ecuaciones diferenciales lineales, invariantes en el tiempo.

Esta se define como la relación entre la transformada de Laplace (L) de la salida (función respuesta) y la transformada de Laplace de la entrada (función excitación), bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero.

$$\text{Función de transferencia: } G(s) = \frac{L(\text{salida})}{L(\text{entrada})} \Big|_{CI=0}$$

Para la ecuación diferencial anteriormente presentada x es la entrada e y es la salida, en este caso la función de transferencia se obtiene tomando la transformada de Laplace de ambos miembros en forma independiente, con la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero y se obtiene:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_{m-1}s + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n}$$

Utilizando este concepto de función de transferencia se puede representar la dinámica de un sistema por ecuaciones algebraicas en s . Si la potencia más alta de s en el denominador es n se dice que el sistema es de orden n .

Ejemplo 1: Para el sistema mecánico mostrado en la figura se tiene la ecuación diferencial:

$$MD^2x + CDx + Kx = F$$

La transformada de Laplace de cada miembro de la ecuación es:

$$Ms^2X(s) + CsX(s) + KX(s) = F(s)$$

Donde:

$$\text{Transformada de la salida: } X(s) = L[x(t)]$$

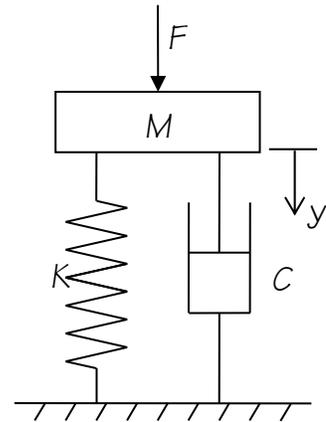
$$\text{Transformada de la entrada: } F(s) = L[F(t)]$$

La función de transferencia de este sistema será:

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Cs + K}$$

Esta función de transferencia expresa la salida como una función de la entrada:

$$X(s) = G(s)F(s) = \frac{1}{Ms^2 + Cs + K} F(s)$$



Comentarios sobre la función de transferencia

1. La función de transferencia es en efecto un modelo matemático ya que permite expresar la relación entre la variable de entrada y la variable de salida de un sistema.
2. Esta está limitada a sistemas de ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo (LTI) con una sola entrada y una sola salida (SISO).
3. La función de transferencia es una propiedad del sistema en sí, y es independiente de la magnitud y naturaleza de la entrada.

4. La función de transferencia incluye las unidades necesarias para relacionar la entrada con la salida, sin embargo no brinda ninguna información respecto a la estructura física del sistema. Sistemas físicamente distintos pueden tener la misma función de transferencia.
5. El conocimiento de la función de transferencia permite el estudio de la respuesta del sistema a diversas formas de entrada, con lo cual se puede lograr una mejor comprensión de la naturaleza del sistema.
6. La función de transferencia se puede obtener experimentalmente introduciendo entradas conocidas y estudiando la respuesta del sistema. Esto se conoce como **identificación** de sistemas, para lo cual existen una multitud de métodos.
7. Una definición alternativa para la función de transferencia es: La transformada de Laplace de la respuesta al impulso:

$$G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$$

$G(s)$ y $g(t)$ contienen la misma información.

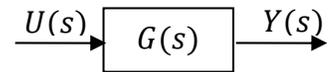
$$y(t) = g(t)u(t) \Leftrightarrow Y(s) = G(s)U(s)$$

Modelo algebraico $G(s)$.

Modelo temporal $g(t)$.

Función de transferencia y respuesta al impulso

Sea un sistema LTI, SISO sometido a una entrada $u(t)$ y representado por su función de transferencia $G(s)$.



Definición de la respuesta al impulso: Un sistema que tiene como función de transferencia $G(s)$, tiene como respuesta al impulso la función:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$

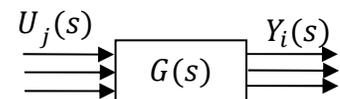
La respuesta de este sistema a una entrada cualquiera $u(t)$ se puede calcular utilizando el teorema de convolución: La respuesta de un sistema con función de transferencia $G(s)$ está dado por la siguiente integral de convolución:

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

El producto de convolución se expresa en general como $y(t) = g(t) * u(t) = u(t) * g(t)$

La Matriz de Transferencia

El concepto de Matriz de Transferencia es una extensión a sistemas MIMO de la función de transferencia.



Definición: la matriz $G(s) \in \mathbb{C}^{r \times m}$ se denomina Matriz de Transferencia, y relaciona la entrada $U(s)$ con la salida $Y(s)$.

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Con:

m : Número de entradas;

r : número de salidas

Que también puede expresarse en notación matricial explícita por elemento:

$$Y_i(s) = G_{ij}(s)U_j(s)$$

Se puede por lo tanto determinar la salida i con:

$$Y_i(s) = \sum_{j=1}^m G_{ij}(s)U_j(s)$$

Ejemplo 2: Se tiene el sistema mecánico MIMO con dos entradas (F_1 et F_2) y dos salidas (y_1 et y_2):

Las ecuaciones del sistema son:

$$\begin{aligned} F_1 - K_1(y_1 - y_2) - C_1 D(y_1 - y_2) &= M_1 D^2 y_1 \\ F_2 + K_1(y_1 - y_2) + C_1 D(y_1 - y_2) - K_2 y_2 - C_2 D y_2 &= M_2 D^2 y_2 \end{aligned}$$

La transformada de Laplace de las salidas será:

$$\begin{aligned} Y_2 &= \frac{C_1 s + K_1}{den} F_1 + \frac{M_1 s^2 + C_1 s + K_1}{den} F_2 \\ Y_1 &= \frac{M_2 s^2 + (C_1 + C_2)s + K_1 + K_2}{den} F_1 + \frac{C_1 s + K_1}{den} F_2 \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned} den &= M_1 M_2 s^4 + (M_1(C_1 + C_2) + C_1 M_2) s^3 \\ &+ (M_1(K_1 + K_2) + C_1(C_1 + C_2) + K_1 M_2 - C_1^2) s^2 \\ &+ (C_1(K_1 + K_2) + K_1(C_1 + C_2) - 2C_1 K_1) s \\ &+ K_1(K_1 + K_2) - K_1^2 \end{aligned}$$

La matriz de transferencia, que determina la relación $[Y_1 \ Y_2] = [G(s)] \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$ es:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{C_1 s + K_1}{den} & \frac{M_1 s^2 + C_1 s + K_1}{den} \\ \frac{M_2 s^2 + (C_1 + C_2)s + K_1 + K_2}{den} & \frac{C_1 s + K_1}{den} \end{bmatrix}$$

Polos y ceros de un sistema LTI, SISO.

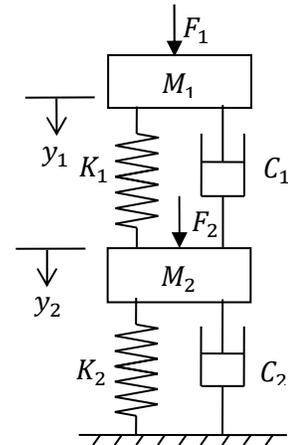
Los polos y los ceros permiten la caracterización dinámica de un sistema. Estos se pueden definir a partir de funciones o matrices de transferencia (mas fácil para los sistemas SISO) o a partir de modelos de estado (mas practico en modelos MIMO).

La ecuación característica y los polos

Para un sistema LTI la ecuación característica D_s se define como el más pequeño denominador común de todos los posibles menores de $G(s)$ no nulos. En el caso de sistema SISO, este corresponde al denominador de la función de transferencia.

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

El orden de un modelo LTI (n) corresponde al exponente más elevado de la ecuación característica, y es también igual al mínimo número de estados del modelo.



Las raíces de la ecuación característica (s_0) se denominan Polos del sistema. Para matrices de transferencia, si s_0 es un polo de un elemento de $G(s)$ entonces será un Polo del sistema. Estos Polos son necesariamente números reales o complejos conjugados.

Si D_s tiene n_k raíces en $s = \lambda_k$, el polo λ_k se dice que tiene multiplicidad n_k

Ejemplo 3:

Para la función de transferencia del sistema mecánico del ejemplo 1:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Cs + K}$$

La ecuación característica es:

$$D_s = Ms^2 + Cs + K$$

Los polos serán entonces las raíces de la ecuación:

$$s_{1,2} = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 - 4MK}}{2M}$$

Ejemplo 4:

Consideramos la matriz de transferencia:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} & \frac{3}{s+2} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

La ecuación característica que se asocia al más pequeño común denominador es:

$$D_s = (s * 1)^2(s + 2) = s^3 + 4s^2 + 5s + 2$$

Los polos del sistema serán las raíces de esta ecuación característica:

$$s_1 = -1; s_2 = -1; s_3 = -2$$

Los ceros

En el caso de los sistemas denominados cuadrados, en donde el número de entradas es igual al número de salidas, los ceros se pueden determinar mediante la matriz o función de transferencia.

Se define el polinomio o ecuación de los ceros $N(s)$ como el más grande común divisor de los numeradores de los menores de orden máximo de $G(s)$ normalizado, para tener la ecuación característica $D(s)$ como denominador. Este polinomio se obtiene con:

$$\frac{N(s)}{D(s)} = |G(s)|$$

Los ceros (z_0) son las raíces de este polinomio de orden m , y se obtienen para: $N(z_0) = 0$

Ejemplo 5: para la misma matriz de transferencia del ejemplo 4: $G(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} & \frac{3}{s+2} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$

Existe un menor máximo de orden 2 que es:

$$|G(s)| = \frac{2}{(s+1)(s+1)} - \frac{3}{(s+2)(s+1)} = \frac{-s+1}{(s+1)^2(s+2)}$$

El polinomio de los ceros es:

$$N(s) = -s + 1$$

Existe un solo cero: $z_0 = 1$

NOTA:

Todas las definiciones son aplicables al caso más simple de un sistema SISO para las cuales $G(s)$ es una fracción racional donde:

- El numerador es $\pi_z(s)$ y sus raíces son los ceros
- El denominador es $\pi_p(s)$ y sus raíces son los polos.

Definiciones:

- La diferencia de grados entre $D(s)$ y $N(s)$ (n y m) se denomina el grado relativo.
- Si $n - m > 0$ el modelo es estrictamente propio (grado relativo positivo)
- Si $n - m = 0$ el modelo es bipropio (grado relativo cero).
- Si $n - m \geq 0$ el modelo es propio.
- Si $n - m < 0$ el modelo es impropio (grado relativo negativo).
- Los sistemas reales son estrictamente propio.
- Los controladores pueden ser propios o impropios. Los impropios se modifican para poder construirlos.

Representación de un modelo matemático en Espacio de Estado

La representación en espacio de estado, también conocida como representación interna, fue utilizada en otras disciplinas como la mecánica o termodinámica desde hace largo tiempo. Por ejemplo, para el comportamiento macroscópico de un gas puede describirse y predecirse con un número finito de variables físicas: el volumen V de ese gas, su presión P y su temperatura T . El conjunto P, V, T representa el estado termodinámico del gas. Su evolución en el tiempo dependerá del entorno exterior (aporte de calor por ejemplo) pudiéndose caracterizar su comportamiento dinámico con el conocimiento de ese entorno, que en control denominamos entrada del sistema.

En conclusión el estado dinámico de un sistema puede ser representado por un conjunto de variables denominadas variables de estado. Este conjunto de variables caracteriza completamente la configuración dinámica actual del sistema. Para esto se requiere de un número mínimo de variables de estado necesarias y suficientes que permiten la descripción dinámica del sistema.

Los sistemas automáticos modernos, a partir de los cuales se desarrollo la representación de estado para el control de procesos, aparecen en los años 60 para permitir el control de sistemas complejos tales como las aplicaciones espaciales Apolo y Polaris, las cuales tienen múltiples entradas y salidas (MIMO), y criterios de funcionamiento cada vez más severos. El uso del espacio de estado para representación de sistemas de control proviene de la capacidad que tiene esta representación de representar sistemas multivariables complejos. Su desarrollo y aplicación crece luego con el uso de los computadores.

El conjunto de variables de estado no es único, pero debe estar conformado para cada sistema por un número idéntico de variables de estado independientes. Esto significa que la selección de estas variables, así como de sus condiciones iniciales, constituye un conjunto que se puede fijar de forma arbitraria.

El estado inicial del sistema constituye su memoria: dado un estado inicial a un instante dado el conocimiento del pasado no permite el conocimiento del futuro del sistema, se requiere por lo tanto de unas funciones (ecuaciones de estado) que permiten la predicción del futuro, las funciones comúnmente utilizadas son las resultantes de una integración.

Para comprender correctamente el funcionamiento de esta representación se estudiarán las definiciones básicas de estado, variable de estado, vector de estado y espacio de estado. Luego se presentará la forma de las ecuaciones en espacio de estado, su relación con las funciones de transferencia y la forma de representar sistemas lineales en espacio de estado.

Definiciones

Estado

El estado de un sistema dinámico es el conjunto más pequeño de variables $\mathbf{x}(t)$ (denominadas variables de estado) tales que el conocimiento de esas variables en $t = t_0$, conjuntamente con el conocimiento de la entrada $\mathbf{u}(t)$ para todo tiempo $t \geq t_0$, y las ecuaciones que describen la dinámica $f(\mathbf{x}, t, \mathbf{u})$ y $g(\mathbf{x}, t, \mathbf{u})$, determinan completamente el comportamiento futuro de los estados $\mathbf{x}(t)$ y salidas $\mathbf{y}(t)$ del sistema para cualquier tiempo $t \geq t_0$.

Variables de estado

Las variables de estado de un sistema dinámico $\mathbf{x}(t)$ son las variables que constituyen el conjunto más pequeño de variables que determinan el estado de un sistema dinámico.

Nótese que las variables de estado no deben ser necesariamente cantidades físicas mensurables u observables. Sin embargo es conveniente escoger como variables de estado de un sistema magnitudes.

Vector de estado

Si se requieren n variables de estado para describir completamente el comportamiento de un sistema dado, se puede considerar a esas n variables como los n componentes de un vector \mathbf{x} . Vector que recibe el nombre de vector de estado.

Ecuaciones en el espacio de estado

Las ecuaciones en espacio de estado manejan tres tipos de variables:

- Las variables de entrada, o vector de entrada $\mathbf{u}(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)]^T$
- Las variables de salida, o vector de salida $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)]^T$
- Las variables de estado, o vector de estado $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$

Donde n , m y r , representan el número de variables de estado, salida y entrada respectivamente.

La expresión general de estas ecuaciones es la siguiente:

- Para un sistema no lineal:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \text{ Ecuación de estado}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \text{ Ecuación de salida}$$

- Para un sistema lineal

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \text{ Ecuación de estado}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \text{ Ecuación de salida}$$

Donde:

$$\mathbf{A}(t) \text{ se denomina matriz de estado}$$

$$\mathbf{B}(t) \text{ se denomina matriz de entrada}$$

$C(t)$ se denomina matriz de salida

$D(t)$ se denomina matriz de transición directa

Si las funciones o vector de funciones f y g , o las matrices A , B , C y D comprenden explícitamente el tiempo el sistema se denomina variable en el tiempo, en el caso contrario el sistema se denomina invariante en el tiempo. En el caso de un sistema lineal invariante en el tiempo (LTI) las ecuaciones de estado se escriben entonces como:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \text{ Ecuación de estado}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \text{ Ecuación de salida}$$

Representación de sistemas dinámicos en el espacio de estado

Cualquier ecuación diferencial de orden n se puede expresar como una ecuación de estado de primer orden en notación vectorial-matricial. Se presenta a continuación las técnicas para la obtención de estas ecuaciones de estado para dos ecuaciones diferenciales comunes.

Representación en espacio de estado a partir de ecuaciones diferenciales ordinarias (típicamente sistemas SISO)

Caso de una ecuación ordinaria de orden n en donde la función excitadora no incluye términos derivativos

Sea el siguiente sistema de orden n :

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = u$$

Suponiendo que las condiciones iniciales $y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$ y la entrada $u(t)$ para un tiempo $t \geq 0$ son conocidas, entonces las variables de estado deben ser tales que definan completamente el comportamiento futuro del sistema. Bajo esta premisa se puede entonces escoger como variables de estado:

$$x_1 = y; \quad x_2 = \dot{y}; \quad \dots \quad x_n = y^{(n-1)}$$

Entonces la ecuación diferencial se puede escribir como:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$

$$\dot{x}_n = -a_n x_1 - \dots - a_1 x_n + u$$

$$y = x_1$$

O en forma matricial:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

Donde:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

Esta forma de representación se denomina comúnmente **forma canónica controlador**.

Nota: La representación de estado de un sistema no es única, pues depende de la forma como se seleccionan las variables de estado, sin embargo todas las representaciones de un mismo sistema tendrán el mismo número de variables de estado.

Ejemplo 6: para el sistema mecánico mostrado en el ejemplo 1 se tiene la ecuación diferencial:

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = F$$

Donde $u = F$

Se puede entonces definir las variables de estado como: $x_1 = y$; $x_2 = \dot{y}$

Sustituyendo esto en la ecuación obtenemos:

$$M\dot{x}_2 + Cx_2 + Kx_1 = u \Rightarrow \dot{x}_2 = \frac{u - (Cx_2 + Kx_1)}{M}$$

Se obtiene entonces el sistema de ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{K}{M}x_1 - \frac{C}{M}x_2 + \frac{1}{M}u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

El cual puede expresarse matricialmente como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

Donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{C}{M} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}; \quad C = [1 \quad 0]$$

Caso de ecuaciones diferenciales de orden n en donde la función excitadora incluye términos derivativos

Sea el siguiente sistema de orden n:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = b_0u^{(n)} + b_1u^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}\dot{u} + b_nu$$

Suponiendo que las condiciones iniciales $y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$ y la entrada $u(t)$ para un tiempo $t \geq 0$ son conocidas, entonces las variables de estado deben ser tales que definan completamente el comportamiento futuro del sistema. En este caso en particular las variables de estado deberán además ser tales que eliminen las derivadas de u en la ecuación de estado. Bajo esta premisa se pueden escoger como variables de estado:

$$\begin{aligned} x_1 &= y - \beta_0u \\ x_2 &= \dot{y} - \beta_0\dot{u} - \beta_1u = \dot{x}_1 - \beta_1u \\ x_3 &= \ddot{y} - \beta_0\ddot{u} - \beta_1\dot{u} - \beta_2u = \dot{x}_2 - \beta_2u \\ &\vdots \\ x_n &= y^{(n-1)} - \beta_0y^{(n-1)} - \beta_1y^{(n-2)} - \dots - \beta_{n-2}\dot{u} - \beta_{n-1}u = \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1}u \end{aligned}$$

Donde $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ son coeficientes que se determinan como:

$$\begin{aligned}\beta_0 &= b_0 \\ \beta_1 &= b_1 - a_1\beta_0 \\ \beta_2 &= b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 \\ \beta_3 &= b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\beta_0 \\ &\vdots \\ \beta_n &= b_n - a_1\beta_{n-1} - \dots - a_{n-1}\beta_1 - a_n\beta_0\end{aligned}$$

Con esta escogencia de variables de estado se obtiene el sistema de ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \beta_1 u \\ \dot{x}_2 &= x_3 + \beta_2 u \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n + \beta_{n-1} u \\ \dot{x}_n &= -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + \beta_n u \\ y &= x_1 + \beta_0 u\end{aligned}$$

O en forma matricial:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

Donde:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix}; C = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]; D = \beta_0 = b_0$$

Ejemplo 7: para la ecuación diferencial siguiente:

$$\ddot{y} + 18\dot{y} + 192y = 160\dot{u} + 640u$$

Queremos obtener una representación en espacio de estado.

Se definen entonces las siguientes variables de estado:

$$\begin{aligned}x_1 &= y - \beta_0 u \\ x_2 &= \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u \\ x_3 &= \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u\end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}\beta_0 &= b_0 = 0 \\ \beta_1 &= b_1 - a_1\beta_0 = 0 \\ \beta_2 &= b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 = 160 \\ \beta_3 &= b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\beta_0 = 640 - 18(160) = -2240\end{aligned}$$

La ecuación de estado del sistema será entonces:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -640 & -192 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 160 \\ -2240 \end{bmatrix} u$$

La ecuación de salida será:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Representación de estado a partir de un sistema de ecuaciones diferenciales

En el caso de disponer de un sistema de ecuaciones diferenciales en lugar de una sola ecuación ordinaria es posible obtener una representación de estado directamente de este sistema de ecuaciones, los dos ejemplos siguientes ilustran esta opción.

Ejemplo 8: Se tiene el sistema térmico del termómetro mostrado en la figura, representado por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} (1) \quad Q_1 - Q_2 &= C_C D T_C & (2) \quad Q_2 - Q_3 &= C_V D T_V & (3) \quad Q_3 &= C_{Hg} D T_{Hg} \\ (4) \quad Q_1 &= \frac{T_E - T_C}{R_1} & (5) \quad Q_2 &= \frac{T_C - T_V}{R_2} & (6) \quad Q_3 &= \frac{T_V - T_{Hg}}{R_3} \end{aligned}$$

Para el cual queremos obtener una representación en espacio de estado.

El sistema puede simplificarse inicialmente para ponerlo en función solo de las temperaturas:

$$\begin{aligned} (7) \quad \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + C_C D \right) T_C &= \frac{T_V}{R_2} + \frac{T_E}{R_1} \\ (8) \quad \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + C_V D \right) T_V &= \frac{T_C}{R_2} + \frac{T_{Hg}}{R_3} \\ (9) \quad T_V &= R_3 \left(\frac{1}{R_3} + C_{Hg} D \right) T_{Hg} \end{aligned}$$

En este caso queda claramente identificado que la entrada es $u = T_E$ y la salida es $y = T_H$.

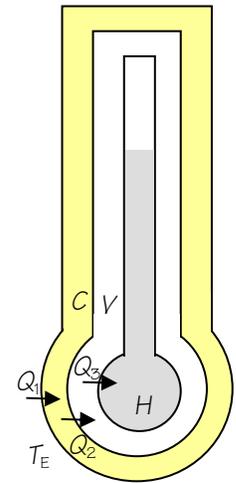
Los estados se pueden definir de la siguiente manera:

$$x_1 = T_C; \quad x_2 = T_V; \quad x_3 = T_{Hg}$$

En base a esta definición de los estados se puede re-escribir el sistema como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} x_1 + \frac{1}{R_2} x_1 + C_C \dot{x}_1 &= \frac{x_2}{R_2} + \frac{u}{R_1} \\ \frac{1}{R_2} x_2 + \frac{1}{R_3} x_2 + C_V \dot{x}_2 &= \frac{x_1}{R_2} + \frac{x_3}{R_3} \\ x_3 + R_3 C_{Hg} \dot{x}_3 &= x_2 \end{aligned}$$

A partir de estas ecuaciones se puede escribir el sistema en forma de espacio de estado:



$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{1}{R_1 C_C} x_1 - \frac{1}{R_2 C_C} x_1 + \frac{1}{R_2 C_C} x_2 + \frac{1}{R_1 C_C} u \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{R_2 C_V} x_1 - \frac{1}{R_2 C_V} x_2 - \frac{1}{R_3 C_V} x_2 + \frac{1}{R_3 C_V} x_3 \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{R_3 C_{Hg}} x_2 - \frac{1}{R_3 C_{Hg}} x_3 \\ y &= x_3\end{aligned}$$

El cual puede escribirse en forma matricial como:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

Donde:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_C} - \frac{1}{R_2 C_C} & \frac{1}{R_2 C_C} & 0 \\ \frac{1}{R_2 C_V} & -\frac{1}{R_2 C_V} - \frac{1}{R_3 C_V} & \frac{1}{R_3 C_V} \\ 0 & \frac{1}{R_3 C_{Hg}} & -\frac{1}{R_3 C_{Hg}} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; C = [0 \quad 0 \quad 1]$$

Ejemplo 9: Consideremos el sistema mecánico MIMO con dos entradas (F_1 y F_2) y dos salidas (y_1 y y_2), mostrado en la figura:

Las ecuaciones del sistema son:

$$\begin{aligned}F_1 - K_1(y_1 - y_2) - C_1 D(y_1 - y_2) &= M_1 D^2 y_1 \\ F_2 + K_1(y_1 - y_2) + C_1 D(y_1 - y_2) - K_2 y_2 - C_2 D y_2 &= M_2 D^2 y_2\end{aligned}$$

En este caso tenemos:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}; y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Y podemos seleccionar como estados:

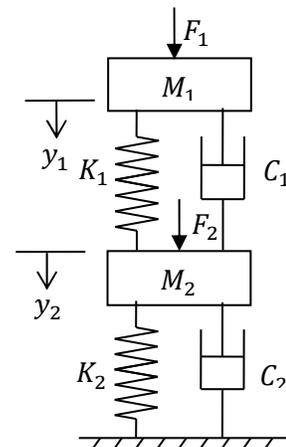
$$x = [y_1 \quad D y_1 \quad y_2 \quad D y_2]^T$$

Si sustituimos los estados, entradas y salidas en las ecuaciones originales tendremos:

$$\begin{aligned}u_1 - K_1 x_1 + K_1 x_3 - C_1 x_2 + C_1 x_4 &= M_1 \dot{x}_2 \\ u_2 + K_1 x_1 - K_1 x_3 + C_1 x_2 - C_1 x_4 - K_2 x_3 - C_2 x_4 &= M_2 \dot{x}_4\end{aligned}$$

Y obtenemos la representación de estado siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{K_1}{M_1} x_1 - \frac{C_1}{M_1} x_2 + \frac{K_1}{M_1} x_3 + \frac{C_1}{M_1} x_4 + \frac{u_1}{M_1} \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{K_1}{M_2} x_1 + \frac{C_1}{M_2} x_2 - \frac{(K_1 + K_2)}{M_2} x_3 - \frac{(C_1 + C_2)}{M_2} x_4 + \frac{u_2}{M_2} \\ y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_3\end{aligned}$$



Expresado en forma de Matriz:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

Con:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{K_1}{M_1} & -\frac{C_1}{M_1} & \frac{K_1}{M_1} & \frac{C_1}{M_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_1}{M_2} & \frac{C_1}{M_2} & -\frac{K_1+K_2}{M_2} & -\frac{C_1+C_2}{M_2} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{M_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{M_2} \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Relación entre función de transferencia y espacio de estado

Se puede obtener la función de transferencia de un sistema expresado en espacio de estado mediante una expresión simple.

Para el sistema expresado en espacio de estado en forma matricial:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

Las transformadas de Laplace están dadas por:

$$\begin{aligned}sX(s) - x(0) &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s)\end{aligned}$$

Como la función de transferencia se define como la relación entre la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada cuando las condiciones iniciales son cero:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Se supone entonces que la condición inicial $x(0)$ es igual a cero, se obtiene entonces que la expresión de las transformadas será:

$$sX(s) - AX(s) = BU(s) \quad \text{ó} \quad (sI - A)X(s) = BU(s)$$

Pre multiplicando ambos miembros de la ecuación por $(sI - A)^{-1}$ se obtiene:

$$X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s)$$

Y al sustituirse esta expresión en la ecuación de salida obtenemos:

$$Y(s) = (C(sI - A)^{-1} B + D)U(s)$$

Por lo tanto:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$$

Ejemplo 10: para el sistema mecánico teníamos que el modelo matemático expresado en espacio de estado es:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

Donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{C}{M} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}; C = [1 \quad 0]$$

Si queremos obtener la función de transferencia a partir de esta expresión del modelo debemos entonces usar la expresión:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = [1 \quad 0] \left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{C}{M} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} + 0$$

Al resolver esta ecuación obtenemos:

$$G(s) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{s}{M} & -\frac{1}{M} \\ \frac{K}{M} & s + \frac{C}{M} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}$$

Recordatorio :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)^T$$

Donde:

$d_{ij} = (-1)^{i+j} |\tilde{A}_{ij}|$ elementos de la matriz $\text{adj}(A)$
 \tilde{A}_{ij} menores principales

$$G(s) = [1 \quad 0] \frac{1}{s^2 + \frac{C}{M}s + \frac{K}{M}} \begin{bmatrix} s + \frac{C}{M} & 1 \\ -\frac{K}{M} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}; \quad G(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{C}{M}s + \frac{K}{M}} \begin{bmatrix} s + \frac{C}{M} & 1 \\ -\frac{K}{M} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{C}{M}s + \frac{K}{M}} \frac{1}{M}; \quad G(s) = \frac{1}{Ms^2 + Cs + K}$$

Que es exactamente la función de transferencia encontrada a partir de la ecuación diferencial.

Ejemplo 11: A partir del modelo matemático en representación de estado obtenido en el ejemplo 8, queremos obtener la función de transferencia de éste sistema se puede entonces obtener con la expresión:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$G(s) = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} s + \frac{1}{R_1 C_C} + \frac{1}{R_2 C_C} & -\frac{1}{R_2 C_C} & 0 \\ -\frac{1}{R_2 C_V} & s + \frac{1}{R_2 C_V} + \frac{1}{R_3 C_V} & -\frac{1}{R_3 C_V} \\ 0 & -\frac{1}{R_3 C_{Hg}} & s + \frac{1}{R_3 C_{Hg}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con:

$$[sI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} \left(s + \frac{1}{R_2 C_V} + \frac{1}{R_3 C_V} \right) \left(s + \frac{1}{R_3 C_{Hg}} \right) & - \left(\left(-\frac{1}{R_2 C_V} \right) \left(s + \frac{1}{R_3 C_{Hg}} \right) \right) & \left(\left(-\frac{1}{R_2 C_V} \right) \left(-\frac{1}{R_3 C_{Hg}} \right) \right) \\ - \left(\left(-\frac{1}{R_3 C_V} \right) \left(-\frac{1}{R_3 C_{Hg}} \right) \right) & \left(s + \frac{1}{R_1 C_C} + \frac{1}{R_2 C_C} \right) \left(s + \frac{1}{R_3 C_{Hg}} \right) & - \left(\left(s + \frac{1}{R_1 C_C} + \frac{1}{R_2 C_C} \right) \left(-\frac{1}{R_3 C_{Hg}} \right) \right) \\ - \left(\left(-\frac{1}{R_2 C_C} \right) \left(s + \frac{1}{R_3 C_{Hg}} \right) \right) & \left(\left(s + \frac{1}{R_1 C_C} + \frac{1}{R_2 C_C} \right) \left(s + \frac{1}{R_3 C_{Hg}} \right) \right) & - \left(\left(s + \frac{1}{R_1 C_C} + \frac{1}{R_2 C_C} \right) \left(-\frac{1}{R_3 C_{Hg}} \right) \right) \\ \left(\left(-\frac{1}{R_2 C_C} \right) \left(-\frac{1}{R_3 C_V} \right) \right) & - \left(\left(s + \frac{1}{R_1 C_C} + \frac{1}{R_2 C_C} \right) \left(-\frac{1}{R_3 C_V} \right) \right) & \left(\left(s + \frac{1}{R_1 C_C} + \frac{1}{R_2 C_C} \right) \left(s + \frac{1}{R_2 C_V} + \frac{1}{R_3 C_V} \right) \right) \\ \left(s + \frac{1}{R_1 C_C} + \frac{1}{R_2 C_C} \right) \left(s + \frac{1}{R_2 C_V} + \frac{1}{R_3 C_V} \right) \left(s + \frac{1}{R_3 C_{Hg}} \right) & & - \left(\left(-\frac{1}{R_2 C_C} \right) \left(-\frac{1}{R_2 C_V} \right) \left(s + \frac{1}{R_3 C_{Hg}} \right) - \left(-\frac{1}{R_3 C_V} \right) \left(-\frac{1}{R_3 C_{Hg}} \right) \left(s + \frac{1}{R_1 C_C} + \frac{1}{R_2 C_C} \right) \right) \end{bmatrix}$$

En este caso se observa que el cálculo algebraico se vuelve relativamente largo, por lo cual es más fácil obtener la función de transferencia directamente de la ecuación diferencial del sistema:

$$T_E = a_1 D^3 T_{Hg} + a_2 D^2 T_{Hg} + a_3 D T_{Hg} + a_4 T_{Hg}$$

Con:

$$a_1 = R_1 R_3 C_{Hg} C_V C_C$$

$$a_2 = R_1 \left(\frac{R_3 C_{Hg} C_V}{R_1} + \frac{R_3 C_{Hg} C_V}{R_2} + \frac{R_3 C_{Hg} C_C}{R_2} + C_{Hg} C_C + C_V C_C \right)$$

$$a_3 = R_1 \left(\frac{R_3 C_{Hg}}{R_1 R_2} + \frac{C_{Hg}}{R_1} + \frac{C_V}{R_1} + \frac{R_3 C_{Hg}}{R_2^2} + \frac{C_{Hg}}{R_2} + \frac{C_V}{R_2} + \frac{C_C}{R_2} + \frac{C_C}{R_3} - R_3 C_{Hg} - \frac{C_C}{R_3} \right)$$

$$a_4 = R_1 \left(\frac{1}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} - 1 \right)$$

En cuyo caso la función de transferencia puede escribirse como:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4}$$

No unicidad del conjunto de variables de estado

La no unicidad del conjunto de variables de estado significa que para un sistema cualquiera existen diversas representaciones de estado posibles. De forma recíproca matrices A diferentes pueden representar un mismo sistema y por ende una misma ecuación característica.

Para probar que esto es posible utilicemos el ejemplo siguiente:

Ejemplo 12: Supongamos que inicialmente se tiene el sistema en forma de ecuación diferencial:

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 11y = 6u$$

Para obtener una representación en forma de espacio de estado se pueden tomar los siguientes estados:

$$x_1 = y; \quad x_2 = \dot{y}; \quad x_3 = \ddot{y}$$

Con estos estados se obtiene la representación de estado siguiente:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + 6u$$

Que puede expresarse en forma matricial como:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

Donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \quad 0 \quad 0]$$

La función de transferencia de este sistema es:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Consideremos ahora el sistema lineal representado por las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \quad 1 \quad 1]$$

Se puede obtener la función de transferencia del sistema con la relación:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = [1 \quad 1 \quad 1] \left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = [1 \quad 1 \quad 1] \left(\begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ 0 & s+2 & 0 \\ 0 & 0 & s+3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} = [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(s+3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \left[\frac{1}{(s+1)} \quad \frac{1}{(s+2)} \quad \frac{1}{(s+3)} \right] \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{3}{(s+1)} - \frac{6}{(s+2)} + \frac{3}{(s+3)}$$

$$G(s) = \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Se observa que esta segunda representación de estado corresponde exactamente al mismo sistema pues posee la misma función de transferencia.

Forma canónica de Jordan

La forma canónica de Jordan o forma Modal, es la correspondiente a la segunda representación del ejemplo anterior, en la cual la matriz A solo posee elementos en la diagonal, es una matriz llamada diagonal. Estos elementos de la diagonal corresponden directamente a los valores propios de la matriz, los cuales son los polos del sistema o raíces de su ecuación característica.

$$A_J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

La no unicidad de la representación de estado permite modificar la representación para obtener modelos más simples de manipulación, tal como el caso de la forma de Jordan con matrices diagonales.

En el ejemplo 12 vimos que la matriz A bajo la forma canónica de Jordan es:

$$A_J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Si determinamos la ecuación característica correspondiente a esta nueva matriz obtenemos:

$$|sI - A_J| = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$$

La ventaja de la representación canónica de Jordan es que muestra directamente la estabilidad del sistema y además las operaciones matemáticas con las matrices diagonales son más sencillas.

La representación canónica de Jordan es solo otra representación en espacio de estado posible para un sistema lineal.

Cambio de variable lineal

De hecho se puede demostrar que para toda representación de estado de un sistema se puede determinar un nuevo conjunto de variables de estado, mediante un cambio de variable lineal de la forma:

$$z = Px$$

Donde P es una matriz cualquiera con las mismas dimensiones que A .

En este caso el nuevo sistema queda determinado por:

$$P\dot{z} = APz + Bu$$

$$y = CPz$$

Es decir:

$$\dot{z} = P^{-1}APz + P^{-1}Bu$$

$$y = CPz$$

Donde P^{-1} es la inversa de P .

Ejemplo 13: Supóngase que se quiere definir un nuevo conjunto de variables de estado para nuestro ejemplo usando la matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

La inversa de esta matriz es:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

En este caso nuestra nueva representación de estado estará definida por:

$$\dot{z} = A_z z + B_z u$$

$$y = C_z z$$

Donde las matrices vienen definidas por:

$$A_z = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -17 & -8 & -12 \\ -2 & -2 & 0 \\ 20 & 10 & 13 \end{bmatrix}; \quad B_z = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad C_z = CP = [1 \quad 1 \quad 1]$$

Podemos observar que esta nueva representación de estado corresponde al mismo sistema lineal, de hecho la ecuación característica de esta es:

$$\begin{aligned} |sI - A| &= \begin{vmatrix} \lambda+17 & 8 & 12 \\ 2 & \lambda+2 & 0 \\ -20 & -10 & \lambda+13 \end{vmatrix} \\ &= ((\lambda+17)(\lambda+2)(\lambda+13) - 240) - (-240(\lambda+2) + 16(\lambda+13)) \\ &= \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) = 0 \end{aligned}$$

Diagonalización de matrices

De hecho la representación de Jordan es un caso particular de cambio de variable, donde la matriz P que permite la diagonalización de la matriz A . La forma de la matriz P necesaria para la obtención de la representación canónica de Jordan se puede generalizar por una matriz A cuya forma es de tipo canónica controlador:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}$$

Como:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Para nuestro ejemplo la matriz P que permite la obtención de la forma canónica de Jordan es:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Cuya inversa es:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2.5 & 0.5 \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 1.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

De hecho:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 2.5 & 0.5 \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 1.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = A_J$$

En esta representación bajo la forma canónica de Jordan las matrices B y C serán:

$$B_J = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 & 2.5 & 0.5 \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 1.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$C_J = CP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Nota: Para que una representación de estado sea equivalente a otra obtenida por cambio de variable es necesario la transformación de todas las matrices que representan el sistema.

Ejercicios

1. Para los ejercicios del tema 2 obtener una representación en espacio de estado de las ecuaciones del modelo, utilizando la ecuación diferencial obtenida y otra utilizando el sistema de ecuaciones que representa el sistema.
2. Obtener la función o matriz de transferencia de los sistemas utilizados para el ejercicio 1.
3. Para los siguientes sistemas en representación de estado obtener la función de transferencia, la ecuación diferencial del sistema y la forma canónica de Jordan.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & -8 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0]$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0]$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -23 & -7 & -7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0]$$

Tema 4. Diagramas de Bloque

Introducción

Un diagrama de bloque es una simplificación, una representación gráfica de un sistema físico que ilustra las relaciones funcionales entre los componentes del sistema. Este nos permite evaluar las contribuciones individuales de los componentes del sistema.

Elementos de un diagrama de bloques

1. Bloques



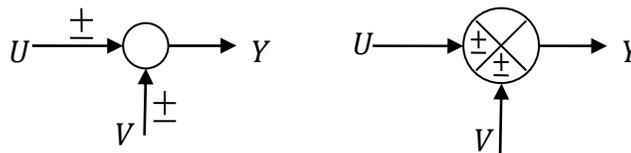
Es el elemento principal de un diagrama de bloques ya que representa los componentes del sistema. Es el elemento que contiene la relación entre la entrada y la salida del componente del sistema, ya sea con un nombre o directamente la función de transferencia del elemento.

2. Líneas



Son las que representan la trayectoria de las señales que transportan la información y energía. Dicho de otra manera indican la conexión de una variable entre diversos bloques. Se usan por lo general flechas para indicar el sentido de la señal.

3. Punto de suma

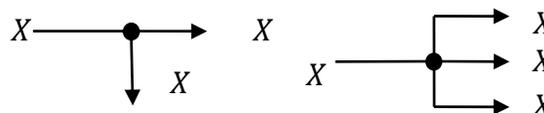


Este se representa por un círculo e indica que la salida es igual a la suma de las dos señales que entran, o la resta en caso de que aparezca el signo negativo:

$$Z = X \pm Y$$

Existen dos nomenclaturas posibles, ya sea con los signos al exterior, en cuyo caso la ausencia de signo indica una suma, o separando el círculo en segmentos mediante una X y asignando el signo dentro del segmento correspondiente.

4. Punto de ramificación o de reparto



Es el lugar donde la señal se separa para seguir dos o más trayectorias. En otras palabras indican que una variable se usará en varios bloques.

Ejemplos de diagrama de bloques

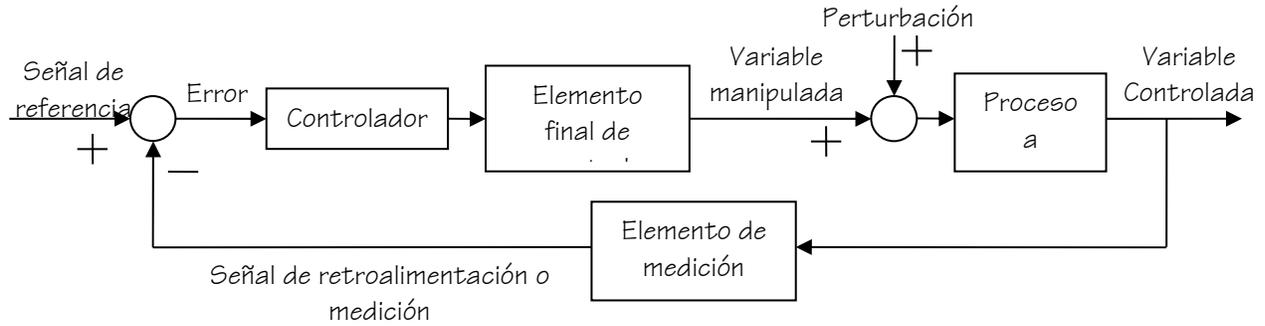


Diagrama de bloques típico de un sistema de control retroalimentado

El cual podría también presentar la forma siguiente:

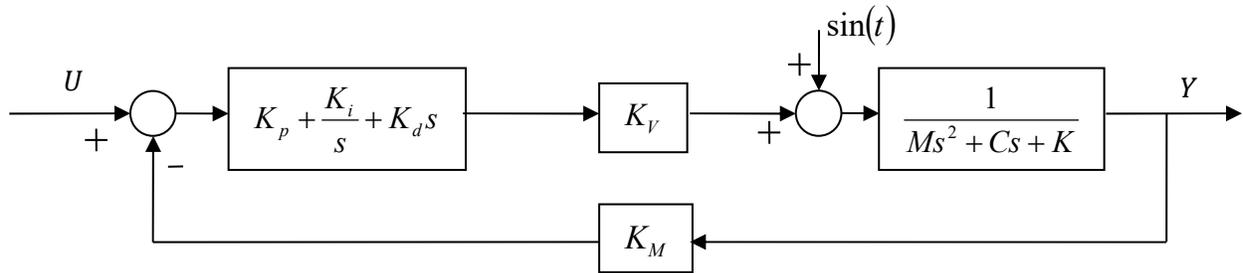
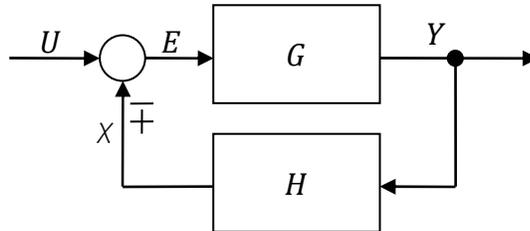


Diagrama de bloques típico de un sistema de control retroalimentado para un sistema mecánico

Forma canónica de un sistema de control retroalimentado



En este diagrama se pueden definir lo siguiente:

G: Función de transferencia directa

H: Función de transferencia de retroalimentación

GH: Función de transferencia de lazo abierto

$\frac{X}{U}$: Razón de retroalimentación primaria

$\frac{Y}{U}$: Función de transferencia de lazo cerrado

$\frac{E}{U}$: Razón o señal impulsora, o razón de error

En este caso la función de transferencia se puede obtener como sigue:

$$Y = E \times G \quad (1)$$

$$X = Y \times H \quad (2)$$

$$E = U \mp X \quad (3)$$

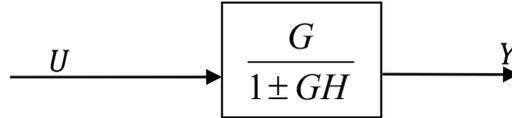
Sustituyendo (3) en (1)

$$Y = (U \mp X)G \quad (4)$$

Sustituyendo (2) en (4)

$$Y = (U \mp YH)G \quad (5) \quad Y(1 \pm GH) = UG \quad \frac{Y}{U} = \frac{G}{1 \pm GH}$$

El diagrama de bloque de este sistema puede transformarse entonces en:

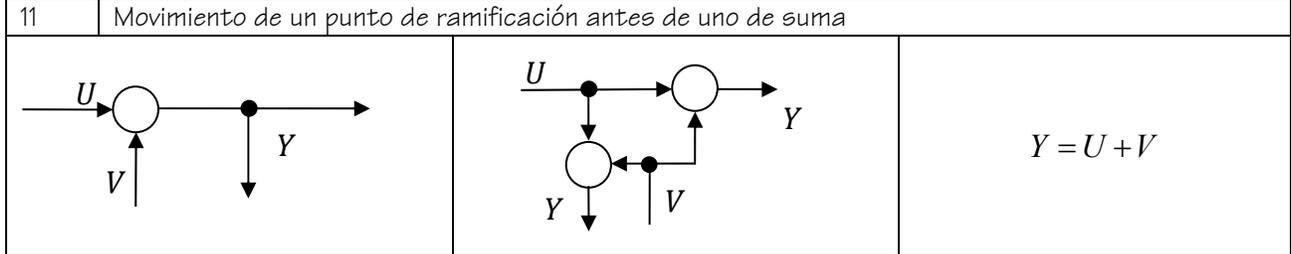
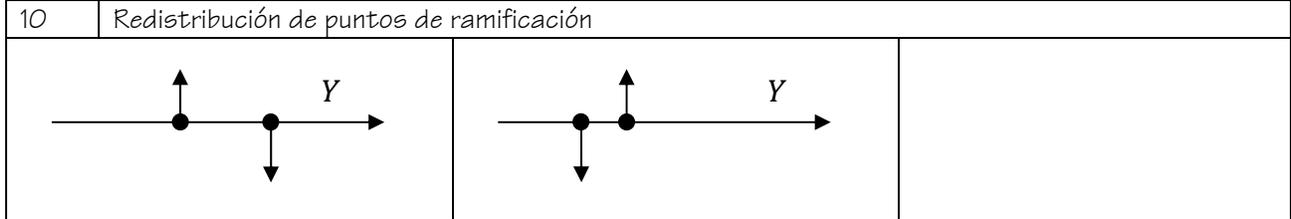
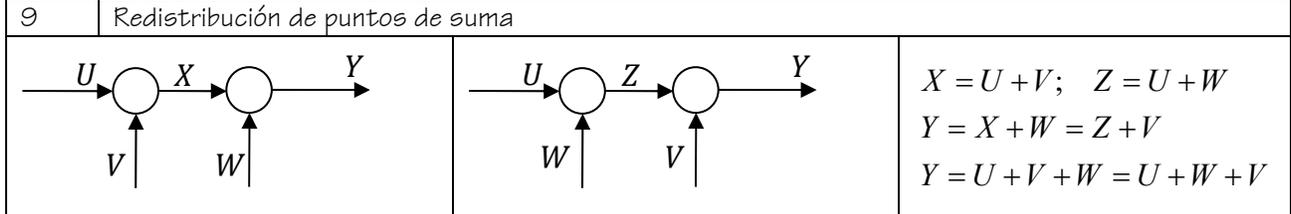
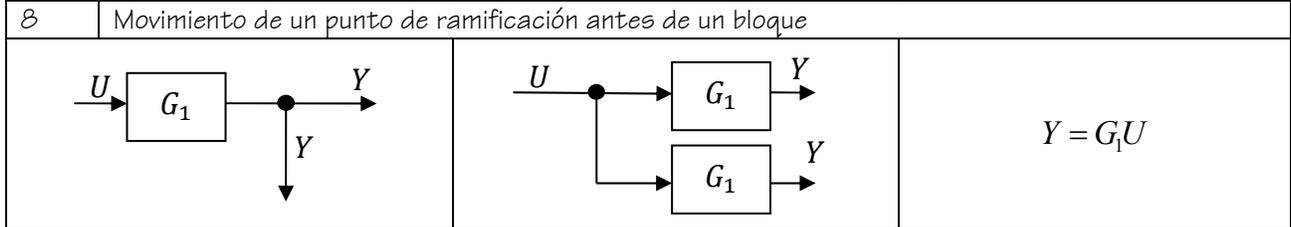
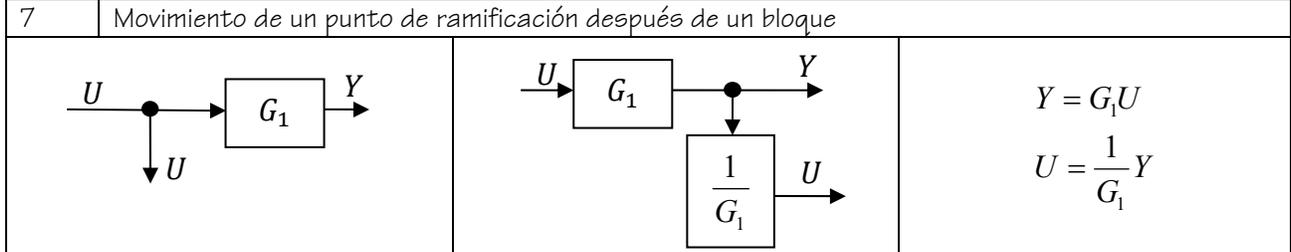
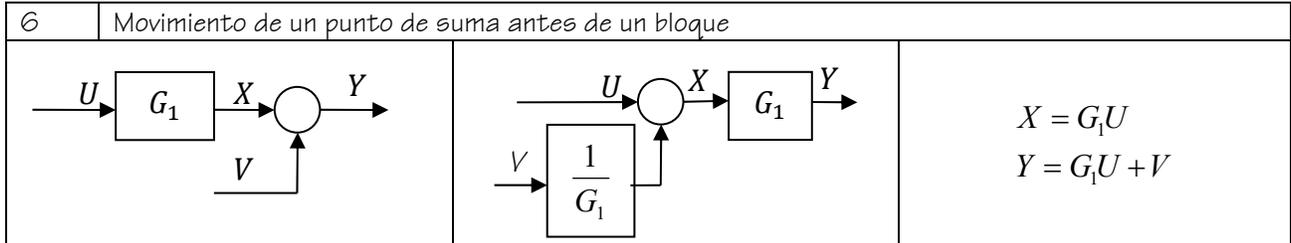
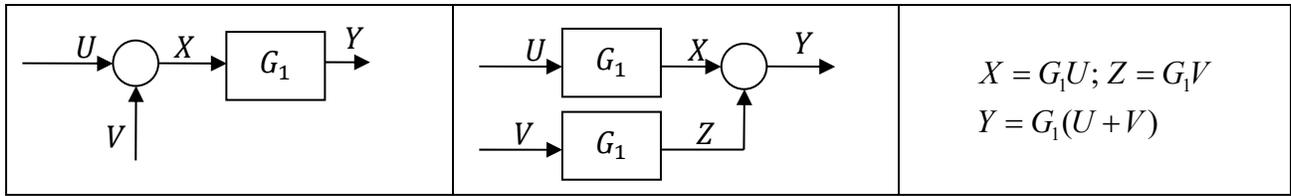


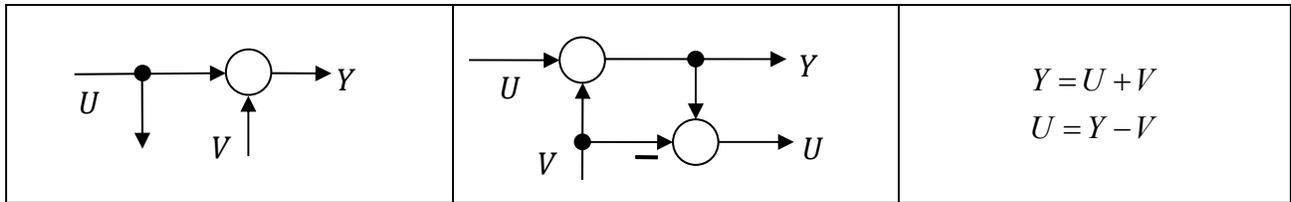
Álgebra de bloques

Los diagramas de bloques de sistemas de control complicados se pueden simplificar usando una serie de teoremas de transformación, las cuales se obtienen fácilmente por deducción del significado de los elementos.

Teoremas de transformación

Diagrama de Bloque	Diagrama de bloque equivalente	Ecuación
1 Combinación de bloques en cascada 		$V = G_1U; \quad Y = G_2V$ $Y = (G_1G_2)U$
2 Combinación de bloques en paralelo 		$V = G_1U; \quad W = G_2U$ $Y = V \pm W$ $Y = (G_1 + G_2)U$
3 Retroalimentación negativa 		$Z = G_2Y; \quad Y = G_1X$ $X = U - Z$ $Y = \frac{G_1}{1 + G_1G_2}U$
4 Retroalimentación positiva 		$Z = G_2Y; \quad Y = G_1X$ $X = U + Z$ $Y = \frac{G_1}{1 - G_1G_2}U$
5 Movimiento de un punto de suma después de un bloque		





Para el enunciado de estos teoremas de transformación se utiliza la notación siguiente:

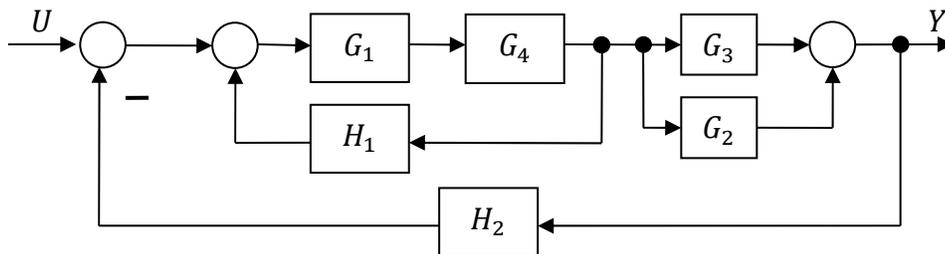
- G_i : Función de transferencia de un bloque cualquiera
- U, V, W : entradas del sistema
- Y : salida del sistema
- X, Z : otras señales o variables del sistema

Los movimientos 11 y 12 no son de uso común, ya que suelen complicar el diagrama más que simplificarlo.

Simplificación de diagramas de bloque

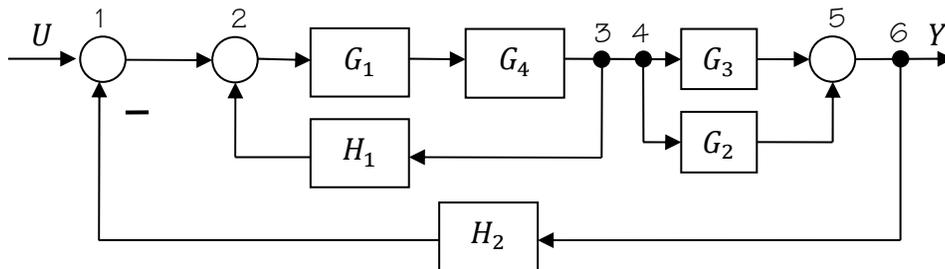
El objetivo es la reducción de un diagrama de bloques complejo a uno más sencillo.

Ejemplo 1:

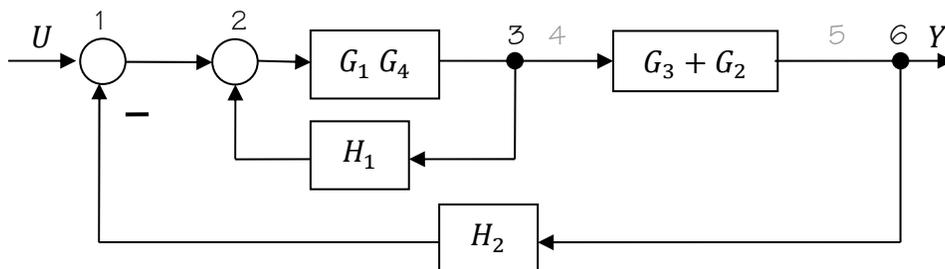


Para reducir el diagrama se pueden seguir los siguientes pasos:

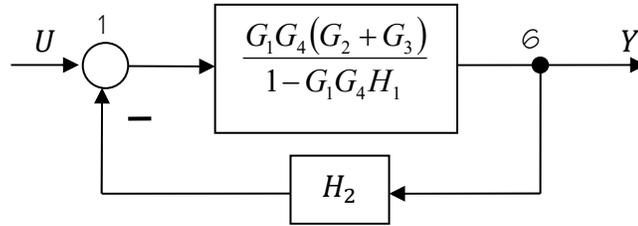
1. Numerar todos los puntos de suma y ramificación:



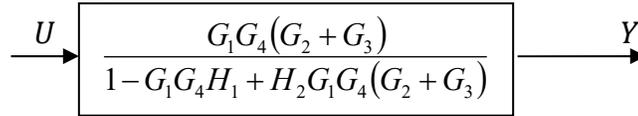
2. Reducir desde lo más interno, por ejemplo entre 2 y 3, y entre 4 y 5:



3. Llevar el diagrama a la forma canónica de un sistema de control retroalimentado:



4. Simplificar finalmente el diagrama a el de un sistema de lazo abierto

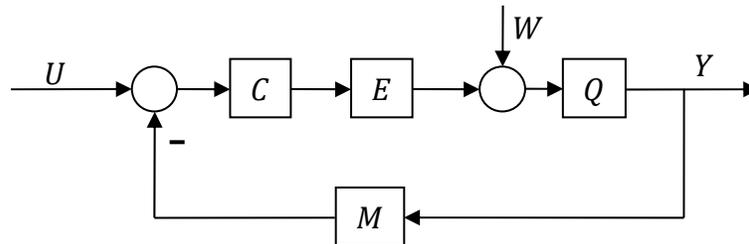


Diagramas de bloque de varias entradas

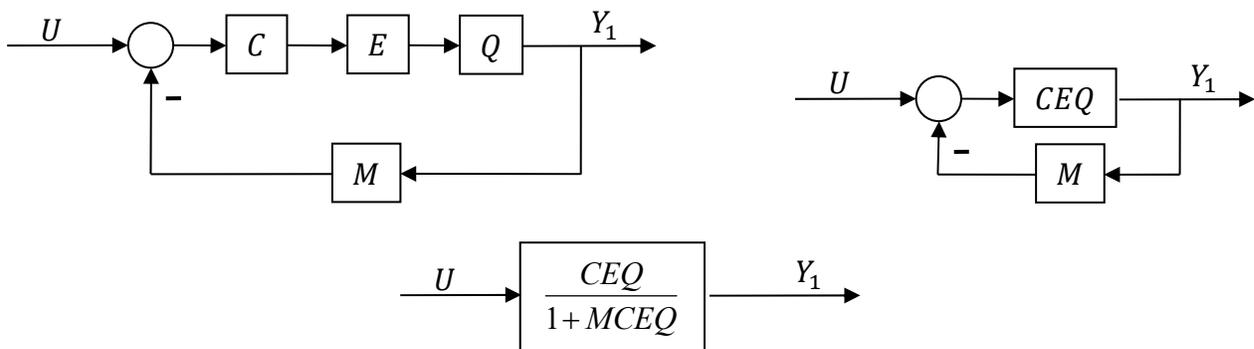
Cuando hay varias entradas se trata cada una de ellas en forma independiente de las otras y se procede según el procedimiento siguiente:

1. Igualar todas las entradas a cero excepto una.
2. Transformar el diagrama de bloque hasta obtenerlo en lazo abierto
3. Calcular la respuesta debido a la entrada actuando sola
4. Repetir los pasos 1, 2 y 3 ara cada una de las entradas restantes
5. La salida total es la suma de todas las entradas individuales

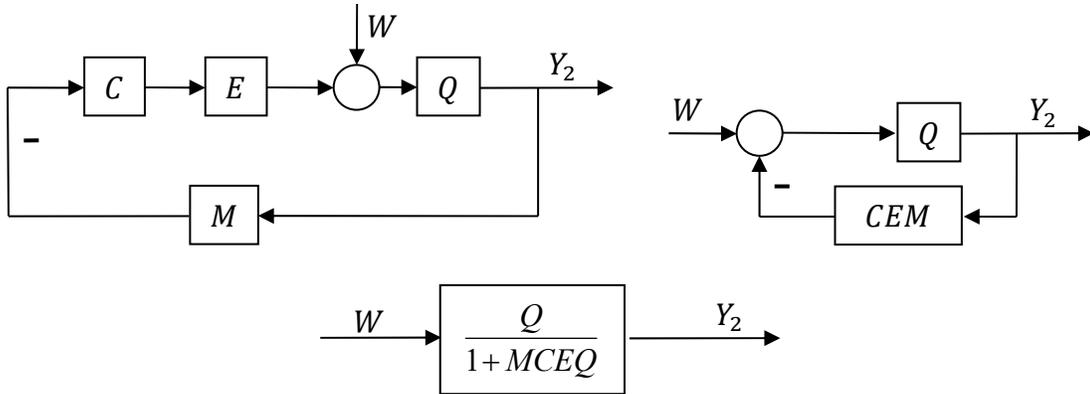
Ejemplo 2:



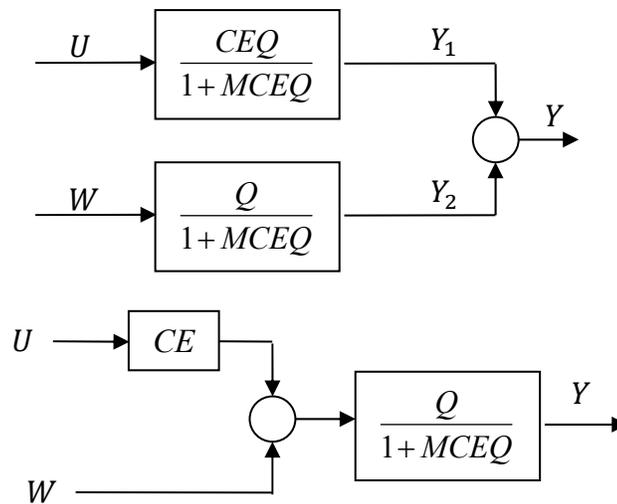
Igualemos primero $W = 0$ y reducimos el diagrama resultante:



Igualemos primero $U = 0$ y reducimos el diagrama resultante:



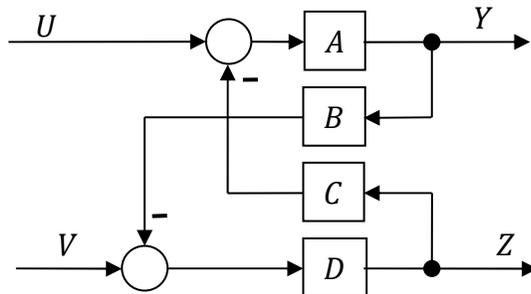
Finalmente el diagrama resultante será la suma de los dos diagramas obtenidos:



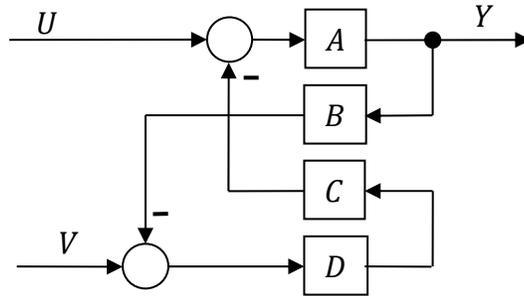
Entradas y salidas múltiples

En este caso primero se determina una de las salidas ignorando las otras y así sucesivamente para cada una de las salidas.

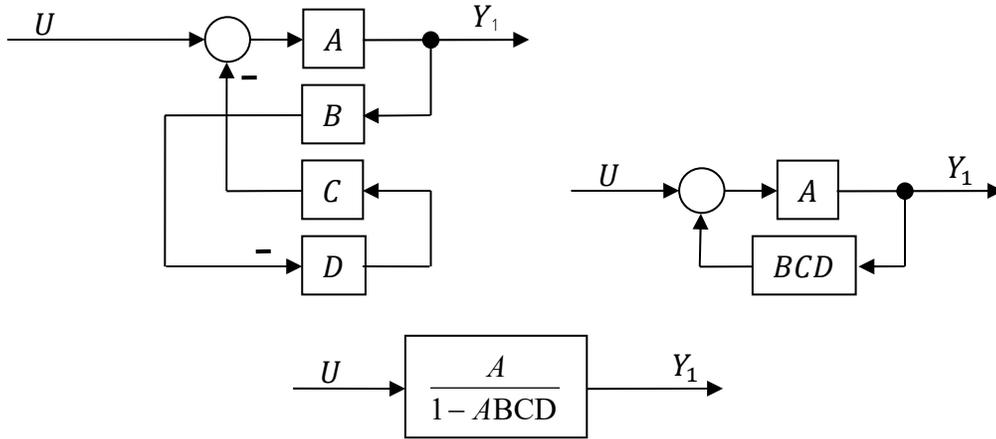
Ejemplo 3:



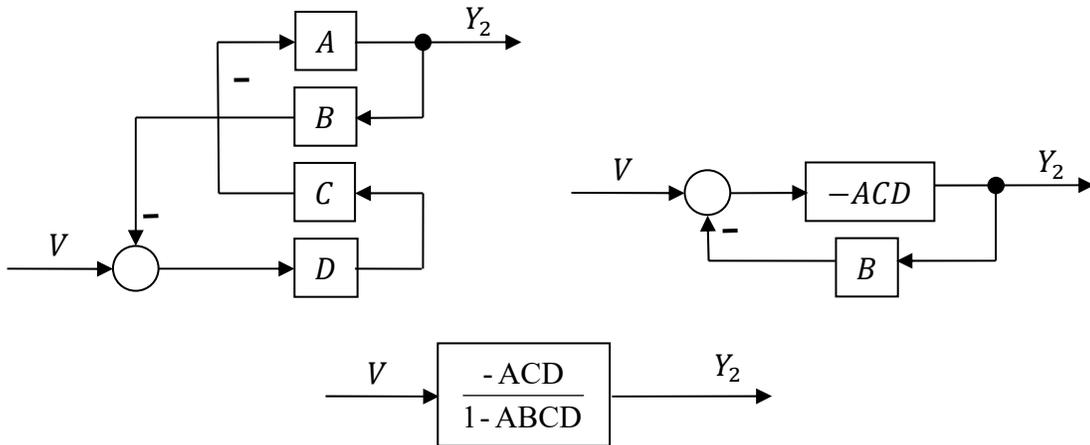
Primero determinamos a Y ignorando a Z:



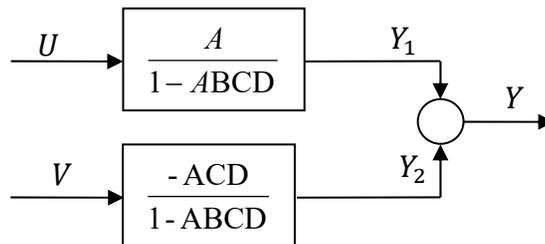
Iguualamos V a cero y determinamos la función de transferencia entre U y Y_1 :



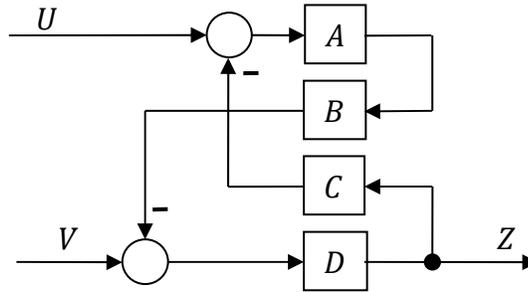
Iguualamos U a cero y determinamos la función de transferencia entre V y Y_2 :



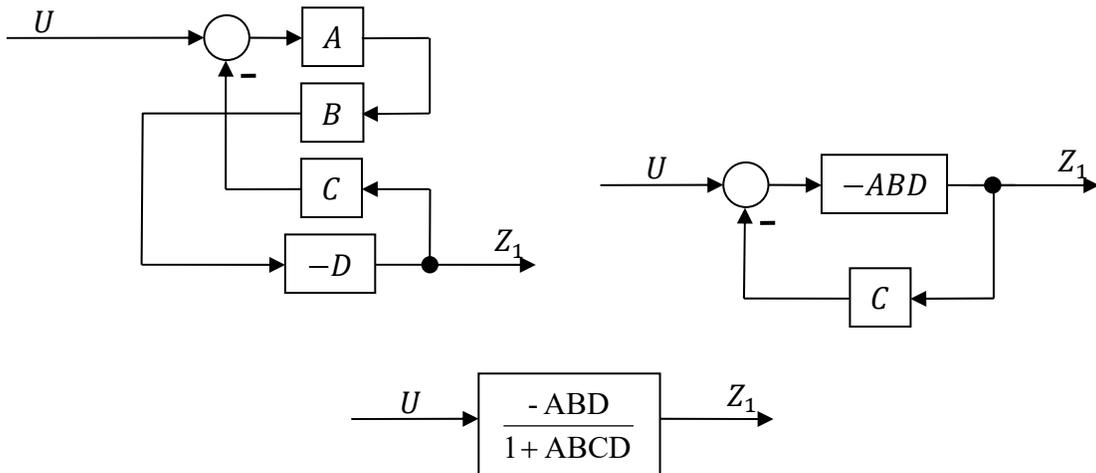
Para la salida Y tenemos entonces:



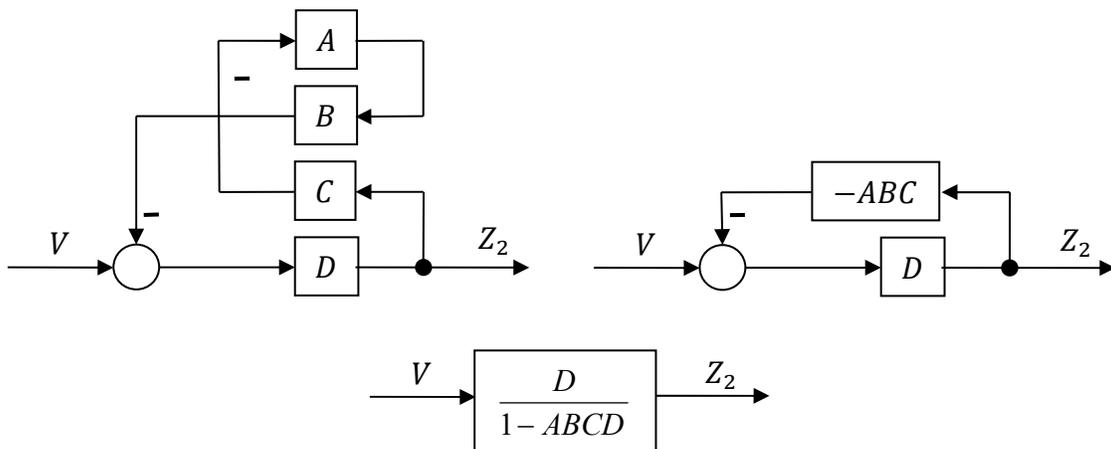
Segundo determinamos a Z ignorando a Y :



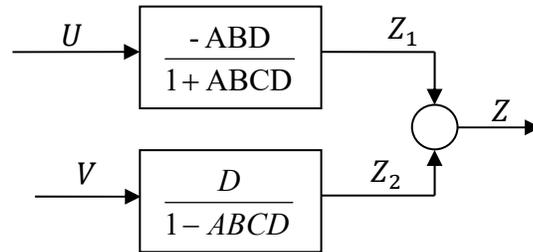
Igualamos V a cero y determinamos la función de transferencia entre U y Z_1 :



Igualamos U a cero y determinamos la función de transferencia entre V y Z_2 :



Para la salida Z tenemos entonces:



Construcción de un diagrama de bloques a partir de las funciones de transferencia de los elementos del sistema

El objetivo principal de un diagrama de bloques es representar un sistema físico gráficamente. Esta representación puede realizarse a partir de dos tipos de datos:

- El primero, que es el más común, es cuando se conocen los elementos que conforman el sistema de control, su conexión así como las funciones de transferencia de sus elementos. En este caso la construcción se hace haciendo el diagrama de bloques según la organización de los elementos y luego se coloca en cada bloque la función de transferencia correspondiente.
- La segunda forma, menos común pero no menos importante, es cuando se conocen las funciones de transferencia de los elementos sin conocer la forma como los elementos están conectados. En este caso se deberá realizar primero un diagrama de bloques preliminar, luego se deberán identificar en este los componentes principales por ejemplo: Proceso, controlador, elemento final de control y elemento de medición. Y finalmente volver a dibujar el diagrama en forma ordenada y reducirlo para obtener la función de transferencia si esto es necesario.

Ejemplo 4. Representación en diagramas de bloques a partir del esquema del sistema de control retroalimentado.

El esquema siguiente representa un sistema de control de nivel neumático, en donde se han colocado elementos de control cuyas funciones de transferencia son:

Transmisor de presión

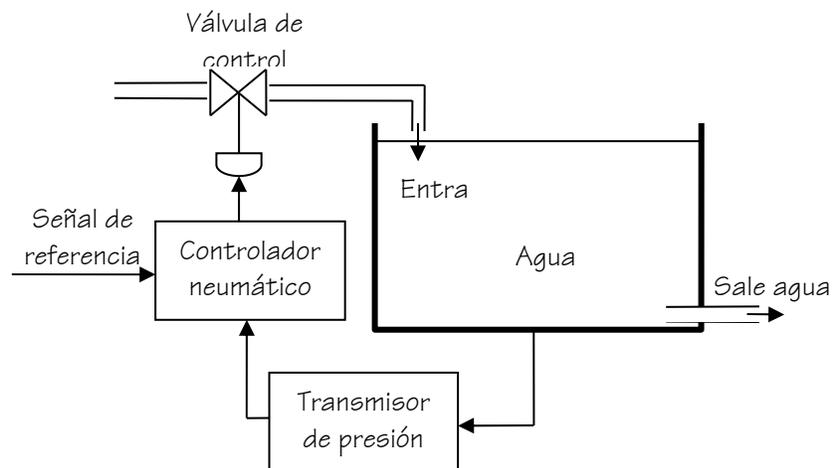
$$G(s) = \gamma_{H_2O} K_T$$

Controlador neumático:

$$G(s) = K_P$$

Válvula de control:

$$G(s) = K_V$$



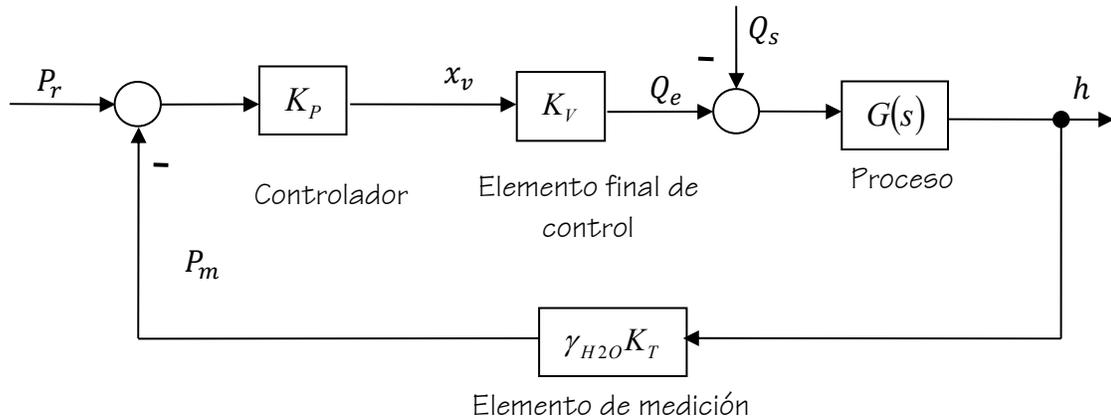
Sistema neumático de control de nivel

Para este sistema:

- Dibuje el diagrama de bloques completo.
- Determine la función de transferencia de lazo cerrado.
- Obtenga una representación en espacio de estado para el proceso y para el sistema completo.

Solución.

En este caso lo primero que debemos hacer es identificar los componentes, dibujar el diagrama de bloque típico de un sistema de control retroalimentado y colocar en cada bloque las funciones de transferencia.



Donde:

Q_e : caudal de entrada al tanque

Q_s : caudal de salida del tanque

h : nivel del tanque

P_m : presión medida que corresponde directamente al valor del nivel

P_r : presión de referencia, la deseada en el tanque, que tiene una correspondencia directa con el nivel deseado

x_v : posición del vástago de la válvula que regula el paso del flujo de entrada.

Observamos aquí que necesitamos conocer la función de transferencia del proceso para completar el diagrama de bloque.

Esta función de transferencia corresponde al de un sistema hidráulico, donde la entrada corresponde a la diferencia entre el caudal de entrada y el de salida ($Q_e - Q_s$), y la salida del sistema será el nivel (h).

Se tienen las siguientes ecuaciones:

$$Q_e - Q_s = CDP \quad (1) \qquad P = \gamma_{H_2O} h \quad (2)$$

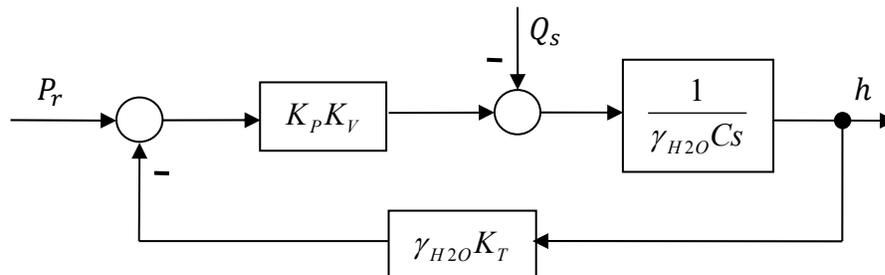
Con estas dos ecuaciones podemos obtener la ecuación de la dinámica del sistema que es:

$$Q_e - Q_s = \gamma_{H_2O} CDh$$

A partir de esta ecuación podemos obtener la función de transferencia:

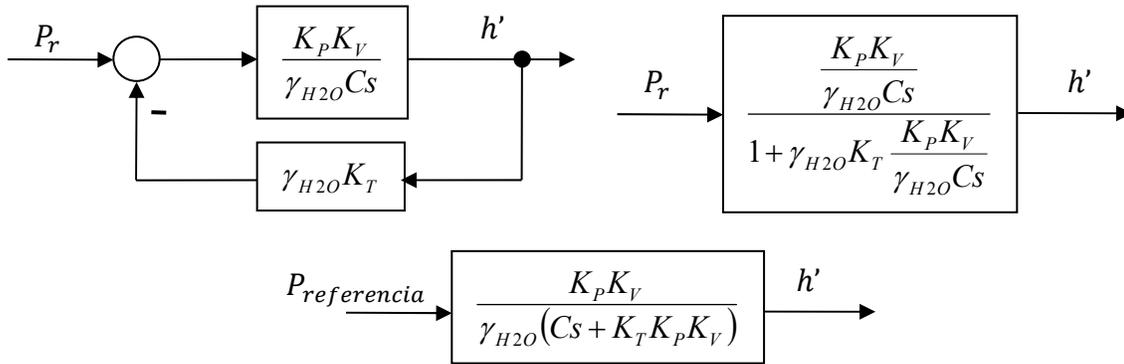
$$\frac{h(s)}{(Q_e - Q_s)(s)} = \frac{1}{\gamma_{H_2O} Cs}$$

El diagrama de bloques completo del sistema será entonces:

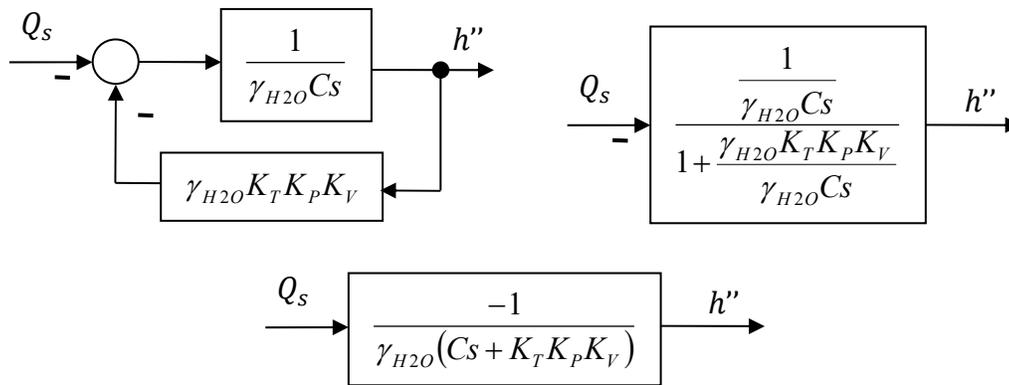


Para obtener la función de transferencia de lazo cerrado debemos reducir el diagrama de bloques del sistema, que es un diagrama de dos entradas (P_r, Q_s) y una salida (h).

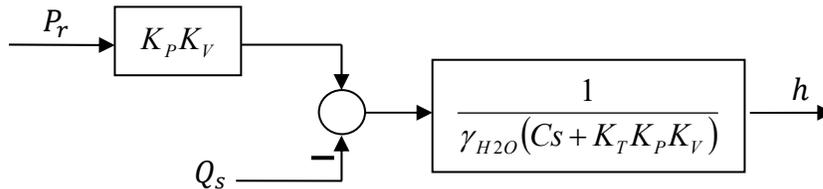
Igualemos primero Q_s a cero y obtenemos:



Igualemos luego P_r a cero y obtenemos:



El diagrama de bloques simplificado será:



Este diagrama de bloque se puede entonces expresar como una función de transferencia o ecuación en transformada de Laplace que relaciona la entrada con la salida:

$$h = \frac{K_p K_v}{\gamma_{H_2O} (C s + K_T K_p K_v)} P_r - \frac{1}{\gamma_{H_2O} (C s + K_T K_p K_v)} Q_s$$

Esta ecuación expresada en tiempo sería:

$$\gamma_{H_2O} C D h + \gamma_{H_2O} K_T K_p K_v h = K_p K_v P_r - Q_s$$

Como es una ecuación diferencial de primer orden podemos entonces definir un solo estado, en cuyo caso lo más sencillo es: $x = h$, y tenemos dos entradas: $u_1 = P_r$; $u_2 = Q_s$

Obtendremos entonces una ecuación de estado y una ecuación:

$$\dot{x} = \frac{-\gamma_{H_2O} K_T K_p K_v}{\gamma_{H_2O} C} x + \frac{K_p K_v}{\gamma_{H_2O} C} u_1 - \frac{1}{\gamma_{H_2O} C} u_2$$

$$y = x$$

Esta ecuación expresada en forma vectorial sería:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

Donde:

$$A = \frac{-\gamma_{H2O}K_T K_P K_V}{\gamma_{H2O}C}; \quad B = \begin{bmatrix} K_P K_V & -1 \\ \gamma_{H2O}C & \gamma_{H2O}C \end{bmatrix}; \quad C = 1$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 5: Representación del diagrama de bloques a partir de las ecuaciones de los componentes
 Las siguientes ecuaciones representan un sistema de control:

$$e = \frac{x-v}{2}; \quad v = \frac{C_1}{AD}e; \quad z = C_2u; \quad x = \frac{Kz - C_4y}{K - C_7C_3}; \quad q = C_5v; \quad y = \frac{C_6}{1+\tau D}(q - C_8w)$$

Donde:

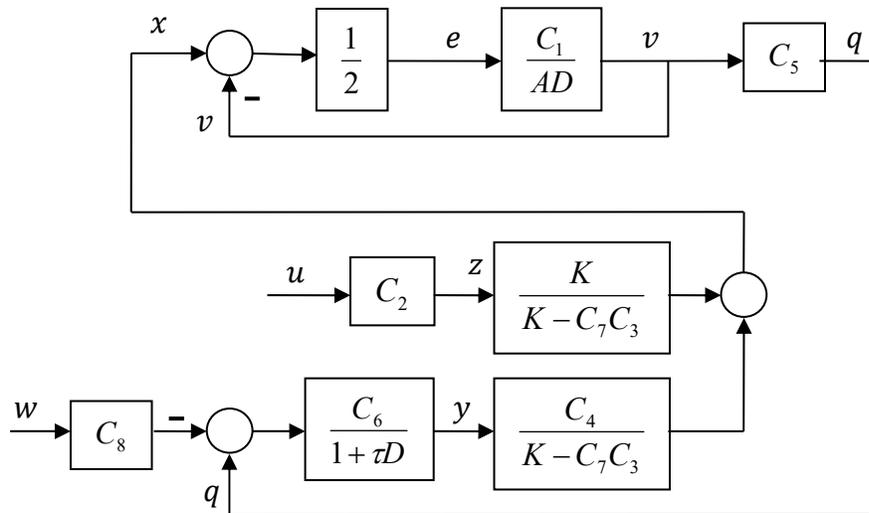
- e, q, v, w, x, z : son señales
- y : es la variable controlada
- u : es la señal de referencia
- D : es el operador diferencial (derivada respecto de t)
- $A, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, K$: son constantes (ganancias)

Determinar la función de transferencia de:

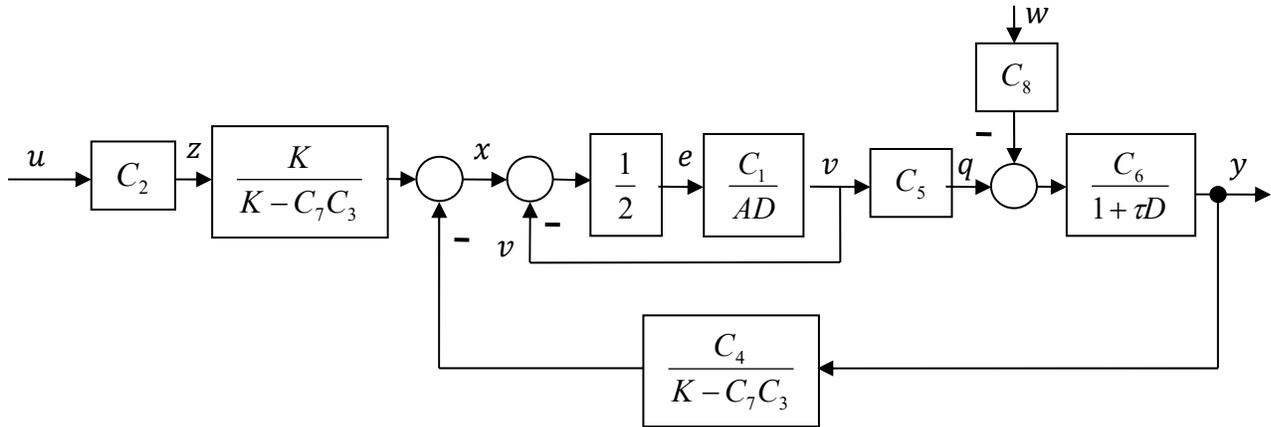
Identificar:

- | | |
|-----------------------------|-----------------------|
| • Proceso | • Variable manipulada |
| • Controlador | • Perturbación |
| • Elemento final de control | |
| • Elemento de medición | |

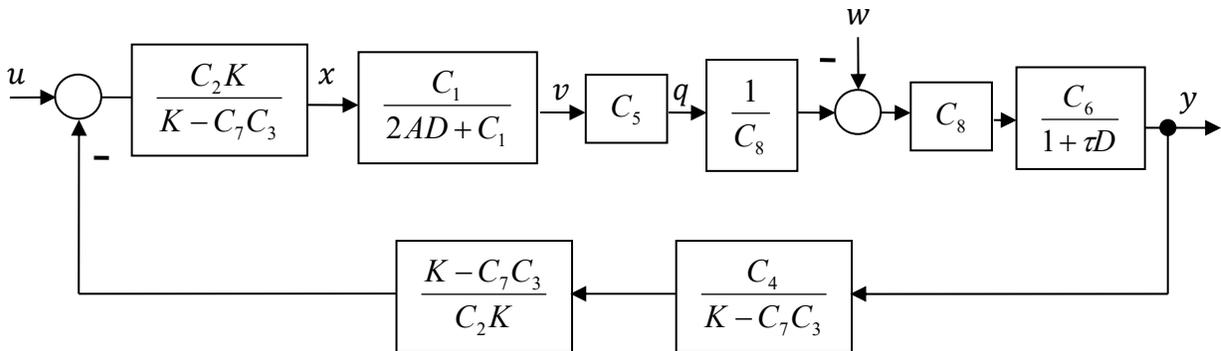
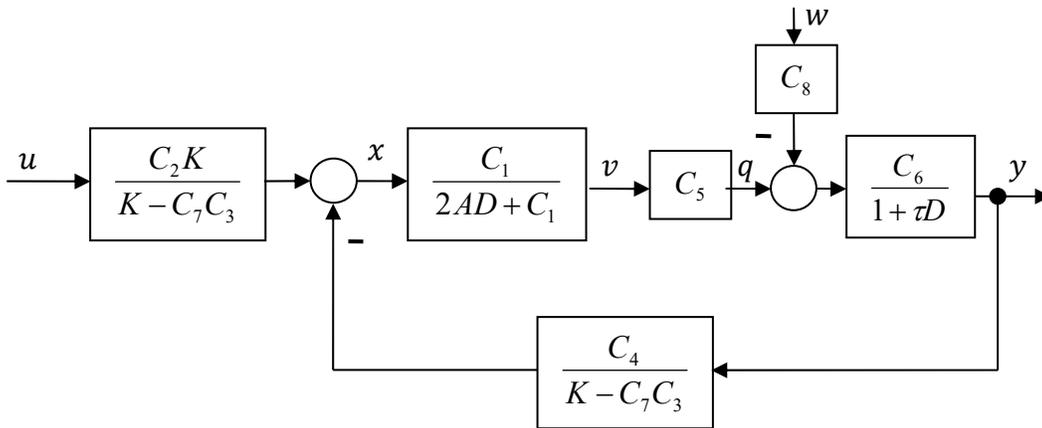
Solución: Primero se dibuja un diagrama de bloques preliminar:

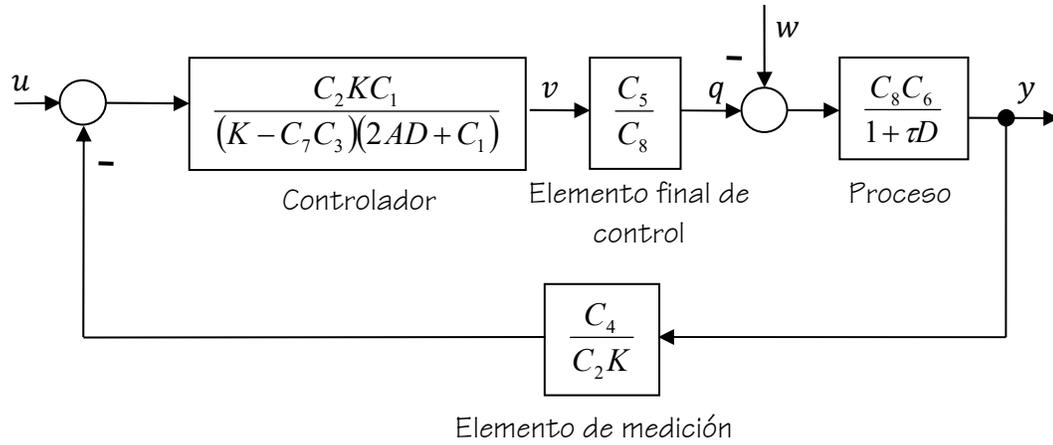


Luego se vuelve a dibujar el diagrama de bloques pero en una forma más ordenada que permita identificar más fácilmente los componentes, con u como entrada y y como salida:



Comparando con el diagrama de bloque típico de un sistema de control retroalimentado se pueden fácilmente identificar los componentes, se hacen determinan entonces las funciones de transferencia para cada uno de ellos:





De esta última forma del diagrama observamos entonces que la variable manipulada es q y que la perturbación es w .

Tema 5. Respuesta de Sistemas

Introducción

El modelo matemático dinámico de un sistema físico está representado por una ecuación diferencial. La ecuación diferencial suele ser en general de cierta complejidad, pero en muchos casos prácticos el modelo puede simplificarse y transformarse en una ecuación diferencial ordinaria lineal de la forma:

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-2} \ddot{y} + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = u$$

Donde:

La parte izquierda de la igualdad representa el sistema en si

y Representa la respuesta o salida del sistema

u Representa la entrada o excitación del sistema

El estudio de la respuesta de un sistema consiste entonces en determinar la respuesta (y) que produce un sistema ante una entrada (u) cualquiera. La respuesta de un sistema dependerá entonces de la ecuación y de la excitación que se le aplica. Existe una infinidad de posibilidades de ecuación y de excitación, por lo tanto una infinidad de respuestas posibles. Sin embargo ciertos tipos de sistemas y ciertos tipos de excitación pueden ser útiles para la comprensión del fenómeno de la respuesta de sistemas. Es por ello que el estudio de la respuesta de sistemas es introducido aquí con dos tipos de sistemas simples y tres tipos de entradas.

Tipos de excitación

La función excitación de un sistema puede tomar cualquier forma en la realidad, y por lo general no puede conocerse con anticipación ya que suele ser de carácter aleatorio. Sin embargo en muchos casos prácticos el estudio de algunas funciones de excitación específicas suele ser suficiente, ya que puede aportar conocimientos importantes sobre el sistema.

Las funciones de excitación más representativas son:

Entrada en escalón

En este caso la entrada sufre un cambio instantáneo y finito.

Esta se puede expresar de la siguiente forma:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ H & \text{para } t > 0 \end{cases}$$

O expresada en transformada de Laplace:

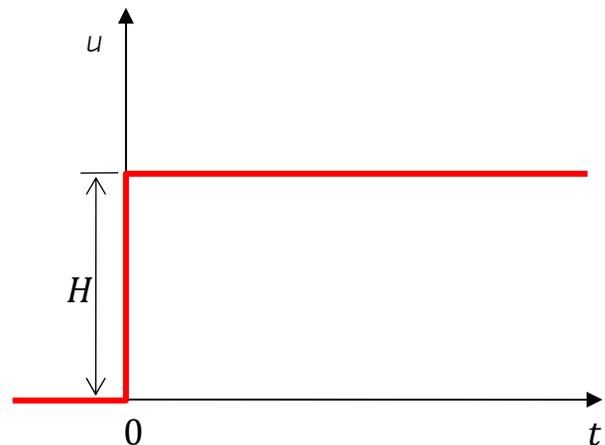
$$U(s) = \frac{H}{s}$$

Donde:

H : es una constante

Cuando H es igual a 1 se dice que la entrada es un escalón unitario.

Nótese que la función escalón queda indefinida para $t = 0$.



La función escalón es la más simple de las entradas que se le puede aplicar a un sistema, y por esto suele ser la más utilizada porque permite hacer análisis simples de la respuesta del sistema. Esta permite

principalmente definir la respuesta de sistemas en donde los cambios son instantáneos y que luego se mantienen en el tiempo, por ejemplo la respuesta de un termómetro clínico al ser introducido en un baño a una temperatura dada.

Entrada en rampa

En este caso la entrada varía linealmente con el tiempo.

Esta se puede expresar de la siguiente forma:

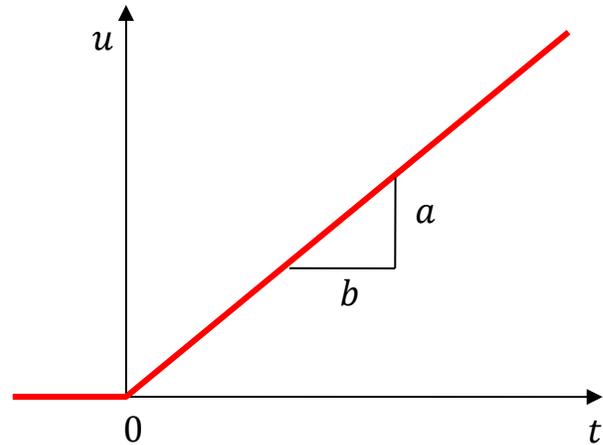
$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ Ht & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$

O expresada en transformada de Laplace:

$$U(s) = \frac{H}{s^2}$$

En este caso H define la pendiente de la rampa:

$$H = \frac{a}{b}$$



La función rampa suele ser también muy utilizada ya que permite el estudio de la respuesta de un sistema sometido a una entrada que varía constantemente. Por ejemplo la respuesta de un motor al aumentar progresivamente la inyección de combustible.

Entrada sinusoidal

En este caso la entrada cambia su magnitud de acuerdo a una función sinusoidal de amplitud constante $2H$ y frecuencia ω .

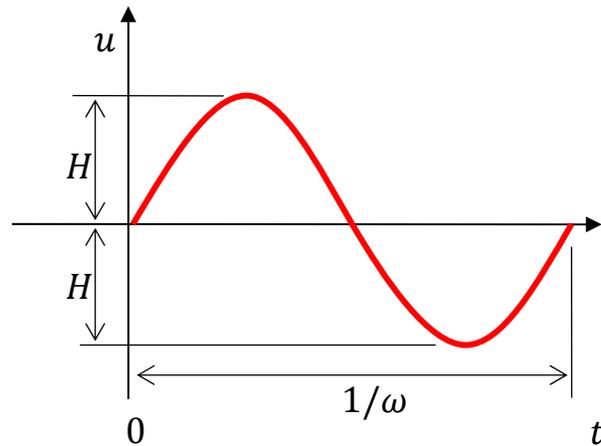
Esta se puede expresar de la siguiente forma:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ H \sin \omega t & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$

O expresada en transformada de Laplace:

$$U(s) = \frac{H\omega}{s^2 + \omega^2}$$

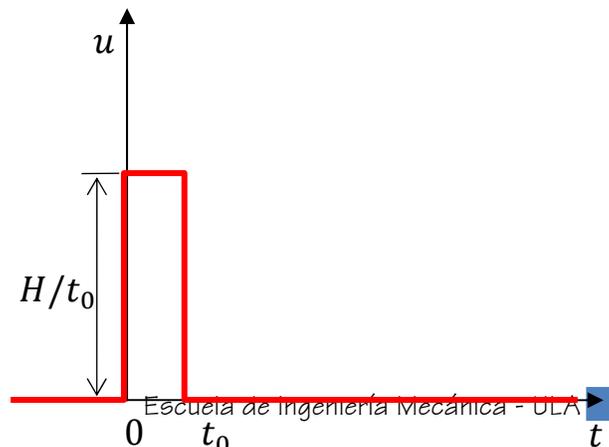
La función sinusoidal suele también ser muy utilizada para definir la respuesta de sistemas en donde la entrada suele variar muy rápidamente y oscilar entre valores máximos y mínimos. Por ejemplo la respuesta del sistema de amortiguación de un vehículo.



Entrada en pulso

En este caso la entrada sufre un cambio instantáneo y finito, pero de duración finita en el tiempo. Esta se puede considerar como una entrada en escalón de altura H/t_0 pero de duración finita en el tiempo, comenzando en el tiempo $t = 0$ y terminando en el tiempo $t = t_0$.

Esta se puede expresar de la siguiente forma:



$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0, t > t_0 \\ \frac{H}{t_0} & \text{para } 0 < t < t_0 \end{cases}$$

O expresada en transformada de Laplace:

$$U(s) = \frac{H}{t_0 s} (1 - e^{-st_0})$$

Donde H y t_0 son constantes.

Entrada en impulso

Cuando el tiempo t_0 tiende a cero entonces se trata de un caso especial de la función pulso denominada función impulso:

Esta se puede expresar de la siguiente forma:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0, t > t_0 \\ \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{H}{t_0} & \text{para } 0 < t < t_0 \end{cases}$$

O expresada en transformada de Laplace:

$$U(s) = H$$

En este caso como la altura de la función impulso es igual a H/t_0 y la duración es t_0 entonces el área bajo la curva será igual a H . Cuando la el área de la función impulso es igual a la unidad entonces esta función recibe el nombre de impulso unitario o delta de Dirac. Esta se designa comúnmente como:

$$\delta(t - t_0)$$

Y cumple las siguientes condiciones:

$$\delta(t - t_0) = 0 \text{ para } t \neq t_0$$

$$\delta(t - t_0) = \infty \text{ para } t = t_0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$$

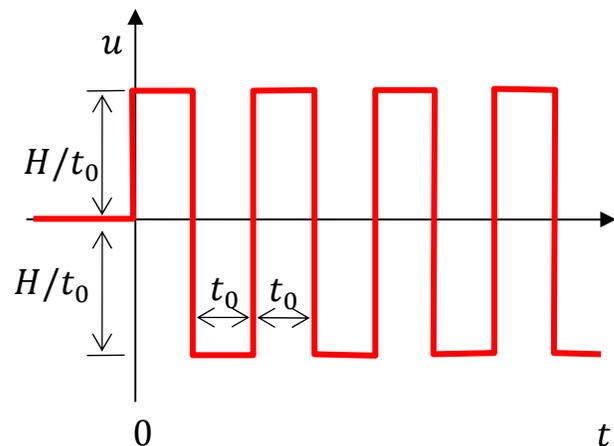
Se debe notar que un impulso de magnitud infinita y duración cero es un término netamente matemático que no existe en la realidad. Sin embargo, cuando la magnitud de un pulso es muy grande y su duración muy pequeña, entonces el pulso de entrada se puede aproximar a una función impulso que es más sencilla de tratar matemáticamente.

La función impulso unitario es muy utilizada para el estudio de respuesta de sistemas ya que permite entre otras cosas estudiar la respuesta de sistemas en presencia de una entrada discontinua, como el estudio de impactos por ejemplo.

Entrada en onda cuadrada

La entrada en onda cuadrada se puede considerar como una serie de pulsos sucesivos con signos alternados.

Esta se puede expresar de la siguiente forma:



$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ \frac{H}{t_0} & \text{para } 0 < t < t_0 \\ -\frac{H}{t_0} & \text{para } t_0 < t < 2t_0 \\ \vdots & \end{cases}$$

Esta función suele ser muy utilizada para definir la respuesta de sistemas en donde la entrada varía muy rápidamente y oscilar entre valores máximos y mínimos. Por ejemplo la respuesta de sistemas electrónicos y de audio. El objetivo de esta función de entrada es muy similar al de la función sinusoidal pero permite observar más fácilmente los resultados obtenidos siendo su cómputo más complejo por tratarse de una función discontinua.

Respuestas de sistemas de primer y segundo orden

Los modelos matemáticos de sistemas físicos lineales (o linealizados) se pueden clasificar según el orden de la ecuación diferencial que los representa, es así como se puede hablar de los sistemas de primer orden, los sistemas de segundo orden y los sistemas de orden superior.

La respuesta de un sistema corresponde a la solución de la ecuación diferencial del modelo que lo representa, la cual consta de dos partes:

- Una respuesta transitoria, correspondiente a la solución transitoria (homogénea) de la ecuación diferencial y que representa la transición entre el estado inicial del sistema y su estado una vez absorbido por completo el efecto de la entrada. Esta influye en un período de tiempo corto después de aplicada la entrada.
- Una respuesta en estado estable, correspondiente a la solución en estado estable (particular) de la ecuación diferencial y que representa la respuesta del sistema para un tiempo infinito después de la aplicación de una entrada cualquiera, momento en el cual se puede considerar que el sistema a absorbido por completo el efecto de la entrada aplicada.

En casos prácticos se considera que un sistema se encuentra en estado estable cuando la respuesta transitoria es despreciable respecto de la respuesta en estado estable. Cuando un sistema tiene una alta velocidad de respuesta la parte transitoria será de muy corta duración mientras que si posee una velocidad de respuesta lenta la parte transitoria puede extenderse por un tiempo relativamente largo.

Se estudiará en esta parte la respuesta de sistemas de primer y segundo orden sometidos a entradas en escalón, en rampa y en sinusoidales. Estas respuestas permiten tener una comprensión clara de la respuesta de sistemas en general.

Respuesta de sistemas de Primer Orden

Los sistemas de primer orden son aquellos cuyo modelo matemático responde a una ecuación diferencial de primer orden de la forma:

$$\tau Dy + y = Ku$$

Donde:

y : Representa la salida o respuesta del sistema

u : Representa la función entrada al sistema

τ : Se denomina constante de tiempo del sistema.

K : Ganancia en estado estacionario o ganancia del sistema. Este es un parámetro muy importante que interviene en la respuesta del sistema y cuyo valor permite en muchos casos ajustar el tipo de

variable de entrada y salida (por ejemplo fuerza con desplazamiento). Cuando la variable de entrada es del mismo tipo que la de salida su valor suele ser 1 (por ejemplo temperatura a la entrada y salida).

Respuesta de un sistema de primer orden a una entrada en escalón

En este caso la entrada para $t > 0$ será: $u = H$, luego la ecuación diferencial del sistema se puede escribir como:

$$\tau Dy + y = KH$$

La respuesta de este sistema corresponde entonces a la solución de la ecuación diferencial, la cual se obtiene en dos partes:

Respuesta en estado transitorio o también llamada solución homogénea

Para obtener esta parte de la respuesta se iguala la ecuación diferencial a cero, dicho de otra manera se considera que la entrada es cero:

$$\tau Dy + y = 0$$

Y se obtiene la ecuación característica despejando la respuesta del sistema e igualando este a cero:

$$\tau D + 1 = 0$$

Se obtienen las raíces de la ecuación característica:

$$D = \frac{-1}{\tau}$$

Luego la solución homogénea depende de la forma de las raíces de la ecuación característica, que en este caso por ser una sola raíz real, la solución homogénea será de la forma:

$$y_T = Ce^{-t/\tau}$$

Donde C es una constante que depende de las condiciones iniciales del sistema.

Respuesta en estado estable o también llamada solución particular

Para obtener la solución particular de una ecuación diferencial se supone que la solución será similar a la entrada:

$$y_{Eas} = A$$

Donde A es una constante.

Se obtiene la derivada de la solución supuesta:

$$Dy_{Eas} = 0$$

Se sustituye la solución supuesta y su derivada en la ecuación original, para obtener el valor final de la solución particular:

$$A = KH$$

$$y_E = KH$$

Respuesta completa

La respuesta completa del sistema será entonces la suma de la respuesta transitoria más la respuesta en estado estable:

$$y = y_T + y_E$$

$$y = Ce^{-t/\tau} + KH$$

Falta entonces obtener el valor de C con las condiciones iniciales. Para un sistema de primer orden se requiere de una sola condición inicial, la cual depende del estado en que se encuentra el sistema en el

momento inicial en que se aplica la entrada ($t = 0$). En este caso tomaremos por simplicidad y sin pérdida de generalidad las condiciones iniciales siguientes:

$$t = 0 \Rightarrow y_0 = 0$$

Para determinar el valor de la constante C se debe sustituir el valor de las condiciones iniciales y del tiempo en el cual estas se aplican en la ecuación de la respuesta del sistema:

$$0 = Ce^{-0/\tau} + KH$$

$$C = -KH$$

Finalmente la respuesta del sistema será:

$$y = -KHe^{-t/\tau} + KH$$

Con esta ecuación que define la respuesta del sistema se puede determinar el valor de la respuesta y para cualquier instante de tiempo, es así como por ejemplo, y en el caso que la ganancia $K = 1$:

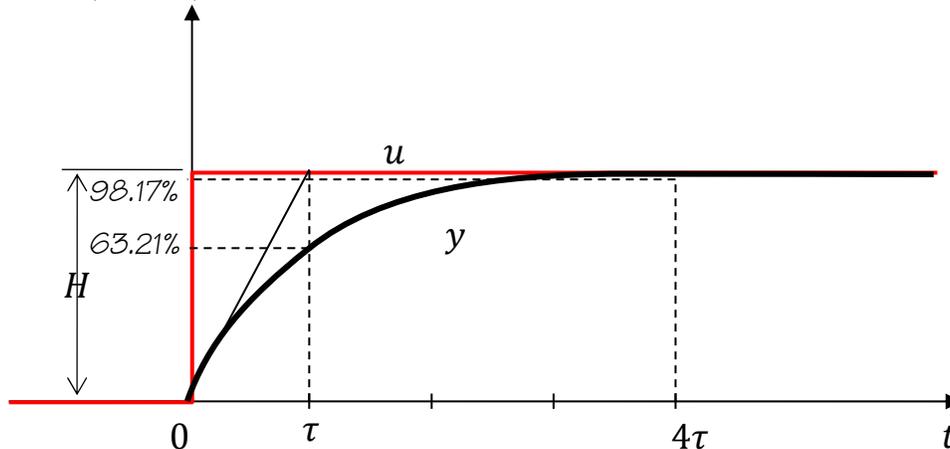
Para $t = \tau$

$$y = H(1 - e^{-\tau/\tau}) = 0.6321H$$

Para $t = 4\tau$

$$y = H(1 - e^{-4\tau/\tau}) = 0.9817H$$

Esta respuesta se puede representar gráficamente como sigue:



A partir de estos resultados se define la constante de tiempo (τ) como el tiempo requerido para que la respuesta de un sistema de primer orden alcance el 63.21% del valor del escalón al cual fue sometido.

Otra definición de la constante de tiempo es el tiempo necesario para que un sistema de primer orden sometido a una entrada en escalón alcance su valor en estado estable si mantuviera la velocidad de respuesta inicial.

Esta constante de tiempo es entonces un parámetro que define la velocidad de respuesta de los sistemas de primer orden, mientras más grande es la constante de tiempo más lenta será la respuesta del sistema.

Se considera que un sistema de primer orden se encuentra en estado estable cuando el tiempo transcurrido a partir de la aplicación de la entrada es superior a 4τ .

Respuesta de un sistema de primer orden a una entrada en rampa

En este caso la entrada para $t > 0$ será: $u = Ht$, luego la ecuación diferencial del sistema se puede escribir como:

$$\tau Dy + y = KHt$$

La respuesta de este sistema corresponde entonces a la solución de la ecuación diferencial, la cual se obtiene en dos partes:

Respuesta en estado transitorio o también llamada solución homogénea

Para obtener esta parte de la respuesta se iguala la ecuación diferencial a cero, dicho de otra manera se considera que la entrada es cero:

$$\tau Dy + y = 0$$

Y se obtiene la ecuación característica despejando la respuesta del sistema e igualando este a cero:

$$\tau D + 1 = 0$$

Se obtienen las raíces de la ecuación característica:

$$D = \frac{-1}{\tau}$$

Luego la solución homogénea depende de la forma de las raíces de la ecuación característica, que en este caso por ser una sola raíz real, la solución homogénea será de la forma:

$$y_T = Ce^{-t/\tau}$$

Donde C es una constante que depende de las condiciones iniciales del sistema.

Respuesta en estado estable o también llamada solución particular

Para obtener la solución particular de una ecuación diferencial se supone que la solución será similar a la entrada:

$$y_{Eas} = A + Bt$$

Donde A es una constante.

Se obtiene la derivada de la solución supuesta:

$$Dy_{Eas} = B$$

Se sustituye la solución supuesta y su derivada en la ecuación original, para obtener el valor final de la solución particular:

$$\tau B + A + Bt = KHt$$

Se obtienen dos ecuaciones, una con los términos con t y otra con los términos independientes:

$$B = KH$$

$$\tau B + A = 0 \Leftrightarrow A = -\tau KH$$

$$y_E = -\tau KH + KHt$$

Respuesta completa

La respuesta completa del sistema será entonces la suma de la respuesta transitoria más la respuesta en estado estable:

$$y = y_T + y_E$$

$$y = Ce^{-t/\tau} - \tau KH + KHt$$

Falta entonces obtener el valor de C con las condiciones iniciales. En este caso tomaremos por simplicidad y sin pérdida de generalidad las condiciones iniciales siguientes:

$$t = 0 \Rightarrow y_0 = 0$$

Para determinar el valor de la constante C se debe sustituir el valor de las condiciones iniciales y del tiempo en el cual estas se aplican en la ecuación de la respuesta del sistema:

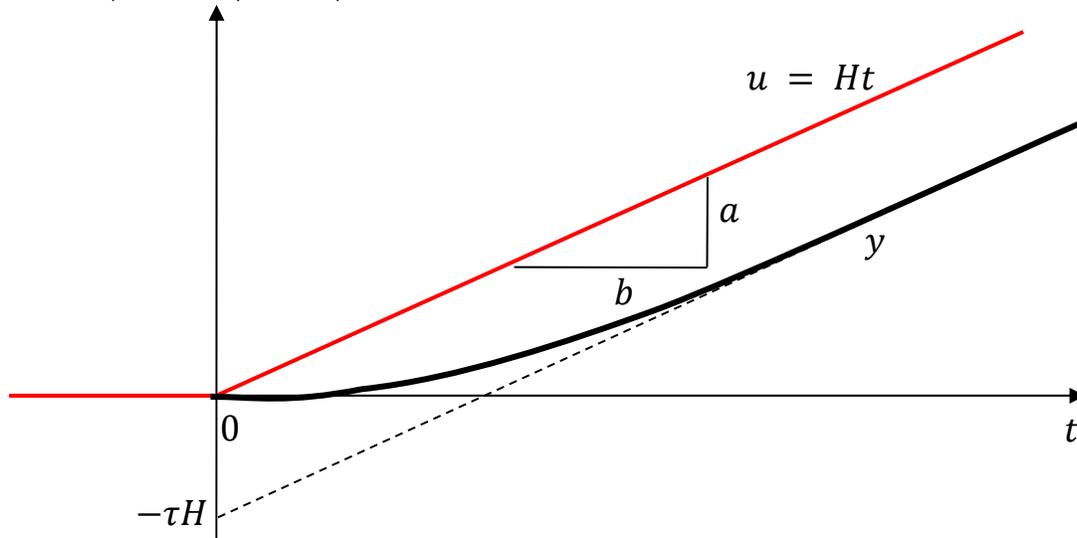
$$0 = Ce^{-0/\tau} - \tau KH + KH0$$

$$C = \tau KH$$

Finalmente la respuesta del sistema será:

$$y = \tau K H e^{-t/\tau} - \tau KH + KHt$$

Esta respuesta se puede representar gráficamente, en el caso de $K = 1$, como sigue:



En este caso la respuesta en estado estable tiende a una recta paralela a la entrada pero desfasada en un valor $-\tau H$.

Respuesta de un sistema de primer orden a una entrada sinusoidal

En este caso la entrada para $t > 0$ será: $u = H \sin \omega t$, luego la ecuación diferencial del sistema se puede escribir como:

$$\tau Dy + y = KH \sin \omega t$$

Consideraremos aquí el caso en que $K = 1$ solamente, para mayor simplicidad:

$$\tau Dy + y = H \sin \omega t$$

La respuesta de este sistema corresponde entonces a la solución de la ecuación diferencial, la cual se obtiene en dos partes:

Respuesta en estado transitorio o también llamada solución homogénea

Para obtener esta parte de la respuesta se iguala la ecuación diferencial a cero, dicho de otra manera se considera que la entrada es cero:

$$\tau Dy + y = 0$$

Y se obtiene la ecuación característica despejando la respuesta del sistema e igualando este a cero:

$$\tau D + 1 = 0$$

Se obtienen las raíces de la ecuación característica:

$$D = \frac{-1}{\tau}$$

Luego la solución homogénea depende de la forma de las raíces de la ecuación característica, que en este caso por ser una sola raíz real, la solución homogénea será de la forma:

$$y_T = C e^{-t/\tau}$$

Donde C es una constante que depende de las condiciones iniciales del sistema.

Respuesta en estado estable o también llamada solución particular

Para obtener la solución particular de una ecuación diferencial se supone que la solución será similar a la entrada:

$$y_{Eas} = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

Donde A es una constante.

Se obtiene la derivada de la solución supuesta:

$$Dy_{Eas} = A\omega \cos \omega t - B\omega \sin \omega t$$

Se sustituye la solución supuesta y su derivada en la ecuación original, para obtener el valor final de la solución particular:

$$\tau(A\omega \cos \omega t - B\omega \sin \omega t) + A \sin \omega t + B \cos \omega t = H \sin \omega t$$

Se obtienen dos ecuaciones, una con los términos con $\sin \omega t$ y otra con los términos con $\cos \omega t$:

$$\begin{aligned} -\tau B\omega + A &= H & \Leftrightarrow & \quad A = \frac{H}{1 + \tau^2 \omega^2} \\ \tau A\omega + B &= 0 & & \quad B = \frac{-\tau\omega H}{1 + \tau^2 \omega^2} \end{aligned}$$

La solución particular será entonces:

$$y_E = \frac{H}{1 + \tau^2 \omega^2} \sin \omega t + \frac{-\tau\omega H}{1 + \tau^2 \omega^2} \cos \omega t$$

Respuesta completa

La respuesta completa del sistema será entonces la suma de la respuesta transitoria más la respuesta en estado estable:

$$\begin{aligned} y &= y_T + y_E \\ y &= C e^{-t/\tau} + \frac{H}{1 + \tau^2 \omega^2} \sin \omega t + \frac{-\tau\omega H}{1 + \tau^2 \omega^2} \cos \omega t \end{aligned}$$

Falta entonces obtener el valor de C con las condiciones iniciales. En este caso tomaremos por simplicidad y sin pérdida de generalidad las condiciones iniciales siguientes:

$$t = 0 \Rightarrow y_0 = 0$$

Para determinar el valor de la constante C se debe sustituir el valor de las condiciones iniciales y del tiempo en el cual estas se aplican en la ecuación de la respuesta del sistema:

$$\begin{aligned} 0 &= C e^{-0/\tau} + \frac{H}{1 + \tau^2 \omega^2} \sin \omega 0 + \frac{-\tau\omega H}{1 + \tau^2 \omega^2} \cos \omega 0 \\ C &= \frac{\tau\omega H}{1 + \tau^2 \omega^2} \end{aligned}$$

Finalmente la respuesta del sistema será:

$$y = \frac{\tau\omega H}{1 + \tau^2 \omega^2} e^{-t/\tau} + \frac{H}{1 + \tau^2 \omega^2} \sin \omega t - \frac{\tau\omega H}{1 + \tau^2 \omega^2} \cos \omega t$$

Para tener una forma de respuesta más fácil de representar gráficamente utilizaremos la relación trigonométrica:

$$M \sin \omega t + N \cos \omega t = (M^2 + N^2)^{1/2} \sin(\omega t + \tan^{-1}(N/M))$$

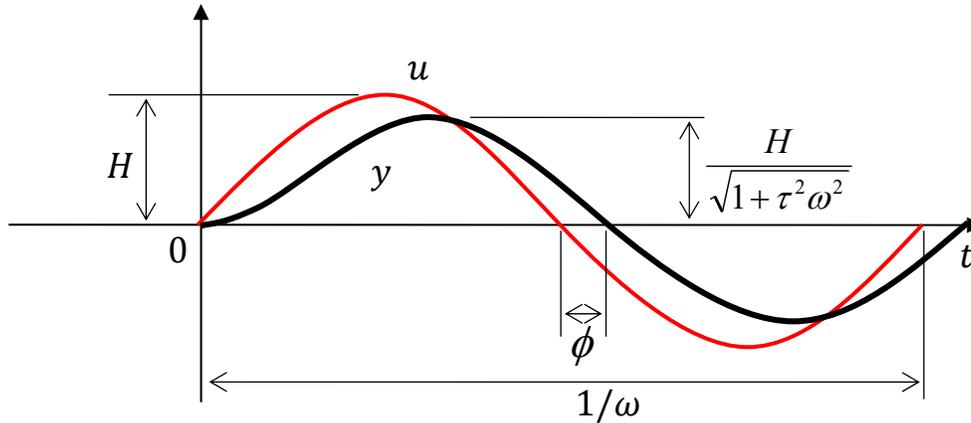
Obtenemos entonces que la solución en estado estable se puede expresar como:

$$y = \frac{\tau\omega H}{1 + \tau^2\omega^2} e^{-t/\tau} + \frac{H}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}} \sin(\omega t + \phi)$$

Donde:

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\left(\frac{-\tau\omega H}{1 + \tau^2\omega^2} \right)}{\left(\frac{H}{1 + \tau^2\omega^2} \right)} \right) = \tan^{-1}(\tau\omega)$$

Esta respuesta se puede representar gráficamente como sigue:



La respuesta en estado estable tiende a una función sinusoidal de menor amplitud y desfasada un ángulo ϕ .

Respuesta de sistemas de Segundo Orden

Los sistemas de segundo orden son aquellos cuyo modelo matemático responde a una ecuación diferencial de segundo orden de la forma:

$$D^2y + 2\xi\omega_n Dy + \omega_n^2 y = K\omega_n^2 u$$

Donde:

y : Representa la salida o respuesta del sistema

u : Representa la función entrada al sistema

ξ : Es la relación (o radio) de amortiguamiento del sistema

ω_n : Es la frecuencia natural del sistema

K : Ganancia en estado estacionario o ganancia del sistema.

Para mayor simplicidad consideraremos a continuación solo el caso en que $K = 1$:

$$D^2y + 2\xi\omega_n Dy + \omega_n^2 y = \omega_n^2 u$$

La respuesta para un $K \neq 1$ puede obtenerse con la mismo procedimiento expresado para los sistemas de primer orden.

Respuesta de un sistema de segundo orden a una entrada en escalón

En este caso la entrada para $t > 0$ será: $u = H$, luego la ecuación diferencial del sistema se puede escribir como:

$$D^2 y + 2\xi\omega_n D y + \omega_n^2 y = \omega_n^2 H$$

La respuesta de este sistema corresponde entonces a la solución de la ecuación diferencial, la cual se obtiene en dos partes:

Respuesta en estado transitorio o también llamada solución homogénea

Para obtener esta parte de la respuesta se iguala la ecuación diferencial a cero, dicho de otra manera se considera que la entrada es cero:

$$D^2 y + 2\xi\omega_n D y + \omega_n^2 y = 0$$

Y se obtiene la ecuación característica despejando la respuesta del sistema e igualando este a cero:

$$D^2 + 2\xi\omega_n D + \omega_n^2 = 0$$

Se obtienen las raíces de la ecuación característica:

$$D_{1,2} = \frac{-2\xi\omega_n \pm \sqrt{4\xi^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2}$$

$$D_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

Luego la solución homogénea depende de la forma de las raíces de la ecuación característica, en este caso la forma de las raíces depende del radio de amortiguamiento (ξ), la solución homogénea puede entonces tomar varias formas como se presenta a continuación:

Si $\xi > 1$ aparecen dos raíces reales positivas.

La solución transitoria será entonces de la forma

$$y_T = C_1 e^{\left(-\xi\omega_n + \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}\right)t} + C_2 e^{\left(-\xi\omega_n - \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}\right)t}$$

Si $\xi = 1$ aparecen dos raíces reales iguales.

La solución transitoria será entonces de la forma

$$y_T = C_1 e^{-\xi\omega_n t} + C_2 t e^{-\xi\omega_n t}$$

Si $0 < \xi < 1$ aparece un par de raíces imaginarias.

La solución transitoria será entonces de la forma

$$y_T = e^{-\xi\omega_n t} \left(C_1 \sin\left(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}\right)t - C_2 \cos\left(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}\right)t \right)$$

Si $\xi = 0$ aparece un par de raíces imaginarias puras.

La solución transitoria será entonces de la forma

$$y_T = C_1 \sin \omega_n t - C_2 \cos \omega_n t$$

Donde C_1 y C_2 son constantes que dependen de las condiciones iniciales del sistema.

Respuesta en estado estable o también llamada solución particular

Para obtener la solución particular de una ecuación diferencial se supone que la solución será similar a la entrada:

$$y_{Eas} = A$$

Donde A es una constante.

Se obtienen las derivadas de la solución supuesta:

$$Dy_{Eas} = 0; \quad D^2y_{Eas} = 0$$

Se sustituye la solución supuesta y su derivada en la ecuación original, para obtener el valor final de la solución particular:

$$\omega_n^2 A = \omega_n^2 H$$

$$y_E = H$$

Respuesta completa

La respuesta completa del sistema será entonces la suma de la respuesta transitoria más la respuesta en estado estable:

$$y = y_T + y_E$$

Donde y_T es cualquiera de las cuatro opciones determinadas anteriormente.

Si $\xi > 1$:

$$y_T = C_1 e^{\left(-\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)t} + C_2 e^{\left(-\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)t} + H$$

Si $\xi = 1$:

$$y_T = C_1 e^{-\xi\omega_n t} + C_2 t e^{-\xi\omega_n t} + H$$

Si $0 < \xi < 1$:

$$y_T = e^{-\xi\omega_n t} \left(C_1 \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)t - C_2 \cos\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)t \right) + H$$

Si $\xi = 0$:

$$y_T = C_1 \sin \omega_n t - C_2 \cos \omega_n t + H$$

Falta entonces obtener el valor de las constantes C_1 y C_2 con las condiciones iniciales. Para un sistema de segundo orden se requiere de dos condiciones iniciales, la cuales depende del estado en que se encuentra el sistema en el momento inicial en que se aplica la entrada ($t = 0$). En este caso tomaremos por simplicidad y sin perdida de generalidad las condiciones iniciales siguientes:

$$t = 0 \Rightarrow y_0 = 0; \quad Dy_0 = 0$$

Para determinar el valor de las constantes C_1 y C_2 se debe sustituir el valor de las condiciones iniciales y del tiempo en la ecuación de la respuesta del sistema y en su derivada:

Si $\xi > 1$:

$$0 = C_1 e^{\left(-\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)0} + C_2 e^{\left(-\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)0} + H$$

$$0 = C_1 \left(-\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right) e^{\left(-\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)0} + C_2 \left(-\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right) e^{\left(-\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)0}$$

$$C_1 + C_2 = -H$$

$$C_1 \left(-\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right) + C_2 \left(-\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right) = 0$$

$$C_1 = -H - \frac{H(\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1})}{2\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}}$$

$$C_2 = \frac{H(\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1})}{2\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}}$$

Si $\xi = 1$:

$$0 = C_1 e^{-\xi\omega_n 0} + C_2 0 e^{-\xi\omega_n 0} + H$$

$$0 = -\xi\omega_n C_1 e^{-\xi\omega_n 0} + C_2 e^{-\xi\omega_n 0} - \xi\omega_n C_2 0 e^{-\xi\omega_n 0}$$

$$0 = C_1 + H \quad \Rightarrow \quad C_1 = -H$$

$$0 = -\xi\omega_n C_1 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\xi\omega_n H$$

Si $0 < \xi < 1$:

$$0 = e^{-\xi\omega_n 0} (C_1 \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}) 0 - C_2 \cos(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}) 0) + H$$

$$0 = -\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n 0} (C_1 \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}) 0 - C_2 \cos(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}) 0)$$

$$+ e^{-\xi\omega_n 0} (C_1 (\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}) \cos(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}) 0 + C_2 (\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}) \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}) 0)$$

$$0 = -C_2 + H \quad \Rightarrow \quad C_2 = H$$

$$0 = \xi\omega_n C_2 + C_1 (\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}) \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{\xi\omega_n H}{(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2})}$$

Si $\xi = 0$:

$$0 = C_1 \sin \omega_n 0 - C_2 \cos \omega_n 0 + H$$

$$0 = C_1 \omega_n \cos \omega_n 0 + C_2 \omega_n \sin \omega_n 0$$

$$0 = -C_2 + H \quad \Rightarrow \quad C_2 = H$$

$$0 = C_1 \omega_n \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

Finalmente la respuesta del sistema será:

Si $\xi > 1$:

$$y_T = \left(-H - \frac{H(\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1})}{2\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}} \right) e^{(-\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1})t} + \frac{H(\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1})}{2\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}} e^{(-\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1})t} + H$$

Si $\xi = 1$:

$$y_T = -He^{-\xi\omega_n t} - \xi\omega_n Hte^{-\xi\omega_n t} + H$$

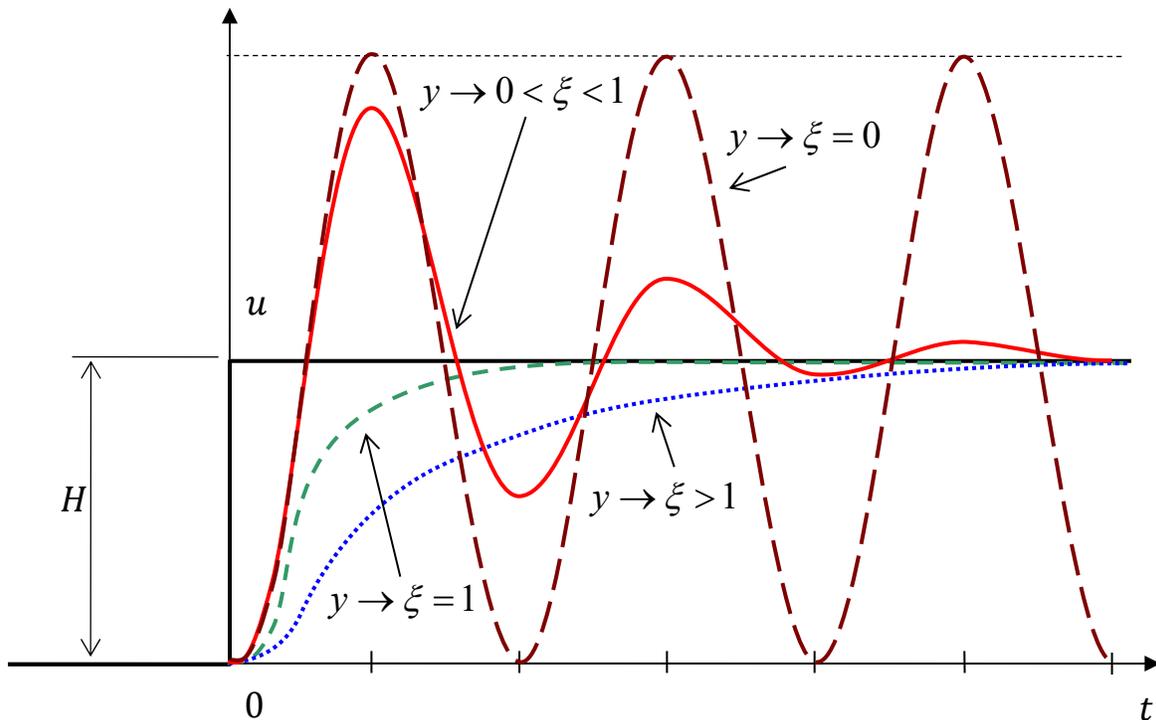
Si $0 < \xi < 1$:

$$y_T = e^{-\xi\omega_n t} \left(H \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2})t + \left(\frac{\xi\omega_n H}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \right) \cos(\omega_n \sqrt{1-\xi^2})t \right) + H$$

Si $\xi = 0$:

$$y_T = -H \cos \omega_n t + H$$

Con esta ecuación que define la respuesta del sistema se puede determinar el valor de la respuesta y para cualquier instante de tiempo. Esta respuesta se puede representar gráficamente como sigue:



En función de estos resultados las respuestas de los sistemas de segundo orden se clasifican según el valor del coeficiente de amortiguamiento (ξ):

Si $\xi > 1$: **Respuesta Sobre-Amortiguada.** El sistema responde a una entrada en escalón lentamente.

Si $\xi = 1$: **Respuesta Críticamente Amortiguada.** El sistema responde a una entrada en escalón con máxima velocidad de respuesta sin oscilar.

Si $0 < \xi < 1$: **Respuesta Sub-Amortiguada.** El sistema responde rápidamente pero comienza a oscilar tratando de alcanzar el valor del escalón.

Si $\xi = 0$: **Respuesta sin amortiguamiento.** El sistema oscila constantemente entre 0 y $2H$.

Definiciones utilizadas en la respuesta transitoria de sistemas

Tiempo de retardo. Es el tiempo que tarda la respuesta en alcanzar por primera vez la mitad del valor final.

Tiempo de crecimiento. Es el tiempo requerido para que la respuesta vaya del 10 al 90% (sistemas sobre-amortiguados) o del 0 al 100% (sistemas sub-amortiguados) de su valor final.

Sobreimpulso máximo. Es el valor del pico máximo de la curva de respuesta medido desde el escalón.

Tiempo de pico. Es el tiempo requerido para que la respuesta alcance el primer pico de sobreimpulso.

Tiempo de establecimiento. Es el tiempo requerido por la curva de respuesta para alcanzar y mantenerse dentro de un determinado rango. Por lo general este rango es del orden del 2 al 5% de error respecto al valor del escalón.

Respuesta de un sistema de segundo orden a una entrada en rampa

En este caso la entrada para $t > 0$ será: $u = Ht$, luego la ecuación diferencial del sistema se puede escribir como:

$$D^2 y + 2\xi\omega_n Dy + \omega_n^2 y = \omega_n^2 Ht$$

La respuesta de este sistema corresponde entonces a la solución de la ecuación diferencial, la cual se obtiene en dos partes:

Respuesta en estado transitorio o también llamada solución homogénea

Las mismas cuatro opciones que para la entrada en escalón.

Respuesta en estado estable o también llamada solución particular

Para obtener la solución particular de una ecuación diferencial se supone que la solución será similar a la entrada:

$$y_{Eas} = A + Bt$$

Donde A es una constante.

Se obtiene la primera y segunda derivada de la solución supuesta:

$$Dy_{Eas} = B; \quad D^2 y_{Eas} = 0$$

Se sustituye la solución supuesta y su derivada en la ecuación original, para obtener el valor final de la solución particular:

$$2\xi\omega_n B + \omega_n^2 (A + Bt) = \omega_n^2 Ht$$

Se obtienen dos ecuaciones, una con los términos con t y otra con los términos independientes:

$$\begin{aligned} \omega_n^2 B &= \omega_n^2 H & B &= H \\ 2\xi\omega_n B + \omega_n^2 A &= 0 & \Rightarrow & A = \frac{-2\xi H}{\omega_n} \end{aligned}$$

La solución en estado estable será:

$$y_E = -\frac{2\xi H}{\omega_n} + Ht$$

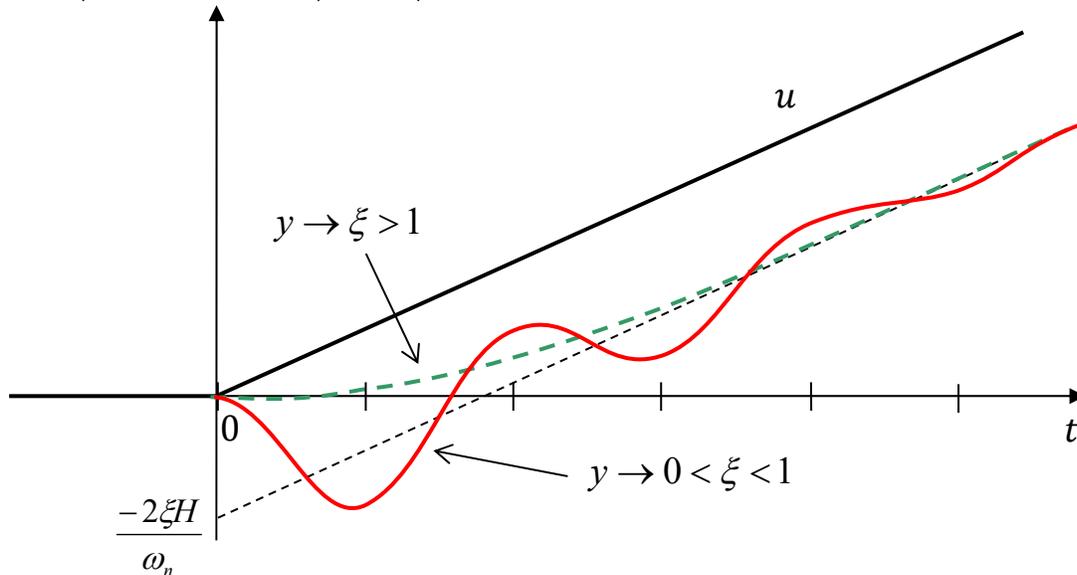
Respuesta completa

La respuesta completa del sistema será entonces la suma de la respuesta transitoria más la respuesta en estado estable:

$$\begin{aligned} y &= y_T + y_E \\ y_E &= y_T - \frac{2\xi H}{\omega_n} + Ht \end{aligned}$$

Donde (y_T) es cualquiera de las cuatro posibilidades vistas en la entrada en escalón. Falta entonces obtener el valor de C_1 y C_2 con las condiciones iniciales, para obtener la solución completa.

La respuesta obtenida se puede representar gráficamente como sigue:



En este caso la respuesta en estado estable tiende a una recta paralela a la entrada pero desfasada en un valor $\frac{-2\xi H}{\omega_n}$.

Respuesta de un sistema de segundo orden a una entrada sinusoidal

En este caso la entrada para $t > 0$ será: $u = H \sin \omega t$, luego la ecuación diferencial del sistema se puede escribir como:

$$D^2 y + 2\xi\omega_n D y + \omega_n^2 y = \omega_n^2 H \sin \omega t$$

La respuesta de este sistema corresponde entonces a la solución de la ecuación diferencial, la cual se obtiene en dos partes:

Respuesta en estado transitorio o también llamada solución homogénea

Las mismas cuatro opciones que para la entrada en escalón.

Respuesta en estado estable o también llamada solución particular

Para obtener la solución particular de una ecuación diferencial se supone que la solución será similar a la entrada:

$$y_{Eas} = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

Donde A es una constante.

Se obtiene la primera y segunda derivada de la solución supuesta:

$$D y_{Eas} = A \omega \cos \omega t - B \omega \sin \omega t ; D^2 y_{Eas} = -A \omega^2 \sin \omega t - B \omega^2 \cos \omega t$$

Se sustituye la solución supuesta y su derivada en la ecuación original, para obtener el valor final de la solución particular:

$$(-A\omega^2 \sin \omega t - B\omega^2 \cos \omega t) + 2\xi\omega_n(A\omega \cos \omega t - B\omega \sin \omega t) + \omega_n^2(A \sin \omega t + B \cos \omega t) = \omega_n^2 H \sin \omega t$$

Se obtienen dos ecuaciones, una con los términos con $\sin \omega t$ y otra con los términos con $\cos \omega t$:

$$-A\omega^2 - 2\xi\omega_n B\omega + \omega_n^2 A = \omega_n^2 H$$

$$-B\omega^2 + 2\xi\omega_n A\omega + \omega_n^2 B = 0$$

$$(\omega_n^2 - \omega^2)A - 2\xi\omega_n \omega B = \omega_n^2 H$$

$$2\xi\omega_n \omega A + (\omega_n^2 - \omega^2)B = 0$$

\Rightarrow

$$A = \frac{(\omega_n^2 - \omega^2)\omega_n^2 H}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n \omega)^2}$$

$$B = -\frac{2\xi\omega_n^3 \omega H}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n \omega)^2}$$

La solución particular será entonces:

$$y_{Eas} = \frac{(\omega_n^2 - \omega^2)\omega_n^2 H}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n \omega)^2} \sin \omega t - \frac{2\xi\omega_n^3 \omega H}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n \omega)^2} \cos \omega t$$

$$y_{Eas} = \frac{\omega_n^2 H}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n \omega)^2} ((\omega_n^2 - \omega^2) \sin \omega t - 2\xi\omega_n \omega \cos \omega t)$$

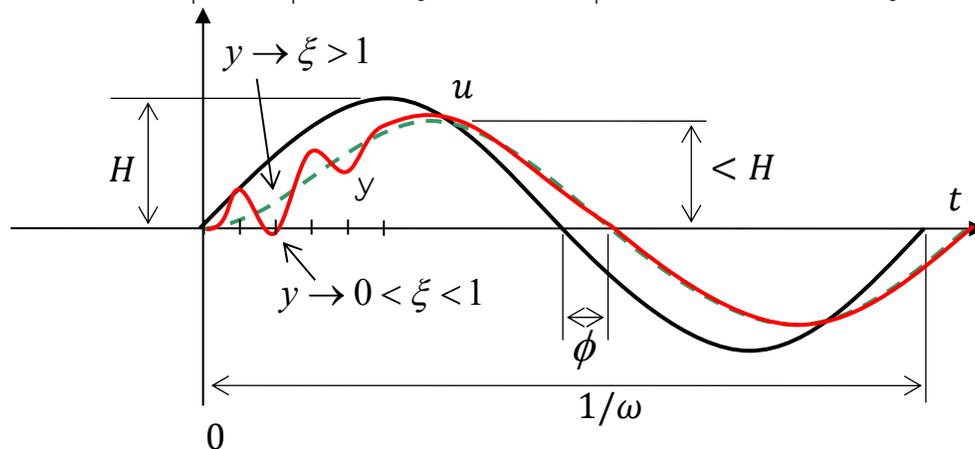
Respuesta completa

La respuesta completa del sistema será entonces la suma de la respuesta transitoria más la respuesta en estado estable:

$$y = y_T + y_E$$

Donde (y_T) es cualquiera de las cuatro posibilidades vistas en la entrada en escalón. Falta entonces obtener el valor de C_1 y C_2 con las condiciones iniciales, para obtener la solución completa.

La respuesta obtenida se puede representar gráficamente aproximadamente como sigue:



La respuesta en estado estable tiende a una función sinusoidal de menor amplitud y desfasada un ángulo ϕ .

Solución de las ecuaciones en representación de estado.

En el caso de los sistemas representados en espacio de estado para obtener la respuesta del sistema es necesario primero resolver la ecuación de estado (ecuación dinámica):

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

Una vez que se tenga esta solución la respuesta del sistema corresponde a una operación algebraica establecida en la ecuación de salida:

$$y = Cx$$

Como se trata simplemente de una representación diferente de un mismo sistema tendremos también una respuesta transitoria (también llamada respuesta libre) y una respuesta en estado estable (también llamada respuesta forzada).

Respuesta transitoria

En el caso general en donde el modelo es variable en el tiempo, se requiere definir una matriz de transición de estado Φ que interviene en la solución de la ecuación de estado.

Matriz de transición: La solución de la ecuación de estado homogénea (con entrada $u = 0$):

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad x(t_0) = x_0$$

Donde $A(t)$ es continua respecto de t , está dada por la respuesta libre del sistema, que es la respuesta del sistema producto de sus condiciones iniciales:

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 \quad \forall t \geq t_0$$

Donde $\Phi(t, t_0)$ es la denominada matriz de transición, solución de la ecuación diferencial:

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0) \quad \forall t \geq t_0$$

Esta matriz posee las siguientes propiedades:

- $\Phi(t_2, t_2)\Phi(t_1, t_0) = \Phi(t_2, t_0)$
- $\Phi(t, t_0)$ es invertible para todo t y todo t_0
- $\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t) \quad \forall t, t_0$

En el caso general, de un sistema variable en el tiempo, es raramente posible calcular la solución exacta de la matriz de transición, por lo cual su solución suele calcularse de forma numérica. Mientras que para sistemas LTI, la matriz de transición si se puede calcular de forma explícita, solución que será mostrada más adelante.

Respuesta en estado estable

La respuesta en estado estable es la respuesta del sistema a sus señales de entrada para condiciones iniciales nulas. Esta solución se obtiene para sistemas en espacio de estado con la expresión:

$$x(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau$$

Respuesta completa

La respuesta completa del sistema representado por la solución de la ecuación dinámica de estado:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad x(t_0) = x_0$$

Se puede obtener entonces, aplicando el principio de superposición, a partir de matriz de transición, este será la suma de la respuesta transitoria más la respuesta en estado estable, de la cual resulta la expresión:

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau$$

La salida del sistema se puede entonces calcular con la expresión:

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x_0 + C(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau + D(t)u(t)$$

Caso particular de los sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo (LTI). Solución en el dominio del tiempo.

Consideremos el modelo LTI:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

El cual se caracteriza completamente por las matrices A, B, C, D , donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entrada e $y \in \mathbb{R}^r$ es el vector de salida. Se define el orden (n) del modelo a partir de la dimensión del vector de estado.

En el caso de un modelo estrictamente propio, para el cual la matriz de transición directa $D = 0$, se tiene el modelo LTI homogéneo (sin entrada) y con las condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

La matriz de transición se puede calcular con la expresión:

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$$

Que se puede calcular con un desarrollo en serie de Taylor:

$$e^{At} = 1 + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^n t^n}{n!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!}$$

La respuesta en estado transitorio del sistema será entonces:

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0$$

Nota: Se debe tomar en cuenta que a diferencia de los números escalares ($a \cdot b = b \cdot a$) las operaciones con matrices no son conmutativas ($A \cdot B \neq B \cdot A$), por lo tanto:

$$e^{(a+b)t} \neq e^{at} + e^{bt}$$

Teorema de Cayley-Hamilton.

Este teorema permite simplificar el cálculo de la aproximación del exponencial por la serie de Taylor, limitándolo a un número finito de términos.

Toda matriz cuadrada A es solución de su ecuación característica. Por lo tanto, si $QA(s)$ es el polinomio característico de A : $QA(s) = \det(sI - A)$, entonces para una matriz cuadrada A de dimensión n , $QA(s)$ es un polinomio de grado n .

$$QA(s) = \det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

El teorema de Cayley-Hamilton dice que A cumple con la propiedad:

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I = 0$$

Es decir, A^n se puede expresar como una combinación lineal de las potencia inferiores de A :

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - \dots - a_1A - a_0I$$

En consecuencia se puede calcular:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!} = e^{At} = \Phi(t)$$

Utilizando solamente las potencias de A estrictamente inferiores a n , es decir que existe un juego de coeficientes $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ tales que:

$$\Phi(t) = e^{At} = \alpha_{n-1}(t)A^{n-1} + \dots + \alpha_1(t)A + \alpha_0(t)I$$

La respuesta en estado estable de un sistema LTI se puede calcular con:

$$x(t) = \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

Un sistema LTI de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

Tiene como solución de su ecuación dinámica de estado:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

La respuesta completa de este sistema se puede calcular con la expresión:

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)} x_0 + C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t)$$

Caso particular de los sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo (LTI). Solución en el dominio de Laplace.

También se puede determinar la matriz de transición utilizando la transformada de Laplace del modelo del sistema, para ello partimos del modelo LTI:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

Considerando las condiciones iniciales iguales a cero, condición que se aplica a todas las transformadas de Laplace, la solución de la ecuación de estado es de la forma:

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

Y se puede demostrar que:

$$\Phi(s) = \mathcal{L}\{\Phi(t)\} = [sI - A]^{-1}$$

Se puede por lo tanto determinar la solución de la ecuación de estado obteniendo la transformada de Laplace inversa de $\Phi(s)$:

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\}$$

Ejemplo: se quiere determinar la matriz de transición del sistema LTI representado por la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

La matriz de transición en transformada de Laplace se determina con la expresión:

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= [sI - A]^{-1} = \left[s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} s & 2 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \\ \Phi(s) &= \frac{1}{\Delta s} \begin{bmatrix} s+3 & -2 \\ 1 & s \end{bmatrix} = \frac{1}{(s^2 + 3s + 2)} \begin{bmatrix} s+3 & -2 \\ 1 & s \end{bmatrix} \\ \Phi(s) &= \begin{bmatrix} \frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)} & -\frac{2}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para determinar la transformada inversa se debe descomponer los elementos de la matriz en fracciones parciales, por ejemplo para el primer elemento de la matriz tenemos (A_{11}):

$$\frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{(s+1)} + \frac{K_2}{(s+2)}$$

Con: $K_i = \frac{(s-s_i)N(s)}{D(s)}$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} K_1 &= \left. \frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)} \right|_{s=-1} = 2 \\ K_2 &= \left. \frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)} \right|_{s=-2} = -1 \end{aligned}$$

La matriz de convierte entonces en:

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{(s+1)} + \frac{-1}{(s+2)} & -\frac{2}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)} \\ \frac{1}{(s+1)} + \frac{-1}{(s+2)} & \frac{-1}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)} \end{bmatrix}$$

La matriz de transición del sistema será entonces:

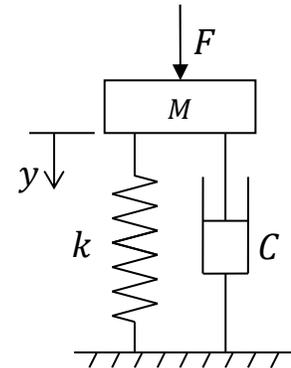
$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & -2e^{-t} + 2e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Si consideramos unas condiciones iniciales diferentes de conocidas, por ejemplo $x_1(0) = x_2(0) = 1$, se pueden determinar entonces los valores de los estados para cualquier tiempo t :

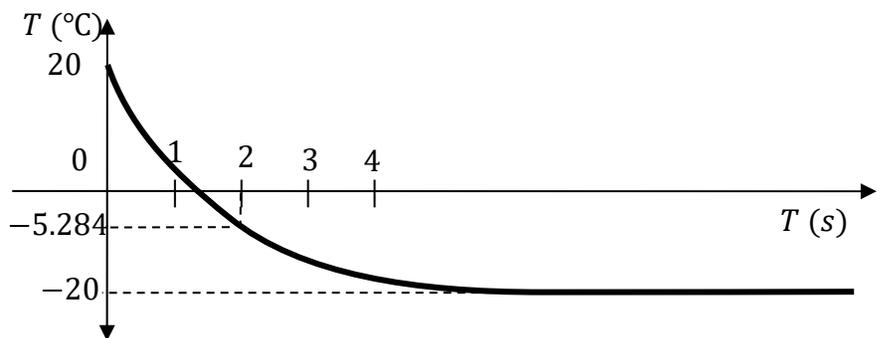
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \Phi(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Ejercicios

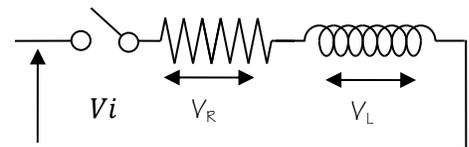
1. Cuál es el valor o el rango de valores de C para que el sistema de la figura responda en forma sobreamortiguada, críticamente amortiguada, subamortiguada y sin amortiguamiento. Hallar las expresiones para ω_n y ξ . Para el mismo sistema trate de hacer una gráfica aproximada de la respuesta (y) para cada uno de los cuatro casos. Determine adicionalmente el valor de la frecuencia natural amortiguada $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$.



2. La gráfica representa la respuesta de un termómetro clínico (primer orden) cuando se introdujo repentinamente en un baño a -20°C . Determine la ecuación del termómetro sabiendo que la temperatura ambiente es de 20°C .



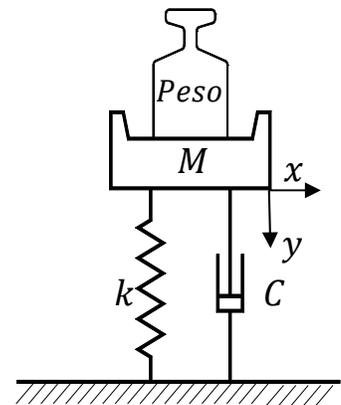
3. Determine V_L al cabo de un segundo de cerrar el siguiente circuito, donde $V_i = 24$ voltios $R = 20 \Omega$, $L = 20$ Henrys.



4. Un termómetro clínico se introduce repentinamente en un baño a 80°C , calcule el valor de la constante de tiempo (τ) para que en 20 segundos indique 75°C . La temperatura ambiente es de 25°C .
5. Se tiene una resistencia eléctrica introducida en un baño, el cual se puede considerar aislado térmicamente del exterior, y que se encuentra inicialmente a temperatura ambiente. La resistencia se prende, y a los 5 minutos se introduce un termómetro de primer orden. ¿Cuál es la lectura del termómetro a los 2 minutos de haberse introducido? Si: $T_a = 20^\circ\text{C}$, $I = 2\text{A}$, $R = 2000 \Omega$, $\text{masa} = 10\text{Kg}$, $C_p = 8 \text{KJ/Kg}^\circ\text{C}$ ($\text{KW.s/Kg}^\circ\text{C}$), constante de tiempo del termómetro de $\tau = 30 \text{s}$. Haga una gráfica aproximada de la respuesta del proceso.
6. Se tiene un tanque de aire comprimido conectado a un compresor mediante una válvula, a un manómetro por otra válvula, y a la atmósfera por otra válvula. Inicialmente el compresor se encuentra apagado y todas las válvulas abiertas. Se cierran las válvulas del manómetro y descarga a la atmósfera y posteriormente se prende el compresor, con lo cual el tanque comienza a llenarse de aire, con un incremento de presión lineal a razón de 1Psi por segundo. Treinta segundos después se abre la válvula del manómetro. Un minuto después de abierta esta última se apaga el compresor, y

se cierra la válvula que comunica el compresor con el tanque para evitar pérdidas. Cuál es el valor indicado por el manómetro al cabo de 2 minutos de haberse prendido el compresor, si este es un instrumento de primer orden con una constante de tiempo de 0,5 min.

7. Se tiene un envase con mezcla de agua y hielo sobre un mechero para calentarla, y fuera del envase se tiene un termómetro de primer orden con una constante de tiempo de 0,5 minutos. Se prende el mechero, con lo cual el agua comienza a calentarse a razón de 1°C por minuto. Treinta segundos después se introduce en el envase el termómetro. Un minuto después de introducido el termómetro se reduce la llama del mechero, con lo cual la temperatura del agua se mantiene constante. Cuál es el valor indicado por el termómetro al cabo de 2 minutos de haberse prendido el mechero.
8. En un sistema neumático se tiene un manómetro conectado a un tanque mediante una válvula A, el tanque posee dos válvulas más una B que lo conecta a un compresor y una C a la atmósfera. Inicialmente todas las válvulas se encuentran abiertas, se cierran A y C y se prende el compresor con lo cual la presión en el tanque aumenta a razón de 1 psi/seg , al cabo de un minuto se cierra la válvula B, se apaga el compresor y se abre la válvula A. Dos minutos después se vuelve a prender el compresor y se abre la válvula B con lo que la presión sigue aumentando con características similares al proceso anterior. Si el manómetro se comporta como un instrumento de segundo orden con radio de amortiguamiento igual a 0,8 y frecuencia natural igual a $1/60\text{ rad/seg}$, determine la presión indicada por el manómetro al cabo de tres minutos de haberse cerrado la válvula B.
9. El esquema de la figura representa un sistema mecánico de masa resorte amortiguador, inicialmente el sistema está en reposo, es decir $x = y = 0$ y no existe peso sobre él, posteriormente se van colocando pesos sobre la masa de la siguiente forma: para $t = 5\text{ s}$ 2 kg , para $t = 10\text{ s}$ se añade 1 kg , y en $t = 30\text{ s}$ se le quitan 2 Kg . Si los valores de M , k y C son respectivamente 1 Kg , 1 Nw/m y 1 Nw/m^2 , determine la posición de la masa M para un tiempo de 45 segundos. Considere la gravedad de la tierra como 10 m/s^2 .

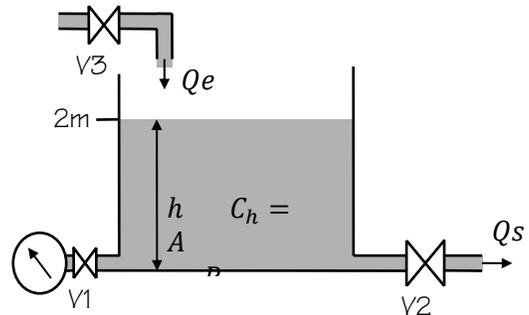


10. Se tiene un voltímetro de corriente continua, el cual debido a su estructura interna se comporta como un instrumento de segundo orden con relación de amortiguamiento igual a $\xi = 0.9$ y frecuencia natural igual a $\omega_n = 1\text{ rad/s}$. El instrumento se encuentra inicialmente desconectado y se conecta a una batería de $V = 12\text{ v}$. Al cabo de un minuto se le conecta a la batería un cargador por lo cual su voltaje comienza a aumentar a razón de 0.1 voltios por segundo hasta llegar a $V = 14\text{ v}$, a partir de este momento el voltaje de la batería permanece constante. ¿Cuál será el voltaje indicado por el instrumento al cabo de 2 minutos de haberse conectado?
11. Se tiene un medidor de flujo para gasolina, con el cual se quiere medir la cantidad de combustible que gasta un vehículo en un momento determinado. Inicialmente el vehículo se encuentra apagado por lo que el flujo de combustible es nulo, y se enciende el motor dejándolo en velocidad de marcha mínima, con lo cual empieza a consumir un caudal de combustible de 5 litros por hora. Al cabo de 5 minutos se comienza a acelerar el motor progresivamente por lo que el consumo de combustible aumenta a razón de 1 litro por hora cada minuto hasta alcanzar la velocidad máxima del motor, en donde éste consume 20 litros por hora. Tres minutos después de haber alcanzado la velocidad máxima se apaga el motor. Si el instrumento es de segundo orden con radio de amortiguamiento de 1.2 y frecuencia

natural de 60 radianes por segundo ¿Cuál será el valor de flujo indicado por el instrumento 24 minutos después de haberse encendido el motor?

12. En la figura se observa un tanque de agua en donde se quiere medir el nivel mediante un manómetro conectado en el fondo a través de la válvula V1, dicho tanque tiene un área $A = 10 \text{ m}^2$ posee una entrada de agua Q_e a través de la válvula V3 y una salida Q_s a través de la válvula V2. El manómetro funciona como un instrumento de segundo orden con $\xi = 0.8$ y $\frac{\omega_n = \frac{1}{60} \text{ rad}}{s}$, e inicialmente la válvula V1 se encuentra cerrada, indicando el manómetro presión atmosférica; el nivel de agua en el tanque se encuentra en 2 metros y los flujos de entrada y salida son iguales ($Q_e = Q_s = 5 \text{ m}^3/\text{min}$).

Repentinamente se abre la válvula V1 y por tanto el manómetro empieza a medir la presión en el fondo del tanque que es proporcional al nivel, al cabo de 2 minutos se abre un poco más la válvula V2 por lo que el flujo de salida aumenta repentinamente al doble del flujo de entrada ($Q_s = 2Q_e$), dos minutos después se vuelve a cerrar un poco la válvula V2 hasta que los flujos de entrada y salida vuelven a ser iguales ($Q_s = Q_e$), esto se mantiene durante 1 minuto al cabo del cual se abre un poco la válvula V3 por lo que el flujo de



entrada pasa a ser el doble del flujo de salida ($Q_e = 2Q_s$). a) Haga la gráfica aproximada del proceso, entrada (nivel del tanque " h " vs tiempo), salida (nivel indicado por el manómetro " h_m " vs Tiempo). b) Cual será el valor del nivel en el cual se encuentra el tanque (h) al cabo de 7 minutos de comenzar el proceso. c) Cual es el valor de presión (P_m), en psi., indicado por el manómetro el cabo de 7 minutos de comenzar el proceso. d) Cual es el error que se comete en la lectura del nivel a través del manómetro.

Datos adicionales: $\gamma_{\text{agua}} = 9.800 \text{ N/m}^3$. $1 \text{ Pa (N/m}^2) = 1.45 \times 10^{-4} \text{ psi (lbf/plg}^2)$. $P = \gamma h$

Tema 6. Estabilidad de Sistemas

Introducción

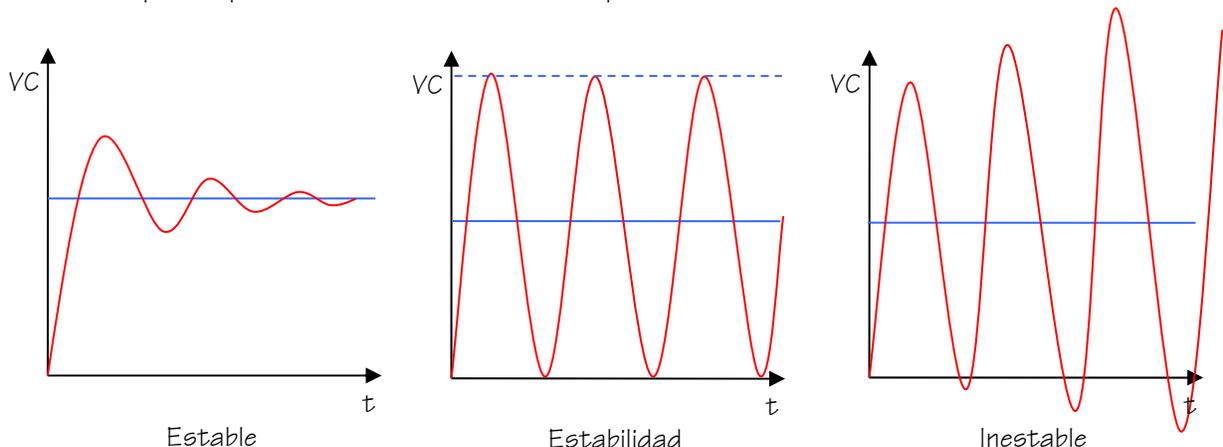
La noción de estabilidad es fundamental en el desarrollo de sistemas de control y en particular para los sistemas retroalimentados. La ausencia de esta propiedad vuelve inútil en la práctica a cualquier sistema.

Existen diversas formas de definir la estabilidad. Por ejemplo se puede hablar de la noción de estabilidad de un sistema autónomo que no es idéntica a la utilizada en sistemas sometidos a entradas y salidas (en donde la energía puede tener ciertos límites). También podemos referir que la estabilidad entre la entrada y la salida no necesariamente implica una estabilidad interna a los sistemas. Se puede hablar entonces de estabilidad local, global o semiglobal según el sistema no lineal en consideración.

Aquí nos vamos a interesar solamente a un tipo de estabilidad, utilizada para una clase de sistemas específicos, entre los que se encuentran los sistemas LTI, la cual es la descripción de estabilidad entrada salida, la cual nos lleva a la definición de estabilidad de entradas y salidas limitadas, comúnmente denominada estabilidad BIBO (Bounded Input Bounded Output).

Definiciones de estabilidad BIBO

1. Un sistema es estable si responde en forma limitada a una excitación limitada.
2. Un sistema estable es aquel en que los transitorios decaen, es decir, la respuesta transitoria desaparece para valores crecientes del tiempo.



Tal consideración sugiere que los coeficientes de t en los términos exponenciales de la respuesta transitoria sean números reales negativos o números complejos con parte real negativa.

Esto implica que para que un sistema sea estable las raíces de la ecuación característica deben ser negativas o con parte real negativa. Esto es ya que la ecuación característica representa la parte transitoria (homogénea) de la ecuación que rige el sistema.

De lo anterior podemos observar que la estabilidad no depende de la entrada sino que es una característica propia del sistema.

Ejemplo 1. Para un sistema de primer orden la ecuación característica es:

$$\tau D + 1 = 0$$

La solución transitoria es de la forma:

$$y_T = Ce^{-t/\tau}$$

Este será estable siempre que la constante de tiempo sea positiva.

Para un sistema de segundo orden:

$$D^2 + 2\xi\omega_n D + \omega_n^2 = 0$$

La solución transitoria es de la forma:

Si $\xi > 1$ aparecen dos raíces reales positivas.

$$y_T = C_1 e^{\left(-\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)t} + C_2 e^{\left(-\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)t}$$

Si $\xi = 1$ aparecen dos raíces reales iguales.

$$y_T = C_1 e^{-\xi\omega_n t} + C_2 t e^{-\xi\omega_n t}$$

Si $0 < \xi < 1$ aparece un par de raíces imaginarias.

$$y_T = e^{-\xi\omega_n t} \left(C_1 \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)t - C_2 \cos\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)t \right)$$

Si $\xi = 0$ aparece un par de raíces imaginarias puras.

$$y_T = C_1 \sin \omega_n t - C_2 \cos \omega_n t$$

Si $\xi < 0$ aparece un par de raíces imaginarias puras.

$$y_T = e^{\xi\omega_n t} \left(C_1 \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)t - C_2 \cos\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)t \right)$$

Solo en este último caso el sistema será inestable, ya que el coeficiente de t en el exponencial es positivo, luego los transitorios aumentan en el tiempo.

Estabilidad limitada

Es el caso que sirve de frontera entre la estabilidad absoluta y la inestabilidad, y se presenta cuando las raíces de la ecuación característica tienen partes reales iguales a cero.

La respuesta resulta ser una oscilación permanente cuya amplitud ni crece ni decae en el tiempo.

Esto es el caso de $\xi = 0$ para un sistema de segundo orden por ejemplo.

Conclusión

De todo lo anterior podemos obtener las siguientes conclusiones:

1. Un sistema es estable si todas las raíces de la ecuación característica son negativas o con parte real negativa.
2. Un sistema es inestable, si tiene en su ecuación característica alguna raíz positiva o con parte real positiva.
3. Un sistema tiene estabilidad limitada si alguna de sus raíces son pares de imaginarios puros. Una raíz cero no influye sobre la estabilidad porque la respuesta no es oscilatoria.
4. Si el polinomio de la ecuación característica tiene algún coeficiente ausente o negativo entonces el sistema es inestable.

Ejemplo 2. Algunas ecuaciones características

1. $(D+1)(D+2)(D+3) = 0$ Es estable porque todas las raíces son negativas
2. $(s+1)(s+2)(s-3)(s^2+4) = 0$ Inestable por tener una raíz positiva
3. $(s+1)(s^2-4) = 0$ Inestable por tener una raíz positiva (+2)

4. $(s^2 + 4)(s^2 + 16) = 0$ Estabilidad limitada ya que tiene dos pares de raíces imaginarias puras
5. $(s^2 + 16)(s + 1) = 0$ Estabilidad limitada. Ya que el exponencial domina sobre la otra función y no hay ninguna raíz positiva, ni con parte real positiva. Los exponenciales siempre dominan sobre los cosenos y senos.
6. $(s^2 + 2s - 8)(s + 2)(s^2 + 1) = 0$ Que es lo mismo que: $(s + 4)(s - 2)(s + 2)(s^2 + 1) = 0$ Es inestable por poseer una raíz positiva.

Para hallar la estabilidad de cualquier sistema, se pueden utilizar métodos para facilitar la operación, Ya que en algunos casos si el polinomio es de orden elevado será poco práctico encontrar las raíces. Entre los métodos más sencillos para determinar la estabilidad están:

- Criterio de Routh
- Criterio de Hurwitz
- Criterio de la fracción continuada

Estos métodos sirven para hallar la estabilidad de ecuaciones características en forma de polinomios. Existirán además métodos más complejos para determinar la estabilidad a otros sistemas y obtener mayor información.

Criterio de Estabilidad Routh

Es un método que sirve para determinar si la ecuación característica tiene o no raíces con parte real positiva sin necesidad de determinar el valor preciso de estas raíces. Y sirve para determinar la estabilidad de un sistema cuya ecuación característica es de orden n y de la forma:

$$a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0 = 0 \text{ en el dominio del tiempo}$$

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \text{ en el dominio del Laplace}$$

Y esta se aplica usando la tabla de Routh

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	\dots
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	\dots
s^{n-3}	b_1	b_2	b_3	\dots
s^{n-4}	c_1	c_2	c_3	\dots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots
s^0	0	0	0	0

Donde:

a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 : son los coeficientes de la ecuación característica.

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}; b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}; b_3 = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}; c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}; \text{etc.}$$

La tabla se continúa horizontal y verticalmente hasta que solo se obtengan ceros.

El criterio de Routh dice que:

1. Todas las raíces de la ecuación característica tienen partes reales negativas si todos los elementos de la primera columna de la tabla de Routh tienen todos el mismo signo.
2. De lo contrario el número de raíces con partes reales positivas es igual al número de cambios de signo.
3. Si existe un cero no terminal el sistema tiene un par de raíces imaginarias puras.
4. Si existen ceros terminales implica una raíz cero.

Observaciones al criterio de Routh

1. Si alguno de los coeficientes de la ecuación característica es cero se concluye que el sistema es inestable y no es necesario construir la tabla de Routh.
2. Si alguno de los coeficientes de la ecuación característica es negativo se concluye que el sistema es inestable y no es necesario construir la tabla de Routh.
3. Todos los elementos de una fila cualquiera pueden multiplicarse o dividirse por una constante no negativa sin que se perturben las propiedades de la tabla.
4. Si el primer valor de una fila es cero, mientras que los otros valores no lo son el procedimiento consiste en sustituir el cero por un ϵ pequeño y positivo, y se continua el arreglo.

Ejemplo 3.

Para el sistema:

$$s^3 + 6s^2 + 12s + 8 = 0$$

La tabla de Routh será:

s^3	1	12	0
s^2	6	8	0
s	$32/3$	0	0
s^0	8	0	0

Como en la primera columna no hay cambios de signo entonces el sistema tiene 3 raíces negativas o con parte real negativa y por lo tanto es estable.

Ejemplo 4.

Si se tiene la siguiente primera columna de Routh determinar todas las conclusiones posibles:

s^5	2
s^4	3
s^3	4
s^2	-5
s	2
s^0	0

El sistema tiene dos raíces positivas o con parte real positiva porque hay dos cambios de signo.
 El sistema tiene una raíz cero por el cero terminal.
 Hay dos raíces negativas o con parte real negativa.
 El sistema es de quinto orden.
 Por lo tanto es inestable.

Ejemplo 5.

Determinar todas las conclusiones posibles de la siguiente primera columna de Routh:

El sistema es de orden 4, posee 4 raíces.
 No tiene cambios de signo, luego no tiene raíces positivas.
 Posee un par de raíces imaginarias puras.

$$\begin{array}{r|l} s^4 & 3 \\ s^3 & 2 \\ s^2 & 5 \\ s & 0 \\ s^0 & 2 \end{array}$$

Posee un par de raíces negativas o con parte real negativa.

El sistema tiene estabilidad limitada por el cero no terminal.

Ejemplo 6.

Haga un estudio de la estabilidad del siguiente sistema usando el criterio de Routh

$$D^5x + 3D^4x + 7D^3x + 20D^2x + 6Dx + 15x = u$$

El primer paso es entonces el construir la tabla de Routh:

$$\begin{array}{r|llll} s^5 & 1 & 7 & 6 & 0 \\ s^4 & 3 & 20 & 15 & 0 \\ s^3 & 1/3 & 1 & 0 & \\ s^2 & 11 & 15 & 0 & \\ s & 6/11 & 0 & & \\ s^0 & 15 & 0 & & \end{array}$$

La primera columna de la tabla de Routh no posee cambios de signo luego todas sus raíces son negativas o con parte real negativa, por lo tanto el sistema es estable.

Ejemplo 7.

Determinar todas las conclusiones posibles de la siguiente primera columna de Routh:

$$\begin{array}{r|l} s^{10} & 3 \\ s^9 & 2 \\ s^8 & 5 \\ s^7 & 4 \\ s^6 & -3 \\ s^5 & 2 \\ s^4 & 0 \\ s^3 & 1 \\ s^2 & 0 \\ s & 2 \\ s^0 & 0 \end{array}$$

El sistema es de orden 10

Tiene una raíz cero

Tiene dos raíces imaginarias puras

Tiene un par de raíces positivas o con parte real positiva

Es inestable por poseer un cambio De signo

Ejemplo 8.

Determinar, con el criterio de Routh, la estabilidad del sistema cuya ecuación característica es:

$$s^4 + s^3 - s - 1 = 0$$

La tabla de Routh será:

$$\begin{array}{l|lll} s^4 & 1 & 0 & -1 \\ s^3 & 1 & -1 & 0 \\ s^2 & 1 & -1 & 0 \\ s & \varepsilon & 0 & \\ s^0 & -1 & 0 & \end{array}$$

$$d_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-\varepsilon}{\varepsilon} = -1$$

Por lo tanto el sistema es inestable.

Sin embargo el cálculo de la tabla no era necesario ya que la ecuación característica posee dos coeficientes negativos y hay uno ausente, se podría concluir directamente que el sistema es inestable.

Ejemplo 9.

Determinar la estabilidad del siguiente sistema:

$$s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3 = 0$$

Le tabla de Routh es:

$$\begin{array}{l|lll} s^5 & 1 & 3 & 5 \\ s^4 & 2 & 6 & 3 \\ s^3 & 0 \rightarrow \varepsilon & 7/2 & 0 \\ s^2 & -\infty & 3 & 0 \\ s & 7/2 & 0 & \\ s^0 & 3 & 0 & \end{array}$$

Le sistema es inestable.

Criterio de estabilidad de Hurwitz

Este criterio es otro método para determinar si todas las raíces de una ecuación característica tienen partes reales negativas.

Este criterio se aplica por medio del uso de determinantes formados con los coeficientes de la ecuación característica.

Estos determinantes Δ_i (con $i = 1, 2, \dots, n-1$) se forman con los menores principales del determinante siguiente:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & \begin{pmatrix} a_0 \text{ si } n \text{ impar} \\ a_1 \text{ si } n \text{ par} \end{pmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & \dots & \begin{pmatrix} a_0 \text{ si } n \text{ par} \\ a_1 \text{ si } n \text{ impar} \end{pmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & \begin{pmatrix} a_0 \text{ si } n \text{ impar} \\ a_1 \text{ si } n \text{ par} \end{pmatrix} & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & \begin{pmatrix} a_0 \text{ si } n \text{ par} \\ a_1 \text{ si } n \text{ impar} \end{pmatrix} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & \dots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_0 \end{vmatrix}$$

Más específicamente los determinantes se forman de la siguiente manera:

$$\Delta_1 = |a_{n-1}|; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}; \Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \end{vmatrix}$$

Y así sucesivamente hasta llegar a Δ_n donde n es el orden de la ecuación característica del sistema.

El criterio de Hurwitz dice que dice que todas las raíces de la ecuación característica serán negativas o con parte real negativa si los determinantes son positivos ($\Delta_i > 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$).

Por supuesto al igual que para el criterio de Routh si existe algún coeficiente ausente o negativo en la ecuación característica se puede concluir que el sistema es inestable y no es necesario aplicar el método.

Ejemplo 10. Determinar la estabilidad del sistema siguiente usando el criterio de Hurwitz:

$$a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0$$

Obtenemos entonces los determinantes de Hurwitz, que en este caso serán 4 por ser el sistema de 4^{to} orden:

$$\Delta_1 = a_3$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix} = a_3a_2 - a_4a_1$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_3a_2a_1 - a_0a_3^2 - a_4a_1^2$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_0 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_0(a_3a_2a_1 - a_0a_3^2 - a_4a_1^2)$$

Por lo tanto el sistema será estable si:

$$a_3 > 0$$

$$a_3a_2 - a_4a_1 > 0$$

$$a_3a_2a_1 - a_0a_3^2 - a_4a_1^2 > 0$$

$$a_0(a_3a_2a_1 - a_0a_3^2 - a_4a_1^2) > 0$$

Ejemplo 11. Determinar si la siguiente ecuación característica representa un sistema estable o inestable:

$$s^3 + 8s^2 + 14s + 24 = 0$$

Obtenemos entonces los determinantes de Hurwitz, que en este caso serán 3 por ser el sistema de 3^{er} orden:

$$\Delta_1 = 8$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 8 & 24 \\ 1 & 14 \end{vmatrix} = 88$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 8 & 24 & 0 \\ 1 & 14 & 0 \\ 0 & 8 & 24 \end{vmatrix} = 2112$$

Como todos los determinantes son positivos entonces el sistema es estable.

Ejemplo 12. Determinar si la siguiente ecuación característica representa un sistema estable o inestable:

$$8s^4 + 5s^3 + 6s^2 + 3s + 5 = 0$$

Obtenemos entonces los determinantes de Hurwitz, que en este caso serán 4 por ser el sistema de 4^{to} orden:

$$\Delta_1 = 5;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = 6;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 8 & 6 & 5 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -107$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 5\Delta_3 = -535$$

El sistema es inestable por tener determinantes de Hurwitz negativos.

Análisis de estabilidad de sistemas en Espacio de Estado

En un sistema expresado en forma de espacio de estado

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

La estabilidad depende de lo "Valores Propios" de la matriz A de n por n elementos. Esto ya que es la matriz A la que representa el sistema en si, por lo tanto donde se encuentra la información de la ecuación característica.

- Si todos los valores propios son negativos o con parte real negativa entonces el sistema será estable
- Si existe un par de valores propios imaginarios puros el sistema tendrá estabilidad limitada
- Si existe algún valor propio positivo o con parte real positiva el sistema será inestable

Determinación de los valores propios de una matriz

Los valores propios de una matriz son las raíces de la ecuación característica representada por esta matriz. Por lo tanto para obtener los valores propios de una matriz se deben obtener primero la ecuación característica que se puede obtener con la expresión:

$$|sI - A| = 0$$

Y obtener luego las raíces de ésta ecuación que serán sus valores propios.

Par determinar la estabilidad del sistema se podrán aplicar entonces los criterios de Routh o Hurwitz a esta ecuación característica.

Por ejemplo:

Si se tiene un sistema lineal cuya matriz A es:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica del sistema será:

$$\begin{aligned} |sI - A| &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 6 & 11 & \lambda + 6 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 \\ &= (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto los valores propios de la matriz A serán:

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = -2$$

$$\lambda_3 = -3$$

Lo cual indica que este sistema es estable.

Ejercicios

1. Determinar si los siguientes sistemas son estables (utilice los dos criterios):

a. $s^3 + 4s^2 + 8s + 12 = 0$

b. $s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0$

c. $s^3 + 7s^2 + 7s + 46 = 0$

d. $s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 9s + 12 = 0$

e. $s^4 + 8s^3 + 24s^2 + 32s + 16 = 0$

f. $D^6x + 2D^5x + 4D^4x + 6D^3x + 8D^2x + 4Dx + 5x = u$

2. Citar razonablemente toda la información suministrada por las siguientes primeras columnas de Routh:

	2	2	1	1	2
	3	3	2	2	3
	4	4	3	-3	4
a.	5	5	4	d. -4	e. 5
	0	b. 0	0	5	6
	6	6	5	6	7
	-7	7	0	7	
	0	0	6		
		0	-8		

3. Hallar el valor o el rango de valores de K para que los siguientes sistemas sean estables (utilice los dos criterios):

- a. $3s^3 + 3s^2 + s + K + 2 = 0$
 b. $s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + K = 0$
 c. $s^3 + (4 + K)s^2 + 6s + 16 + 8K = 0$
 d. $3s^4 + 2s^3 + Ks^2 + s^2 + s + 2 + K = 0$
 e. $s^5 + s^4 + s^3 + s^2 + Ks^3 + s + K = 0$

4. Determine la estabilidad de los sistemas representados por las siguientes matrices de estado:

a. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & -8 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0]$

b. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0]$

c. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -23 & -7 & -7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0]$

5. Obtenga la representación canónica de Jordan para los sistemas anteriores.

6. Determine el valor de K para que los siguientes sistemas sean estables

d. $A = \begin{bmatrix} K+2 & 0 & 0 \\ 0 & K+1 & 0 \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0]$

e. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{3} & -\left(\frac{K+2}{3}\right) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0]$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(4+K) & -6 & -8(2+K) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0]$

Tema 7. Análisis de la respuesta en frecuencia

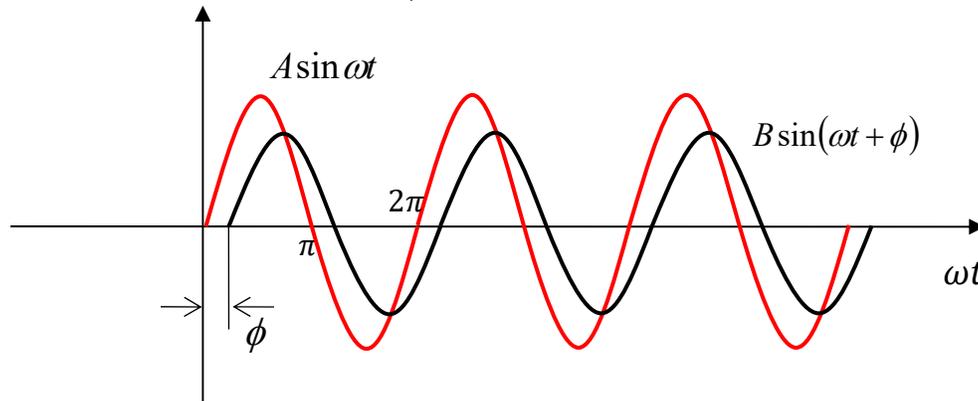
Introducción

Se denomina respuesta en frecuencia a la respuesta en estado estable de un sistema sujeto a una señal sinusoidal de amplitud (A) fija pero a una frecuencia (ω) variable en cierto rango.



La respuesta en estado estable a una entrada de este tipo será de la forma: $B \sin(\omega t + \phi)$

La representación gráfica de la entrada y respuesta en estado estable está dada en la siguiente figura.



En la práctica raras veces los sistemas de control están sometidos a señales sinusoidales, pero la información que se obtiene por el análisis sinusoidal se puede usar para establecer la naturaleza de la respuesta a una gran variedad de señales. Además el análisis es conveniente para el manejo analítico y experimental.

Calculo de la respuesta en frecuencia

Se puede demostrar que cuando un sistema se somete a una entrada sinusoidal ($A \sin \omega t$) la respuesta en estado estable se puede calcular sustituyendo a s por $j\omega$ en la función de transferencia: $G(s) \rightarrow G(j\omega)$.

Luego la respuesta en estado estable, de la forma ($B \sin(\omega t + \phi)$), se puede obtener a partir de un valor complejo que se puede expresar como:

$$M(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{\text{Im}^2 + \text{Re}^2}$$

$$\phi(\omega) = \angle G(j\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\text{Im}}{\text{Re}}\right)$$

Donde:

Im : parte imaginaria de $G(j\omega)$

Re : parte real de $G(j\omega)$

$M(\omega) = \frac{B}{A}$ se le conoce como relación de amplitud

$\phi(\omega)$ se le conoce como ángulo de fase.

La respuesta en estado estable del sistema será de la forma: $M(\omega)A \sin(\omega t + \phi(\omega))$

Ejemplo 1. Si se tiene un sistema de primer orden cuya función de transferencia es:

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

La respuesta en estado estable para una entrada sinusoidal de la forma $H \sin(\omega t)$ se puede hallar substituyendo a s por $j\omega$ como sigue:

$$G(s) = \frac{1}{j\omega + 1}$$

Si se multiplica y divide por el conjugado para no tener términos imaginarios en el denominador:

$$G(s) = \frac{1}{j\omega + 1} \times \frac{j\omega - 1}{j\omega - 1} = \frac{1 - j\omega\tau}{\tau^2\omega^2 + 1}$$

En este caso la relación de amplitud y el ángulo de fase serán:

$$M(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{-\omega\tau}{\omega^2\tau^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega^2\tau^2 + 1}\right)^2} = \sqrt{\frac{\omega^2\tau^2}{(\omega^2\tau^2 + 1)^2} + \frac{1}{(\omega^2\tau^2 + 1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}$$

$$\phi(\omega) = \angle G(j\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\text{Im}}{\text{Re}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\left(\frac{-\omega\tau}{\omega^2\tau^2 + 1}\right)}{\left(\frac{1}{\omega^2\tau^2 + 1}\right)}\right) = -\tan^{-1}(\omega\tau)$$

La respuesta en estado estable (respuesta en frecuencia) será:

$$y(t)_{EE} = \frac{H}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \sin(\omega t - \tan^{-1}(\omega\tau))$$

Procedimiento para la obtención de la respuesta en frecuencia

1. Se obtiene la función de transferencia para el elemento o sistema. Todas las condiciones iniciales se desprecian porque no afectan la respuesta en estado estable.
2. Se substituye s por $j\omega$ en la función de transferencia
3. Para varios valores de frecuencia ω se encuentra la relación de amplitud M y el ángulo de fase ϕ
4. Se grafican los resultados obtenidos en el punto anterior ya sea en coordenada rectangulares (Diagramas de Bode) o en coordenadas polares (Diagramas de Nyquist)

Diagramas de BODE

Los diagramas de Bode son una forma de representar la respuesta en frecuencia de un sistema de control en coordenadas rectangulares, este consiste de dos gráficos:

1. Diagrama de amplitud o atenuación: en donde se grafica la relación de amplitud M de $G(j\omega)$ en decibelios (db) contra el logaritmo de la frecuencia.

El valor M expresado en decibelios se obtiene como: $M_{db} = 20 \log_{10} M(\omega)$

2. Diagrama de fase: en donde se grafica el ángulo de fase de $G(j\omega)$ contra el logaritmo de la frecuencia.

Los diagramas de Bode tienen las siguientes características:

- Como se grafica el logaritmo de ω , los factores producto y cociente de $G(j\omega)$ se convierten en sumas de rectas.
- Los ángulos de fase también se suman y restan en forma natural.

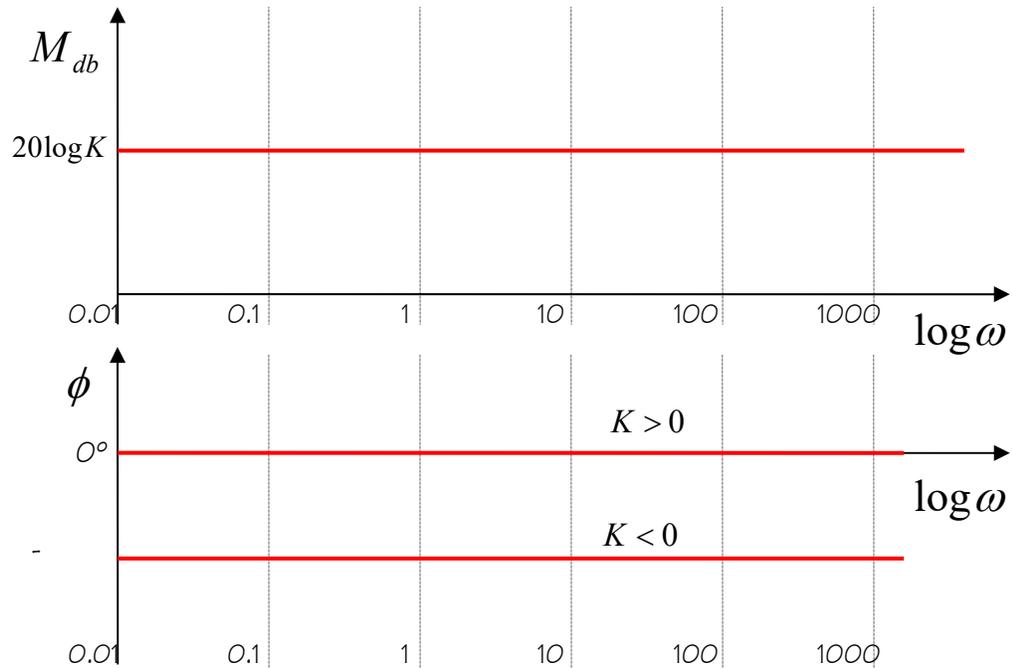
- El diagrama de Bode en la mayoría de los casos se puede aproximar mediante segmentos de recta lo cual simplifica la construcción.

Diagramas de Bode de Funciones comunes

Ganancia ($G(s) = K$)

Amplitud: $M_{db} = 20 \log K = cte$

Fase: $\phi = \tan^{-1} \frac{0}{K} = \begin{cases} 0^\circ & \text{si } K > 0 \\ -180^\circ & \text{si } K < 0 \end{cases}$



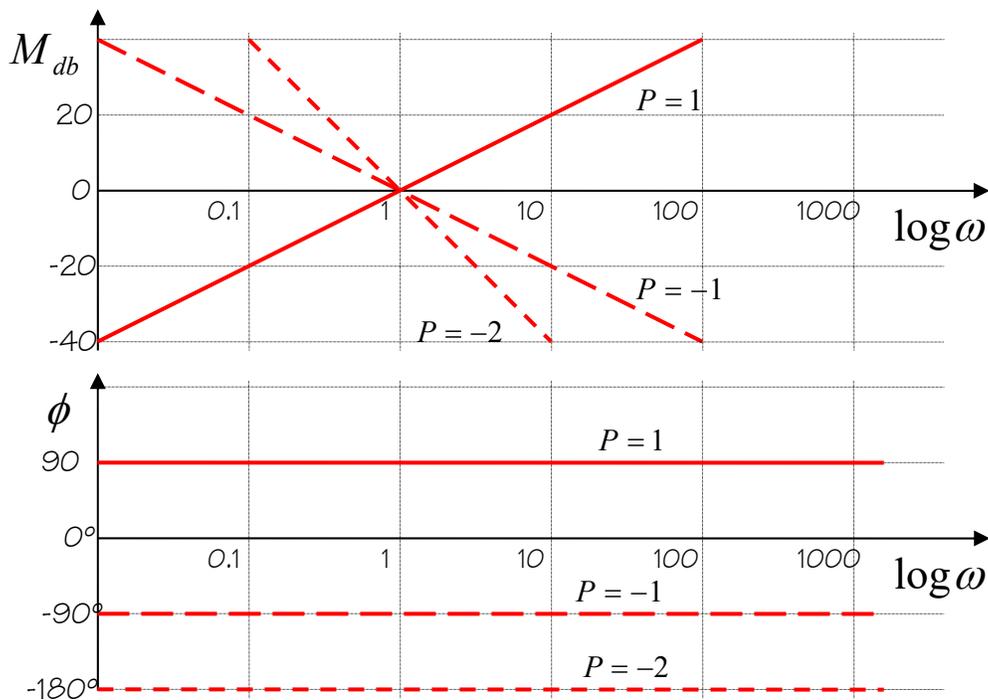
Polos y ceros en el origen ($G(s) = s^{\pm P}$)

También conocidos como factor integral y derivativo. Al sustituir a s por $j\omega$ se obtiene: $G(j\omega) = j\omega^{\pm P}$

Amplitud: $M_{db} = 20 \log |j\omega^{\pm P}| = \pm 20 \log \omega$

Fase: $\phi = \tan^{-1}(j\omega^{\pm P}) = \pm 90^\circ P$

La amplitud en este caso es una recta con pendiente $\pm 20P$ y pasa por $M_{db} = 0$ para $\omega = 1$. Es así como la pendiente será de 20 db por década de frecuencia. Es decir cambia de 20 db cada vez que el valor de la frecuencia es multiplicado por 10. El ángulo de fase es una recta horizontal que pasa por $90P$.



Factores de primer orden ($G(s) = (1 + s\tau)^{\pm 1}$)

En el caso del polo simple al sustituir a s por $j\omega$ se obtiene: $G(j\omega) = \left(\frac{1}{1 + j\omega\tau} \right)$

Amplitud:
$$M_{db} = 20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega\tau} \right| = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}$$

- Si $\omega \ll 1/\tau$ se puede aproximar a $M_{db} = 20 \log 1 = 0$ línea recta horizontal
 - Si $\omega \gg 1/\tau$ se puede aproximar a $M_{db} = 20 \log(\omega\tau)$ línea recta con pendiente 20db/década
- Las dos rectas anteriores son asíntotas del diagrama de amplitud exacto, a las cuales se puede aproximar el diagrama de amplitud. En donde el valor de frecuencia en el punto donde se encuentran las dos rectas se denomina frecuencia de corte y se encuentra en $\omega = 1/\tau$.

Fase:
$$\phi = \tan^{-1}(-\omega\tau) = -\tan^{-1} \omega\tau$$

- $\omega = 0 \rightarrow \phi = 0^\circ$
- $\omega = 1/\tau \rightarrow \phi = -45^\circ$
- $\omega = \infty \rightarrow \phi = -90^\circ$

En el caso del cero simple al sustituir a s por $j\omega$ se obtiene: $(1 + j\omega\tau)$

Amplitud:
$$M_{db} = 20 \log |1 + j\omega\tau| = 20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega\tau} \right|$$

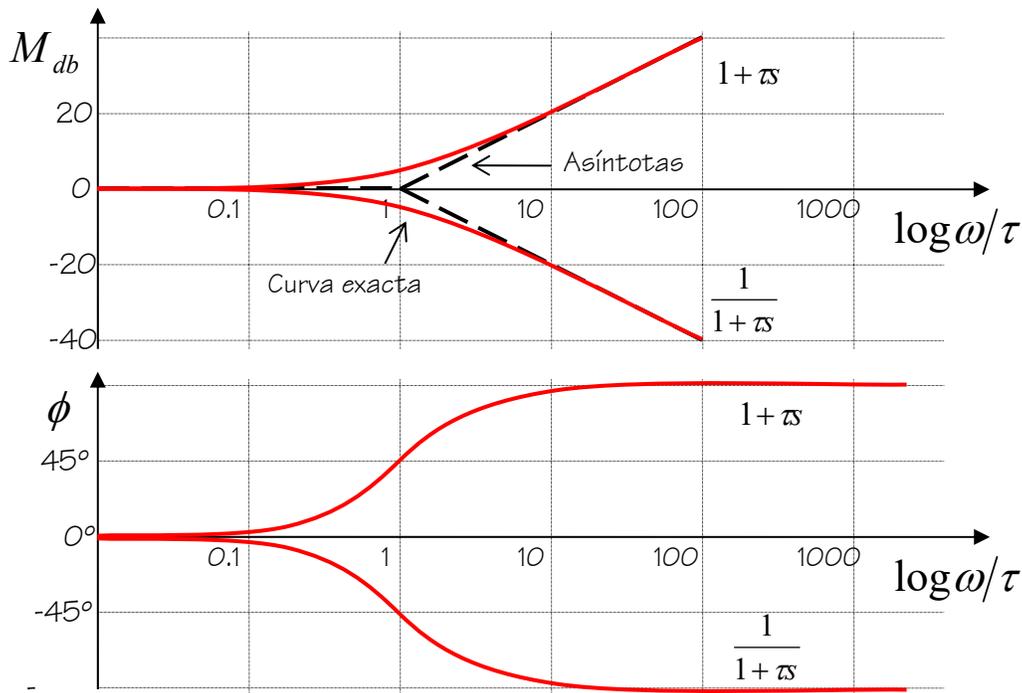
Fase:
$$\phi = \tan^{-1}(\omega\tau)$$

Se obtienen en este caso curvas idénticas pero con signo invertido

Si se requiere el valor exacto del diagrama de Bode basta con corregir el valor de la amplitud y esto se hace calculando el error en algunos puntos.

El error máximo se produce a la frecuencia de cruce y es aproximadamente igual a 3db ya que:

$$E_{\max} = -20 \log \sqrt{1+1} + 20 \log = -10 \log 2 = -3.03 \text{ db}$$



Factores de cuadráticos ($G(s) = \left(\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \right)^{\pm 1}$)

En el caso de la función de transferencia de segundo orden al sustituir a s por $j\omega$ se obtiene:

$$G(j\omega) = \left(\frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n j\omega + \omega_n^2} \right) = \left(\frac{1}{(j\omega)^2/\omega_n^2 + 2\xi j\omega/\omega_n + 1} \right) = \frac{1}{(1 - (\omega/\omega_n)^2) + j2\xi(\omega/\omega_n)}$$

Se estudiará aquí el caso en que $\xi \leq 1$, ya que en los otros casos $G(s)$ puede descomponerse en el producto de polos simples.

Amplitud: $M_{db} = -20 \log \sqrt{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + 4\xi^2(\omega/\omega_n)^2}$

- Si $\omega \ll \omega_n$ se puede aproximar a $M_{db} = 20 \log 1 = 0$ línea recta horizontal
- Si $\omega \gg \omega_n$ se puede aproximar a $M_{db} = -20 \log \sqrt{\omega^4/\omega_n^4} = -40 \log(\omega/\omega_n)$ línea recta con pendiente -40db/década

Las dos rectas anteriores son asíntotas del diagrama de amplitud, a las cuales se puede aproximar el diagrama de amplitud. La frecuencia de corte se encuentra en $\omega = \omega_n$.

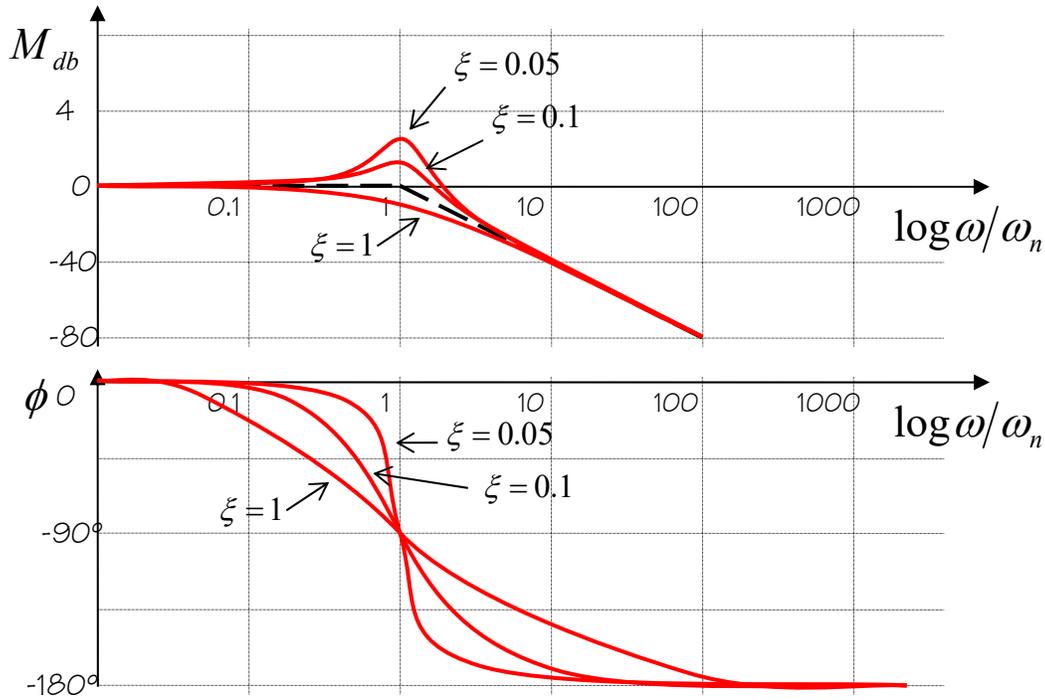
En este caso en la curva real cerca de la frecuencia de corte se produce un pico de resonancia el cual depende del valor de ξ y tiende a crecer cuando ξ decrece.

Fase: $\phi = -\tan^{-1} \frac{2\xi\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$

- $\omega = 0 \rightarrow \phi = 0^\circ$

- $\omega = \omega_n \rightarrow \phi = -90^\circ$
- $\omega = \infty \rightarrow \phi = -180^\circ$

La curva del ángulo de fase es antisimétrica respecto al punto de inflexión y también depende del valor de ξ .



El diagrama de Bode para $G(s) = \left(\frac{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}{\omega_n^2} \right)$ se puede obtener invirtiendo las curvas anteriores.

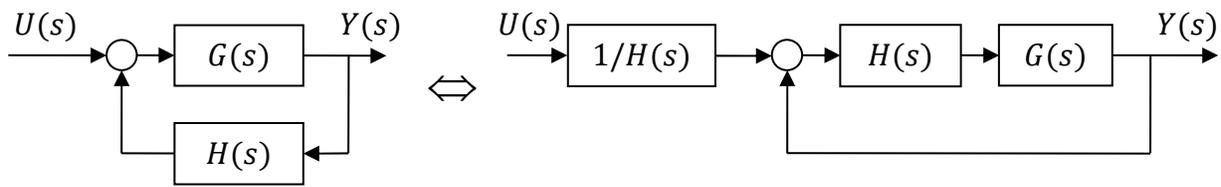
Procedimiento general para trazar diagramas de Bode

- En primer lugar se reescribe la función de transferencia sinusoidal como un producto de los factores básicos analizados anteriormente
- Luego se identifican las frecuencias de cruce asociadas con cada uno de esos factores
- Se trazan las curvas asintóticas del logaritmo de la magnitud con las pendientes adecuadas entre las frecuencias de cruce. Esto se hace sumando algebraicamente los aportes de cada uno de los factores. Si se requiere una curva exacta se puede obtener agregando las correcciones apropiadas.
- Las curvas de ángulo de fase se pueden obtener sumando las curvas de ángulo de fase de cada factor.

Análisis de estabilidad utilizando los diagramas de Bode

Esto se hace utilizando los conceptos de margen de ganancia y margen de fase que se definen a continuación.

El método permite determinar la estabilidad relativa de un sistema de control de lazo cerrado como se muestra en la figura con el simple análisis del sistema de lazo abierto $G(s)H(s)$.



Margen de ganancia (MG)

Es una medida de la estabilidad relativa, se define como la magnitud del recíproco de la función de transferencia de lazo abierto y se calcula a la frecuencia ω_c a la cual el ángulo de fase es de -180° .

$$MG = \frac{1}{|G(j\omega_c)|} = 20\log 1 - 20\log|G(j\omega_c)|$$

Donde:

$$\phi(j\omega_c) = -180^\circ = -\pi_{rad}$$

ω_c : frecuencia de cruce de fase o frecuencia crítica.

Margen de fase ($m\phi$)

Es una medida de la estabilidad relativa y se define como la suma de 180° al ángulo de fase ϕ_g de la función de transferencia de lazo abierto y ganancia unidad.

$$m\phi = (180^\circ + \phi(j\omega_g))_{grados}$$

Donde:

$$|G(j\omega_g)| = 1 \Rightarrow 20\log|G(j\omega_g)| = 0$$

ω_g se denomina frecuencia de cruce de ganancia.

Estabilidad relativa

Los conceptos de margen de ganancia y margen permiten determinar la estabilidad de un sistema según el siguiente criterio:

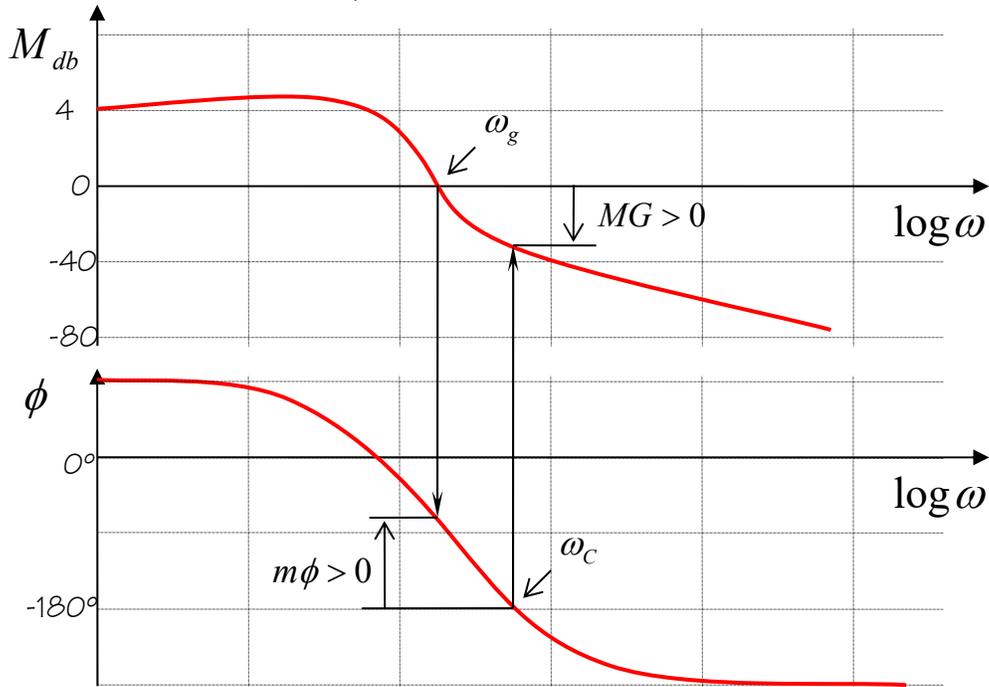
Un sistema es estable si $MG > 0$ y $m\phi > 0$

Nótese aquí que estos conceptos no solo indican la estabilidad en términos absolutos sino que permiten dar un margen de que tan lejos está un sistema de la estabilidad o inestabilidad, esto ya que entre más pequeños se hagan los valores del margen de ganancia y de fase más tendera el sistema hacia la inestabilidad y viceversa.

Procedimiento para determinar la estabilidad utilizando los diagramas de BODE

1. Se determina la frecuencia crítica (ω_c) trazando para ello una horizontal que pase por -180° hasta cortar el diagrama de fase luego se traza una vertical hasta el eje de las frecuencias.
2. Se traza una vertical que pase por ω_c y que corte el diagrama de amplitud. La diferencia entre el punto de corte con Odb da el margen de ganancia (MG).

3. Se determina la frecuencia de ganancia crítica (ω_g), trazando para ello una horizontal que pase por 0db hasta cortar el diagrama de amplitud luego se baja verticalmente hasta el eje de las frecuencias.
4. Se traza una vertical que pasa por ω_g y corte el diagrama de fase. La diferencia entre -180° y el punto de corte da el margen de fase.
5. Si $MG > 0$ y $m\phi > 0$ se dice que el sistema es estable.



6.

Comentarios sobre los márgenes de fase y ganancia

Los márgenes de fase y ganancia adecuados permiten tener una cierta seguridad en cuanto a la estabilidad del sistema cuando ocurre una variación en algún parámetro de este. Para tener un comportamiento satisfactorio el margen de fase debe estar entre 30° y 60° y el margen de ganancia debe ser superior a 6db. Esto significa que la pendiente de la curva del logaritmo de la magnitud a la frecuencia de cruce debe ser más suave que -40 db/década.

Ejemplo 2. Hacer el diagrama de Bode y analizar la estabilidad de:

$$G(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+2)(s^2+s+2)}$$

Se sustituye a s por $j\omega$ y se obtiene:

$$G(s) = \frac{10(j\omega+3)}{j\omega(j\omega+2)((j\omega)^2+j\omega+2)}$$

Por comodidad para el trazado de las graficas se rescribe la ecuación en la forma normalizada con los términos independientes iguales a 1:

$$G(s) = \frac{(10)(3)(j\omega/3+1)}{j\omega(2)(j\omega/2+1)(2)((j\omega)^2/2+j\omega/2+1)} = \frac{7.5(j\omega/3+1)}{j\omega(j\omega/2+1)((j\omega)^2/2+j\omega/2+1)}$$

Esta función se descompone en factores conocidos, que son en este caso:

$$\underbrace{7.5}_1 \quad \underbrace{\frac{1}{j\omega}}_2 \quad \underbrace{(1+j\omega/3)}_3 \quad \underbrace{\frac{1}{(1+j\omega/2)}}_4 \quad \underbrace{\frac{1}{(1+j\omega/2+(j\omega)^2/2)}}_5$$

Gráfica asintótica

Seguidamente se hace la gráfica con las asíntotas identificando las frecuencias de cruce para los factores 3, 4 y 5:

1. Amplitud: $M_{db} = 20 \log 7.5 = 17.5$: recta horizontal que pasa por 17.5

Fase: $\phi = \tan^{-1} \frac{0}{7.5} = 0^\circ$: recta horizontal que pasa por 0°

2. Amplitud: $M_{db} = 20 \log |j\omega^{-1}| = -20 \log \omega$: con pendiente $-20P$ y pasa por $M_{db} = 0$ para $\omega = 1$.

Fase: $\phi = \tan^{-1}(j\omega^{-1}) = -90^\circ$: recta horizontal que pasa por 90° .

3. Frecuencia de cruce $\omega = 1/\tau$ como $\tau = 1/3 \Rightarrow \omega = 3$

Amplitud: $M_{db} = 20 \log \left| 1 + j \frac{\omega}{3} \right| = -20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega/3} \right|$

- Si $\omega \ll 3$ se puede aproximar a $M_{db} = 20 \log 1 = 0$: línea recta horizontal
- Si $\omega \gg 3$ se puede aproximar a $M_{db} = 20 \log \frac{\omega}{3}$: línea recta con pendiente 20db/década

Fase: $\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{3} \right)$

- $\omega = 0 \rightarrow \phi = 0^\circ$
- $\omega = 1/\tau \rightarrow \phi = 45^\circ$
- $\omega = \infty \rightarrow \phi = 90^\circ$

4. Frecuencia de cruce $\omega = 2$

Amplitud: $M_{db} = 20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega\tau} \right| = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2(1/2)^2}$

- Si $\omega \ll 2$ se puede aproximar a $M_{db} = 20 \log 1 = 0$: línea recta horizontal
- Si $\omega \gg 2$ se puede aproximar a $M_{db} = 20 \log \frac{\omega}{2}$: línea recta con pendiente -20db/década

Fase: $\phi = \tan^{-1} \left(-\frac{\omega}{2} \right) = -\tan^{-1} \frac{\omega}{2}$

- $\omega = 0 \rightarrow \phi = 0^\circ$
- $\omega = 1/\tau \rightarrow \phi = -45^\circ$
- $\omega = \infty \rightarrow \phi = -90^\circ$

5. Frecuencia de cruce $\omega = \omega_n$ como $\omega_n^2 = 2 \Rightarrow \omega = \sqrt{2}$, y $\xi = 1/2\sqrt{2}$

Amplitud: $M_{db} = -20 \log \sqrt{\left(1 - (\omega/\sqrt{2})^2 \right)^2 + 4(1/2\sqrt{2})^2 (\omega/\sqrt{2})^2}$

- Si $\omega \ll \sqrt{2}$ se puede aproximar a $M_{db} = 20 \log 1 = 0$ línea recta horizontal
- Si $\omega \gg \sqrt{2}$ se puede aproximar a $M_{db} = -20 \log \sqrt{\frac{\omega^4}{2}} = -40 \log \frac{\omega}{\sqrt{2}}$ línea recta con pendiente -40db/década

$$\text{Fase: } \phi = -\tan^{-1} \frac{2\xi \omega / \sqrt{2}}{1 - (\omega / \sqrt{2})^2}$$

- $\omega = 0 \rightarrow \phi = 0^\circ$
- $\omega = \omega_n \rightarrow \phi = -90^\circ$

$$\omega = \infty \rightarrow \phi = -180^\circ$$

Grafica exacta

Para la gráfica exacta se debe calcular el valor exacto de la curva de magnitud y fase en algunos puntos adicionales, los puntos mínimos necesarios son en general los correspondientes a las frecuencias de cruce.

Magnitud

$$\text{En } \omega = \sqrt{2}$$

$$M_{db} = -20 \log 7.5 - 20 \log \sqrt{\sqrt{2}^2} + 20 \log \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} - 20 \log \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} - 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\sqrt{2}^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$M_{db} = 16.61$$

$$\text{En } \omega = 2$$

$$M_{db} = -20 \log 7.5 - 20 \log \sqrt{2^2} + 20 \log \sqrt{1^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} - 20 \log \sqrt{1^2 + \left(\frac{2}{2}\right)^2} - 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{2^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{2}\right)^2}$$

$$M_{db} = 7.06$$

$$\text{En } \omega = 3$$

$$M_{db} = -20 \log 7.5 - 20 \log \sqrt{3^2} + 20 \log \sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{3}\right)^2} - 20 \log \sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} - 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{3^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

$$M_{db} = -5.75$$

Fase

$$\text{En } \omega = \sqrt{2}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{0}{7.5}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{0}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}/3}{1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}/2}{1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}/2}{1 - \sqrt{2}^2/2}\right) = -190^\circ$$

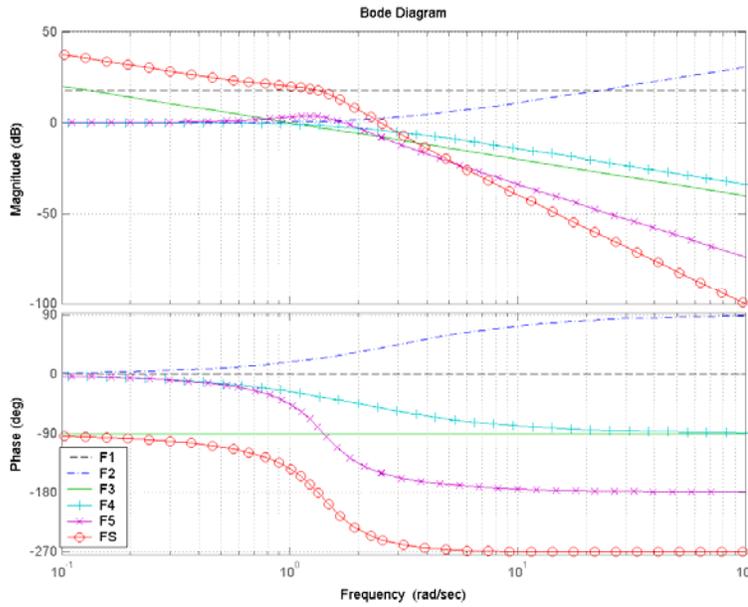
$$\text{En } \omega = 2$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{0}{7.5}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{2}{0}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{2/3}{1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{2/2}{1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{2/2}{1 - 2^2/2}\right) = -143^\circ$$

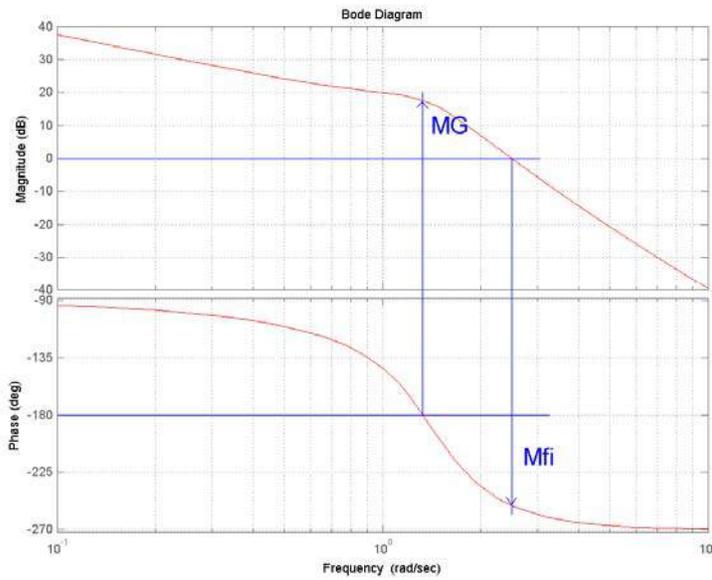
En $\omega = 3$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{0}{7.5}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{3}{0}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{3/3}{1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{3/2}{1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{3/2}{1-3^2/2}\right) = -258.11$$

Diagrama de Bode



Estabilidad en diagrama de Bode



Análisis de estabilidad

$$MG \cong -18$$

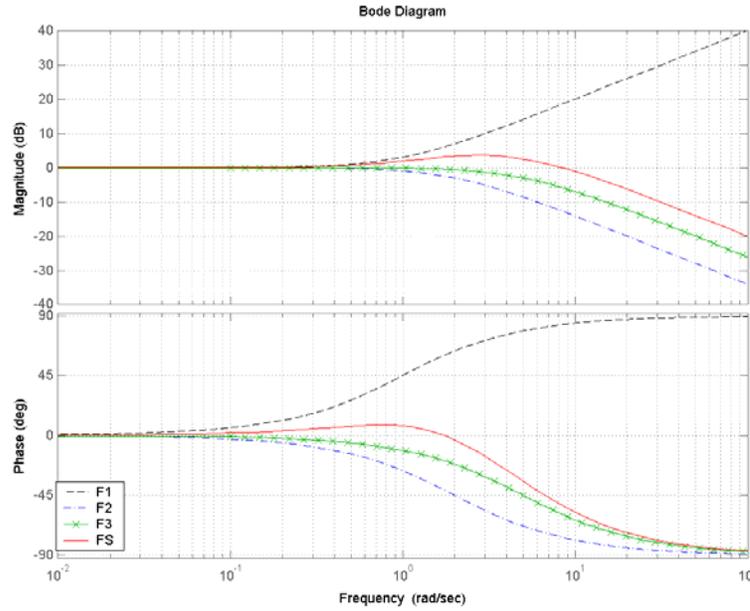
$$m\phi \cong -50^\circ$$

Por tanto el sistema es **inestable**

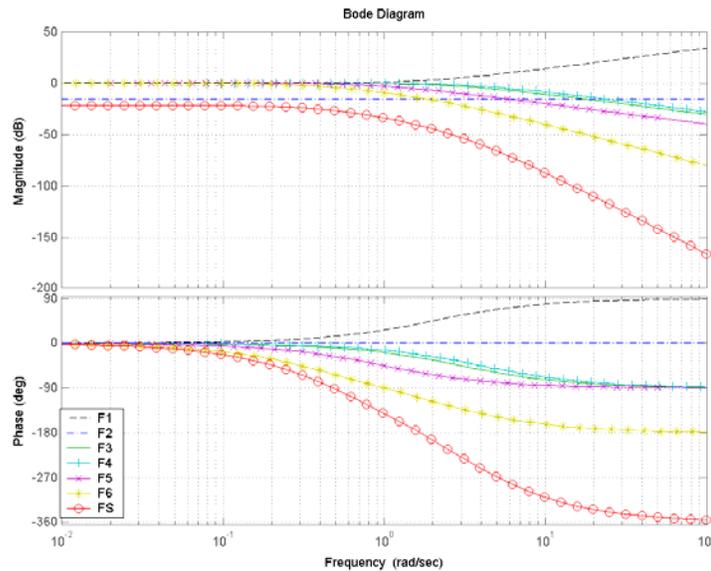
Ejercicios

Hacer el diagrama de Bode de las siguientes funciones:

$$G(s) = \frac{10(s+1)}{(s+2)(s+5)} = \frac{10s+10}{s^2+7s+10}$$



$$G(s) = \frac{(s+2)}{(s+3)(s+4)(s+1)(s^2+3s+1)} = \frac{s+2}{s^5+11s^4+44s^3+77s^2+55s+12}$$



Determine la estabilidad e las siguientes funciones mediante los diagramas de Bode.

$$G(s) = \frac{(s+2)}{(s+3)(s+4)(s+1)(s^2+3s+1)} = \frac{s+2}{s^5+11s^4+44s^3+77s^2+55s+12}$$

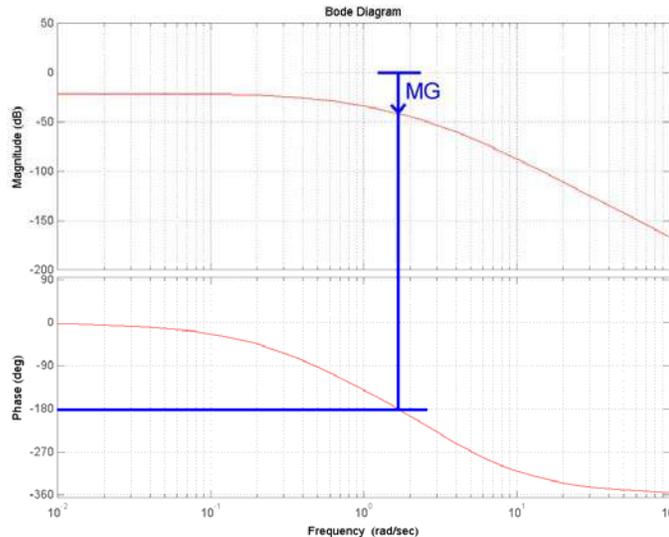


Diagrama de Nyquist

El diagrama polar comúnmente denominado diagrama de Nyquist de una función de transferencia sinusoidal $G(j\omega)$ es un diagrama de la magnitud o módulo de $G(j\omega)$ en función del ángulo de fase de $G(j\omega)$ en coordenadas polares al variar el valor de ω de menos infinito a infinito. Entonces, el diagrama polar es el lugar de los vectores $|G(j\omega)| \angle G(j\omega)$ cuando ω varía de $-\infty$ a ∞ .

La figura presenta un ejemplo de este diagrama. Cada punto en el diagrama polar de $G(j\omega)$ representa el extremo terminal de un vector para un valor determinado de ω .

Para construir el diagrama polar se calcula directamente la magnitud $|G(j\omega)|$ y el ángulo de fase $\angle G(j\omega)$ para cada frecuencia ω .

Los datos también se pueden obtener a partir del diagrama de Bode.

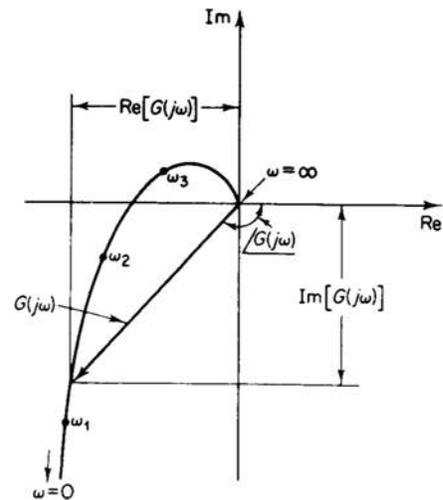
Si se requiere la multiplicación de dos funciones de transferencia sinusoidales, se puede obtener multiplicando, para cada frecuencia, las funciones de transferencia sinusoidales individuales por medio de una multiplicación algebraica compleja. Es decir:

$$\text{Si} \quad G(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega)$$

Entonces

$$|G(j\omega)| = |G_1(j\omega)| \cdot |G_2(j\omega)|$$

$$\angle G(j\omega) = \angle G_1(j\omega) + \angle G_2(j\omega)$$



En general, si se desea el diagrama polar de $G(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega)$, es conveniente trazar primero el diagrama logarítmico de $G(j\omega)$ y luego convertirlo en un diagrama polar, en lugar de dibujar los diagramas

polares de $G_1(j\omega)$ y $G_2(j\omega)$ y multiplicar ambos en el plano complejo para obtener el diagrama polar de $G(j\omega)$.

Una ventaja al utilizar un diagrama polar es que presenta las características de respuesta en frecuencia de un sistema en todo el rango de frecuencias, en un solo diagrama, la desventaja es que el diagrama no indica claramente las contribuciones de cada factor individual de la función de transferencia.

Diagramas de Nyquist de Funciones comunes

Factores integral y derivativo $G(j\omega) = (j\omega)^{\pm 1}$

El diagrama polar de $G(j\omega) = 1/j\omega$ es el eje imaginario negativo ya que:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega} \angle -90^\circ$$

El diagrama polar de $G(j\omega) = j\omega$ es el eje real positivo.

Factores de primer orden $G(j\omega) = (1 + j\omega T)^{\pm 1}$

Para la función de transferencia sinusoidal

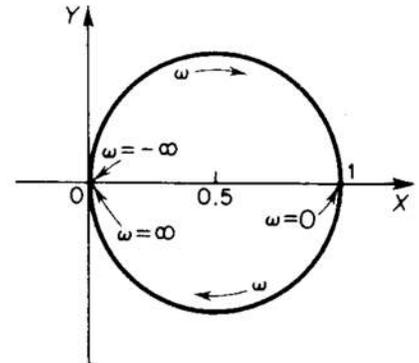
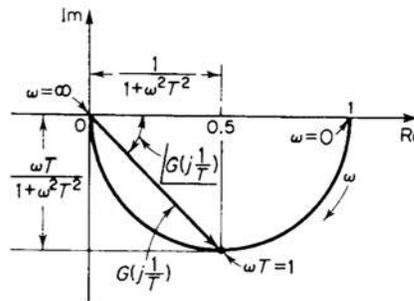
$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \angle -\tan^{-1} \omega T$$

Para $\omega = 0$: $G(j0) = 1 \angle 0^\circ$

$\omega = 1/T$:

$$G\left(j \frac{1}{T}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ$$

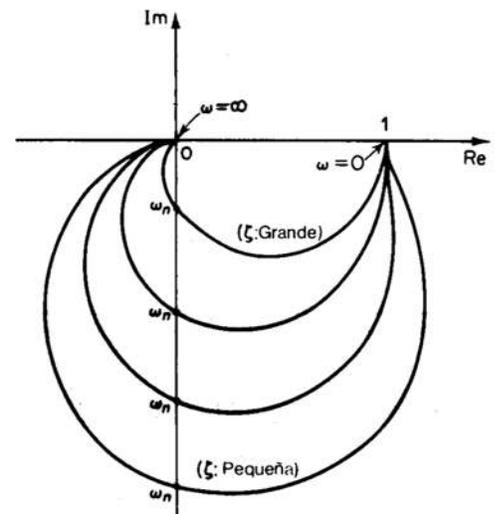
Si ω tiende a infinito, la magnitud de $G(j\omega)$ tiende a cero y el ángulo de fase tiende a -90° . El diagrama polar de esta función de transferencia es un semicírculo, con centro en 0.5 sobre el eje real y radio igual a 0.5, cuando la frecuencia ω varía de cero a infinito, como se puede ver en la figura.



El diagrama polar de la función de transferencia $G(j\omega) = 1 + j\omega T$ es simplemente la mitad superior de la recta que pasa por el punto (1, 0) en el plano complejo, y es paralela al eje imaginario. El diagrama polar de $G(j\omega) = 1 + j\omega T$ es totalmente diferente al de $G(j\omega) = 1/1 + j\omega T$.

Factores cuadráticos $G(j\omega) = (1 + 2\xi(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2)^{\pm 1}$

Las partes de alta y baja frecuencia del diagrama polar de la función de transferencia sinusoidal:



$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2} \text{ para } \xi > 0$$

Están dadas respectivamente por:

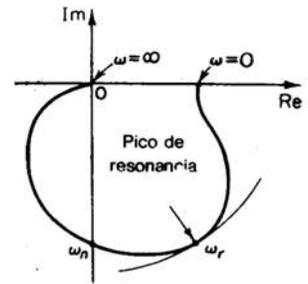
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = 1 \angle 0^\circ \text{ y } \lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = 0 \angle -180^\circ$$

El diagrama polar de esta función de transferencia sinusoidal comienza en $1/0^\circ$ y finaliza en $0/180^\circ$ al aumentar ω de cero a infinito. Esto indica que la porción de alta frecuencia de $G(j\omega)$ es tangente al eje real negativo.

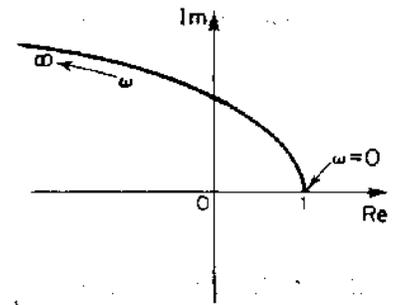
La figura presenta ejemplos de diagramas polares de esta función de transferencia. La forma exacta del diagrama polar depende del valor de la relación de amortiguamiento ξ , pero la forma general es la misma, tanto para el caso subamortiguado ($1 > \xi > 0$) como para el sobreamortiguado ($\xi > 1$).

Para el caso subamortiguado en $\omega = \omega_n$ se tiene que el ángulo de fase es -90° . Por tanto, se puede ver que la frecuencia a la cual el diagrama corta al eje imaginario, es la frecuencia natural.

El punto del diagrama polar cuya distancia al origen es máxima, corresponde a la frecuencia de resonancia ω_r .



Para el caso sobreamortiguado, al incrementar ξ más allá de la unidad, el lugar de $G(j\omega)$ tiende a ser un semicírculo, lo que resulta del hecho de que para un sistema fuertemente amortiguado las raíces características son reales, y una de ellas es mucho más pequeña que la otra. Como para un valor de ξ suficientemente alto la raíz más grande de la respuesta se hace muy pequeña, el sistema se comporta como uno de primer orden.



Para la función de transferencia sinusoidal

$$G(j\omega) = 1 + 2\xi \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) + j \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n} \right)$$

La porción de baja frecuencia de la curva es: $\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = 1 \angle 0^\circ$

La porción de alta frecuencia es: $\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = \infty \angle 180^\circ$

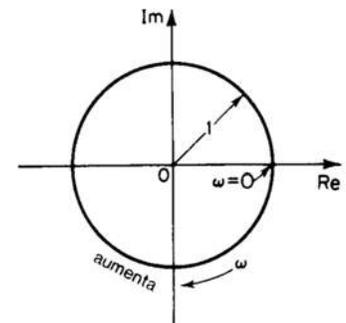
Como la parte imaginaria de $G(j\omega)$ es positiva y crece en forma monótona para $\omega > 0$, y la parte real de $G(j\omega)$ decrece en forma monótona a partir de la unidad, la forma general del diagrama polar de $G(j\omega)$ es como aparece en la figura. El ángulo de fase está entre 0° y 180° .

Retardo de transporte.

El retardo de transporte, o tiempo muerto $G(j\omega) = e^{-j\omega T}$, se puede escribir como:

$$G(j\omega) = 1 \angle \cos \omega T - j \sin \omega T$$

Como la magnitud de $G(j\omega)$ es siempre la unidad, y el ángulo de fase varía linealmente con ω el diagrama polar del retardo de transporte es un círculo unitario, como se puede ver en la figura.



Formas generales de los diagramas polares

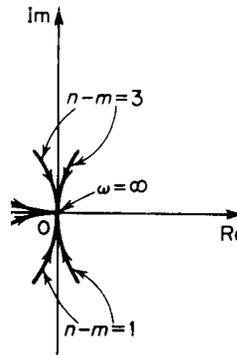
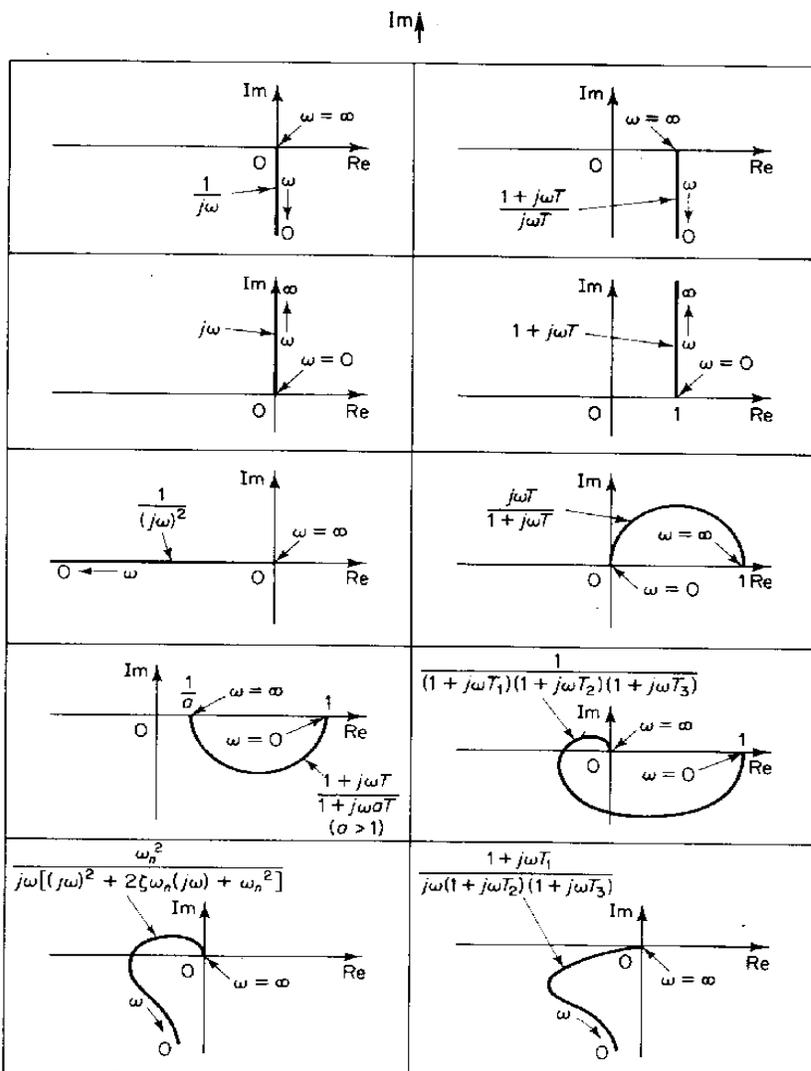
Los diagramas polares de una función de transferencia de la forma:

$$G(j\omega) = \frac{b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \dots}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots} = \frac{K(1 + j\omega T_a)(1 + j\omega T_a) \dots}{(j\omega)^\lambda (1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2) \dots}$$

Donde $n > m$ o el grado del polinomio denominador es mayor que el del numerador, tendrán las siguientes formas generales:

1. Para $\lambda = 0$ o sistemas tipo 0: el punto de inicio del diagrama polar (que corresponde a $\omega = 0$) es finito y está sobre el eje real positivo. La tangente al diagrama polar en $\omega = 0$ es perpendicular al eje real. El punto terminal, que corresponde a $\omega = \infty$, está en el origen y la curva es tangente a uno de los ejes.
2. Para $\lambda = 1$ o sistemas de tipo 1: el término $j\omega$ en el denominador contribuye con -90° al ángulo de fase total de $G(j\omega)$ para $0 \leq \omega \leq \infty$. Para $\omega = 0$, la magnitud de $G(j\omega)$ es infinita, y el ángulo de fase es igual a menos 90° . A frecuencias bajas, el diagrama polar es asintótico a una línea paralela al eje imaginario negativo. En $\omega = \infty$, la magnitud es cero, la curva converge hacia el origen y es tangente a uno de los ejes.
3. Para $\lambda = 2$ o sistemas de tipo 2: el término $(j\omega)^2$ en el denominador contribuye con -180° al ángulo de fase total de $G(j\omega)$ para $0 \leq \omega \leq \infty$. En $\omega = 0$ la magnitud de $G(j\omega)$ es infinita, y el ángulo de fase es igual a menos 180° . A frecuencias bajas, el diagrama polar es asintótico a una línea paralela al eje real negativo. En $\omega = \infty$, la magnitud se hace cero, y la curva es tangente a uno de los ejes.

En la figura se pueden ver las formas generales de las porciones de baja frecuencia de los diagramas polares de los sistemas de tipo 0, tipo 1 y tipo 2.



as frecuencias

de los sistemas de tipo 0, tipo 1 y tipo 2.

Nótese que si el grado del polinomio denominador de $G(j\omega)$ es mayor que el del numerador, los lugares de $G(j\omega)$ convergen hacia el origen en sentido horario. En $\omega = \infty$, los lugares son tangentes a uno de los ejes, como se ve en la figura para altas frecuencias.

La tabla siguiente muestra diagramas polares de diversas funciones de transferencia comunes.

Ejemplos

1. Considere la siguiente función de transferencia de segundo orden:

$$G(s) = \frac{1}{s(Ts + 1)}$$

Trace el diagrama polar para esta función de transferencia.

Como la función de transferencia sinusoidal se puede escribir como

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1 + j\omega T)} = -\frac{T}{1 + \omega^2 T^2} - j\frac{1}{\omega(1 + \omega^2 T^2)}$$

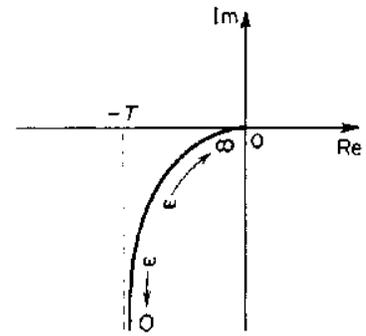
La porción de baja frecuencia del diagrama polar es:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = -T - j\infty = \infty \angle -90^\circ$$

La porción de alta frecuencia es:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = 0 - j0 = 0 \angle -180^\circ$$

En la figura aparece la forma general del diagrama polar de $G(j\omega)$. Este es asintótico a la línea vertical que pasa por el punto $(-T, 0)$. Como esta función de transferencia incluye un integrador ($1/s$), la forma general del diagrama polar difiere de las funciones de transferencia de segundo orden que no tienen un integrador.



2. Obtenga el diagrama polar de la función de transferencia siguiente:

$$G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega L}}{1 + j\omega T} = \left(e^{-j\omega L} \right) \cdot \left(\frac{1}{1 + j\omega T} \right)$$

La magnitud y el ángulo de fase son, respectivamente,

$$|G(j\omega)| = |e^{-j\omega L}| \cdot \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

y

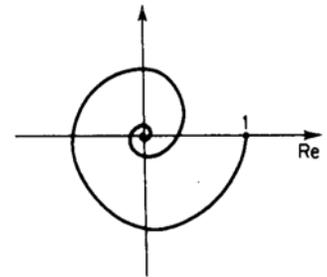
$$\angle G(j\omega) = \angle(e^{-j\omega L}) + \angle\left(\frac{1}{1 + j\omega T}\right) = -\omega L - \tan^{-1} \omega T$$

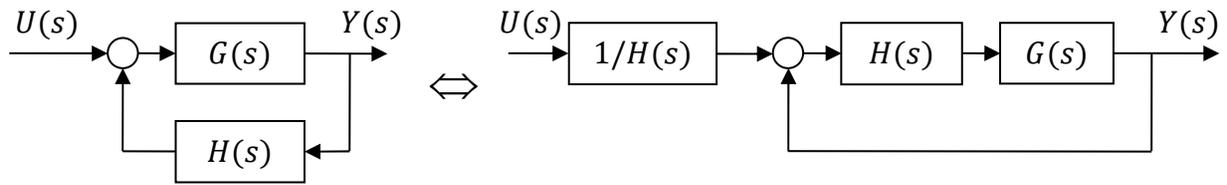
Como la magnitud decrece en forma monótona a partir de la unidad y el ángulo de fase también decrece monótona e indefinidamente, el diagrama polar de la función de transferencia dada es una espiral, como aparece en la figura.

Nótese que en los ejemplos mostrados anteriormente se desarrolló el diagrama polar para una frecuencia ω entre 0 e infinito. El diagrama polar para una frecuencia entre menos infinito y cero será la imagen espejo respecto al eje real del diagrama para frecuencias de cero a infinito. Y el diagrama entre infinito y menos infinito será siempre el origen de coordenadas.

Análisis de estabilidad utilizando diagramas de Nyquist

El criterio de estabilidad de Nyquist permite determinar la estabilidad relativa de un sistema de control de lazo cerrado como se muestra en la figura con el simple análisis del diagrama de Nyquist del sistema de lazo abierto $G(s)H(s)$.

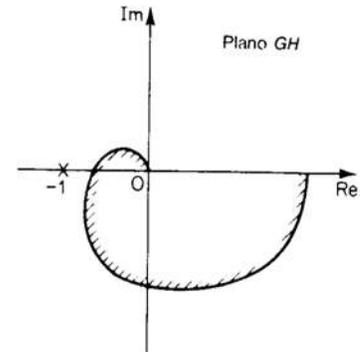




Criterio de estabilidad de Nyquist

(Para un caso especial en que $G(s)H(s)$ no tiene polos ni ceros sobre el eje $j\omega$)

En el sistema que aparece en la figura, si la función de transferencia de lazo abierto $G(s)H(s)$ tiene k polos en el semiplano derecho del plano s y $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s)H(s) = Cte$, entonces para que haya estabilidad, la gráfica de $G(j\omega)H(j\omega)$ al variar ω de $-\infty$ a ∞ debe rodear k veces al punto $-1 + j0$ en sentido anti horario.



Observaciones sobre el criterio de estabilidad de Nyquist

1. Este criterio se puede expresar como $Z = N + P$

Donde:

Z = cantidad de ceros de $1 + G(s)H(s)$ en el semiplano derecho del plano s

N = cantidad de rodeos alrededor del punto $-1 + j0$ en sentido horario

P = cantidad de polos de $G(s)H(s)$ en el semiplano derecho del plano s

Si P no es cero, para que un sistema de control sea estable, se debe tener $Z = 0$, o $N = -P$, lo que significa que hay que tener P rodeos antihorarios alrededor del punto $-1 + j0$.

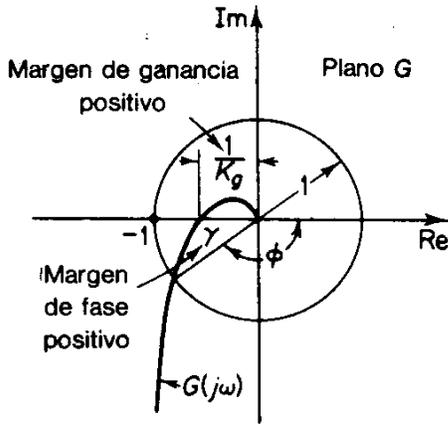
Si $G(s)H(s)$ no tiene polos en el semiplano derecho del plano s , entonces $Z = N$. Por lo tanto, para que haya estabilidad, no debe haber rodeos alrededor del punto $-1 + j0$ por parte de la gráfica $G(j\omega)H(j\omega)$. En este caso no es necesario considerar la gráfica para el eje $j\omega$ completo, pues basta solamente con la porción de frecuencia positiva. La estabilidad de tal sistema se puede determinar viendo si el punto $-1 + j0$ queda rodeado por el diagrama de Nyquist de $G(j\omega)H(j\omega)$. En la figura se puede ver la región encerrada por el diagrama de Nyquist. Para que haya estabilidad, el punto $-1 + j0$ debe quedar fuera de la región sombreada.

2. Se debe tener mucho cuidado al verificar la estabilidad de sistemas con lazos múltiples, ya que pueden incluir polos en el semiplano derecho del plano s . (Nótese que aunque un lazo interior sea inestable, se puede hacer que todo el sistema de lazo cerrado sea estable con un diseño adecuado). Para determinar la inestabilidad de sistemas con lazos múltiples no basta la simple inspección de los rodeos alrededor del punto $-1 + j0$ por la gráfica $G(j\omega)H(j\omega)$. En esos casos, sin embargo, se puede determinar fácilmente si hay o no algún polo de $1 + G(s)H(s)$ en el semiplano derecho del plano s , al aplicar el criterio de estabilidad de Routh al denominador de $G(s)H(s)$.
3. Si el lugar de $G(j\omega)H(j\omega)$ pasa por el punto $-1 + j0$, hay ceros de la ecuación característica o polos de lazo cerrado, ubicados sobre el eje $j\omega$. Esto no es deseable para sistemas de control prácticos. En un sistema de control de lazo cerrado bien diseñado, ninguna de las raíces de la ecuación característica debe quedar sobre el eje $j\omega$.

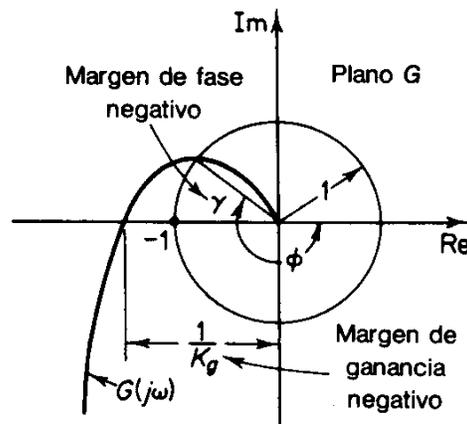
En los diagramas de Nyquist se puede obtener también en forma gráfica los valores del margen de ganancia y del margen de fase definidos para los diagramas de Bode, la obtención de estos valores se muestra en la figura siguiente.

Al examinar la estabilidad de los sistemas de control lineales utilizando el criterio de estabilidad de Nyquist, se pueden presentar tres posibilidades:

1. No hay rodeo del punto $-1 + j0$. Esto implica que el sistema es estable si no hay polos de $G(s)H(s)$ en el semiplano derecho del plano s ; en caso contrario, el sistema es inestable.
2. Hay un rodeo en sentido anti horario o rodeos del punto $-1 + j0$. En este caso el sistema es estable si la cantidad de rodeos antihorarios es la misma que la cantidad de polos de $G(s)H(s)$ en el semiplano derecho del plano s ; en caso contrario, el sistema es inestable.
3. Hay un rodeo o rodeos del punto $-1 + j0$ en sentido horario. En este caso, el sistema es inestable.



Sistema Estable



Sistema Inestable

Ejemplos

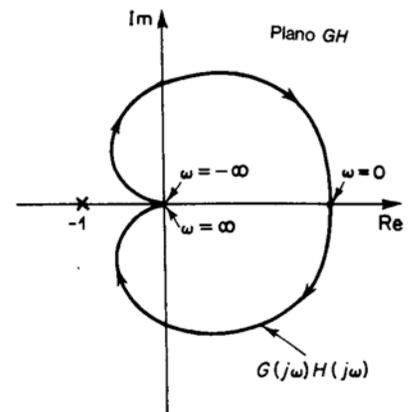
En los ejemplos siguientes, se supone que los valores de la ganancia K y de las constantes de tiempo (como T , T_1 , y T_2) son todos positivos.

1. Considere un sistema cuya función de transferencia de lazo abierto está dada por:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

Examine la estabilidad del sistema.

La figura muestra un diagrama de Nyquist de $G(j\omega)H(j\omega)$. Como $G(s)H(s)$ no tiene ningún polo en el semiplano derecho del plano s , y el punto $-1 + j0$ no está rodeado por el lugar de $G(j\omega)H(j\omega)$, este sistema es estable para cualquier valor positivo de K , T_1 , y T_2 .



2. Considere el sistema con la siguiente función de transferencia de lazo abierto:

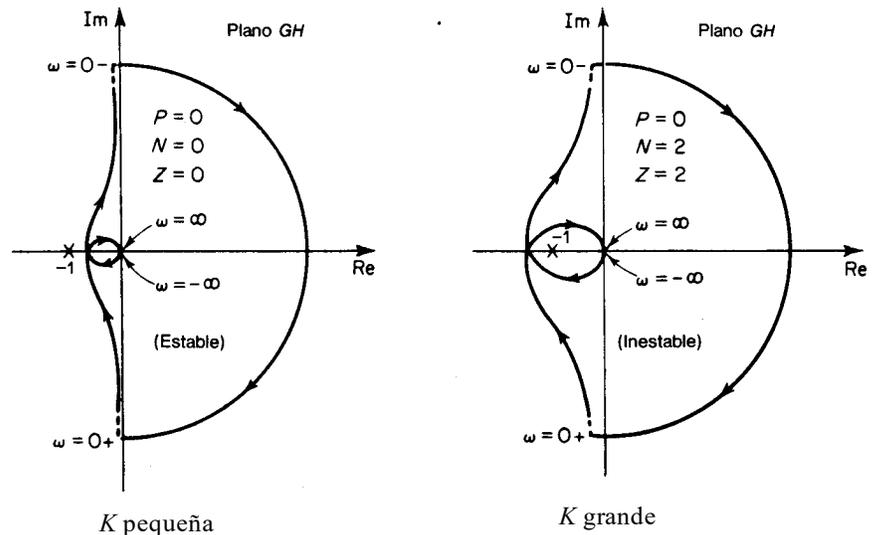
$$G(s) = \frac{K}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

Determine la estabilidad del sistema para dos casos:

- (1) la ganancia K es pequeña,
- (2) K es grande.

En la figura aparecen los diagramas de Nyquist de la función de transferencia de lazo abierto con un valor pequeño de K y un valor grande de K .

La cantidad de polos de $G(s)H(s)$ en el semiplano derecho del plano s es cero. Por lo tanto, para que este sistema sea estable, es necesario que $N = Z = 0$ o que el lugar de $G(s)H(s)$ no rodee al punto $-1 + j0$.



Para valores pequeños de K , no hay rodeo al punto $-1 + j0$. Por lo tanto, el sistema es estable. Para valores grandes de K , el lugar de $G(s)H(s)$ rodea al punto $-1 + j0$ dos veces en sentido horario, lo que indica dos polos en el semiplano derecho del plano s y el sistema es inestable. Para lograr buena exactitud, K debe ser grande. Sin embargo, desde el punto de vista de la estabilidad un valor elevado de K brinda estabilidad pobre, incluso inestabilidad. Se debe hallar una solución de compromiso entre exactitud y estabilidad.

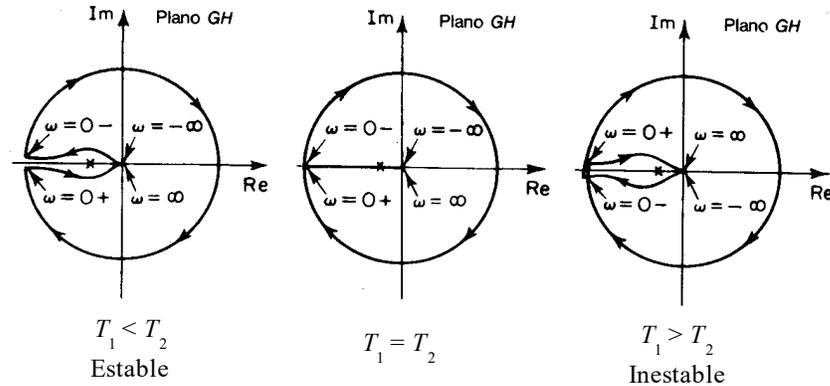
3. La estabilidad de un sistema de lazo cerrado con la siguiente función de transferencia de lazo abierto

$$G(s)H(s) = \frac{K(T_2s + 1)}{s^2(T_1s + 1)}$$

depende de las magnitudes relativas de T_1 y T_2 .

Trace los diagramas de Nyquist y determine la estabilidad del sistema.

En la figura se muestran diagramas de $G(s)H(s)$ para tres casos, $T_1 < T_2$, $T_1 = T_2$, y $T_1 > T_2$.



Para $T_1 < T_2$, el lugar de $G(s)H(s)$ no rodea al punto $-1 + j0$, y el sistema de lazo cerrado es estable.

Para $T_1 = T_2$, el lugar de $G(s)H(s)$ pasa por el punto $-1 + j0$, lo que indica que los polos de lazo cerrado están ubicados sobre el eje $j\omega$.

Para $T_1 > T_2$, el lugar de $G(s)H(s)$ rodea al punto $-1 + j0$ dos veces en sentido horario. Entonces, el sistema de lazo cerrado tiene dos polos de lazo cerrado en el semiplano derecho del plano s , el sistema es inestable.

4. Considere el sistema de lazo cerrado con la siguiente función de transferencia de lazo abierto

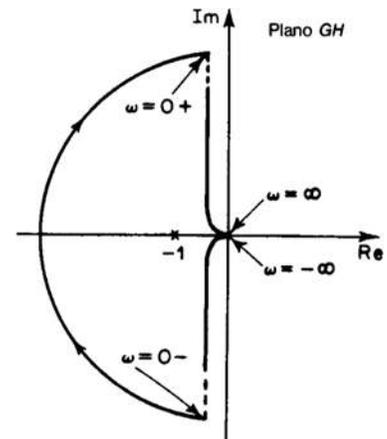
$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(Ts - 1)}$$

Determine la estabilidad del sistema.

La función $G(s)H(s)$ tiene un polo ($s = 1/T$) en el semiplano derecho del plano s . Por tanto, $P = 1$.

El diagrama de Nyquist de la figura indica que el punto $-1 + j0$ es rodeado una vez en sentido horario por la gráfica de $G(s)H(s)$.

Entonces $N = 1$. Como $Z = N + P$, resulta que $Z = 2$.



Esto significa que el sistema de lazo cerrado tiene dos polos de lazo cerrado en el semiplano derecho del plano s y es inestable.

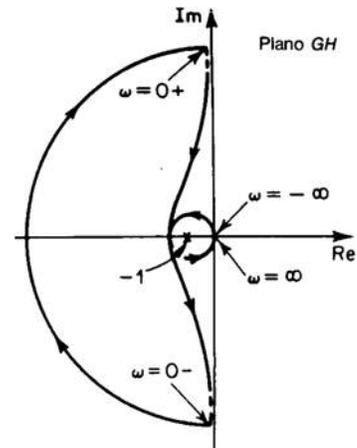
5. Determine la estabilidad de un sistema de lazo cerrado que tiene la siguiente función de transferencia de lazo abierto:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+3)}{s(s-1)}$$

La función de transferencia de lazo abierto tiene un polo ($s = 1$) en el semiplano derecho del plano s ,

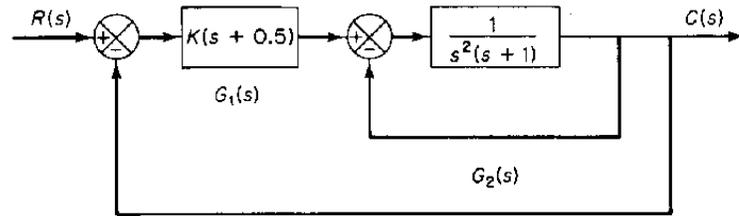
o sea $P = 1$. El sistema de lazo abierto es inestable.

El diagrama de Nyquist que se ve en la figura indica que el punto $-1 + j0$ es rodeado por la gráfica de $G(s)H(s)$ una vez en sentido



antihorario. Por lo tanto, $N = -1$. Entonces, se determina que $Z = N + P$ es igual a cero, lo que indica que no hay cero de $1 + G(s)H(s)$ en el semiplano derecho del plano s , y el sistema de lazo cerrado es estable. Este es uno de los ejemplos donde un sistema inestable de lazo abierto se vuelve estable cuando se cierra el lazo.

6. Considere el sistema de control de la figura, que incluye dos lazos.



Se pide determinar el rango de ganancia K que hace al sistema estable utilizando el criterio de estabilidad de Nyquist. (La ganancia K es positiva).

Para examinar la estabilidad del sistema de control, hay que trazar el lugar de Nyquist de $G(s)$, donde

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)$$

Sin embargo, en este punto no se conocen los polos de $G(s)$. Por lo tanto, hay que examinar el lazo menor por posible presencia de polos en el semiplano positivo del plano s . Esto es fácil de realizar utilizando el criterio de estabilidad de Routh. Como:

$$G_2(s) = \frac{1}{s^3 + s^2 + 1}$$

La tabla de Routh es:

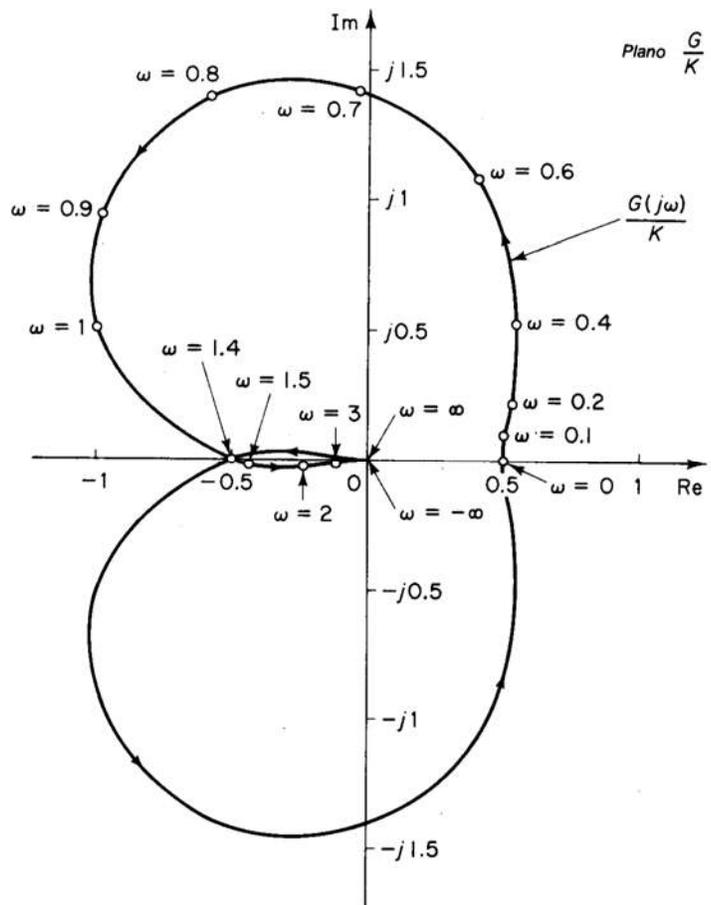
s^3	1	0	0
s^2	1	1	0
s	-1	0	0
s^0	1	0	0

Nótese que hay dos cambios de signo en la primera columna. Por lo tanto, hay dos polos de $G_2(s)$ en el semiplano derecho del plano s .

Una vez hallada la cantidad de polos de $G_2(s)$ en el semiplano derecho del plano s se traza el diagrama de Nyquist de $G(s)$, donde:

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{K(s + 0.5)}{s^3 + s^2 + 1}$$

El problema consiste en determinar el rango de ganancia K para la estabilidad. Por tanto, en lugar de



trazar los diagramas de Nyquist de $G(j\omega)$ para diversos valores de K , se dibuja el diagrama de Nyquist de $G(j\omega)/K$. En la figura se puede ver un diagrama de Nyquist o diagrama polar de $G(j\omega)/K$.

Como $G(s)$ tiene dos polos en el semiplano derecho del plano s , se tiene que $P_1 = 2$. Como $Z_1 = N_1 + P_1$, para la estabilidad se requiere que $Z_1 = 0$ o $N_1 = -2$.

Es decir, el diagrama de Nyquist de $G(j\omega)/K$ debe rodear al punto $-1 + j0$ dos veces en sentido anti horario. De la figura se ve que, si el punto crítico queda entre 0 y -0.5 , entonces el diagrama de $G(j\omega)/K$ rodea al punto crítico dos veces en sentido antihorario. Por lo tanto, se requiere que $-0.5K < -1$

Entonces el rango de ganancia de K por condición de estabilidad es $2 < K$.

Tema 8. Controlabilidad y Observabilidad

La controlabilidad y la observabilidad son dos conceptos desarrollados para la representación de sistemas en espacio de estado, estos permiten caracterizar respectivamente la capacidad del control para ejercer una influencia sobre alguno sus estados y la posibilidad de extraer una información de alguno de sus estados mediante un observador. Sin embargo estos conceptos se pueden extender a otras representaciones.

Los métodos para la determinación de estas características de los sistemas varían según el tipo de sistema. En este se estudia solo lo correspondiente a los Sistemas Lineales Invariantes en el tiempo (LTI).

Controlabilidad

La controlabilidad es una característica de un sistema, generalmente representado por un modelo en espacio de estado, que nos indica si la evolución de una o varias de sus dinámicas (estados) pueden ser modificadas por las entradas del sistema (control).

Definición

Un estado x_i es controlable en t_0 siempre que se pueda determinar una entrada $u(t)$ que conduzca todo estado inicial $x_i(t_0)$ hacia 0 en un tiempo $t_0 \leq t_1 \leq t_f$.

Si esta propiedad se cumple $\forall t$ y $\forall i = 1, \dots, n$ entonces se dice que el sistema es completamente controlable.

Notas:

- Si un sistema no es completamente controlable entonces para algunas condiciones iniciales no existe ninguna entrada capaz de llevar el sistema al origen.
-
- La controlabilidad es una noción de suma importancia puesto que nos permite determinar si es posible controlar un sistema para modificar su comportamiento (estabilización de un sistema inestable, modificación de las dinámicas propias del sistema). Y es por ello que es fundamental en la teoría de la síntesis de controladores en espacio de estado.

Criterio de Controlabilidad (Kalman)

Este es un criterio que permite definir si los estados de un sistema LTI son controlables, considerando para ello las matrices A y B del sistema.

Un sistema LTI representado por la ecuación de estado,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

donde $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, es controlable si y solo si la matriz de controlabilidad C tiene rango n ,

$$\text{rango}(C) = \text{rango}([B : AB : \dots : A^{n-1}B]) = n$$

Nota. La controlabilidad de un sistema de matrices características A y B se denominara controlabilidad del par A, B .

Rango de una matriz.

El rango de una matriz se define como el número máximo de vectores líneas (o columnas) linealmente independientes. Este se puede calcular mediante la dimensión del más grande de los menores principales no nulos de la matriz.

Ejemplo 1. Para el sistema mecánico estudiado en el ejemplo 6 del tema 3:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax(t) + Bu(t) & x(t_0) &= x_0 \\ y &= Cx(t)\end{aligned}$$

Con:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{C}{M} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ M \end{bmatrix}; \quad C = [1 \quad 0]$$

La matriz de controlabilidad es:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{M} \\ \frac{1}{M} & -\frac{C}{M^2} \end{bmatrix}$$

Como:

$$|C| = -\frac{1}{M^2} \neq 0 \Rightarrow \text{rango}(C) = 2$$

Y como $n = 2$, entonces esta representación de estado del sistema es controlable.

Ejemplo 2. Para el sistema térmico estudiado en el ejemplo 3 del tema 3:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_c} - \frac{1}{R_2 C_c} & \frac{1}{R_2 C_c} & 0 \\ \frac{1}{R_2 C_v} & -\frac{1}{R_2 C_v} - \frac{1}{R_3 C_v} & \frac{1}{R_3 C_v} \\ 0 & \frac{1}{R_3 C_{Hg}} & -\frac{1}{R_3 C_{Hg}} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C = [0 \quad 0 \quad 1]$$

Y considerando los valores siguientes: $R_1 = R_2 = R_3 = 1; C_c = C_v = C_{Hg} = 1$

Obtenemos las matrices siguientes para el cálculo de la matriz de controlabilidad:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad AB = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad A^2 B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de controlabilidad será entonces:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Como: $\det C = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rango}(C) = 3$ entonces esta representación de estado del sistema es controlable.

Ejemplo 3. : Para el sistema representado por las matrices A y B siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculamos las matrices que permiten determinar la matriz de controlabilidad:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de controlabilidad es entonces:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de controlabilidad tiene rango 2, puesto que las dos últimas líneas son idénticas, y por tanto solo se pueden determinar menores principales diferentes de cero de dimensión 2. Por lo tanto esta representación de estado **No es Controlable**.

Nota: No se requiere la construcción de la matriz de controlabilidad C más allá de la dimensión $n \times n$.

Observabilidad

La observabilidad es una característica estructural complementaria de una representación de estado de un sistema, o del sistema en sí mismo, que nos indica la capacidad de poder estimar los valores históricos de un estado partiendo del conocimiento de las variables de salida y entrada del sistema.

Definición

Un estado x_i es observable en t_0 siempre que sea posible determinar $x_i(t_0)$ conociendo a $y(t)$.

Si esta propiedad se cumple $\forall t$ y $\forall i = 1, \dots, n$ entonces el sistema es completamente observable.

Nota: La noción de observabilidad es crucial para los sistemas donde es imposible medir la totalidad del vector de estado, y en consecuencia se requiere de la estimación de este a partir de las variables de salida.

Criterio de Observabilidad (Kalman)

La determinación de la observabilidad de un sistema LTI depende de las matrices A y C del sistema.

Un sistema LTI representado por la ecuación dinámica de estado y la ecuación de salida:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

Donde $A \in R^{n \times n}$, $C \in R^{r \times n}$, es observable si y solo si la matriz de observabilidad \mathcal{O} tiene rango n :

$$\text{rango}(\mathcal{O}) = \text{rango} \begin{pmatrix} C \\ \dots \\ CA \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n$$

Ejemplo 4. Para el sistema mecánico estudiado en el ejemplo 1, donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{C}{M} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \quad 0]$$

La matriz de observabilidad es:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como $|\mathcal{O}| = 1 \neq 0$ el rango de $\mathcal{O} = 2$ por lo tanto el sistema es observable.

Ejemplo 5: para el sistema térmico estudiado en el ejemplo 2, donde:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad C = [0 \quad 0 \quad 1]$$

Se calculan las matrices necesarias para la determinación de la matriz de observabilidad:

Jean-François DULHOSTE

$$CA = [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = [0 \ 1 \ -1]$$

$$CA^2 = [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = [1 \ -3 \ 1]$$

La matriz de observabilidad es:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Como $|\mathcal{O}| = 1 \neq 0$ el rango de $\mathcal{O} = 3$ por lo tanto el sistema es observable.

Dualidad

Se dice que las propiedades de Observabilidad y Controlabilidad son dos nociones duales, puesto que son propiedades intercambiables para sistemas duales adjuntos. Para explicar esto consideremos dos sistemas S y S^* definidos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) + Bu(t) & \dot{x}^* &= A^T x^*(t) + C^T u^*(t) \\ y &= Cx(t) & y^* &= B^T x^*(t) \end{aligned}$$

S^* se denomina sistema dual adjunto de S , puesto que está hecho con las mismas matrices pero transpuestas e intercambiando la posición de C y B .

Se puede demostrar que S es controlable si y solo si S^* es observable y que S es observable si y solo si S^* es controlable.

De hecho S^* es observable si y solo si:

$$[B^T : B^T A^T : B^T (A^T)^2 : \dots : B^T (A^T)^{n-1}]^T$$

Tiene rango n , es decir si y solo si

$$[B : AB : A^2 B : \dots : A^{n-1} B]^T \quad \text{O sea que } S \text{ sea controlable.}$$

Teoría de la realización

Se denomina realización de una matriz de transferencia $G(s) \in \mathbb{C}^{r \times m}$, a toda representación de estado (A, B, C, D) obtenida con la expresión:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Cuando la realización (A, B, C, D) tiene un orden mínimo n ($x \in \mathbb{R}^n$) esta se denomina realización mínima o irreductible.

El ejemplo siguiente muestra como la obtención de una realización influye notoriamente en las propiedades de observabilidad y controlabilidad del modelo en espacio de estado obtenido.

Ejemplo 6. Consideremos la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+3s+2} = \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2}$$

Dependiendo de si se utiliza la función de transferencia simplificada o no, se pueden obtener las cuatro realizaciones siguientes para $G(s)$.

- No observable y no controlable:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_1 = [0 \quad 1]$$

- Observable y no controlable:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_2 = [0 \quad 1]$$

- Controlable y no observable:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_3 = [1 \quad 1]$$

- Observable y controlable:

$$A_4 = [-2] \quad B_4 = [1] \quad C_4 = [1]$$

Se observa que la cuarta realización es mínima mientras que las otras tres no lo son.

El ejemplo muestra que por un lado las representaciones de estado no son equivalentes entre sí, y por otro lado que la simplificación de un polo con un cero está estrechamente a las propiedades de observabilidad y controlabilidad de la realización obtenida.

De esto se deduce que: Una realización de estado (A, B, C, D) de $G(s)$ es mínima si y solo si esta es observable y controlable.

Formas canónicas de representación de estado

El hecho de disponer de diferentes representaciones de estado para un mismo sistema, dado que el vector de estado no es único (ver no unicidad del conjunto de variables de estado en tema 3), es una ventaja sustancial de la representación de estado pues permite utilizar formas particulares de la misma, denominadas formas canónicas, cada una de las cuales presentan ciertas ventajas.

Mencionaremos aquí tres de las forma canónicas conocidas:

- La forma diagonal o cuasi-diagonal de Jordan.
- La forma de controlabilidad.
- La forma de observabilidad.

Forma Modal o Diagonal de Jordan.

En el caso de una función de transferencia de orden n , estrictamente propia, que posee polos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ reales y diferentes (matriz $A \in R^{n \times n}$ con n valores propios distintos), se puede descomponer la función de transferencia en fracciones parciales:

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} = \left[c_0 + \frac{c_1}{s - \lambda_1} + \frac{c_2}{s - \lambda_2} + \dots + \frac{c_n}{s - \lambda_n} \right]$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y(s)}{\prod_{i=1}^n (s - \lambda_i)} = c_0 + \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s - \lambda_i}$$

Y en este caso se puede obtener una realización, donde la matriz A tenga una forma diagonal:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \quad D = [c_0]$$

En el caso particular de polos reales conjugados, se puede realizar la siguiente transformación para obtener una matriz A de términos reales:

$$\begin{bmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha + i\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -i/2 \\ 1/2 & i/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$$

Forma cuasi-diagonal de Jordan

En el caso que la función de transferencia del sistema posea polos reales repetidos ($1/(s - \lambda)^{n'}$), la realización es irreducible a un esquema paralelo, puesto que la descomposición de la función de transferencia en fracciones parciales es:

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} = \left[\frac{c_1}{(s - \lambda_1)^{n'}} + \dots + \frac{c_{n'}}{(s - \lambda_1)^{n'}} + \frac{c_{n'+1}}{s - \lambda_{n'+1}} + \dots + \frac{c_n}{s - \lambda_n} \right]$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{(s - \lambda_1)^{n'} \prod_{i=n'+1}^n (s - \lambda_i)} = \sum_{i=1}^{n'} \frac{c_i}{(s - \lambda_1)^i} + \sum_{i=n'+1}^n \frac{c_i}{(s - \lambda_i)}$$

Se puede por lo tanto obtener una realización con la matriz A de la forma denominada cuasi-diagonal de Jordan:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & & \vdots \\ & & & \lambda_{n'+1} & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n]$$

Forma canónica de controlabilidad

En el caso de una función e transferencia estrictamente propia de orden n :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$$

Se puede obtener una representación de estado denominada de controlabilidad de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & \dots & a_1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [b_n \quad b_{n-1} \quad \dots \quad b_1]$$

Para obtener esta representación multiplicamos y dividimos la función de transferencia por una variable intermedia $Z(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(b_1 s^{n-1} + \dots + b_n)Z(s)}{(s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n)Z(s)}$$

Estas operaciones no modifican las relaciones en el sistema, podemos escribir entonces las dos relaciones:

$$Y(s) = (b_1 s^{n-1} + \dots + b_n)Z(s)$$

$$U(s) = (s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n)Z(s)$$

La transformada inversa de Laplace de las dos relaciones es:

$$y = b_1D^{n-1}z + \dots + b_nz$$

$$u = D^n z + a_1D^{n-1}z + \dots + a_nz$$

Si seleccionamos como variables de estado a:

$$x_1 = z$$

$$x_2 = Dz$$

$$\vdots$$

$$x_n = D^{n-1}z$$

Obtenemos entonces las ecuaciones de estado:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = -a_nx_1 - a_{n-1}x_2 - \dots - a_1x_n + u$$

Y la ecuación de salida:

$$y = b_1x_n + \dots + b_nx_1$$

Forma canónica de observabilidad

En el caso de una función e transferencia de orden n , estrictamente propia:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1s^{n-1} + \dots + b_n}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n}$$

Se puede obtener una representación de estado llamada forma canónica de observabilidad de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & & 0 \\ -a_3 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ -a_n & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ 0 \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

Para obtener esta realización se considera la ecuación diferencial original del sistema:

$$D^n y + a_1D^{n-1}y + \dots + a_{n-1}Dy + a_ny = b_1D^{n-1}u + \dots + b_{n-1}Du + b_nu$$

La cual reorganizamos de la forma siguiente:

$$D^n y + (a_1D^{n-1}y - b_1D^{n-1}u) + \dots + (a_{n-1}Dy - b_{n-1}Du) = b_nu - a_ny$$

Seleccionamos como variables de estado a:

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{x}_1 + a_1y - b_1u$$

$$\vdots$$

$$x_n = \dot{x}_{n-1} + a_{n-1}y - b_{n-1}u$$

Y obtenemos una representación de estado de la forma:

$$\dot{x}_1 = -a_1x_1 - x_2 + b_1u$$

$$\dot{x}_2 = -a_2x_1 - x_3 + b_2u$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n-1} = -a_{n-1}y - x_n + b_{n-1}u$$

$$\dot{x}_n = D^n y + (a_1D^{n-1}y - b_1D^{n-1}u) + \dots + (a_{n-1}Dy - b_{n-1}Du) = -a_nx_1 + b_nu$$

Con la ecuación de salida:

$$y = x_1$$

También se puede obtener una forma canónica a partir de una realización cualquiera realizando un cambio de variable lineal.

Ejemplo 7: Obtener las realizaciones en las tres formas canónicas para el sistema representado por la ecuación diferencial siguiente:

$$D^3y + 6D^2y + 11Dy + 6y = 6u$$

La función de transferencia del sistema es:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s+2} + \frac{c_3}{s+3}$$

Donde $c_i = \frac{(s-s_i)N(s)}{D(s)}$:

$$c_1 = \left. \frac{6(s+1)}{(s+1)(s+2)(s+3)} \right|_{s=-1} = 3; \quad c_2 = \left. \frac{6(s+2)}{(s+1)(s+2)(s+3)} \right|_{s=-2} = -6; \quad c_3 = \left. \frac{6(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+3)} \right|_{s=-3} = 3$$

La representación de estado en la forma canónica de Jordan es:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C = [3 \quad -6 \quad 3]$$

La representación de estado en la forma canónica de controlabilidad es:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C = [6 \quad 0 \quad 0]$$

La representación de estado en la forma canónica de observabilidad es:

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -11 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \\ C = [1 \quad 0 \quad 0]$$

Ejercicios

Para las siguientes funciones de transferencia obtener las realizaciones, determinar la observabilidad y controlabilidad de las mismas y presentar las realizaciones en las tres formas canónicas estudiadas.

1. $G(s) = \frac{s^2 - s - 2}{s^3 + 10s^2 + 29s + 20}$

2. $G(s) = \frac{s^3 + 10s^2 + 29s + 20}{s^4 + 8s^3 + 23s^2 + 28s + 12}$

3. $G(s) = \frac{s+1}{s^4 - 5s^2 + 4}$

4. $G(s) = \frac{s+1}{s^3 + 11s^2 + 36s + 36}$

5. $G(s) = \frac{s^2 - s - 2}{s^4 - 5s^2 + 4}$

6. $G(s) = \frac{s+1}{s^4 + 8s^3 + 23s^2 + 28s + 12}$

Tema 9. Acciones de Control

Introducción

Un controlador tiene como tarea la de mantener la variable controlada en correspondencia muy próxima con la señal de referencia, eliminando la influencia de las perturbaciones que tienden a cambiar el valor de la variable controlada.

La acción de control de un controlador se define como la relación entre el error en la señal de salida ($e(t)$) y la señal actuante ($m(t)$). En otras palabras es la función de transferencia del controlador:

$$F(s) = \frac{M(s)}{E(s)} \text{ ó en el dominio del tiempo } f(t) = \frac{m(t)}{e(t)}$$

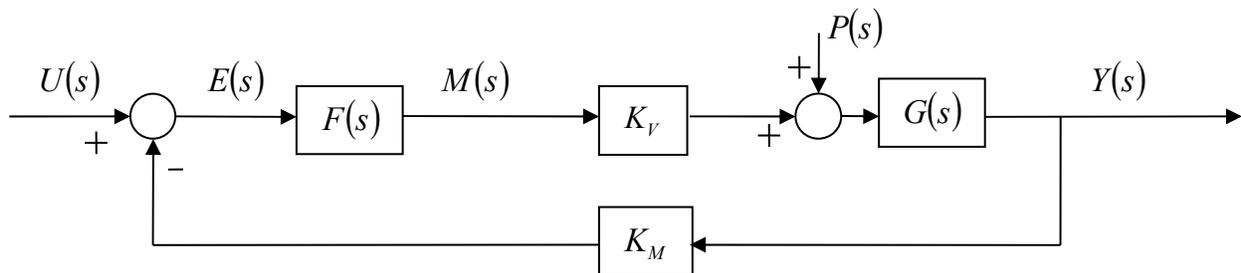


Diagrama de bloques típico de un sistema de control retroalimentado

Tipos de acción de control

Existen múltiples formas de acción de control, cuyo tipo depende de la forma de obtención de la ley de control. Sin embargo existen unos tipos básicos de acción de control que se usan comúnmente en procesos industriales y que son:

1. Acción de control discontinua o de dos posiciones (ON-OFF).
2. Acción de control proporcional.
3. Acción de control derivativa.
4. Acción de control integral.

En la práctica los controles integral y derivativo no se pueden usar solos, por lo tanto estos se suelen usar en combinación con otras, y se obtienen las siguientes acciones de control posibles:

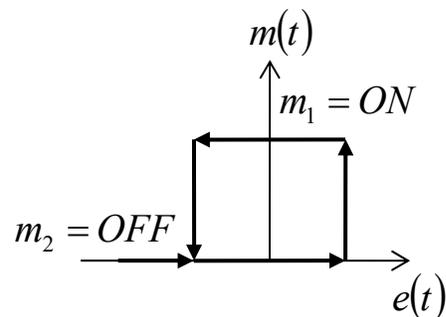
5. Acción de control proporcional más derivativa.
6. Acción de control proporcional más integral.
7. Acción de control proporcional más integral más derivativa.

1. Acción de control discontinua o de dos posiciones (ON-OFF)

En este tipo de acción de control el controlador adopta solo dos posiciones, que por lo general es abierto y cerrado (conectado o desconectado). Dicho de otra forma la señal actuante del controlador ($m(t)$) se mueve entre dos límites requeridos para que la variable controlada oscile entre dos valores dados.

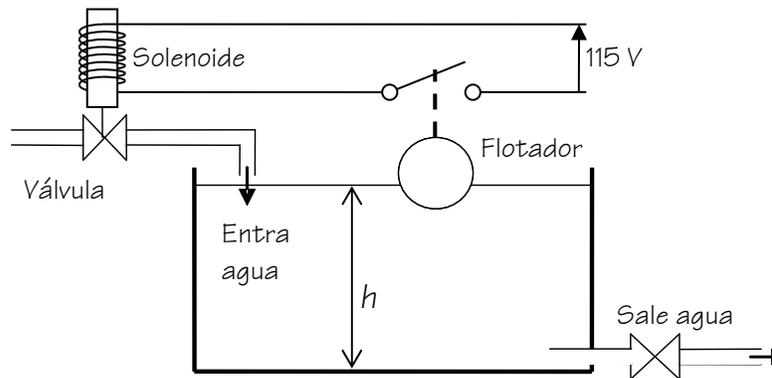
$$m(t) = m_1 \text{ para } e(t) > 0$$

$$m(t) = m_2 \text{ para } e(t) < 0$$

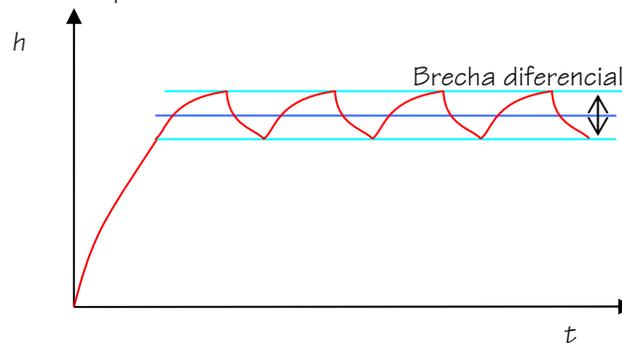


En la práctica un controlador discontinuo debe tener una zona muerta o histéresis (brecha diferencial). Esta zona muerta se debe minimizar para mantener el error pequeño pero debe estar para evitar que se produzcan oscilaciones.

Por ejemplo un control de nivel eléctrico:



La presencia de la brecha diferencial produce un error entre el valor deseado (nivel deseado en el ejemplo) y el valor real de la variable (nivel real en el ejemplo). Pero esta es necesaria para evitar conexiones y desconexiones muy cercanas en tiempo.



Es por esto que a brecha diferencial se debe ajustar dependiendo de la exactitud deseada, de la frecuencia de conexión y desconexión del elemento final de control (válvula solenoide) y de los valores a obtener.

2. Acción de control proporcional (P)

Un control proporcional tiene una salida que es proporcional al error:

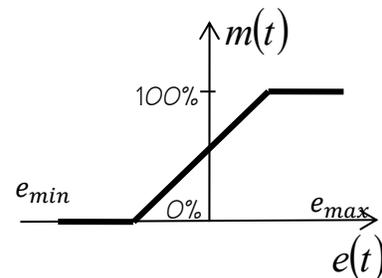
$$m(t) = K_p e(t) \quad \text{ó} \quad F(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_p$$

Donde K_p es la ganancia del controlador proporcional.

Este es esencialmente un amplificador de ganancia y se usa cuando se quiere un control lineal en una región del error.

Para errores negativos grandes la salida del controlador es cero (0%) o un valor mínimo y para errores positivos la salida será el valor máximo (100%), y en la mayoría de los controladores estos valores máximos y mínimos son ajustables.

En cierta forma es similar al controlador ON-OFF solo que en vez de una zona muerta posee una región de respuesta lineal.



Banda Proporcional

La acción de control proporcional se puede expresar mediante el concepto de banda proporcional, la cual se define como el inverso de K_P expresado en porcentaje:

$$B_P = \frac{100}{K_P}$$

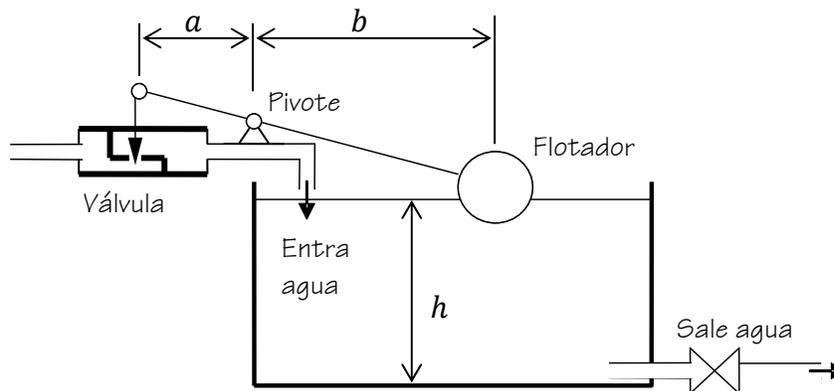
Esta se puede entender como el cambio necesario en el error (expresado en porcentaje del valor máximo de la variable controlada) para que se produzca un cambio del 100% en la salida del controlador. Para que la salida del controlador pase de su valor mínimo (totalmente cerrado) a su valor máximo (totalmente abierto).

La banda proporcional deseada es de 100%, si esta es menor (ganancia grande) entonces el instrumento se hace muy sensible lo que produce que el sistema entre en ciclaje (similar a un sistema ON-OFF con una zona muerta pequeña). Si la banda proporcional es muy grande entonces el sistema es muy lento.

Características de la acción proporcional

- La conexión física directa entre el error y la acción de control produce una respuesta rápida y estable.
- Los sistemas con acción de control proporcional al introducirles una perturbación sostenida (rampa) nunca llevan la variable controlada al valor deseado, se produce un error en estado estable (OFF-SET)

Por ejemplo un control de nivel mecánico:



3. Acción de control derivativa (D)

La salida de un controlador con acción de control derivativa es proporcional a la tasa de cambio del error:

$$m(t) = K_D \frac{de(t)}{dt} \quad \text{ó} \quad F(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_D s$$

Donde K_D es la constante de acción integral.

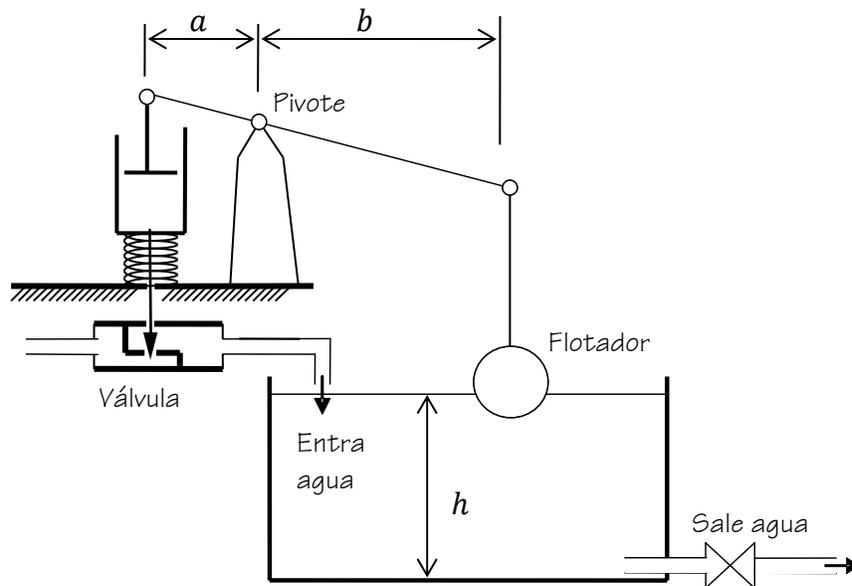
En otras palabras la salida del controlador varía en proporción a la velocidad de cambio del error, si el error es constante no se produce ninguna acción de control.

Características de la acción de control derivativa

- No tiene noción alguna del error de la variable en estado estable. Si el error no cambia no hay acción de control. Por lo tanto no se puede usar sola.

- Se produce un adelanto de la acción de control, si la variable controlada cambia rápidamente la acción correctora es rápida y de gran amplitud, por lo que el sistema de control actúa rápidamente antes de que el error sea grande. Por supuesto la acción de control no puede anticipar a un error que aún no se ha producido.
- Amplifica las señales de ruido.
- Produce un efecto de saturación en el actuador.

Por ejemplo un control de nivel mecánico con amortiguador



4. Acción de control integral (I)

El controlador integral tiene una salida que es proporcional a la integral del error:

$$m(t) = K_I \int_0^t e(t) dt \quad \text{ó} \quad F(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{K_I}{s}$$

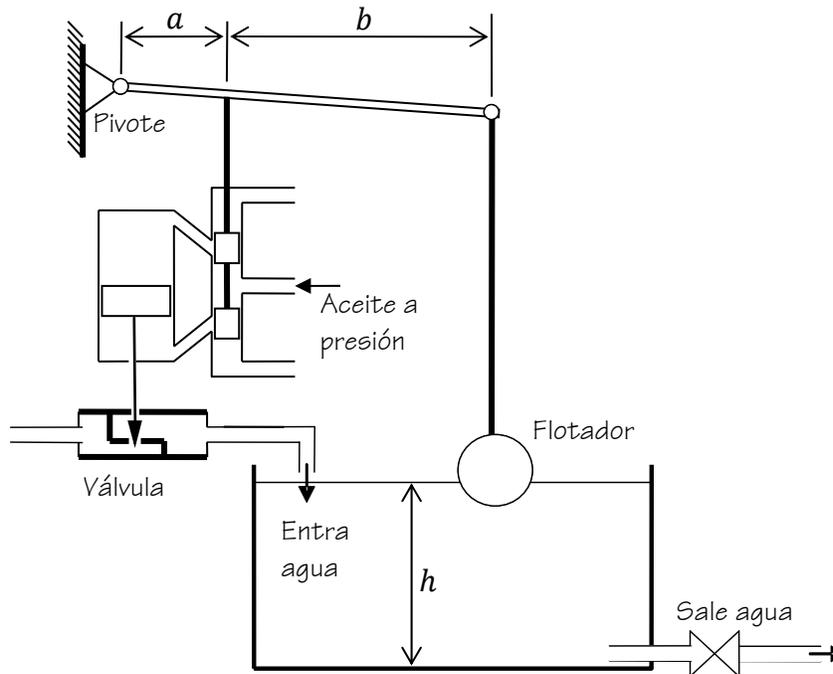
Donde K_I es la constante de acción integral.

En otras palabras la velocidad de la salida del controlador es proporcional al error o la rata de cambio de la salida del controlador es proporcional al error. Por lo cual la tendencia es a minimizar el error.

Características de la acción integral

- Es relativamente lenta debido a la conexión elástica entre los elementos de control. Por lo cual no se usa solo.
- No permite error en estado estable.
- Tiende a sobre corregir el error, por lo cual es posible que vuelva oscilatorio al sistema. De hecho aumenta el orden del mismo.

Por ejemplo un control de nivel hidráulico



5. Control proporcional más derivativa (PD)

La salida del controlador es proporcional al error y a su derivada:

$$m(t) = K_p e(t) + K_D \frac{de(t)}{dt} \quad \text{ó} \quad F(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_p + K_D s$$

Este combina las ventajas del control proporcional más el derivativo, pero se usa poco por no ser capaz de eliminar el error en estado estable.

Tiempo de acción derivativa

La ecuación de este control se puede escribir también como:

$$m(t) = K_p \left(e(t) + T_D \frac{de(t)}{dt} \right)$$

Donde $T_D = \frac{K_D}{K_p}$ es el tiempo de acción derivativa.

Esta se define como el cambio lineal en el error, cuando la respuesta proporcional iguale a la derivativa.

Se acostumbra expresar la acción derivativa en minutos de adelanto, que representa el tiempo en minutos con que la acción derivativa se anticipa al efecto de acción proporcional.

La principal ventaja de este control es que produce señales de adelanto que actúan rápidamente cuando la variable controlada cambia bruscamente.

6. Control proporcional más integral (PI)

En un controlador proporcional integral la salida es proporcional al error y a la integral del error:

$$m(t) = K_p e(t) + K_I \int_0^t e(t) dt \quad \text{ó} \quad F(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_I}{s}$$

Este es un esfuerzo para combinar las ventajas del controlador proporcional más el controlador integral, es decir tiene una buena respuesta transitoria por el efecto proporcional y corrige el error en estado estable por el efecto integral.

Tiempo de acción integral

$$m(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(t) dt \right)$$

Donde $T_I = \frac{K_p}{K_I}$ es el tiempo de acción integral.

Esta se define como el tiempo necesario para que la respuesta integral iguale a la proporcional después de un cambio en escalón del error.

7. Control proporcional más integral más derivativo (PID)

La salida del controlador es proporcional al error, a su derivada y a su integral:

$$m(t) = K_p e(t) + K_I \int_0^t e(t) dt + K_D \frac{de(t)}{dt} \quad \text{ó} \quad F(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

O expresado en función del tiempo de acción integral y derivativa:

$$m(t) = \frac{100}{BP} \left(e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(t) dt + T_D \frac{de(t)}{dt} \right)$$

Este controlador ofrece rápida respuesta proporcional al error, mientras que tiene un reajuste automático desde la parte integral que elimina el error en estado estable. La acción derivativa permite que el controlador responda rápidamente a cambios en el error.

Generalmente en los controladores PID se puede ajustar:

- K_p en % de la banda proporcional
- T_I en minutos de acción integral
- T_D en minutos de acción derivativa

Resumen

Control	Función de transferencia	Velocidad de respuesta	Error en estado estable	Uso solo	Costo
Proporcional (P)	K_p	Media	Existe	Si	Bajo
Derivativo (D)	$K_D s$	Alta	Existe	No	Medio
Integral (I)	$\frac{K_I}{s}$	Baja	No hay	No	Medio
PI	$K_p + \frac{K_I}{s}$	Media	No hay	Si	Alto
PD	$K_p + K_D s$	Alta	Existe	Poco	Alto

PID	$K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s$	Alta	No hay	Si	Alto
-----	-------------------------------	------	--------	----	------

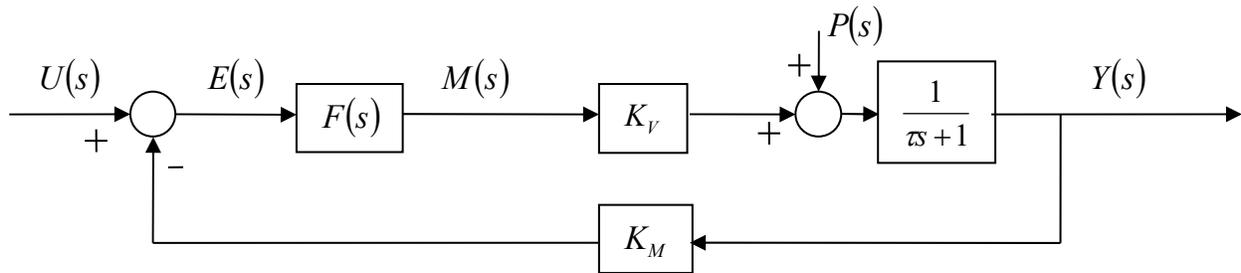
Ejemplo de estudio del efecto de una acción de control en un sistema

Se tiene un proceso que responde a una ecuación de primer orden:

$$\tau Dy + y = u$$

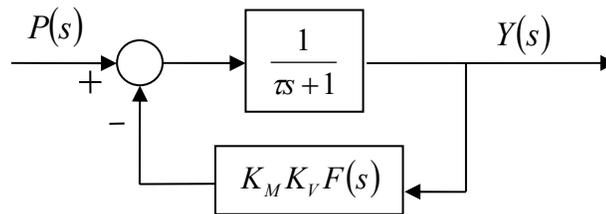
Donde la función de transferencia es:

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \text{ o en el dominio del tiempo } g(t) = \frac{1}{\tau D + 1}$$

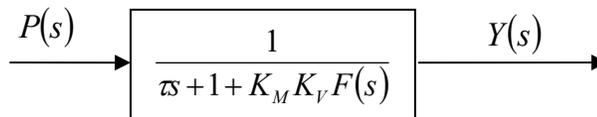


Si se supone la referencia $R(s)$ es constante, el elemento que puede afectar al sistema es la perturbación. Por tanto por comodidad podemos tomar $R(s) = 0$, esto implica que la respuesta del sistema $C(s)$ debe tender a cero para cualquier perturbación $P(s)$ en el transcurso del tiempo.

En estas condiciones puedo transformar el diagrama de bloque del sistema completo en:



Reduciendo el diagrama de bloques obtenemos:



Si el controlador es proporcional

$$F(s) = K_p$$

La función de transferencia del sistema completo será:

$$\frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{1}{\tau s + 1 + K_M K_V K_p}$$

Donde para simplificar se puede escribir $K_M K_V K_p + 1 = K$

Luego la función de transferencia será:

$$\frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{1}{\tau s + K}$$

Estudio de estabilidad del sistema

Vemos que el sistema es de primer orden y su ecuación característica es:

$$\tau s + K = 0$$

Este sistema tiene una sola raíz negativa:

$$s = -\frac{K}{\tau}$$

Por lo tanto el sistema es estable al igual que el proceso.

Estudio del valor en estado estable

Para este estudio utilizaremos un concepto de las transformadas de Laplace denominado teorema del valor final que dice:

$$VF = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

El valor en estado estable es por definición el valor que se obtendría cuando la parte transitoria de la respuesta se hace despreciable, es decir el valor de la respuesta para un tiempo suficientemente grande cercano al infinito. Por esto el valor en estado estable se puede obtener con el teorema del valor final:

$$Y_{EE} = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{Y(s)}{P(s)} P(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sP(s)}{\tau s + K}$$

Si suponemos que la perturbación cambia bruscamente y luego se mantiene constante en el tiempo, lo cual está representado por un escalón:

$$p(t) = H \Leftrightarrow P(s) = \frac{H}{s}$$

El valor en estado estable será:

$$Y_{EE} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sH}{(\tau s + K)s} = \frac{H}{K}$$

Según lo supuesto al principio el valor deseado para la salida en estado estable debería ser cero, puesto que nuestra señal de referencia es cero, luego este valor en estado estable indica que con este tipo de controlador se produce un error en estado estable que es igual a H/K .

Estudio de la respuesta del sistema

Para analizar la respuesta del sistema en este caso podemos escribir entonces la ecuación del mismo que será:

$$\tau Dy + Ky = H \text{ dividiendo por } K \text{ obtenemos } \frac{\tau}{K} Dy + y = \frac{H}{K}$$

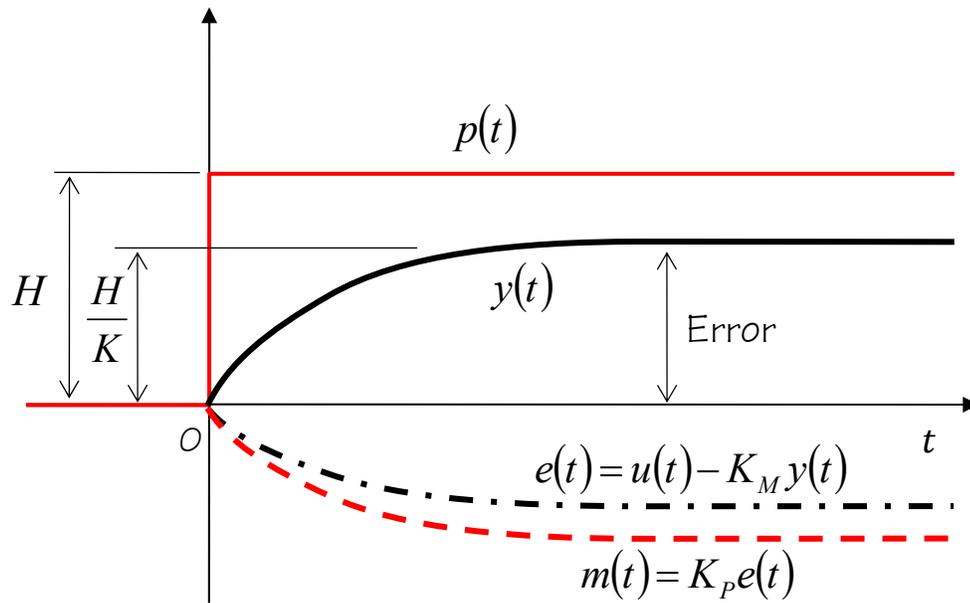
Por lo tanto el sistema es un sistema de primer orden y responde como tal. Suponiendo que en las condiciones iniciales la salida toma el valor de la señal de referencia:

$$t = 0 \rightarrow Y_0 = 0$$

La respuesta del sistema será de la forma:

$$y = -\frac{H}{K} e^{(-K/\tau)t} + \frac{H}{K}$$

La gráfica de la respuesta de este sistema será:



Si el controlador es proporcional mas derivativo

$$F(s) = K_p + K_D s$$

La función de transferencia del sistema completo será:

$$\frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{1}{\tau s + 1 + K_M K_V (K_p + K_D s)} = \frac{1}{(\tau + K_M K_V K_D) s + 1 + K_M K_V K_p}$$

Donde para simplificar se puede escribir $K_M K_V K_p + 1 = K$ y $\tau + K_M K_V K_D = \tau_K$

Luego la función de transferencia será:

$$\frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{1}{\tau_K s + K}$$

Estudio de estabilidad del sistema

Vemos que el sistema es de primer orden y su ecuación característica es:

$$\tau_K s + K = 0$$

Este sistema tiene una sola raíz negativa:

$$s = -\frac{K}{\tau_K}$$

Por lo tanto el sistema es estable al igual que el proceso.

Estudio del valor en estado estable

El valor en estado estable se puede obtener con el teorema del valor final:

$$Y_{EE} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{Y(s)}{P(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s P(s)}{\tau_K s + K}$$

Si suponemos que la perturbación cambia bruscamente y luego se mantiene constante en el tiempo, lo cual está representado por un escalón:

$$p(t) = H \Leftrightarrow P(s) = \frac{H}{s}$$

El valor en estado estable será:

$$Y_{EE} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sH}{(\tau_K s + K)s} = \frac{H}{K}$$

Según lo supuesto al principio el valor deseado para la salida en estado estable debería ser cero, puesto que nuestra señal de referencia es cero, luego este valor en estado estable indica que con este tipo de controlador se produce un error en estado estable que es igual a H/K .

Estudio de la respuesta del sistema

Para analizar la respuesta del sistema en este caso podemos escribir entonces la ecuación del mismo que será:

$$\tau_K Dy + Ky = H \text{ dividiendo por } K \text{ obtenemos } \frac{\tau_K}{K} Dy + y = \frac{H}{K}$$

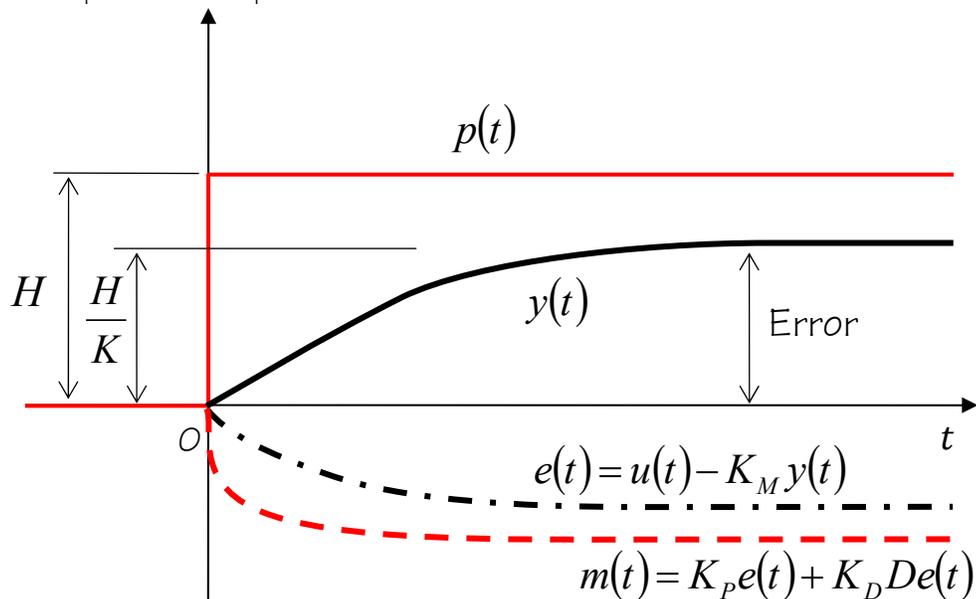
Por lo tanto el sistema es un sistema de primer orden y responde como tal. Suponiendo que en las condiciones iniciales la salida toma el valor de la señal de referencia:

$$t = 0 \rightarrow Y_0 = 0$$

La respuesta del sistema será de la forma:

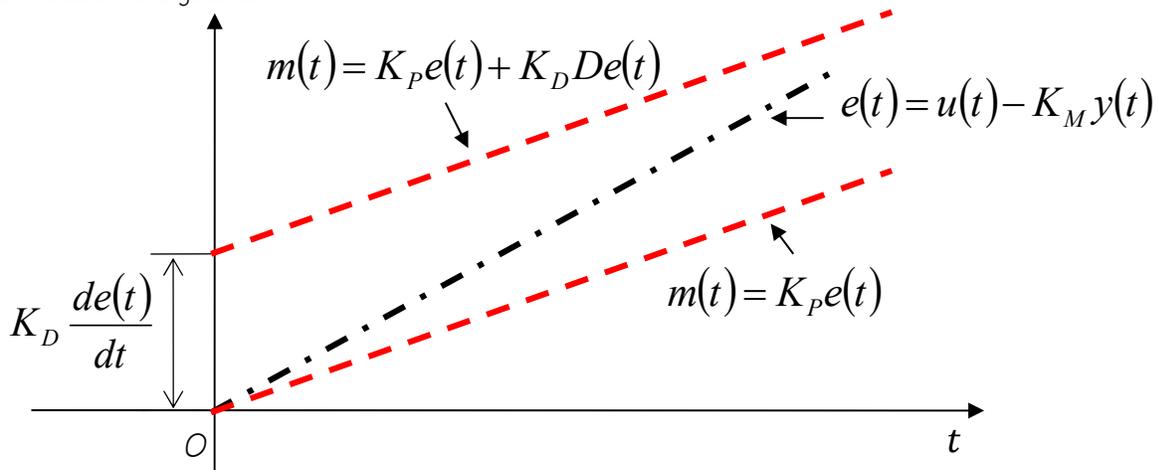
$$y = -\frac{H}{K} e^{(-K/\tau_K)t} + \frac{H}{K}$$

La gráfica de la respuesta de este sistema será casi idéntica al control proporcional, solo cambiara la duración de la etapa transitoria, que será más larga, en función del nuevo valor de la constante de tiempo, que en este caso depende del tiempo de acción derivativa.



La diferencia entre una acción de control proporcional y una proporcional derivativa, se puede apreciar más claramente si suponemos que el error varía en forma de rampa (esta suposición es meramente ilustrativa ya que en un caso real es muy difícil obtener un error variando de esta forma, en todo caso no corresponde a

una perturbación variando en forma de rampa). Podemos observar si graficamos el error y la salida del controlador lo siguiente:



Si el controlador es proporcional más integral

$$F(s) = K_p + \frac{K_I}{s}$$

La función de transferencia del sistema completo será:

$$\frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{1}{\tau s + 1 + K_M K_V \left(K_p + \frac{K_I}{s} \right)} = \frac{1}{\tau s + 1 + K_M K_V K_p + \frac{K_M K_V K_I}{s}}$$

$$\frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{s}{\tau s^2 + (1 + K_M K_V K_p) s + K_M K_V K_I}$$

En este caso el sistema se vuelve de segundo orden, la función de transferencia será de la forma:

$$\frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{\tau}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Donde:

$$2\xi\omega_n = \frac{(1 + K_M K_V K_p)}{\tau}; \omega_n^2 = \frac{K_M K_V K_I}{\tau}$$

Estudio de estabilidad del sistema

Como el sistema es de segundo orden su ecuación característica es de la forma:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

Este sistema tiene dos raíces, y la estabilidad y forma de la respuesta dependen del valor de ξ .

Se observa entonces aquí que la principal diferencia que aparece con respecto a la acción de control proporcional y derivativo es que el sistema completo es de un orden superior al proceso, luego es posible que este se vuelva oscilatorio.

Estudio del valor en estado estable

El valor en estado estable se puede obtener con el teorema del valor final:

$$Y_{EE} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{Y(s)}{P(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\tau}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} P(s)$$

Si suponemos que la perturbación cambia bruscamente y luego se mantiene constante en el tiempo, lo cual está representado por un escalón:

$$p(t) = H \quad \Leftrightarrow \quad P(s) = \frac{H}{s}$$

El valor en estado estable será:

$$Y_{EE} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\tau^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \frac{H}{s} = 0$$

Según lo supuesto al principio el valor deseado para la salida en estado estable debe ser cero, puesto que nuestra señal de referencia es cero, luego este valor en estado estable indica que con este tipo de controlador no existe error en estado estable.

Estudio de la respuesta del sistema

Para analizar la respuesta del sistema en este caso podemos escribir entonces la ecuación del mismo que será:

$$D^2 y + 2\xi\omega_n D y + \omega_n^2 y = \tau D p$$

$$D^2 y + 2\xi\omega_n D y + \omega_n^2 y = \frac{K_M K_V K_I}{\omega_n^2} D p$$

$$D^2 y + 2\xi\omega_n D y + \omega_n^2 y = \omega_n^2 p'$$

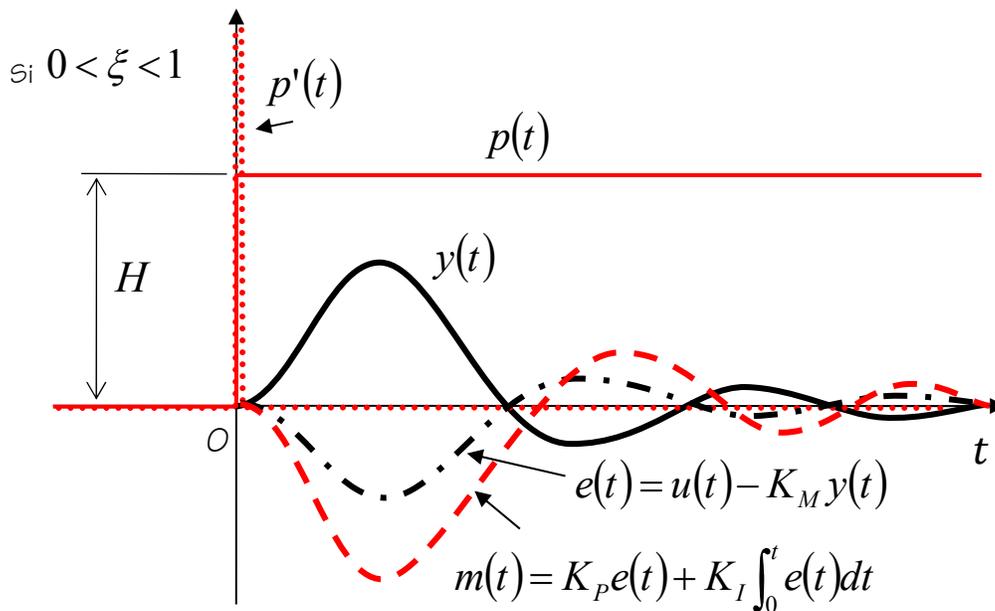
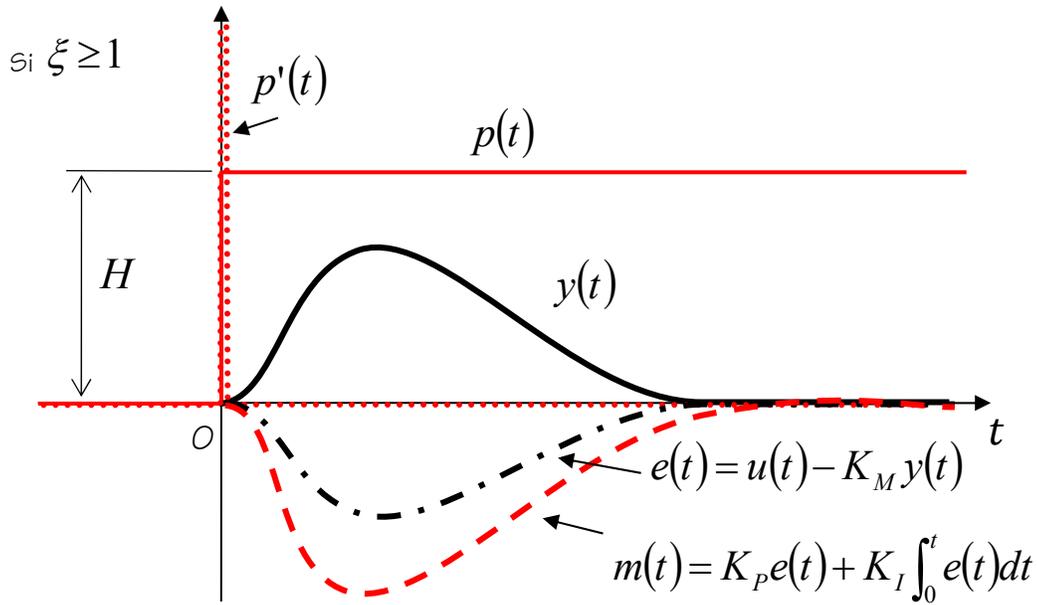
Donde: $p' = \frac{K_M K_V K_I}{\omega_n^4} D p$

Por lo tanto el sistema es un sistema de segundo orden y responde como tal. Suponiendo que en las condiciones iniciales la salida toma el valor de la señal de referencia:

$$t = 0 \quad \rightarrow \quad Y_0 = 0$$

La respuesta del sistema podrá tomar cualquiera de las cuatro formas posibles en sistemas de segundo orden

La gráfica de la respuesta de este sistema será, para el caso de una perturbación (p) en escalón:



Si el controlador es proporcional más integral más derivativo

$$F(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

La función de transferencia del sistema completo será:

$$\frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{1}{\tau s + 1 + K_M K_V \left(K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s \right)} = \frac{1}{\tau s + 1 + K_M K_V K_P + \frac{K_M K_V K_I}{s} + K_M K_V K_D s}$$

$$\frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{s}{(\tau + K_M K_V K_D)s^2 + (1 + K_M K_V K_P)s + K_M K_V K_I}$$

En este caso el sistema se vuelve de segundo orden, la función de transferencia será de la forma:

$$\frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{(\tau + K_M K_V K_D)s}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Donde:

$$2\xi\omega_n = \frac{(1 + K_M K_V K_P)}{(\tau + K_M K_V K_D)}; \omega_n^2 = \frac{K_M K_V K_I}{(\tau + K_M K_V K_D)}$$

Estudio de estabilidad del sistema

Como el sistema es de segundo orden su ecuación característica es de la forma:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

Este sistema tiene dos raíces, y la estabilidad y forma de la respuesta dependen del valor de ξ .

Se observa entonces aquí que la principal diferencia que aparece con respecto a la acción de control proporcional más integral es que el radio de amortiguamiento y la frecuencia natural son diferentes, por lo cual la parte transitoria será probablemente más corta y la respuesta estará más cerca del valor deseado.

Sin embargo al afectar el valor del radio de amortiguamiento esta acción podría hacer tender al sistema hacia la inestabilidad si este valor se acerca mucho a cero, por lo cual se debe tener cuidado con la calibración del tiempo de acción integral.

Estudio del valor en estado estable

El valor en estado estable se puede obtener con el teorema del valor final:

$$Y_{EE} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{Y(s)}{P(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{(\tau + K_M K_V K_D)s}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} P(s)$$

Si suponemos que la perturbación cambia bruscamente y luego se mantiene constante en el tiempo, lo cual está representado por un escalón:

$$p(t) = H \Leftrightarrow P(s) = \frac{H}{s}$$

El valor en estado estable será:

$$Y_{EE} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{(\tau + K_M K_V K_D)s}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \frac{H}{s} = 0$$

Según lo supuesto al principio el valor deseado para la salida en estado estable debe ser cero, puesto que nuestra señal de referencia es cero, luego este valor en estado estable indica que con este tipo de controlador no existe error en estado estable.

Estudio de la respuesta del sistema

Para analizar la respuesta del sistema en este caso podemos escribir entonces la ecuación del mismo que será:

$$D^2 y + 2\xi\omega_n D y + \omega_n^2 y = (\tau + K_M K_V K_D) D p$$

$$D^2 y + 2\xi\omega_n D y + \omega_n^2 y = \frac{K_M K_V K_I}{\omega_n^2} D p$$

$$D^2y + 2\xi\omega_n Dy + \omega_n^2 y = \omega_n^2 p'$$

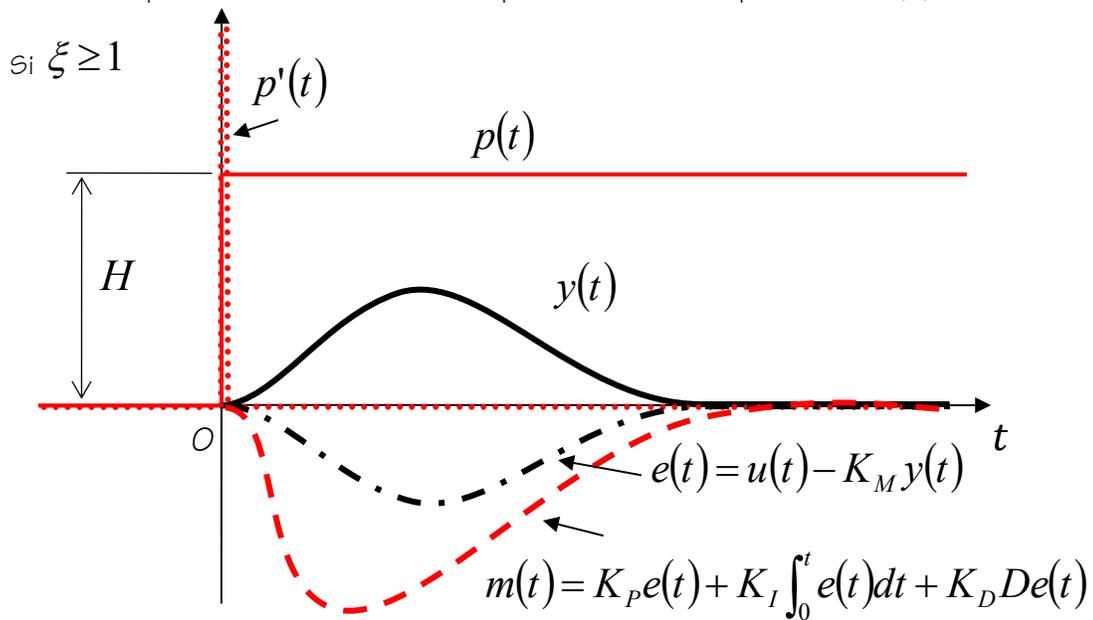
Donde: $p' = \frac{K_M K_V K_I}{\omega_n^4} Dp$

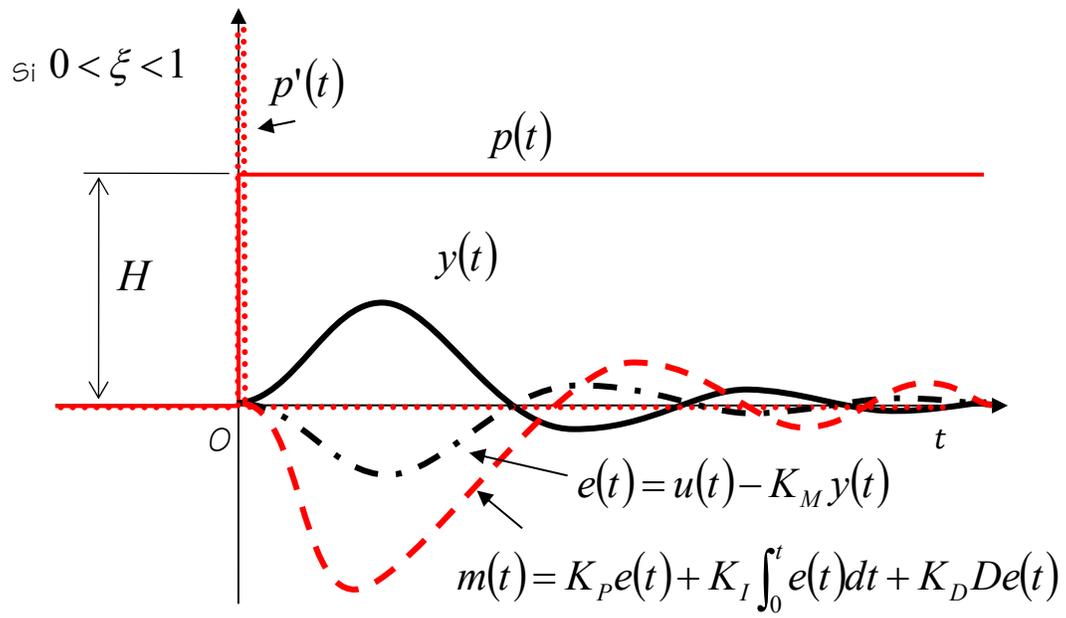
Por lo tanto el sistema es un sistema de segundo orden y responde como tal. Suponiendo que en las condiciones iniciales la salida toma el valor de la señal de referencia:

$$t = 0 \rightarrow Y_0 = 0$$

La respuesta del sistema podrá tomar cualquiera de las cuatro formas posibles en sistemas de segundo orden

La gráfica de la respuesta de este sistema será, para el caso de una perturbación (p) en escalón:





Tema 10. Ajuste de Controladores PID

Introducción

En este tema se describen algunos métodos de determinación los valores de los parámetros de un controlador PID que son la ganancia proporcional (K_p), el tiempo de acción derivativo (T_d) o el tiempo de acción integral (T_i). A este proceso de selección de los parámetros del controlador, para que cumpla las especificaciones de operación, se le conoce como ajuste o entonación del controlador. Este ajuste se hace con el objetivo que el sistema controlado cumpla con las especificaciones de respuesta transitoria y de estado estacionario que se requieran.

Existen diversos métodos para ajuste de controladores que difieren en función al conocimiento que se requieren sobre la dinámica del proceso a controlar.

Cuando se conoce un modelo matemático del proceso, entonces se pueden aplicar métodos analíticos para determinar los parámetros del controlador.

Pero si el proceso es muy complejo, suele ser difícil la obtención de un modelo matemático, en cuyo caso no es posible la utilización de un método analítico de cálculo de los parámetros del controlador PID y se debe recurrir a procedimientos experimentales para el ajuste.

Los procedimientos convencionales analíticos, por lo general están restringidos a proceso que se comportan como sistemas lineales, de una entrada y una salida, e invariantes en el tiempo.

Métodos de Ziegler - Nichols

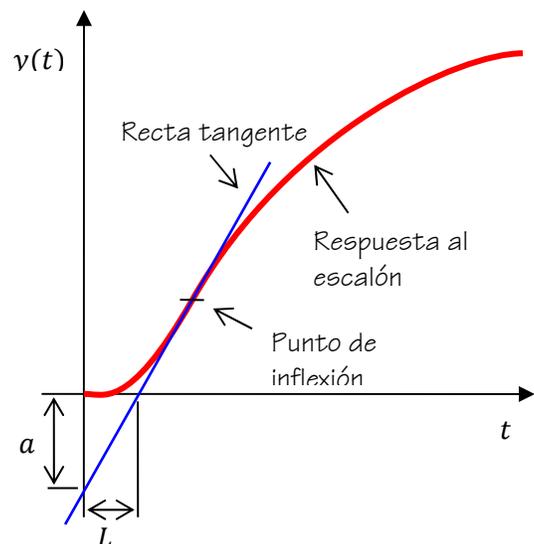
Ziegler y Nichols sugirieron dos procedimientos para sintonizar controladores PID basándose respectivamente en la respuesta experimental a un escalón de entrada, o en base al valor de K_p que produce una estabilidad marginal mediante el sólo uso de la acción de control proporcional. Los procedimientos de Ziegler-Nichols, que se presentan a continuación, son muy convenientes cuando no se conoce un modelo matemático de la planta; naturalmente, estos procedimientos también se pueden aplicar al diseño de sistemas con modelos matemáticos conocidos.

Método de Ziegler - Nichols basado en la respuesta al escalón.

El primer método propuesto por Ziegler y Nichols está basado en las características de la respuesta transitoria de una planta ante una entrada escalón unitario en lazo abierto.

Esta respuesta se puede caracterizar por dos parámetros (a y L), como se muestra en la figura. Para obtener el valor de estos parámetros primero se determina el punto donde la pendiente de la respuesta escalón tiene su valor máximo (punto de inflexión), y luego se dibuja la tangente en este punto. En la intersección entre esta tangente y la coordenada de abscisa obtenemos el parámetro L , y de la intersección con la ordenada obtenemos el parámetro a .

La función de transferencia de un proceso con una respuesta del tipo mostrado en la figura se puede aproximar por la función:



$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{a e^{-Ls}}{Ls}$$

Partiendo de esta aproximación Ziegler y Nichols sugirieron expresar los parámetros K_p , T_i y T_d del controlador PID, directamente en función de los parámetros a y L , de acuerdo con los valores que aparecen en la tabla siguiente.

Parámetros de controladores PID según método de la respuesta al escalón de Ziegler - Nichols			
Controlador	K_p	T_i	T_d
P	$1/a$		
PI	$0.9/a$	$3L$	
PID	$1.2/a$	$2L$	$3.4L$

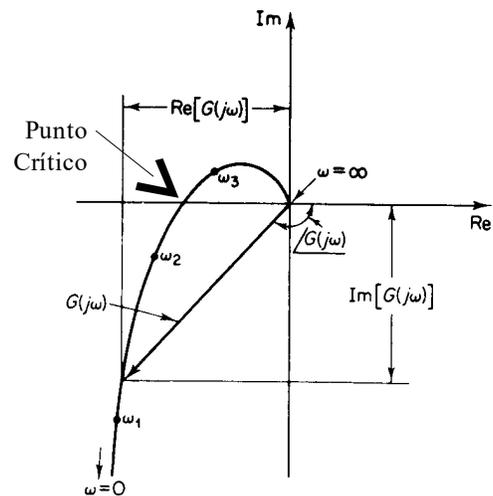
Estos valores para los parámetros del controlador permiten obtener un control que regula en forma estable y con una buena velocidad de respuesta al proceso a controlar. Sin embargo como estos valores se obtienen partiendo de la aproximación antes mencionada y el proceso real no corresponde exactamente a ese modelo entonces generalmente es conveniente realizar luego un ajuste fino. Con esto se busca mejorar la estabilidad relativa que se traduce en el aumento del margen de fase y ganancia.

Método de Ziegler - Nichols basado en la respuesta frecuencial.

Este método se basa también en una caracterización muy simple de la dinámica del proceso. El diseño está basado en el conocimiento de un punto del lugar de transferencia de la planta, el punto donde el lugar de transferencia se intersecta con el eje real negativo. Este punto es caracterizado por dos parámetros: la ganancia crítica (K_c) y el periodo crítico (t_c).

El procedimiento para obtener los parámetros K_c y t_c es el siguiente:

- Se anulan las ganancias de la parte integral y derivativa del controlador ($T_i = \infty$, $T_d = 0$).
- Se somete al sistema a la frecuencia que produce una respuesta en lazo abierto con un ángulo de fase de 180° , esta frecuencia será la frecuencia crítica ω_c que es el inverso del período crítico t_c .
- Se incrementa la ganancia proporcional K_p del controlador desde cero hasta el valor crítico K , para el cual la salida empieza a exhibir oscilaciones sostenidas. Si la salida no presenta oscilaciones sostenidas cual sea el valor de K_p , entonces no se puede aplicar este método.



El método diseñado por Ziegler y Nichols conduce a fórmulas simples para obtener los parámetros del controlador, en términos de la ganancia crítica y el periodo crítico, como se puede ver en la tabla siguiente. La tabla también muestra una estimación del periodo de la dinámica dominante (T_p) del sistema en lazo cerrado.

Parámetros de controladores PID según método de la respuesta frecuencial de Ziegler - Nichols				
Controlador	K_p	T_i	T_d	T_p
P	$0.5 K_c$	-	-	t_c
PI	$0.4 K_c$	$0.8 t_c$	-	$1.4 t_c$
PID	$0.5 K_c$	$0.5 t_c$	$0.12 t_c$	$0.85 t_c$

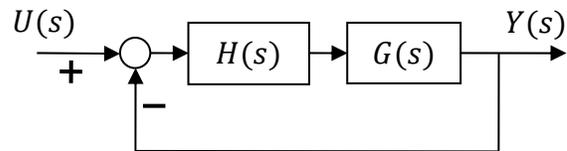
Métodos por asignación de Polos Dominantes

Los métodos de Ziegler y Nichols discutidos en la sección anterior están basados en el conocimiento de un solo punto sobre el lugar de transferencia del proceso en lazo abierto.

Esta sección presenta un método de cálculo que usa dos puntos o más sobre el lugar de transferencia. El método está basado en una simple asignación de los polos dominantes de un sistema en lazo cerrado a partir de la función de transferencia en lazo abierto.

Polos Dominantes

Considere el sistema mostrado en la figura, donde $G(s)$ es la función de transferencia del proceso y $H(s)$ es la función de transferencia del controlador.



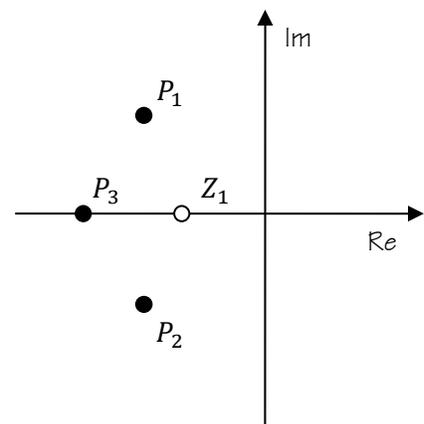
La función de transferencia del sistema en lazo cerrado ($G_c(s)$) está dada por:

$$G_c(s) = \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Muchas de las propiedades de los sistemas en lazo cerrado pueden ser deducidas a partir de los polos y ceros de $G_c(s)$, estos últimos son también los ceros de $G(s)H(s)$. Los polos en lazo cerrado se pueden obtener a partir de la raíz de la siguiente ecuación:

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

La ubicación en el plano imaginario de los polos y ceros de un sistema en lazo cerrado puede variar considerablemente con respecto al lazo abierto. Muchos lazos de retroalimentación simple, tendrán una configuración del tipo mostrado en la figura siguiente, donde las principales características de la respuesta están dadas por un par de polos complejos, P_1 y P_2 , denominados polos dominantes. La respuesta es también influenciada por los otros polos y los ceros P_3 y Z_1 , respectivamente. También pueden existir otros polos y ceros alejados del origen. Los polos y ceros cuyas partes reales son mucho más pequeñas que la parte real de los polos dominantes, tienen pequeña influencia en la respuesta transitoria, por lo cual este efecto puede despreciarse.



Control PI

El método de diseño por asignación de polos dominantes será aplicado primero a un control PI. Dos polos en lazo cerrado se pueden especificar en este caso, ya que un controlador PI tiene dos parámetros ajustables. Con el controlador PI dado por la ecuación:

$$H(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$$

Donde K_p es la ganancia proporcional y K_i es la ganancia integral. Los parámetros K_p y K_i serán determinados de tal forma que el sistema en lazo cerrado tenga los polos dominantes en $s = P_1$ y $s = P_2$, tendremos entonces:

$$P_1 = -\xi\omega_0 + i\omega_0\sqrt{1-\xi^2} = -\sigma + i\omega$$

$$P_2 = -\xi\omega_0 - i\omega_0\sqrt{1-\xi^2} = -\sigma - i\omega$$

Esto implica que:

$$\begin{cases} 1 + \left(K_p + \frac{K_i}{P_1} \right) G(P_1) = 0 \\ 1 + \left(K_p + \frac{K_i}{P_2} \right) G(P_2) = 0 \end{cases}$$

La ecuación anterior es lineal en K_p y K_i . Esta tiene una solución si $|G(P_1)| \neq 0$ y la solución en este caso es:

$$K_p(\omega_0) = \frac{\sqrt{1-\xi^2} A(\omega_0) + \xi B(\omega_0)}{\sqrt{1-\xi^2} (A(\omega_0)^2 + B(\omega_0)^2)}$$

$$K_i(\omega_0) = \frac{\omega_0 B(\omega_0)}{\sqrt{1-\xi^2} (A(\omega_0)^2 + B(\omega_0)^2)}$$

Donde:

$$A(\omega_0) = \text{Re}(G(P_1))$$

$$B(\omega_0) = \text{Im}(G(P_1))$$

El parámetro ω_0 puede ser visto como un parámetro que permite determinar la velocidad de respuesta del sistema de lazo cerrado obtenido. Para valores pequeños de ω_0 se obtiene un sistema lento, y para valores altos se obtiene un sistema rápido.

- Si la dinámica de un proceso es de primer orden, el sistema en lazo cerrado tiene solamente dos polos y por lo tanto el parámetro ω_0 puede ser elegido arbitrariamente.
- Para sistemas de orden elevado, en lazo cerrado se tendrá un número elevado de polos, pero se escogerán de tal forma que dos sean dominantes.
- Para obtener un sistema estable con polos no dominantes sobre el eje real, estos polos deberán ser de parte real más pequeños que $-\xi\omega_0$. La condición para obtener dos polos dominantes es que ω_0 debe ser escogido suficientemente pequeño. El límite superior de ω_0 puede ser determinado usando la condición de que el polo más alejado sobre el eje real se encuentre en el plano imaginario en $s = -\alpha\omega_0$.
- Para un proceso estable, la función $A(\omega_0)$ es positiva y $B(\omega_0)$ es pequeño para un ω_0 pequeño. Entonces resulta que la ganancia proporcional $K_p(\omega_0)$ es negativa para un ω_0 pequeño. Y como es normalmente deseable obtener las ganancias del controlador positivas, un límite inferior para el parámetro de diseño se puede obtener de la condición $K_p(\omega_{0I}) = 0$. El valor de ω_{0I} corresponde en este caso a un control integral puro. Una alternativa para elegir a ω_0 , basado en los polos dominantes, es seleccionar un ω_0 que genere el valor máximo de la ganancia integral. Los valores obtenidos en este caso serán muy cercanos a los obtenidos para la condición de polos dominantes.

Control PD

El método de diseño por asignación de polos dominantes puede ser aplicado al control PD. La función de transferencia de este controlador es:

$$H(s) = K_p + K_d s$$

Y de igual forma que para el caso del control PI se requiere que el sistema en lazo cerrado tenga polos en P_1 y P_2 . Con cálculos análogos al caso del controlador PI los parámetros del controlador se pueden obtener mediante las expresiones:

$$K_p(\omega_0) = \frac{-\sqrt{1-\xi^2} A(\omega_0) + \xi B(\omega_0)}{\sqrt{1-\xi^2} (A(\omega_0)^2 + B(\omega_0)^2)}$$

$$K_d(\omega_0) = \frac{B(\omega_0)}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} (A(\omega_0)^2 + B(\omega_0)^2)}$$

El valor del parámetro de diseño ω_0 debe ser aquí aún mayor que para el controlador PI. Pudiéndose estimar su valor inferior mediante la expresión $K_p(\omega_{0D}) = 0$. El valor de ω_{0D} corresponde en este caso a un control derivativo puro. Un valor razonable para este parámetro es escoger el que proporciona el mayor valor para la ganancia proporcional.

Control PID

Con un control PID, es posible posicionar tres polos en lazo cerrado. Dada la función de transferencia del controlador PID como:

$$H(s) = K'_p + \frac{K'_i}{s} + K'_d s$$

Donde K'_p es la ganancia proporcional, K'_i es la ganancia para el término integral, y K'_d es la ganancia para el término derivativo. Dos polos en lazo cerrado serán posicionados de acuerdo a la ecuación obtenida para el control PI. Y se asume que con esto el problema de diseño del controlador PI está resuelto, es decir, que se conocen los valores de $K_p(\omega_0)$ y $K_i(\omega_0)$. El valor de la función de transferencia del controlador $H'(s)$ en $P_1 = -\sigma + i\omega$ es:

$$H'(-\sigma + i\omega) = K'_p + \frac{K'_i}{-\sigma + i\omega} + K'_d (-\sigma + i\omega)$$

$$= K'_p - \frac{\sigma K'_i}{\omega_0^2} - \sigma K'_d + i \left(-\frac{\omega K'_i}{\omega_0^2} + \omega K'_d \right)$$

Suponiendo que la función de transferencia tiene el mismo valor que la función de transferencia para el controlador PI, se tiene:

$$K'_p - \frac{\sigma K'_i}{\omega_0^2} - \sigma K'_d = K_p - \frac{\sigma K_i}{\omega_0^2}$$

$$-\frac{\omega K'_i}{\omega_0^2} + \omega K'_d = -\frac{\omega K_i}{\omega_0^2}$$

Por lo tanto se tiene que:

$$K'_p(\omega_0) = K_p(\omega_0) + 2\xi\omega_0 K'_d$$

$$K'_i(\omega_0) = K_i(\omega_0) + \omega_0^2 K'_d$$

Así, se obtiene una familia de ganancias, con dos parámetros (ω_0, K'_d) , para un controlador PID, lo cual genera un sistema de lazo cerrado con polos en $s = P_1$ y $s = P_2$. El parámetro K'_d será ahora determinado de manera que el sistema de lazo cerrado también tenga un polo en $s = -\omega_0$.

Con esto se obtiene:

$$1 + \left(K'_p + \frac{K'_i}{\omega_0} + K'_d \omega_0 \right) G(-\omega_0) = 0$$

Introduciendo las expresiones de $K_p(\omega_0)$ y $K_i(\omega_0)$ se obtiene:

$$1 + \left(K_p - \frac{K_i}{\omega_0} + 2\sigma K'_d - 2\omega_0 K'_d \right) G(-\omega_0) = 0$$

De aquí, si $G(-\omega_0) \neq 0$, se obtiene:

$$K'_d(\omega_0) = \frac{1 + \left(K_p(\omega_0) - \frac{K_i(\omega_0)}{\omega_0} \right) G(\omega_0)}{2\omega_0(1 - \xi)G(-\omega_0)}$$

Con esta ecuación queda definida una familia de controladores PID con un parámetro de diseño (ω_0) , con los cuales se obtiene un sistema de lazo cerrado con tres polos dominantes ubicados en $-\xi\omega_0 \pm i\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$ y $-\omega_0$. Valores pequeños de ω_0 producen un sistema con velocidad de respuesta lenta y valores grandes de ω_0 producen un sistema con velocidad de respuesta rápida.

Método aproximado para designar polos dominantes

El siguiente método estima los polos dominantes a partir del conocimiento de algunos puntos del lugar de transferencia del sistema de lazo abierto. Los polos en lazo cerrado están dados por la siguiente ecuación característica:

$$1 + GH(s) = 0$$

Se realiza un desarrollo de Taylor alrededor de $s = i\omega$.

$$0 = 1 + GH(-\sigma + i\omega) = 1 + GH(i\omega) + i\sigma GH'(i\omega) + \dots$$

Donde:

$$GH'(i\omega) = \frac{dGH(i\omega)}{d\omega}$$

Despreciando los términos de orden mayor o igual a dos en σ :

$$1 + GH(i\omega) + i\sigma GH'(i\omega) = 0$$

$$\sigma = i \frac{1 + GH(i\omega)}{GH'(i\omega)}$$

Con esto los parámetros σ y ω de los polos dominantes quedan establecidos.

Si la derivada es aproximada por una diferencia finita entre dos puntos cercanos en la curva de Nyquist se puede obtener la siguiente expresión para determinar el valor del parámetro σ :

$$\frac{GH(i\omega_2) - GH(i\omega_1)}{\omega_2 - \omega_1} = i \frac{1 + GH(i\omega)}{\sigma}$$

A continuación, se supone que la frecuencia deseada (ω) de los polos dominantes es ω_2 y se obtiene la siguiente relación:

$$\sigma = i \frac{1 + GH(i\omega_2)}{GH(i\omega_2) - GH(i\omega_1)} (\omega_2 - \omega_1)$$

Introduciendo un controlador en el lazo, los polos dominantes pueden ser movidos a las posiciones deseadas. El correspondiente problema de diseño puede ser expresado en términos de la frecuencia (ω) y el coeficiente de amortiguamiento (ξ) de los polos dominantes.

Para realizar el diseño, se asume que los valores de la función de transferencia en lazo abierto para dos frecuencias próximas, ω_1 y ω_2 , son conocidos, esto es:

$$G(i\omega_1) = a_1 + ib_1$$

$$G(i\omega_2) = a_2 + ib_2$$

También se asume que las frecuencias ω_1 y ω_2 son cercanas a la frecuencia de cruce con el eje real. El diseño no está restringido a una estructura del controlador en particular, y cualquier controlador con al menos dos parámetros ajustables puede ser entonado.

Para el caso de un controlador PID la función de transferencia es:

$$H(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

Se asume que existe una relación entre el tiempo de acción integral (T_i) y el tiempo de acción derivativo (T_d):

$$T_d = \alpha T_i \hat{=} T$$

Por lo cual la expresión para la función de transferencia del controlador se puede expresar como:

$$H(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_s} + \alpha T s \right)$$

Este controlador tiene dos parámetros ajustables: la ganancia K_p , la cual mueve el lugar de transferencia (curva de Nyquist) en forma radial con respecto al origen, y la constante de tiempo T , provoca la torsión de este mismo lugar.

El problema de diseño es ahora determinar un controlador tal que la función de transferencia del sistema compensado tenga valores preestablecidos en las dos frecuencias escogidas ω_1 y ω_2 , es decir:

$$GH(i\omega_1) = G(i\omega_1)H(i\omega_1) = c_1 + id_1$$

$$GH(i\omega_2) = G(i\omega_2)H(i\omega_2) = c_2 + id_2$$

Sustituyendo los valores de $G(i\omega)$ y $H(i\omega)$ para cada una de las frecuencias se obtiene:

$$GH(i\omega_1) = (a_1 + ib_1)K_p \left(1 + \frac{1}{Ti\omega_1} + \alpha Ti\omega_1 \right) = c_1 + id_1$$

$$GH(i\omega_2) = (a_2 + ib_2)K_p \left(1 + \frac{1}{Ti\omega_2} + \alpha Ti\omega_2 \right) = c_2 + id_2$$

$$c_1 + id_1 = K_p \left(\left(a_1 + \frac{a_1}{Ti\omega_1} + a_1\alpha Ti\omega_1 \right) + \left(ib_1 + \frac{ib_1}{Ti\omega_1} + ib_1\alpha Ti\omega_1 \right) \right)$$

$$c_2 + id_2 = K_p \left(\left(a_2 + \frac{a_2}{Ti\omega_2} + a_2\alpha Ti\omega_2 \right) + \left(ib_2 + \frac{ib_2}{Ti\omega_2} + ib_2\alpha Ti\omega_2 \right) \right)$$

$$c_1 + id_1 = K_p \left(\left(a_1 + \frac{b_1}{T\omega_1} - b_1\alpha T\omega_1 \right) + i \left(-\frac{a_1}{T\omega_1} - a_1\alpha T\omega_1 - b_1 \right) \right)$$

$$c_2 + id_2 = K_p \left(\left(a_2 + \frac{b_2}{T\omega_2} - b_2\alpha T\omega_2 \right) + i \left(-\frac{a_2}{T\omega_2} - a_2\alpha T\omega_2 - b_2 \right) \right)$$

El coeficiente de amortiguamiento está dado por:

$$\sigma = \frac{\xi\omega_2}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

Igualando esta expresión con la primera que define el término σ resulta:

$$i \frac{1+GH(i\omega_2)}{GH(i\omega_2)-GH(i\omega_1)} (\omega_2 - \omega_1) = \frac{\xi\omega_2}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$i \frac{(\omega_2 - \omega_1) \sqrt{1-\xi^2}}{\omega_2 \xi} = \frac{GH(i\omega_2)-GH(i\omega_1)}{1+GH(i\omega_2)} \triangleq ik$$

Sustituyendo los valores de:

$$\frac{c_2 - c_1 + i(d_2 - d_1)}{1 + c_2 + id_2} = ik$$

Esto da:

$$c_2 - c_1 + kd_2 = 0$$

$$d_2 - d_1 - k(1 + c_2) = 0$$

Estas condiciones determinan los parámetros K y T del controlador PID.

De la primera ecuación resulta una relación de segundo orden para T , de la cual se obtiene T .

$$\left(a_2 + \frac{b_2}{T\omega_2} - b_2\alpha T\omega_2 \right) - \left(a_1 + \frac{b_1}{T\omega_1} - b_1\alpha T\omega_1 \right) + k \left(-\frac{a_2}{T\omega_2} - a_2\alpha T\omega_2 - b_2 \right) = 0$$

$$a_2 - a_1 + \frac{b_2}{T\omega_2} - \frac{b_1}{T\omega_1} - b_2\alpha T\omega_2 + b_1\alpha T\omega_1 - k \frac{a_2}{T\omega_2} - ka_2\alpha T\omega_2 - kb_2 = 0$$

$$(b_1\alpha\omega_1 - b_2\alpha\omega_2 - ka_2\alpha\omega_2)T^2 + (a_2 - a_1 - kb_2)T + \frac{b_2}{\omega_2} - \frac{b_1}{\omega_1} - k \frac{a_2}{\omega_2} = 0$$

La ganancia K se puede obtener de la segunda ecuación.

$$K_p \left(-\frac{a_2}{T\omega_2} - a_2\alpha T\omega_2 - b_2 \right) - K_p \left(-\frac{a_1}{T\omega_1} - a_1\alpha T\omega_1 - b_1 \right) - k \left(1 + K_p \left(a_2 + \frac{b_2}{T\omega_2} - b_2\alpha T\omega_2 \right) \right) = 0$$

$$K_p = \frac{k}{\left(\left(\frac{a_1}{\omega_1} - \frac{a_2 + b_2k}{\omega_2} \right) \frac{1}{T} + \alpha((b_2k - a_2)\omega_2 + a_1\omega_1)T - b_2 + b_1 - a_2k \right)}$$

Ejercicio

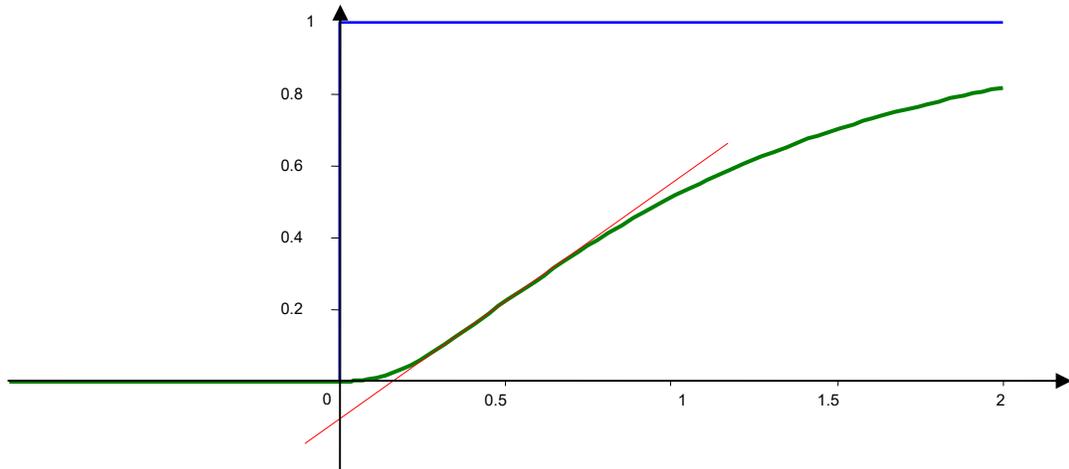
Se tiene un proceso con la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)(1+0.2s)(1+0.05s)(1+0.01s)} = \frac{1}{1+1.26s+0.2725s^2+0.0126s^3+0.0001s^4}$$

Determine los valores requeridos para controlar el sistema con un controlador PI y PID utilizando los métodos de Ziegler y Nichols.

Método de Ziegler Nichols basado en la respuesta al escalón

La respuesta del sistema ante un escalón unitario puede verse en la figura:



En esta figura se pueden medir los valores siguientes:

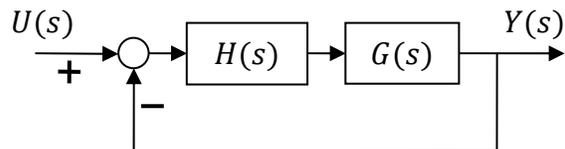
$$a \approx 0.11 \text{ y } b \approx 0.16$$

Con estos valores el método dice que se deben escoger los valores de ganancia del controlador según la tabla, y estos valores son:

- Para un controlador PI:
 $K_p = 8.2 \text{ y } T_i = 0.48$
- Para un controlador PID:
 $K_p = 10.9, T_i = 0.32 \text{ y } T_d = 0.08$

Método de Ziegler Nichols basado en la respuesta frecuencial

Se debe en este caso obtener el valor de K_c y t_c del sistema de lazo abierto que se muestra en la figura.



Y para ello se toma:

$$H(s) = K_p$$

Luego el sistema de lazo abierto en este caso será:

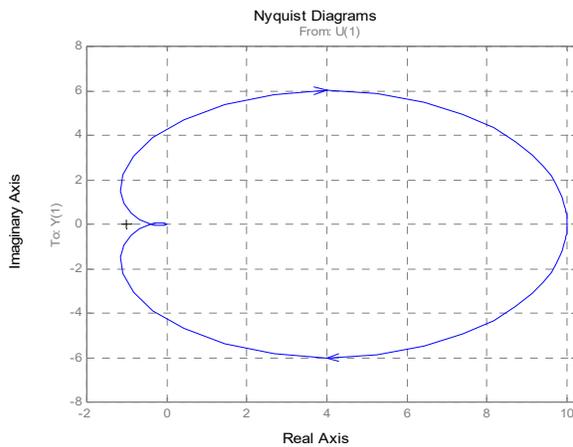
$$G(s)H(s) = \frac{K_p}{(1+s)(1+0.2s)(1+0.05s)(1+0.01s)}$$

La figura siguiente muestra los diagramas de Nyquist para el sistema con una ganancia proporcional igual a 10 y a 25.

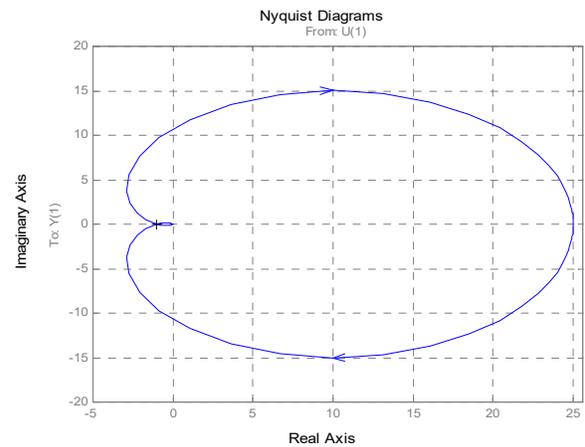
Las figuras muestran que:

- La ganancia crítica está alrededor de $K_p = 25$
- Esta se obtiene para una frecuencia crítica $\omega_c = 10$ con lo cual $t_c = \frac{2\pi}{\omega_c} = 0.63$

Nota: en un caso práctico por lo general no se tienen los diagramas de Nyquist analíticos, sin embargo el valor de la ganancia crítica se obtiene aumentando el valor de K_p hasta que el sistema comience a presentar oscilaciones sostenidas, tal como se expone en la parte teórica del método. Los dos procedimientos son en este caso equivalentes.



Para $K_p = 10$



Para $K_p = 25$

Con estos valores se busca en la tabla los valores para las ganancias del controlador obteniéndose los siguientes:

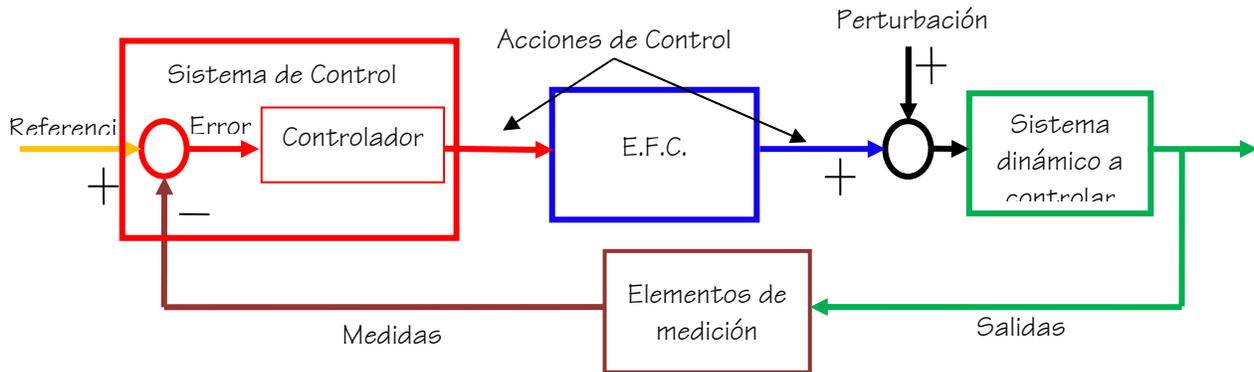
- Para un controlador PI:
 $K_p = 10$ y $T_i = 0.5$
- Para un controlador PID
 $K_p = 15$, $T_i = 0.31$ y $T_d = 0.08$

Obsérvese que los valores no son idénticos en los dos métodos, esto es debido a que son fruto de aproximaciones distintas, y se trata en todo caso de una aproximación en donde se puede realizar posteriormente un ajuste más fino. Sin embargo la magnitud de los valores es relativamente próxima en los dos casos.

Tema 11. Control por Retorno de Estado

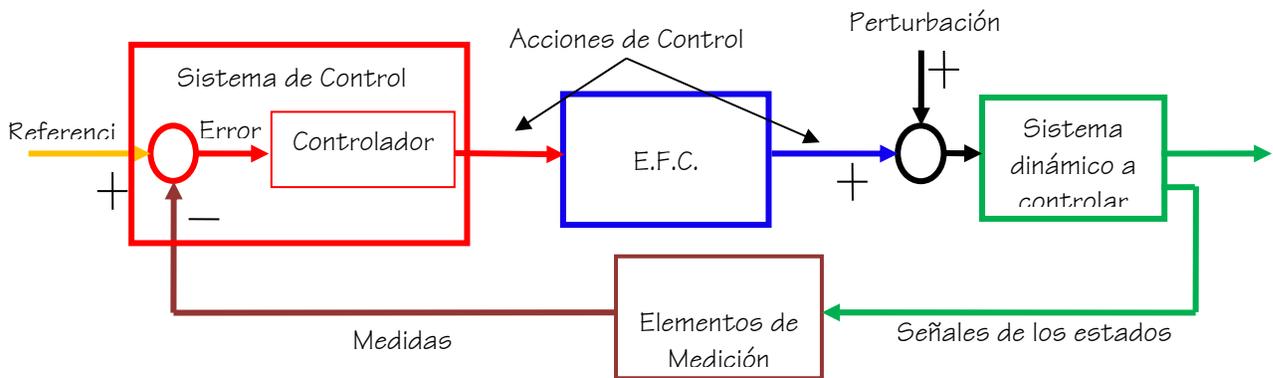
Retorno de estado lineal.

El principio básico del control en lazo cerrado clásico se muestra en la siguiente figura:



En este las acciones de control son calculadas por la medición de las salidas (variables controladas), este tipo de control suele denominarse control por retorno de salida.

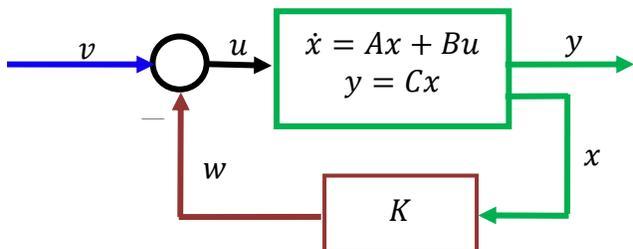
Mientras que por su lado el principio básico del control por retorno de estado se basa en realizar las acciones de control en función de los valores medidos de los estados. Este se puede apreciar en la siguiente figura:



Este esquema se puede simplificar tal como aparece en la figura siguiente:

Donde K es una matriz (vector) línea v es una entrada nueva.

El objetivo es determinar la acción de control (K), de manera que los polos de la función de transferencia del sistema, en lazo cerrado, se ubiquen de forma conveniente en el plano complejo, para satisfacer estabilidad y especificaciones de amortiguamiento, velocidad, etc.



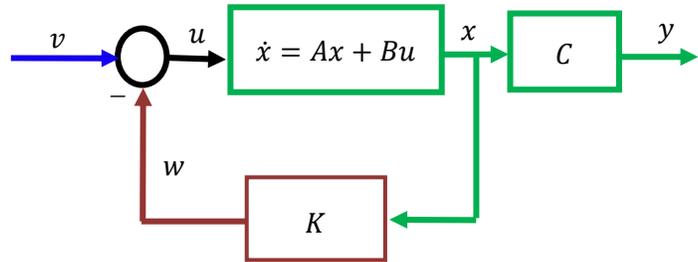
Como ya estudiamos anteriormente, en un sistema expresado en espacio de estado, los polos de la función de transferencia son los valores propios de la matriz de estado A , por lo tanto una retroalimentación sobre los estados con una matriz K , es equivalente a realizar una modificación de la matriz de estado del sistema, tal como se explica a continuación.

Consideremos el sistema representado en la figura y descrito por la ecuación de estado siguiente:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

El retorno de estado introduce una modificación sobre la entrada del sistema de la forma:

$$u(t) = v(t) - w(t) = v(t) - Kx(t)$$



Las ecuaciones del sistema en lazo cerrado se escriben como:

$$\dot{x} = Ax(t) + B[v(t) - Kx(t)] = [A - BK]x(t) + Bv(t)$$

En consecuencia la matriz de estado del sistema en lazo cerrado es: $A_{LC} = A - BK$.

La dinámica del sistema en lazo cerrado estará determinada entonces por los valores propios de la matriz (A_{LC})

Estos valores propios como bien sabemos son las raíces de la ecuación característica $\lambda_{A-BK(s)}$, que se obtienen con:

$$|\lambda I - A_{LC}| = 0$$

El control modal

También denominado control por ubicación de polos. Este se puede realizar en espacio de estado, o en forma algebraica con las funciones de transferencia.

Se denomina control modal al control que consiste en determinar una matriz de retroalimentación de estado K tal que los valores propios de la matriz A_{LC} se ubiquen en posiciones prefijadas arbitrariamente ($\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$) (valores reales o complejos conjugados). La existencia de una solución depende de la controlabilidad del sistema y de la posibilidad de acceder a los estados del mismo.

Cálculo de la matriz K , caso de un sistema en forma cualquiera

En el caso que el sistema este representado por una forma cualquiera, el retorno de estado puede modificar de forma importante la matriz de estado del sistema en lazo cerrado respecto de su forma en lazo abierto. Las etapas para el cálculo del control (matriz K) son las siguientes:

- Cálculo de la matriz ($A_{LC} = A - BK$)
- Cálculo del polinomio característico de A_{LC} . Que se determina con $|sI - A_{LC}|$.
- Resolución de la ecuación polinomial:

$$|sI - A_{LC}| = (s - \lambda_0)(s - \lambda_{01}) \dots (s - \lambda_{n-1})$$

Donde $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ son los polos que se quieren imponer al sistema en lazo cerrado.

Otra forma de calcular la matriz K consiste en efectuar un cambio de variable lineal al sistema para obtener una forma canónica de controlabilidad.

Notas:

- Para que el control se pueda realizar físicamente se deben escoger valores propios reales o complejos conjugados por pares, lo cual garantiza una función de transferencia de coeficientes reales.
- Como la estabilidad es la primera característica que se debe asegurar estos coeficientes deben tener su parte real estrictamente negativa.

Ejemplo 1:

Consideremos el sistema LTI definido por las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 6 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}; C = [1 \quad 0 \quad 0]$$

Queremos realizar un control por retorno de estado para obtener un sistema en lazo cerrado cuyos polos se ubiquen en $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1 - 2i, \lambda_3 = -1 + 2i$.

Esto es equivalente a obtener un sistema cuya ecuación característica sea:

$$Ec = (s + 1)(s + 1 + 2i)(s + 1 - 2i) = (s + 1)(s^2 + 2s + 5) = s^3 + 3s^2 + 7s + 5$$

La ecuación para la ubicación de los polos es:

$$|sI - A_{LC}| = \left| \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 6 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2 \quad k_3] \right| = s^3 + 3s^2 + 7s + 5$$

$$\begin{vmatrix} s - 1 + 2k_1 & -4 + 2k_2 & 1 + 2k_3 \\ -6 + 3k_1 & s + 1 + 3k_2 & -3 + 3k_3 \\ -2 - k_1 & -2 - k_2 & s + 5 - k_3 \end{vmatrix} = s^3 + 3s^2 + 7s + 5$$

$$\begin{aligned} s^3 + (2k_1 + 3k_2 - k_3 + 5)s^2 + (25k_1 + 21k_2 + 10k_3 - 29)s + (41k_1 + 72k_2 + 71k_3 - 129) \\ = s^3 + 3s^2 + 7s + 5 \end{aligned}$$

Obtenemos entonces el siguiente sistema lineal:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 25 & 21 & 10 \\ 41 & 72 & 71 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -29 \\ -129 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 25 & 21 & 10 \\ 41 & 72 & 71 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ -29 \\ -129 \end{bmatrix} \right)$$

$$K = [1.4227 \quad -0.9416 \quad 2.0206]$$

Calculo de la matriz K , caso de un sistema bajo la forma canónica de controlabilidad

Cuando el sistema se encuentra en la forma canónica de controlabilidad, las matrices A y B tienen formas particulares que permiten facilitar el cálculo de la matriz K :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [b_n \quad b_{n-1} \quad \cdots \quad \cdots \quad b_1]$$

Como lo que se quiere determinar es una matriz $K = [k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_{n-1}]$, tal que:

$$A_{LC} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_{n-1}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & 1 \\ -a_n - k_1 & -a_{n-1} - k_2 & \cdots & \cdots & -a_1 - k_{n-1} \end{bmatrix}$$

Tenga valores propios $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$.

El control modal impone que el denominador de la función de transferencia del sistema en lazo cerrado sea:

$$\text{den}(H_{BF}(s)) = (s - \lambda_0)(s - \lambda_1) \dots (s - \lambda_{n-1}) = s^n + a'_1 s^{n-1} + \dots + a'_{n-1} s + a'_n$$

La ubicación de los polos en este caso no modifica la forma de la representación (sigue siendo en lazo cerrado de forma canónica de controlabilidad). En consecuencia, obtenemos dos escrituras distintas para la matriz de estado del sistema en lazo cerrado ($A - BK$):

$$A_{LC} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & 1 \\ -a_n - k_1 & -a_{n-1} - k_2 & \cdots & \cdots & -a_1 - k_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & 1 \\ -a'_n & -a'_{n-1} & \cdots & \cdots & -a'_1 \end{bmatrix}$$

Y se obtiene el sistema de n ecuaciones con n incógnitas siguiente:

$$\begin{cases} a_n + k_1 = a'_n \\ a_{n-1} + k_2 = a'_{n-1} \\ \vdots \\ a_1 + k_{n-1} = a'_1 \end{cases}$$

Por lo tanto la operación de calcular la matriz $K = [k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_{n-1}]$ es mucho más sencilla.

Ejemplo 2:

Para el sistema del ejemplo 1 la función de transferencia es:

$$G(s) = \frac{2s^2 + 25s + 41}{s^3 + 5s^2 - 29s - 129}$$

La representación de estado bajo la forma canónica de controlabilidad es:

$$A_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 129 & 29 & -5 \end{bmatrix}; B_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C_C = [41 \quad 25 \quad 2]$$

Se quiere un control por retorno de estado para que el sistema en lazo cerrado tenga los polos en $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1 - 2i, \lambda_3 = -1 + 2i$; lo cual es equivalente a tener un sistema cuya ecuación característica sea:

$$E_C = (s + 1)(s + 1 + 2i)(s + 1 - 2i) = (s + 1)(s^2 + 2s + 5) = s^3 + 3s^2 + 7s + 5$$

Por lo tanto la matriz K se obtiene con:

$$A_{LC} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 129 - k_1 & 29 - k_2 & -5 - k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -7 & -3 \end{bmatrix}$$

$$K = [134 \quad 36 \quad -2]$$

Calculo de la matriz K con la ecuación de Ackermann

Se puede determinar los valores del control por retorno de estado utilizando una ecuación matricial denominada ecuación de Ackermann la cual expresa lo siguiente.

Para un control donde: $u = -Kx$

Et si se quiere imponer al sistema en lazo cerrado la ecuación característica de la forma:

$$q(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_0$$

La matriz de la ganancia del controlador (K) se puede calcular con la ecuación:

$$K = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1]C_c^{-1}q(A)$$

Donde C es la matriz de controlabilidad del sistema, y:

$$q(A) = A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \dots + \alpha_1A + \alpha_0I$$

Nota: la presencia de la inversa de la matriz de controlabilidad implica que el sistema debe ser controlable.

Ejemplo 3:

Para el sistema de segundo orden siguiente:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2}$$

Se quiere obtener mediante un control por ubicación de polos, un sistema en lazo cerrado cuyos polos se encuentren en:

$\lambda = -1 \pm i$, es decir que su ecuación característica sea:

$$q(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2$$

Se puede obtener una representación de estado del sistema escogiendo como estados a: $x_1 = y; x_2 = \dot{y}$, con los cuales obtenemos para la representación de estado las matrices siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = [1 \quad 0]$$

La matriz de controlabilidad es:

$$C = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Y su inversa:

$$C^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por otro lado:

$$q(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 + 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La matriz de la ganancia del controlador (K) se puede calcular entonces con la ecuación de Ackermann:

$$K = [0 \ 1]C_c^{-1}q(A) = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = [2 \ 2]$$

Este puede calcularse con la función Acker de Matlab.

Control de salidas con valor constante no nulo

En el caso estudiado en la primera sección el sistema no tiene ninguna perturbación exterior, además el control estudiado solo permite hacer que el sistema vaya hacia un nuevo punto de equilibrio el cual no necesariamente corresponde con el valor deseado. Vemos entonces que el control por ubicación de polos simplemente permite satisfacer las dinámicas impuestas al sistema. Cuando se requiere imponer un valor específico a la salida del sistema o repeler perturbaciones se requieren aportes adicionales al controlador.

Inserción de un pre-compensador

Cuando el objetivo de control es obtener: $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_c$ donde y_c es el valor de la referencia (consigna o valor deseado), que supondremos constante en el tiempo (Escalón). Se requiere calcular el valor de la entrada necesaria v para obtener como salida ese valor deseado y_c .

Consideremos el sistema en lazo cerrado descrito por la siguiente ecuación de estado:

$$\begin{cases} \dot{x} = [A - BK]x(t) + Bv(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

En régimen estacionario estas ecuaciones son:

$$\begin{cases} 0 = [A - BK]x + Bv \\ y = y_c = Cx \end{cases}$$

De la primera ecuación obtenemos una relación para x :

$$x = -[A - BK]^{-1}Bv$$

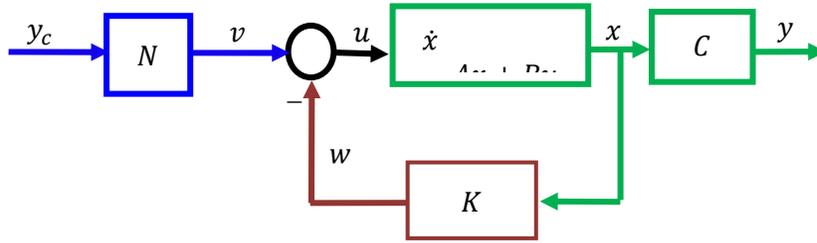
La cual sustituimos en la ecuación de salida del sistema obteniendo:

$$y_c = C(-[A - BK]^{-1}B)v$$

Por lo tanto requerimos aplicar la siguiente entrada al sistema:

$$v(t) = [C(-[A - BK]^{-1}B)]^{-1}y_c = Ny_c$$

Este resultado nos muestra que solo requerimos de agregar un bloque con una matriz que multiplique a la entrada real del sistema, es decir simplemente una corrección estática como la mostrada en la siguiente figura:

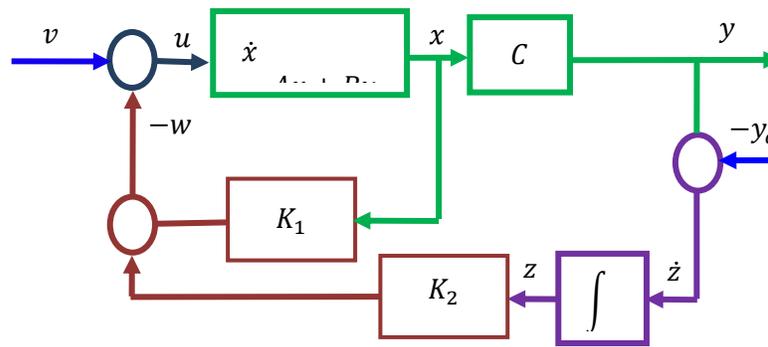


Solo requerimos entonces el cálculo de la pre-compensación N :

$$N = [C(-[A - BK]^{-1}B)]^{-1}$$

Control con acción Integral

Cuando existen perturbaciones que afectan la evolución del sistema requerimos, además del retorno de estado simple, una acción integral. La cual, al igual que en el caso de un control clásico, permite limitar el efecto de la influencia de las perturbaciones en las salidas del sistema. Se puede incluir en el lazo de retorno de estado un corrector integral cuya función es corregir el error estático de una respuesta al escalón. Para hacer esto se modifica el esquema del control a la forma presentada en la siguiente figura.



En este caso el objetivo es obtener: $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_c$ donde y_c es el valor de referencia considerado constante en este caso, y v se comporta como una perturbación.

Utilizamos la notación $\dot{z} = y - y_c$. Como queremos que $\dot{z} = 0$ en régimen estacionario, es decir cuando $t = +\infty$.

Considerando el estado del sistema aumentado con el estado z : $\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$.

Las ecuaciones de estado del este sistema aumentado son:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} y_c = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y_c \end{bmatrix} \\ y = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \end{cases}$$

Y en régimen estacionario se convierten en:

$$\begin{cases} 0 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ z_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y_c \end{bmatrix} \\ y_s = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x_s \\ z_s \end{bmatrix} \end{cases}$$

Lo que se busca es un control $u = -[K_1 \quad K_2] \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$ que anule el error estático de la salida del sistema.

El sistema en lazo cerrado en régimen estacionario será:

$$\begin{cases} 0 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ z_s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ z_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK_1 & -BK_2 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ z_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ y_c \end{bmatrix} \\ y_s = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ z_s \end{bmatrix} \end{cases}$$

Para que este sistema aumentado tienda a un estado de equilibrio es suficiente y necesario que la matriz del sistema en lazo cerrado $A_{LC} = \begin{bmatrix} A - BK_1 & -BK_2 \\ C & 0 \end{bmatrix}$ sea estable. Razonamiento que es válido para toda entrada v .

Nota: En la práctica el control integral requiere la determinación de la ganancia de un retorno de estado K_2 sobre el estado añadido lo que es equivalente a un polo adicional para el sistema en lazo cerrado. Este polo se escoge de tal manera que no afecte la dinámica del sistema principal, es decir que el subsistema correspondiente a la parte integral debe converger mucho más rápido que el sistema principal.

Example 4:

Sea el sistema LTI definido por las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 6 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}; C = [1 \ 0 \ 0]$$

Se quiere realizar un control por retorno de estado para obtener un sistema en lazo cerrado cuyos polos se ubiquen en: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1 - 2i, \lambda_3 = -1 + 2i$.

La matriz del sistema en lazo cerrado es:

$$A_{LC} = \begin{bmatrix} A - BK_1 & -BK_2 \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 6 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \end{bmatrix} & - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} k_2 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$A_{LC} = \begin{bmatrix} 1 - 2k_{11} & 4 - 2k_{12} & -1 - 2k_{13} & -2k_2 \\ 6 - 3k_{11} & -1 - 3k_{12} & 3 - 3k_{13} & -3k_2 \\ 2 + k_{11} & 2 + k_{12} & -5 + k_{13} & k_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para que esta matriz sea estable es necesario y suficiente con escoger los K_{ij} tales que los valores propios de la matriz sean negativos o con parte real negativa, tres de estos valores propios están definidos por el enunciado del problema:

$$\begin{aligned} |sI - A_{LC}| &= (s + 1)(s + 1 + 2i)(s + 1 - 2i)(s - \lambda_4) = (s^3 + 3s^2 + 7s + 5)(s - \lambda_4) \\ |sI - A_{LC}| &= s^4 + (3 - \lambda_4)s^3 + (7 - 3\lambda_4)s^2 + (5 - 7\lambda_4)s + 5\lambda_4 \end{aligned}$$

Si por ejemplo escogemos como cuarto valor propio (el correspondiente a la parte integral) $\lambda_4 = -4$:

$$|sI - A_{LC}| = s^4 + 7s^3 + 19s^2 + 33s + 20$$

Donde tendremos entonces:

$$|sI - A_{LC}| = \begin{vmatrix} s - 1 + 2k_{11} & -4 + 2k_{12} & 1 + 2k_{13} & 2k_2 \\ -6 + 3k_{11} & s + 1 + 3k_{12} & -3 + 3k_{13} & +3k_2 \\ -2 - k_{11} & -2 - k_{12} & s + 5 - k_{13} & -k_2 \\ -1 & 0 & 0 & s \end{vmatrix}$$

Calculamos entonces los valores correspondientes:

$$K_1 = [1.2084 \ 0.2479 \ 1.1607]; K_2 = 1.4878$$

Esto puede hacerse con la función Acker de Matlab para el sistema ampliado:

$$A_{amp} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad B_{amp} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{amp} = [C \quad 0]$$

Control Parcial

Consideremos ahora un sistema que es solo parcialmente controlable, es decir $\text{rango}(A) = r_A < n$. En este caso r_A designa el grado de controlabilidad del sistema, es decir el número de estados controlables que este posee. Para el sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Seleccionamos como vector de estado x un vector propio del sistema. Y separamos el vector de estado en dos partes: la parte controlable con r_A variables de estado: x_1 y la parte no controlable con $(n - r_A)$ variables de estado: x_2 .

Podemos entonces escribir la ecuación dinámica del sistema como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Los valores propios A (modos del sistema) son los valores propios de A_{11} junto a los valores propios de A_{22} .

$$|sI - A| = |sI - A_{11}| \times |sI - A_{22}|$$

El control por ubicación de polos se escribe:

$$u(t) = v(t) - Kx(t) = v - [K_1 \quad K_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Cuya ecuación en lazo cerrado es:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_{11} - B_1 K_1 & A_{12} - B_1 K_2 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v$$

Notas:

- Obsérvese que el control no tiene ningún efecto sobre la evolución de la parte no controlable del sistema pues:

$$\dot{x}_2 = A_{22}x_2$$

Para un sistema con partes no controlables, solo los modos de la parte controlable (A_{11}) se pueden modificar mediante un control por retorno de estado.

- La parte K_2 de la matriz K se determina de una forma distinta. Se pueden considerar para ello criterios adicionales como por ejemplo el hecho de hacer que la salida del sistema sea independiente de la parte no controlable x_2 .

Ejercicios:

Para los siguientes sistemas determine el control por retorno de estado requerido para estabilizarlos, un control directo para anular el error estático y un control integral.

$$1. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$C = [1 \quad 2]$$

$$2. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -7 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

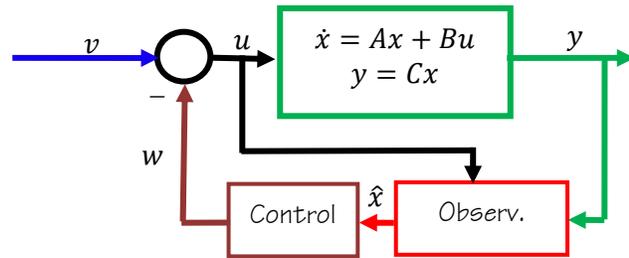
$$C = [0 \quad 1 \quad 2]$$

Observadores

En algunos casos no es posible acceder a la totalidad de los estados, ya sea porque es imposible realizar una medición física de los mismos o porque colocar medidores para cada estado haría muy costoso o complejo el sistema. En este caso la implementación del control $u = -Kx$ no se puede realizar directamente. Y como la matriz C no es invertible en la mayoría de los casos, la ecuación de salida $y = Cx$ no permite determinar el valor de x .

Se requiere en este caso la reconstrucción de los estados x a partir de la información disponibles para la entrada u y la salida y para ello se utiliza un observador, el cual está constituido por un sistema dinámico que permite obtener una estimación aproximada \hat{x} de x . Este observador suele también denominarse reconstructor, estimador o filtro.

El esquema de control en este caso debe modificarse como se muestra en la figura siguiente.



Síntesis del Observador

Se denomina observador de un sistema a un operador que genera una aproximación \hat{z} de la variable $z = Tx$ de la forma:

$$\dot{\hat{z}} = F\hat{z} + Ly + Ju$$

Donde u es el control o entrada e y es la salida.

- Si z y x tienen la misma dimensión, entonces se dice que el observador es completo (se estima todo el vector de estado). En ese caso $T = I$; por tanto $z = x$ y $\hat{z} = \hat{x}$.
- Si $\dim(z) < \dim(x)$, entonces se dice que el observador es de orden reducido.

Un observador debe satisfacer al menos las dos condiciones siguientes:

- Un observador debe ser estable.
- Un observador debe garantizar la convergencia de \hat{z} hacia z (estimación sin desvío):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{z}(t) - z(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad \forall u, \forall x(t_0)$$

Donde $e(t)$ es el denominado error de reconstrucción.

Observador Identidad

Un observador identidad es un observador completo sin desvío ($\hat{z}(t) \rightarrow z$ si $t \rightarrow \infty$) donde $z = x$. Con este observador obtenemos las ecuaciones de la pareja sistema-observador siguientes:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = F\hat{x} + Ly + Ju \\ \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Si consideramos la derivada del error de estimación:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} = (Ax + Bu) - (F\hat{x} + Ly + Ju) \\ \dot{e} &= (Ax + Bu) - (F\hat{x} + LCx + Ju) = (A - LC)x + (B - J)u - F\hat{x} \end{aligned}$$

Donde $\hat{x} = x - e$

$$\dot{e} = (A - LC - F)x + (B - J)u + Fe$$

Para una estimación sin desvío es necesario que $e = 0$ y que $\dot{e} = 0 \forall x, \forall u$ y para ello se requiere satisfacer las ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} A - LC - F = 0 \\ B - J = 0 \\ F \text{ estable} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F = A - LC \\ J = B \\ (A - LC) \text{ estable} \end{cases}$$

La ecuación del observador será en este caso:

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Ly + Bu$$

Esta puede reorganizarse de la forma, conocido bajo el nombre de observador de Luenberger:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

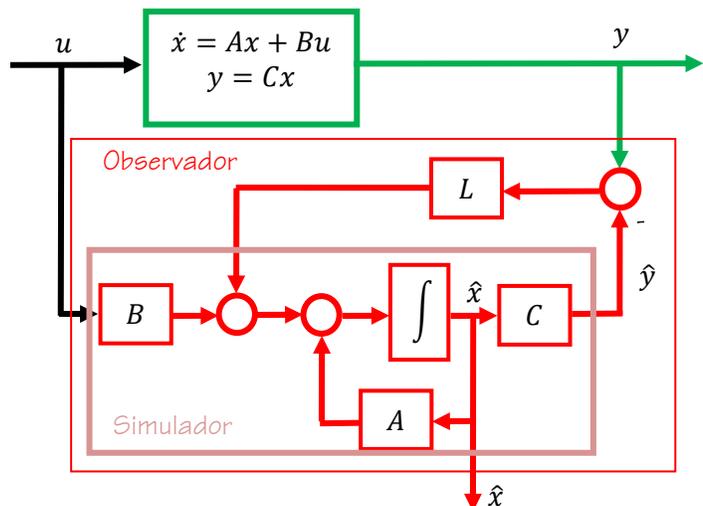
Si escribimos $\hat{y} = C\hat{x}$ la ecuación de este observador se convierte en:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y})$$

Esta relación que caracteriza al observador puede representarse por el siguiente diagrama de bloques:

El observador está constituido de dos partes:

- Un simulador del sistema real, caracterizado por la matrices (A, B, C) , cuyas entradas son u e y y cuya salida es \hat{y} .
- Un corrector que realiza una retroalimentación función de la diferencia entre la salida y y su valor estimado \hat{y} . Este corrector garantiza la convergencia de la estimación del estado \hat{x} hacia el estado x . En el corrector L se conoce bajo el nombre de ganancia del observador. Se dice que el observador converge si e tiende a cero, y esto ocurre siempre que $(A - LC)$ sea estable. Por lo tanto $|\lambda I - (A - LC)| = 0$ debe tener raíces negativas o con parte real negativa.



El cálculo de un observador para un sistema LTI consiste entonces en calcular la matriz L , para obtener unos valores propios del sistema retroalimentado (observador) en una posición seleccionada arbitrariamente. Se dice entonces que se trata de un problema de control modal del sistema dual.

Ejemplo 5:

Consideremos el sistema lineal $\dot{x} = Ax + Bu$; $y = Cx$ definido por las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si suponemos que solo la salida $y = x_1$ puede medirse, requerimos de un observador para determinar el estado no medible x_2 . En este caso aunque solo requerimos determinar uno de los dos estados, vamos a construir un observador que permite determinar todos los estados, es decir un observador completo. Sería

posible sin embargo la construcción de un observador reducido, sin embargo con frecuencia es preferible construir un observador completo y utilizar los estados redundantes para corregir eventuales defectos de estimación causados por ruido u otras perturbaciones. Un ejemplo de esto sería el filtro de Kalman (observador óptimo de tiempo variable) el cual permite la resolución de problemas de observación con ruido en la medición.

Lo primero que se debe hacer es determinar si el sistema es observable, pues de no serlo no podríamos construir el observador completo.

$$\text{rango}(O) = \text{rango} \left(\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 2 = n$$

por lo tanto el sistema es observable, y podemos entonces construir un observador para determinar los estados del sistema.

Para la construcción del observador vamos a seleccionar una dinámica tal que el comportamiento de éste sea equivalente a un sistema de segundo orden cuya ecuación característica sea:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2$$

Donde: $\xi = 0.8$ y $\omega_n = 10$.

Estos valores nos permiten obtener un tiempo de estabilización del observador de $T_s = 0.5$ s

Repaso: El tiempo de estabilización es el tiempo necesario para que la salida de un sistema sea igual al 98% del valor de la respuesta en estado estable (2% de error) después de un cambio en escalón de la entrada, este se puede calcular para un sistema de primer orden con: $T_s = 4\tau$ y para un sistema de segundo orden con: $T_s = \frac{4}{\xi\omega_n}$.

La ecuación característica del observador será:

$$p(\lambda) = |\lambda I - (A - LC)| = \left| \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \right|$$

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 + L_1 & -3 \\ 1 + L_2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 2 + L_1)(\lambda - 4) - (-3)(1 + L_2)$$

Por lo tanto:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + (L_1 - 6)\lambda - 4L_1 + 3L_2 + 11 = \lambda^2 + 16\omega_n\lambda + 100$$

Y podemos calcular la matriz de ganancia del observador L con las ecuaciones:

$$\begin{aligned} L_1 - 6 &= 16 \\ -4L_1 + 3L_2 + 11 &= 100 \end{aligned}$$

La matriz L es:

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 59 \end{bmatrix}$$

En conclusión el observador para nuestro sistema lineal es:

$$\hat{\mathbf{x}} = A\hat{\mathbf{x}} + Bu + L(y - C\hat{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 22 \\ 59 \end{bmatrix} (y - [1 \ 0]\hat{\mathbf{x}})$$

Ganancia del Observador con la ecuación de Ackermann

Se puede utilizar la ecuación de Ackermann para determinar la ganancia del observador, para ello se procede como sigue. Para que la dinámica del observador se comporte según una ecuación característica seleccionada arbitrariamente de la forma:

$$p(\lambda) = \lambda^n + \beta_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \beta_2\lambda^2 + \beta_1\lambda + \beta_0$$

Donde los coeficientes β se seleccionan para obtener especificaciones deseadas en el observador.

La matriz de ganancia del observador:

$$L = [L_1 \quad L_2 \quad \dots \quad L_n]^T$$

Se puede calcular con la expresión:

$$L = p(A)O^{-1}[0 \quad \dots \quad 0 \quad 1]^T$$

Donde O es la matriz de observabilidad del sistema y:

$$p(A) = A^n + \beta_{n-1}A^{n-1} + \dots + \beta_2A^2 + \beta_1A + \beta_0I$$

Ejemplo 6.

Para el sistema presentado en el ejemplo 5:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C = [1 \quad 0]$$

Y seleccionando la misma ecuación característica deseada para la dinámica del observador:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 16\lambda + 100$$

Obtenemos:

$$p(A) = A^2 + 16A + 100I = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}^2 + 16 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + 100 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 133 & 66 \\ -22 & 177 \end{bmatrix}$$

Siendo la matriz de observabilidad:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ y por lo tanto: } O^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

La ganancia del observador será entonces:

$$L = p(A)O^{-1}[0 \quad 1]^T = \begin{bmatrix} 133 & 66 \\ -22 & 177 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 59 \end{bmatrix}$$

Control por retorno de salida

La puesta en práctica de un control por retroalimentación en espacio de estado en sistemas LTI, cuando todas las variables de estado no pueden medirse, supone la hipótesis que el sistema es controlable y observable.

Cuando el sistema no es totalmente controlable u observable, se debe dejar de lado las partes no controlables o no observables del sistema, es decir no tomarlas en cuenta. Pero se debe verificar para que el sistema de control pueda funcionar, aún en estas condiciones, que los estados no controlables sean estables y que los no observables no sean indispensables para el control. El problema de control se resuelve seguidamente en tres grandes etapas:

- Control por retorno de estado. Se calcula la ganancia del controlador suponiendo que todo el vector de estado x puede medirse. El control lineal es de la forma $u = -Kx$, donde K se determina imponiendo los polos que se quieren obtener en lazo cerrado.
- Reconstrucción de los estados. Si solo es posible medir y , se necesita determinar un observador, es decir se necesita calcular la ganancia L que asegure la estabilidad del observador y una observación sin desvío.
- Control por retorno de salida. El control del sistema se realiza finalmente a partir del estado estimado $u = -K\hat{x}$.

A pesar de que la ganancia K se calcula para garantizar la estabilidad y rendimiento del sistema, y para ello se escogieron de forma que las raíces de la ecuación característica $|\lambda I - (A - BK)| = 0$ sean negativas o con parte real negativa. Y por lo tanto $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Es necesario verificar que ésta condición se garantiza aún con los estados estimados \hat{x} .

Estructura del control

En esta nueva configuración el control toma la forma del diagrama de bloques siguiente:

El control en este caso será:

$$u = v - K\hat{x}$$

Supongamos en primer lugar que $v = 0$.

En este caso: $u = -K\hat{x}$

Y la ecuación del observador es: $\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Ly + Bu$

Para mostrar la estabilidad del sistema vamos a estudiar las dinámicas del error del sistema que se introduce con la sustitución de x por \hat{x} en el cálculo del control.

Si reemplazamos el valor de la entrada u en la ecuación del observador obtenemos un sistema con entrada y y con salida u :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = (A - LC - BK)\hat{x} + Ly \\ u = -K\hat{x} \end{cases}$$

Podemos calcular la dinámica del error de la estimación $\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}}$ con la expresión:

$$\dot{e} = Ax + Bu - (A - LC)\hat{x} - Ly - Bu$$

Lo que se traduce en:

$$\dot{e} = A(x - \hat{x}) + L(C\hat{x} - y) = A(x - \hat{x}) + LC(\hat{x} - x) = (A - LC)e$$

Esta expresión muestra que la dinámica del error no depende de la entrada.

Por otro lado si volvemos al sistema que queremos controlar $\dot{x} = Ax + Bu$; $y = Cx$ y se substituye la ley de control en la ecuación dinámica obtenemos:

$$\dot{x} = Ax - BK\hat{x}$$

Como queremos estudiar la dinámica del error se substituye $\hat{x} = x - e$:

$$\dot{x} = Ax - BKx + BKe = (A - BK)x + BKe$$

Podemos ahora representar el sistema en lazo cerrado por las dinámicas de x y e :

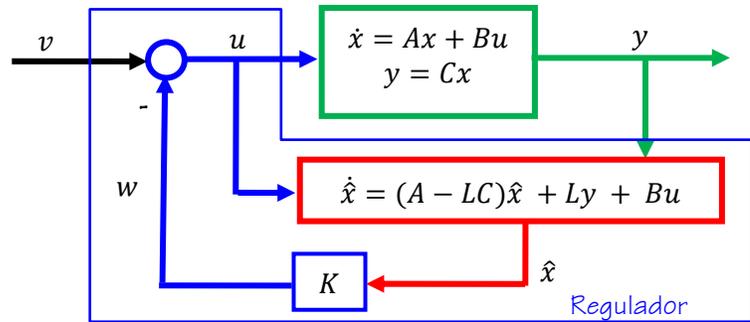
$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BK)x + BKe \\ \dot{e} = (A - LC)e \end{cases}$$

O en su forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

Lo valores propios de la nueva matriz dinámica del sistema son por lo tanto las raíces de:

$$|\lambda I - (A - BK)| |\lambda I - (A - LC)| = 0$$



Por lo tanto:

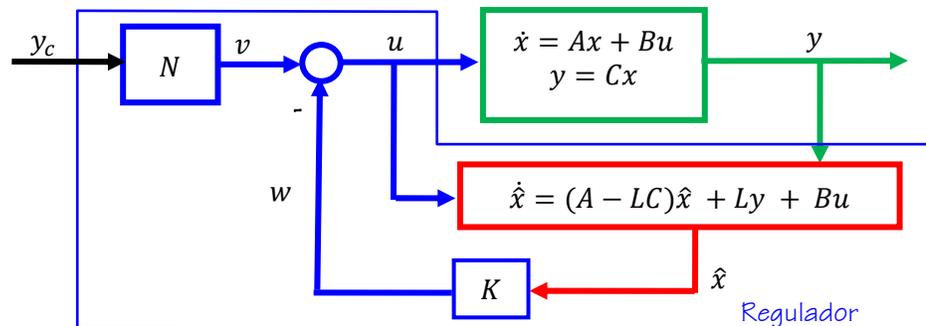
- si las raíces de $|\lambda I - (A - BK)| = 0$ son negativas o con parte real negativa, lo cual está garantizado pues se calculó el control para garantizar esa condición,
- y las raíces de $|\lambda I - (A - LC)| = 0$ son negativas o con parte real negativa, lo cual está garantizado pues el observador fue calculado para garantizar esa condición,
- entonces los valores propios de la matriz dinámica serán negativos o con parte reales negativas.

En conclusión los valores propios del sistema en lazo cerrado son los valores propios de $(A - BK)$, es decir las relativas al control del sistema, mas los valores propios de $(A - LC)$, es decir las del observador, y en consecuencia se observa que la sustitución de x por \hat{x} no modifica los valores propios obtenidos en el cálculo del control. Solamente se superponen valores propios adicionales que provienen del observador. La estabilidad del sistema en lazo cerrado no es modificada por la presencia del observador, siempre que este sea estable y no tenga desvío. Esto es conocido bajo el nombre de principio de separación el cual se satisface para todos los sistemas lineales.

Para que el comportamiento del sistema en lazo cerrado no sea modificado de manera notable por la presencia del observador, es necesario que la reconstrucción del estado sea rápida respecto de la dinámica del sistema de lazo cerrado (polos de $(A - LC)$ de gran modulo respecto de $(A - BK)$).

Inserción de un pre-compensador

De igual forma que para el control por retorno de estado, el control por retorno de salida no garantiza que el vector de la señal de referencia v sea nulo. El estado del sistema x va a converger hacia 0 con una dinámica determinada por los polos ya ubicados. Cuando v ya no sea nulo, el estado converge hacia un valor que no es necesariamente nulo. Un pre-compensador es en este caso una matriz cuadrada N , que se ubica justo después del vector de la referencia, tal como se observa en la figura.



Este pre-compensador no cambia los polos del sistema en lazo cerrado. Simplemente permite hacer corresponder ciertos componentes de la referencia con ciertas variables de estado previamente seleccionadas.

En este caso el control es:

$$u = v - K\hat{x}$$

Y la ecuación del sistema que tiene como entrada y y como salida u :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Ly + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Podemos calcular la dinámica del error de estimación $\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}}$ como:

$$\dot{e} = Ax + Bu - (A - LC)\hat{x} - Ly - Bu$$

Lo cual es equivalente a:

$$\dot{e} = A(x - \hat{x}) + L(C\hat{x} - y) = A(x - \hat{x}) + LC(\hat{x} - x) = (A - LC)e$$

Por otro lado si vamos al sistema que queremos controlar $\dot{x} = Ax + Bu$; $y = Cx$ y se sustituye la ley de control en la ecuación dinámica obtenemos:

$$\dot{x} = Ax + Bv - BK\hat{x}$$

Como lo que queremos es estudiar la dinámica del error sustituimos $\hat{x} = x - e$:

$$\dot{x} = Ax - BKx + BKe + Bv = (A - BK)x + BKe + Bv$$

Se puede entonces representar el sistema en lazo cerrado por las dinámicas de x y e :

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BK)x + BKe + Bv \\ \dot{e} = (A - LC)e \\ y = Cx \end{cases}$$

O en su forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v$$

$$y = Cx$$

Si y_c es constante, una vez que se alcance el régimen estacionario, para que el valor de y tienda a y_c tenemos:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v$$

$$y = y_c = Cx$$

Como $|A - LC| \neq 0$ pues la matriz L fue seleccionada para que el observador sea estable, es decir con polos estrictamente inferiores a cero, entonces obligatoriamente $e = 0$ (error de observación nulo en régimen estacionario).

La ecuación se convierte en:

$$(A - BK)x + Bv = 0$$

Y por lo tanto:

$$x = -(A - BK)^{-1}Bv$$

La cual al ser sustituida en la ecuación de salida obtenemos:

$$y = y_c = Cx = C(-(A - BK)^{-1}B)v$$

Por tanto finalmente:

$$v = [C(-(A - BK)^{-1}B)]^{-1}y_c = Ny_c$$

La cual es idéntica a la ecuación de control por retorno de estado directo. Por lo tanto la salida y tiende hacia la referencia y_c si calculamos la matriz N con la expresión:

$$N = [C(-(A - BK)^{-1}B)]^{-1}$$

Ejemplo 7:

Para el sistema presentado en el ejemplo 6, representado por las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0]$$

Se quiere realizar un control por retorno de salida, ya que el estado x_2 no se puede medir físicamente, con el objetivo de obtener un sistema en lazo cerrado con polos en $\lambda_1 = -1 + 2i, \lambda_2 = -1 - 2i$.

Para este sistema en el ejercicio 6 fue calculada la ganancia de un observador que recordamos aquí:

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 59 \end{bmatrix}$$

Para el control por retorno de salida se requiere calcular la ganancia del controlador, igual como si fuese un retorno de estado simple:

$$|sI - A + BK| = \left| s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2] \right| = \left| \begin{bmatrix} s-2 & -3 \\ 1+k_1 & s-4+k_2 \end{bmatrix} \right|$$

$$\left| \begin{bmatrix} s-2 & -3 \\ 1+k_1 & s-4+k_2 \end{bmatrix} \right| = (s-2)(s-4+k_2) - (-3)(1+k_1) = (s+1+2i)(s+1-2i)$$

$$s^2 + (k_2 - 6)s + (3k_1 - 2k_2 + 11) = s^2 + 2s + 5$$

Lo cual se traduce en dos ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} k_2 - 6 = 2 \\ 3k_1 - 2k_2 + 11 = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k_2 = 8 \\ k_1 = 10/3 \end{cases} \rightarrow K = [10/3 \quad 8]$$

Para realizar el control por retorno de salida es suficiente con realizar un retorno de estado:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly \\ u = v - K\hat{x} \end{cases}$$

Donde K y L fueron calculados en los pasos anteriores.

Si adicionalmente requerimos que la salida tienda hacia un valor deseado $y_c = Nv$ (consigna) se requiere agregar un pre-compensador, el cual se calcula independientemente del observador:

$$N = [C(-A - BK)^{-1}B]^{-1} = \left[[1 \quad 0] \left(- \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [10/3 \quad 8] \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right]^{-1}$$

$$N = \left[[1 \quad 0] \left(- \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -13/3 & -4 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right]^{-1} = \left[[1 \quad 0] \left(- \begin{bmatrix} -0.8 & -0.6 \\ 0.8667 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right]^{-1}$$

$$N = -1,6667$$

Ejercicios.

Para los siguientes sistemas calcular un observador para la estimación de los estados que se suponen no medidos, y determinar un control por retorno de salida para estabilizar los sistemas, agregando adicionalmente un pre-compensador para anular el error.

$$1. \begin{cases} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} & B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ C = [1 \quad 2] \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -7 & 4 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ C &= [0 \quad 1 \quad 2] \end{aligned}$$

Tema 12. Introducción a los Sistemas Digitales

Introducción

Cada vez más el control de sistemas reales tiende a la utilización de Computadores Digitales, debido a su eficiencia y bajo costo.

- Computadores cada vez más rápidos, crecimiento exponencial los últimos 30 años.
- Tamaño y precio de los equipos cada vez menor.
- La eficiencia de los sistemas digitales se acerca mucho en la actualidad a la de los sistemas continuos equivalentes.
- Posibilidad de trabajar muchas variables al mismo tiempo, lo que implica mayor facilidad para el tratamiento de sistemas multivariables.

Entre los campos de aplicación de los sistemas digitales encontramos:

- Control de máquinas herramientas (tornos, fresadoras, etc.)
- Procesos químicos complejos.
- Aeronáutica.
- Automóvil, etc.

Algunas ventajas de los sistemas digitales:

- Mejoras en la sensibilidad de las medidas.
- Utilización de sensores, transductores y calculadores digitales.
- Disminución de la sensibilidad al ruido.
- Facilidad para la reconfiguración de los algoritmos de de cálculo del control o supervisión.
- Posibilidad de utilizar algoritmos más complejos y eficientes.

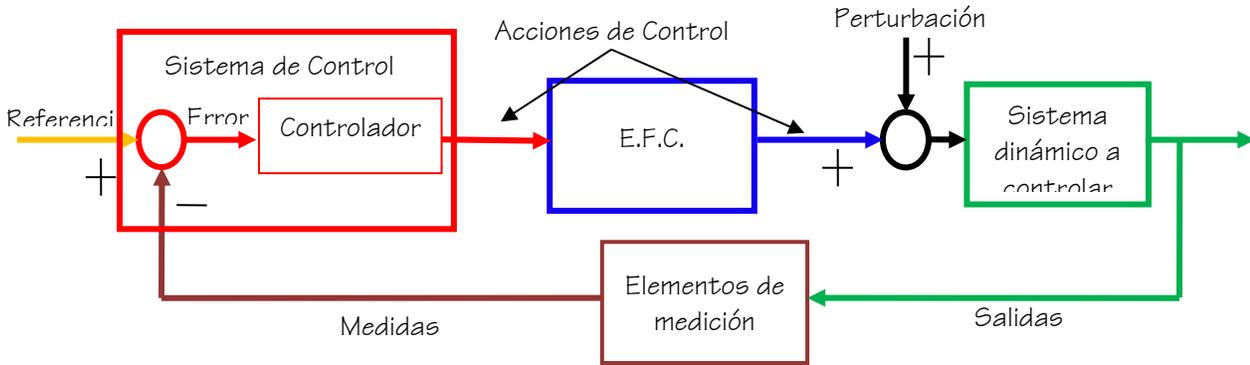
El control mediante un computador digital requiere de elementos adicionales en el sistema de control que modifican parcialmente el lazo de control y requieren de conocimientos adicionales tradicionalmente ligados al tratamiento de señales.

Algunos de estos conocimientos adicionales son:

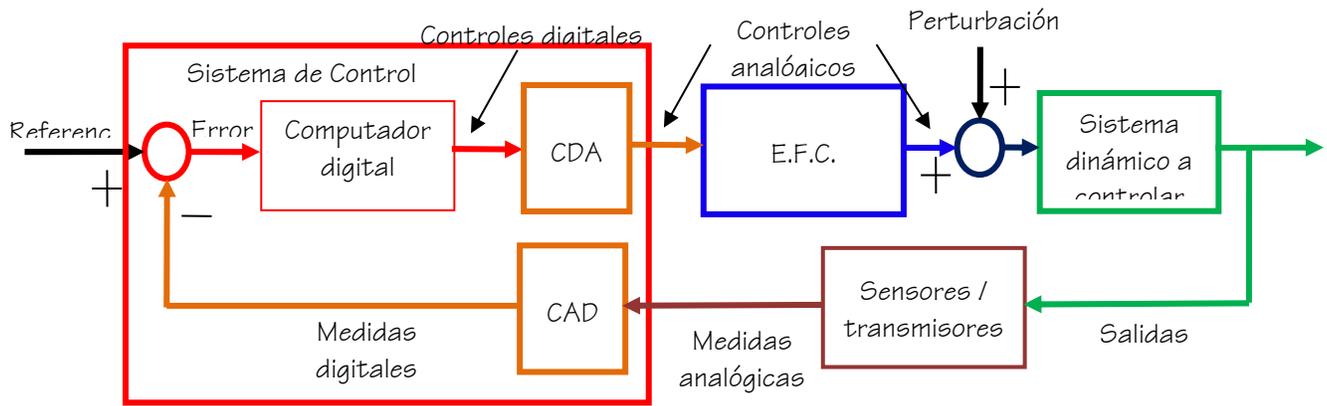
- Lazo de control de sistemas digitales (discretizados, numéricos, digitales).
- Convertidores análogo digital CAD y digital análogo CDA.
- Sistemas discretos.
- Ecuaciones de diferencias.
- La transformada en Z.
- La retroalimentación de estado digital.
- Estabilidad de los sistemas discretos
- El rendimiento de los sistemas discretos.

Lazo de control de sistemas continuos y digitales.

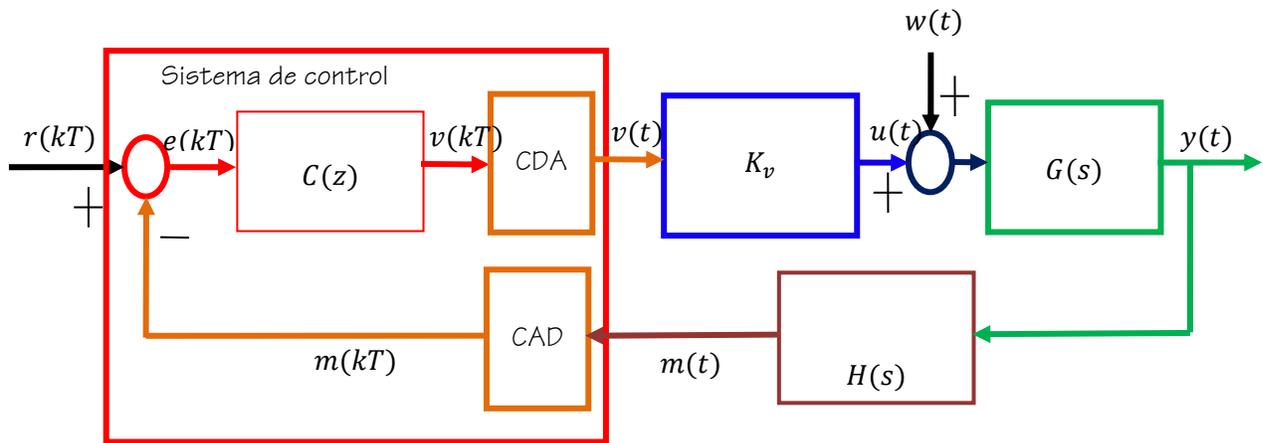
Las siguientes dos figuras muestran los diagramas de bloque típicos de sistemas de control Continuos y Digitales.



Control Retroalimentado Continuo



Control Retroalimentado Digital



Variables de Control Retroalimentado Digital

El sistema de control digital completo se puede considerar dividido en dos partes:

- Una parte analógica, que contiene las leyes físicas del sistema en sí, pues la mayor parte de los sistemas reales funcionan de forma analógica. A este comúnmente se le agregan los sensores y actuadores.
- Una parte digital en la que encontramos las leyes de control. Estas leyes deben tratarse por tanto como un sistema discreto.
- Una interfaz análogo-digital que permite la comunicación de las dos partes.

Convertidores Análogo-digital y digital-análogo

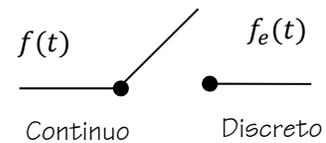
Convertidor Análogo-Digital

Un convertidor análogo digital realiza principalmente dos operaciones:

- El **muestreo de la señal**, es decir su discretización temporal, con un período fijo que se denota generalmente como T_e .

Una señal discreta es una señal que posee un valor solo a unos instantes precisos. Estos instantes de tiempo están definidos por el período de de muestreo T_e , que es un valor de tiempo constante que separa dos de estos instantes.

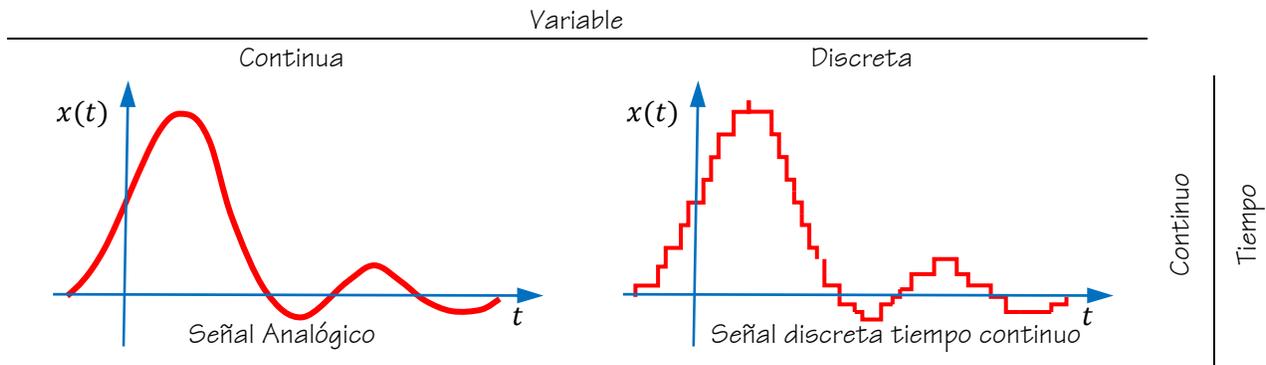
Un discretizador ideal se puede ver como un interruptor que se conecta cada T_e segundos, durante un instante muy corto de tiempo y esta desconectado el resto del tiempo. Si consideramos como variable de entrada del discretizador a $f(t)$ y como salida a $f_e(t)$ tendremos como función que los relaciona a $f_e(t) = f(t)\delta_{T_e}$ o $\delta_{T_e} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_e)$ que no es más que la función impulso o delta de Dirac. A cada paso de discretización $f_e(t) = f(kT_e)\delta(t - kT_e)$.

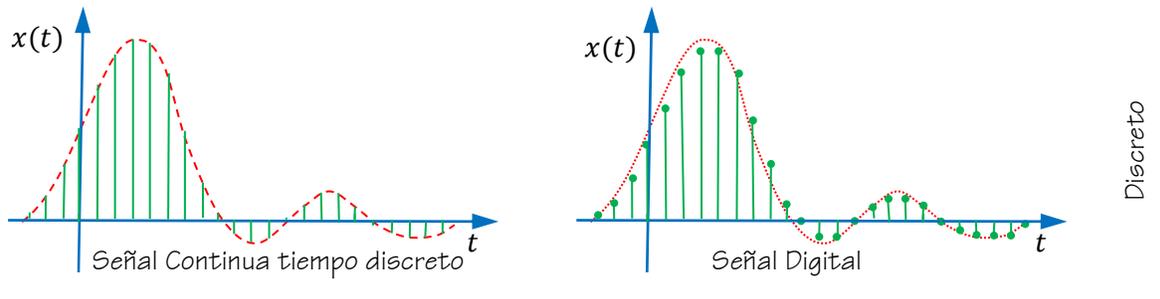


- La **cuantificación de la señal**, es decir la discretización de los valores que puede utilizar para que la señal sea compatible con el formato de representación de los computadores.

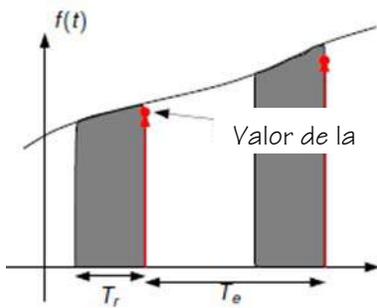
Por ejemplo, un computador que trabaja con 8 bits puede tratar solo 256 valores distintos. Las informaciones que entran y salen de este serán sucesiones de números de tipo: 123, 135, 34, 0, 255, etc.

En automatización se debe considerar principalmente el efecto de la discretización.





En la práctica un convertidor análogo digital no puede adquirir la señal de forma instantánea, por lo cual se produce una diferencia entre la discretización ideal y la real, puesto que el segundo se produce generalmente haciendo un promedio del valor de la señal en un tiempo dado T_r . Esta diferencia produce una distorsión en la señal discretizada, la cual se demuestra a continuación. Consideremos el siguiente



ejemplo:

$$f(t) = A \sin(\omega t)$$

La señal discretizada ideal correspondiente es:

$$f_e(kT_e) = A \sin(\omega kT_e)$$

La señal discretizada real, suponiendo que esta se produce por el promedio en un tiempo $T_r < T_e$ es:

$$f_{er}(kT_e) = \frac{1}{T_r} \int_{kT_e - T_r}^{kT_e} A \sin(\omega t) dt = A \frac{\sin\left(\frac{\omega T_r}{2}\right)}{\left(\frac{\omega T_r}{2}\right)} \sin\left(\omega(kT_e) - \frac{\omega T_r}{2}\right)$$

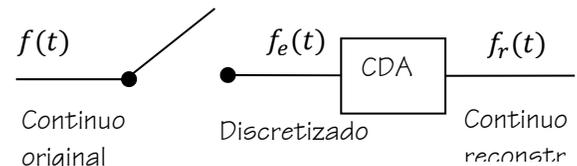
La amplitud de la señal discretizada es atenuada en $\frac{\sin\left(\frac{\omega T_r}{2}\right)}{\left(\frac{\omega T_r}{2}\right)}$, y esta señal es retrasada de $\frac{T_r}{2}$. Entre mayor es el valor de T_r mayor será la atenuación de la señal y el retraso de adquisición de esta señal.

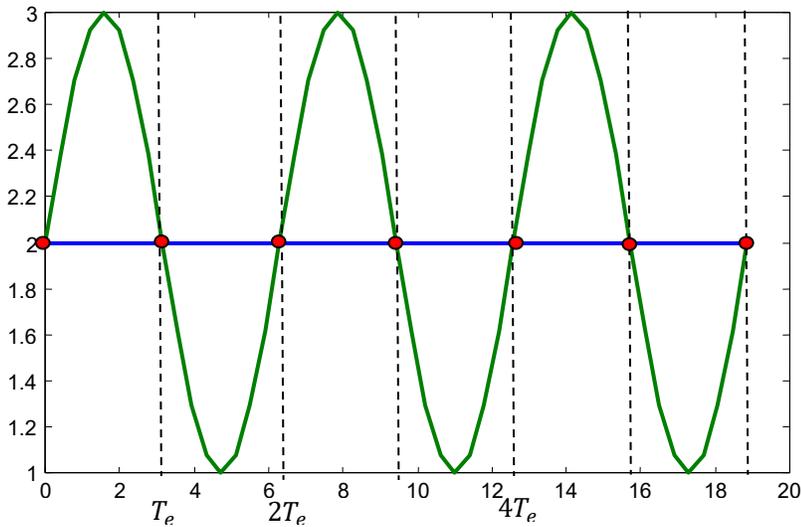
Es por lo tanto importante el uso de convertidores análogo-digitales cuyo tiempo de integración sea el menor posible. En general si $T_r \ll T_e$ se puede considerar que la discretización es cercana a la ideal.

Convertidor Digital-Análogo

Un convertidor digital-análogo por su parte tiene como objetivo obtener de nuevo la señal analógica previamente discretizada equivalente de forma exacta para todo tiempo, es decir $f_r(t) = f(t) \forall t$.

En el caso general, la reconstrucción perfecta de la señal analógica es imposible, pues funciones diferentes en el tiempo pueden tener el mismo valor discreto, por ejemplo $f(t) = A$ y $g(t) = A + \sin t$ para $T_e = \pi$. En la figura se muestra $f(kT_e) = g(kT_e)$ para $A = 2$. En ese caso es imposible determinar f y g solo con la información de $f(kT_e)$ y $g(kT_e)$ para los tiempos de discretización.





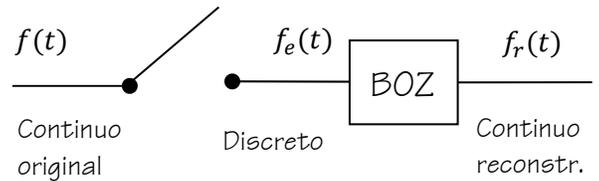
Se requiere en este caso una condición adicional, conocida bajo el nombre de condición de Shannon:

Sea la señal continua $f(t)$, cuyo espectro se conoce en el intervalo de frecuencia $[-\omega_n, \omega_n]$ discretizado a la frecuencia ω_e . Para poder reconstruir la señal f a partir de las muestras $f(kT_e)$, sin perder información, se requiere que $\omega_e > 2\omega_n$.

En el ejemplo para $g(t)$ es necesario que $\omega_e > \frac{1}{2\pi}$.

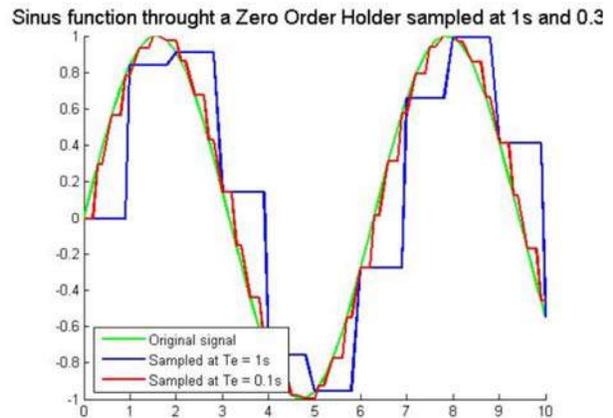
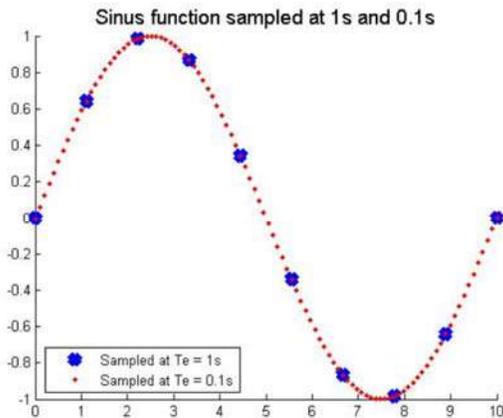
Bloqueador de orden cero (BOZ)

En la práctica, los convertidores digital-análogos realizan simplemente un bloqueo del valor discreto durante un período de muestreo.



$$f_r(t + kT_e) = f(kT_e) \text{ pour } 0 < t < T_e$$

La respuesta al impulso de este tipo de sistema es una función rectángulo unitario de ancho T_e .



Se habla de “bloqueador de orden cero” (BOZ), pues de hecho realiza una interpolación de orden cero de los valores de la señal discreta (el único orden posible que sea causal, en consecuencia el único posible de realizar en tiempo real).

La función de transferencia de un bloqueador de orden cero es:

$$G_0(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-sT_e} = \frac{1 - e^{-sT_e}}{s}$$

Le funcionamiento de un sistema de control discreto depende entonces de:

- La frecuencia de muestreo, la cual tiene una influencia sobre la precisión de la medida y el retraso que agrega el bloqueador de orden cero.
- La precisión del sistema numérico, el cual puede adoptar solo valores numéricos precisos, por tanto tiene una influencia sobre el error de cuantificación (Amplitude Quantization Error).

Ecuaciones recurrentes

Un sistema numérico lineal invariante en el tiempo se define mediante una relación de la siguiente forma:

$$\sum_{i=0}^n a_i y(k-i) = \sum_{j=0}^m b_j u(k-j)$$

Donde: u es la entrada, y es la salida y a_i, b_i son coeficientes constantes.

Las ecuaciones presentadas bajo esta forma se denominan ecuaciones de diferencias o ecuaciones recurrentes, pues permiten calcular de forma iterativa el valor de la salida en todos los instantes de muestreo a partir del valor conocido de la entrada en estos mismos instantes, así como de las condiciones iniciales.

Ejemplo 1

Consideremos las siguientes ecuaciones recurrentes de orden 2 (en ellas se consideran dos pasos de muestreo previos):

$$2y(k) + y(k-1) - y(k-2) = u(k) - u(k-1)$$

Para que se puedan resolver esta ecuación se requiere conocer dos condiciones iniciales, y la entrada para todo paso de muestreo.

Si tenemos como condiciones iniciales: $y(-1) = 1$ e $y(-2) = 1$, y se tiene como entrada del sistema un escalón unitario, es decir:

$$u(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0 \\ 1 & \text{si } k \geq 0 \end{cases}$$

Despejando $y(k)$ podemos calcular los valores de la salida para todos los pasos de muestreo subsiguientes:

$$y(k) = \frac{1}{2}(u(k) - u(k-1) - y(k-1) + y(k-2))$$

Obtenemos entonces:

$$y(0) = \frac{1}{2}(u(0) - u(-1) - y(-1) + y(-2)) = \frac{1}{2}(1 - 0 - 1 + 1) = \frac{1}{2}$$

$$y(1) = \frac{1}{2}(u(1) - u(0) - y(0) + y(-1)) = \frac{1}{2}\left(1 - 1 - \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{4}$$

$$y(2) = \frac{1}{2}(u(2) - u(1) - y(1) + y(0)) = \frac{1}{2}\left(1 - 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

$$y(3) = \frac{1}{2}(u(3) - u(2) - y(2) + y(1)) = \frac{1}{2}\left(1 - 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}$$

$$y(4) = \frac{1}{2}(u(4) - u(3) - y(3) + y(2)) = \frac{1}{2}\left(1 - 1 - \frac{1}{16} + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{32}$$

Etc.

Esto es equivalente a la expresión:

$$y(k) = \frac{y(k-1)}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

Es de notar que la solución de esta ecuación recurrente depende de las condiciones iniciales.

La transformada en Z

Los sistemas analógicos lineales se pueden representar mediante la función de transferencia, que no es más sino la transformada de Laplace de su respuesta al impulso.

La ventaja de la transformada de Laplace es la de transformar la ecuación diferencial, que relaciona la salida y la entrada del sistema analógico lineal, en una ecuación polinomial que se puede resolver manualmente. Con el objeto de manipular los sistemas digitales de una manera similar a los sistemas continuos, se define una transformación matemática denominada transformada en Z.

Para un sistema discreto la transformada de Laplace (monolateral) se determina con:

$$F_e(s) = \mathcal{L}\{f_e(t)\} = \int_0^{\infty} f_e(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT_e) \delta(t - kT_e) \right) e^{-st} dt$$

Mediante algunas consideraciones y operaciones matemáticas, así como propiedades de la función impulso obtenemos la siguiente expresión:

$$F_e(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e) e^{-kT_e s}$$

La transformada en Z de la señal $f_e(t)$ discreta causal se define como la transformada de Laplace (monolateral) de la señal, a la cual se le efectúa el cambio de variable $z = e^{T_e s}$.

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f_e(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e) z^{-k}$$

Propiedades de la transformada en Z

Consideremos dos señales discretas $f(k)$ y $g(k)$. Notamos $F(z)$ y $G(z)$ las transformadas en Z respectivas, α y β números reales cualesquiera.

Linealidad:

$$\mathcal{Z}(\alpha f(k) + \beta g(k)) = \alpha F(z) + \beta G(z)$$

Retraso:

$$\mathcal{Z}(f(k-n)) = z^{-n} F(z) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Avance:

$$\mathcal{Z}(f(k+n)) = z^n F(z) - \sum_{i=0}^{n-1} f(i)z^{n-i} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Multiplicación por una rampa / derivación:

$$\mathcal{Z}(kf(k)) = -z \frac{dF(z)}{dz}$$

Multiplicación por una exponencial:

$$\mathcal{Z}(e^{-ak}f(k)) = F(ze^a)$$

Teorema del valor final:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(kT_e) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})F(z)$$

Nota: Este teorema solo es válido si $f(t)$ converge.

Teorema del valor inicial:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{k \rightarrow 0} f(kT_e) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

Convolución:

$$\mathcal{Z}(f(k) * g(k)) = F(z) * G(z)$$

Ejemplos de cálculo de transformada en Z.

1. Transformada en Z de una función escalón:

$$f_e(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0 \\ 1 & \text{si } k \geq 0 \end{cases}$$

La transformada es:

$$F_e(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

2. Transformada de una rampa:

$$f_r(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0 \\ k & \text{si } k \geq 0 \end{cases} = kf_e(k)$$

Como $f_r(k) = kf_e(k)$ la transformada es:

$$F_r(z) = -z \frac{dF_e(z)}{dz} = -z \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z - 1} \right) = \frac{z}{(z - 1)^2}$$

Tabla de Transformadas de Laplace y Transformada en Z de algunas funciones comunes.

$f(t)$	$F(s)$	$f(kT_e)$	$F(z)$
$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$ impulso	1	$\delta(k)$	1
$\delta(t - kT_e) = \begin{cases} 1 & t = kT_e \\ 0 & t \neq kT_e \end{cases}$	$e^{-kT_e s}$	$\delta(k - kT_e)$	z^{-k}

$\Gamma(t)$ Escalón	$\frac{1}{s}$	$\Gamma(k)$	$\frac{z}{z-1}$
$t\Gamma(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$kT_e\Gamma(k)$	$\frac{T_e z}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{2}t^2\Gamma(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{2}(kT_e)^2\Gamma(k)$	$\frac{T_e^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
$e^{-at}\Gamma(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$c^k\Gamma(k)$ $c = e^{-aT_e}$	$\frac{z}{z-c}$
$te^{-at}\Gamma(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$kT_e c^k\Gamma(k)$ $c = e^{-aT_e}$	$\frac{cT_e z}{(z-c)^2}$
$(1 - e^{-at})\Gamma(t)$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$(1 - c^k)\Gamma(k)$ $c = e^{-aT_e}$	$\frac{z(1-c)}{(z-1)(z-c)}$
$\sin \omega t \Gamma(t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin(\omega k T_e) \Gamma(k)$	$\frac{z \sin(\omega T_e)}{z^2 - 2z \cos(\omega T_e) + 1}$
$\cos \omega t \Gamma(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos(\omega k T_e) \Gamma(k)$	$\frac{z(1 - \cos(\omega T_e))}{z^2 - 2z \cos(\omega T_e) + 1}$
$e^{-at} \sin(\omega t) \Gamma(t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$c^k \sin(\omega k T_e) \Gamma(k)$ $c = e^{-aT_e}$	$\frac{cz \sin(\omega T_e)}{z^2 - 2zc \cos(\omega T_e) + c^2}$
$e^{-at} \cos \omega t \Gamma(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$c^k \cos(\omega k T_e) \Gamma(k)$ $c = e^{-aT_e}$	$\frac{z(z - c \cos(\omega T_e))}{z^2 - 2zc \cos(\omega T_e) + c^2}$

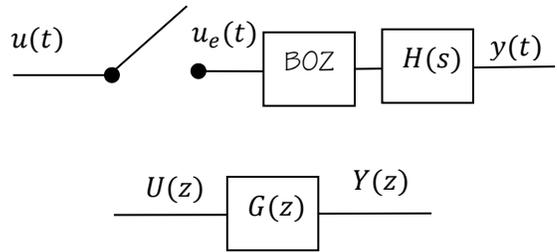
Ejemplo 2:

Queremos obtener la representación discreta del sistema

$$H(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Tomando en cuenta para ello que en la discretización se debe agregar un bloqueador de orden cero, con el cual el sistema se convierte en:

$$G_0(s)H(s) = \frac{1 - e^{-sT_e}}{s} \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1 - e^{-sT_e}}{s^2(s+1)}$$



$$G(s) = G_0(s)H(s) = (1 - e^{-sT_e}) \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \right)$$

Utilizando las propiedades de la transformada en Z y la tabla de transformadas tenemos:

$$G(z) = Z(G_0(s))Z(H(s)) = Z(1 - e^{-sT_e}) * Z\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right)$$

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \left(\frac{zT_e}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z - e^{-T_e}} \right)$$

$$G(z) = \left(\frac{z-1}{z} \right) z \left(\frac{T_e}{(z-1)^2} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z - e^{-T_e}} \right)$$

$$G(z) = \left(\frac{T_e(z - e^{-T_e}) - (z-1)(z - e^{-T_e}) + (z-1)^2}{(z-1)(z - e^{-T_e})} \right)$$

$$G(z) = \frac{(T_e - 1 + e^{-T_e})z - (T_e + 1)e^{-T_e} + 1}{z^2 - (1 + e^{-T_e})z + e^{-T_e}}$$

Si el período de muestreo es de $T_e = 1$ segundos:

$$G(z) = \frac{(1 - 1 + e^{-1})z - (1 + 1)e^{-1} + 1}{z^2 - (1 + e^{-1})z + e^{-1}} = \frac{e^{-1}z + 1 - 2e^{-1}}{z^2 - (1 + e^{-1})z + e^{-1}}$$

$$G(z) = \frac{0.3679z + 0.2642}{1z^2 - 1.3679z + 0.3679} = \frac{b_1z + b_0}{z^2 + a_1z + a_0}$$

Relación con las ecuaciones recurrentes

Para volver a determinar las ecuaciones recurrentes a partir de una función de transferencia expresada en transformada en Z, se debe proceder como sigue. Partiendo de:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j z^{-j}}{\sum_{i=0}^n a_i z^{-i}}$$

Por lo tanto:

$$\sum_{i=0}^n a_i z^{-i} Y(z) = \sum_{j=0}^m b_j z^{-j} U(z)$$

Como la función de transferencia se define para condiciones iniciales iguales a cero, entonces con el teorema del retraso obtenemos:

$$\sum_{i=0}^n a_i y(k-i) = \sum_{j=0}^m b_j u(k-j)$$

Ejemplo 3:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}}$$

$$Y(z)(1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}) = U(z)(b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2})$$

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_0 y(k-2) = b_1 u(k-1) + b_0 u(k-2)$$

También se puede obtener una relación equivalente con una función de transferencia discreta de la forma:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j z^j}{\sum_{i=0}^n a_i z^i}$$

De forma idéntica con el teorema de adelanto obtenemos:

$$\sum_{i=0}^n a_i y(k+i) = \sum_{j=0}^m b_j u(k+j)$$

Ejemplo 4. Se tiene:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0}$$

$$Y(z)(z^2 + a_1 z + a_0) = U(z)(b_1 z + b_0)$$

$$y(k + 2) + a_1y(k + 1) + a_0y(k) = b_1u(k + 1) + b_0u(k)$$

Transformada inversa de Z

Existen 4 métodos que permiten determinar la inversa de una transformada en Z.

Fórmula de Inversión. Esta fórmula matemática es:

$$f(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} F(z)z^{k-1} dz$$

Donde Γ es un contorno cerrado del plano complejo que contiene todas las singularidades de $F(z)$. Esta técnica de inversión se utiliza raramente en casos prácticos, pero permite poner en evidencia que existe una relación única entre la señal discreta y su transformada en Z.

Se debe recordar sin embargo que la transformada en Z inversa solo proporciona información de la señal temporal en los instantes de muestreo, por lo cual se requiere que las condiciones de Shannon hayan sido respetadas en la discretización para poder obtener la señal temporal.

Tablas de transformadas.

Estas tablas son un repertorio de transformadas en Z y transformadas de Laplace de diversas funciones, donde la transformada en Z se coloca en general bajo la forma de una función racional:

$$F(z) = \frac{Num(z)}{Den(z)}$$

Este método no puede aplicarse directamente a funciones complejas.

Descomposición en Fracciones Parciales.

Se descompone la fracción racional $F(z)$ en fracciones parciales, para poder determinar la transformada de cada elemento más fácilmente con las tablas. Se requiere en este caso obtener fracciones parciales de la forma:

$$\frac{Az}{(z - c)^n}$$

Para ello se descompone la fracción $\frac{F(z)}{z}$ en lugar de descomponer directamente $F(z)$ pues esta última produciría términos de la forma $\frac{A}{(z - c)^n}$ que no existen en las tablas. Obtenemos entonces:

$$F(z) = z \left(\frac{F(z)}{z} \right) = z \sum_{i=0}^n \frac{A}{(z - a)^{p_i}} = \sum_{i=0}^n \frac{Az}{(z - a)^{p_i}}$$

Con $P_i = 1$ ou $P_i = 2$.

Basta entonces con utilizar las tablas para obtener la inversa de la transformada de cada uno de los términos, obteniéndose entonces la señal temporal completa.

Este suele ser el método más utilizado.

División polinomial.

Esta técnica se basa en la definición de la transformada en Z de una señal, que es un polinomio de grado infinito en z^{-1} . La idea es obtener el polinomio término a término a partir de la fracción racional $F(z)$.

Se comienza por escribir a $F(z)$ bajo la forma de una fracción racional en z^{-1} :

$$F(z) = \frac{N(z^{-1})}{D(z^{-1})} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j z^{-j}}{\sum_{i=0}^n a_i z^{-i}}$$

Se calcula a continuación el resultado de la división polinomial de $N(z^{-1})$ entre $D(z^{-1})$ siguiendo los términos crecientes de z^{-1} . Obtenemos de esta manera a $F(z)$ bajo la forma de un polinomio de orden infinito:

$$F(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + \dots + c_k z^{-k} + \dots$$

Haciendo una identificación polinomial con la definición de la transformada en Z, reconocemos a:

$$f(0) = c_0, f(1) = c_1, f(2) = c_2 \dots$$

Este método no permite determinar la expresión general ni obtener el enésimo término de la secuencia temporal. Pero es útil para una programación utilizando una computadora o para la verificación de los primeros términos obtenidos mediante algún otro método de cálculo.

Ejemplo 5.

Cálculo de la transformada inversa de:

$$G(z) = \frac{e^{-1}z + 1 - 2e^{-1}}{z^2 - (1 + e^{-1})z + e^{-1}} = \frac{0.3679z + 0.2642}{1z^2 - 1.3679z + 0.3679}$$

Utilizando la descomposición en fracciones parciales, descomponemos:

$$\frac{G(z)}{z} = \frac{e^{-1} + (1 - 2e^{-1})z^{-1}}{(z-1)(z-e^{-1})} = \frac{c_1}{(z-1)} + \frac{c_2}{(z-e^{-1})}$$

$$c_1 = \left. \frac{(z-1)(e^{-1} + (1-2e^{-1})z^{-1})}{(z-1)(z-e^{-1})} \right|_{z=1} = 1; \quad c_2 = \left. \frac{(z-e^{-1})(e^{-1} + (1-2e^{-1})z^{-1})}{(z-1)(z-e^{-1})} \right|_{z=e^{-1}} = \frac{e^{-1}-1}{e^{-1}}$$

Por lo tanto $G(z)$ se escribe:

$$G(z) = z \frac{G(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)} + \left(\frac{e^{-1}-1}{e^{-1}} \right) \frac{z}{(z-e^{-1})}$$

Con la tabla de transformadas y las propiedades de linealidad de la transformada en Z tenemos:

$$G(s) = \frac{1}{s} + \left(\frac{e^{-1}-1}{e^{-1}} \right) \frac{1}{(s+1)} = \frac{(2-1/e^{-1})s+1}{s(s+1)}$$

Nota: No obtenemos exactamente la forma original del sistema ya que el modelo en Z fue simplificado.

Por otro lado, utilizando la división polinomial.

Se factoriza en función del orden más elevado para obtener una función de potencias decrecientes de z^{-1} , y

$$G(z) = \frac{e^{-1}z^{-1} + (1 - 2e^{-1})z^{-2}}{1 - (1 + e^{-1})z^{-1} + e^{-1}z^{-2}} = \frac{0.3679z^{-1} + 0.2642z^{-2}}{1 - 1.3679z^{-1} + 0.3679z^{-2}}$$

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{cccc}
 0.3679z^{-1} & +0.2642z^{-2} & & \\
 -0.3679z^{-1} & +0.5033z^{-2} & -0.1354z^{-3} & \\
 0 & +0.7675z^{-2} & -0.1354z^{-3} & \\
 & -0.7675z^{-2} & +1.0499z^{-3} & -0.2824z^{-4} \\
 & 0 & 0.9145z^{-3} & -0.2824z^{-4}
 \end{array}
 & \begin{array}{l}
 1 \quad -1.3679z^{-1} \quad +0.3679z^{-2} \\
 \hline
 0.3679z^{-1} \quad +0.7675z^{-2} \quad 0.9145z^{-3} \quad \dots = Y(z)
 \end{array}
 \end{array}$$

La solución de la división es de la forma $Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT_e)z^{-k}$ con la cual se obtiene directamente la solución temporal de $y(kT_e)$, por lo tanto, como $T_e = 1$:

$$\begin{aligned}
 y(0) &= 0 \\
 y(1) &= 0.3679 \\
 y(2) &= 0.7675 \\
 y(3) &= 0.9145, \text{ etc}
 \end{aligned}$$

Nota: la factorización en función del orden más elevado no es indispensable, puesto que la división con la función original produce el mismo resultado.

Solución de las ecuaciones recurrentes

Uno de los usos de la transformada en Z es la de permitir la obtención de la solución sistemática de las ecuaciones recurrentes.

Para una ecuación recurrente de la forma: $\sum_{i=0}^n a_i y(k - i) = \sum_{j=0}^m b_j u(k - j)$

Donde $u(k)$ es conocido, y denotamos $Y(z) = \mathcal{Z}(y(k))$ y $U(z) = \mathcal{Z}(u(k))$, y además según el teorema del retraso para condiciones iniciales nulas: $\mathcal{Z}(y(k - i)) = z^{-i}Y(z) + \sum_{l=0}^{i-1} z^{-l}y(l - i)$

La transformada de cada término es:

$$\sum_{i=0}^n a_i z^{-i} Y(z) + \sum_{l=0}^{n-1} c_l z^{-l} = \sum_{j=0}^m b_j z^{-j} U(z) + \sum_{p=0}^{m-1} d_p z^{-p}$$

Obtenemos $Y(z)$ bajo la forma de una fracción racional:

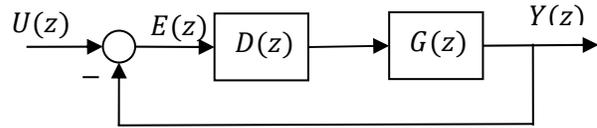
$$Y(z) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j z^{-j}}{\sum_{i=0}^n a_i z^{-i}} U(z) + \frac{\sum_{p=0}^{m-1} d_p z^{-p} - \sum_{l=0}^{n-1} c_l z^{-l}}{\sum_{i=0}^n a_i z^{-i}}$$

Donde $P = \sum_{p=0}^{m-1} d_p z^{-p} - \sum_{l=0}^{n-1} c_l z^{-l}$ es un polinomio en z de orden $\leq \max(n, m)$

Para determinar la secuencia de la solución $y(k)$, basta con calcular la transformada en Z inversa de $Y(z)$. Obteniéndose una ecuación polinomial que puede resolverse manualmente.

Sistemas Digitales en Lazo Cerrado

Una retroalimentación de estado discreta se puede representar con la figura contigua, donde $G(z)$ toma en cuenta la función de transferencia del sistema a la cual se le agrega un bloqueador de orden cero, y $D(z)$ es un controlador digital, en este caso la función de transferencia discreta será:



$$T(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{G(z)D(z)}{1 + G(z)D(z)}$$

Ejemplo 6.

Si tomamos la función de transferencia del ejemplo 5, la cual ya considera un bloqueador de orden cero (BOZ):

$$G(z) = \frac{0.3679z + 0.2642}{z^2 - 1.3679z + 0.3679}$$

Si consideramos una retroalimentación unitaria $D(z) = 1$, el sistema retroalimentado será:

$$T(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{0.3679z + 0.2642}{z^2 - z + 0.6321}$$

La retroalimentación de estado continua para este mismo sistema es:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

Para una entrada en escalón unitario.

$$U(z) = \frac{z}{z - 1}$$

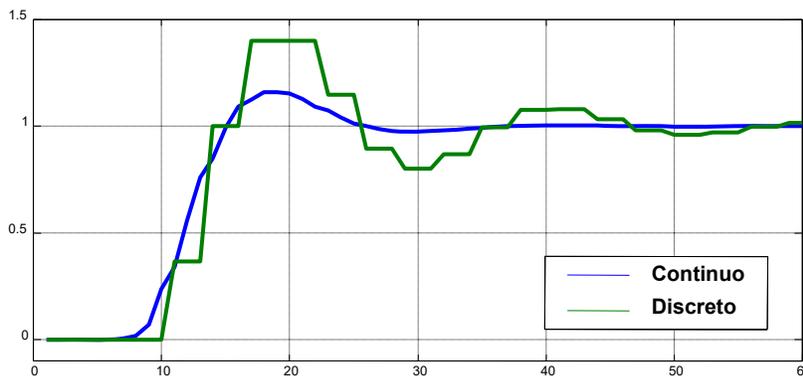
La salida del sistema se puede calcular como:

$$Y(z) = T(z)U(z) = \frac{z(0.3679z + 0.2642)}{(z - 1)(z^2 - z + 0.6321)} = \frac{0.3679z^2 + 0.2642z}{z^3 - 2z^2 + 1.6321z - 0.6321}$$

Por división polinomial obtenemos:

$$Y(z) = 0.3679z^{-1} + z^{-2} + 1.4z^{-3} + 1.4z^{-4} + 1.147z^{-5}$$

La figura muestra la relación entre el modelo continuo y el discreto para el mismo sistema



Nótese aquí que:

- un sobreimpulso más importante para el sistema digital (40% en lugar de 16%).
- un tiempo de estabilización dos veces mayor para el sistema digital.
- Estos valores por supuesto dependen del período de muestreo utilizado. La

diferencia será más pequeña entre más pequeño sea este tiempo.

La representación de Estado Digital

Al igual que para los sistemas continuos los sistemas digitales se pueden representar bajo la forma de una representación de estado:

$$\begin{cases} x((k + 1)T_e) = A_d x(kT_e) + B_d u(kT_e), & x(0) = x_0 \\ y(kT_e) = C_d x(kT_e) + D_d u(kT_e) \end{cases}$$

Para la cual se utiliza con frecuencia la notación:

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k \\ y_k = C_d x_k + D_d u_k \end{cases}$$

Donde A_d, B_d, C_d et D_d son las matrices discretas del sistema lineal, y T_e es el período de muestreo. De igual forma que para los sistemas continuos el modelo se representa mediante una serie de ecuaciones de primer orden, en este caso en adelante.

La relación entre la representación de estado y la función de transferencia discreta se puede determinar con la relación:

$$G(z) = C_d(zI - A_d)^{-1}B_d + D_d$$

Donde z es un operador de desfasaje, es decir:

$$zx(kT_e) = x((k + 1)T_e)$$

Estabilidad de los Sistemas Digitales

Un sistema continuo es estable si sus polos son negativos o con parte real negativa, es decir ubicados en el semiplano izquierdo del plano complejo. Para determinar la estabilidad de un sistema digital se requiere estudiar la relación entre la variable z (función de transferencia discreta) y la variable s (función de transferencia continua).

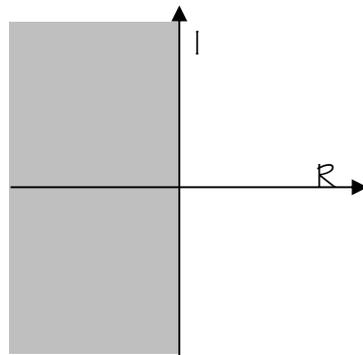
$$z = e^{sT_e} = e^{(\sigma + j\omega)T_e}$$

La magnitud y el ángulo de fase del sistema discreto se pueden representar con:

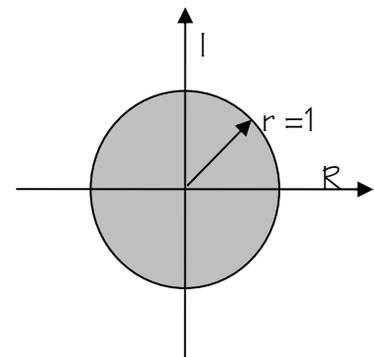
$$|z| = e^{\sigma T_e} \quad \phi z = \omega T_e$$

En el semiplano izquierdo del plano complejo $\sigma < 0$ (parte real del polo), por lo tanto la magnitud de $z < 1$, y no existe influencia del ángulo de fase.

En consecuencia: Un sistema digital será estable si los polos de $G(z)$ están dentro del círculo unidad del plano complejo z , es decir si su magnitud es estrictamente inferior a 1.



Sistema Continuo



Escuela de Ingeniería Mecánica - ULA
Sistema Digital

Ejemplo 7.

Para el sistema cuya función de transferencia continua es:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

La función de transferencia discreta, con un período de muestreo $T_e = 1$ es:

$$G(z) = \frac{K(0.3679z + 0.2642)}{z^2 - 1.3679z + 0.3679}$$

Si se somete el sistema a una retroalimentación de estado unitaria las funciones de transferencia se convierten en:

$$T(s) = \frac{K}{s(s+1) + K} = \frac{K}{s^2 + s + K}$$

$$T(z) = \frac{K(0.3679z + 0.2642)}{z^2 + (0.3679K - 1.3679)z + 0.2642K + 0.3679}$$

La estabilidad del sistema en lazo cerrado depende de las raíces de los polinomios:

$$s^2 + s + K = 0$$

$$z^2 + (0.3679K - 1.3679)z + (0.2642K + 0.3679) = 0$$

Para el sistema continuo la estabilidad depende de:

$$\text{Re}(s_{12}) = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1-4K}}{2} < 0$$

- El sistema es estable para todo $K > 0$.

Para el sistema digital la estabilidad depende de:

$$|z_{12}| = -\frac{(0.3679K - 1.3679)}{2} \pm \frac{\sqrt{(0.3679K - 1.3679)^2 - 4(0.2642K + 0.3679)}}{2} < 1$$

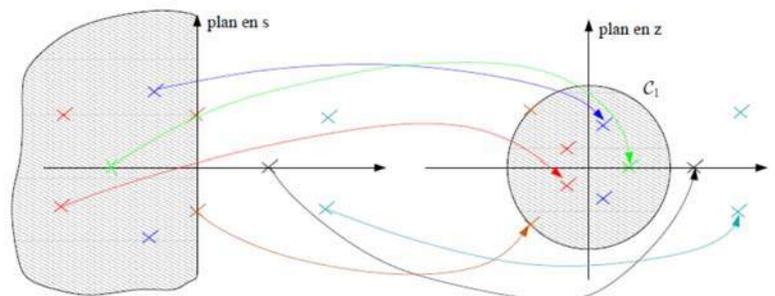
- El sistema es estable si se cumple la condición: $0 < K < 2.39$.

Observamos que la digitalización puede modificar la estabilidad del sistema.

Correspondencia entre los polos en Z y en s.

A partir de la relación entre los polos para un sistema digital y continuo observamos que:

- los polos reales estables en s (< 0) se convierten en polos reales positivos inferiores a 1.
- los polos reales inestables se convierten en polos reales positivos superiores a 1.
- los polos complejos conjugados estables se convierten en polos complejos con norma inferior a 1.
- los polos complejos conjugados inestables se convierten en polos complejos conjugados de norma superior a 1.



- los polos en el eje imaginario se convierten en polos complejos en el círculo unidad.
- Los polos simples reales negativos en Z no tienen equivalente en s .

Respuesta temporal de los sistemas digitales

Los modos propios asociados a los polos en Z se pueden resumir como sigue:

Polo simple real: $G_i = \frac{z}{z-p_i}$

- Si $p_i > 1$ el modo es divergente.
- Si $p_i < -1$ el modo es oscilatorio divergente.
- Si $-1 < p_i < 0$ el modo es oscilatorio amortiguado.
- Si $0 < p_i < 1$ el modo es amortiguado.
- Si $p_i = 1$ el modo es permanente.
- Si $p_i = -1$ el modo es oscilatorio permanente.

Polo real múltiple: $G_i = \frac{z}{(z-p_i)^{d_i}}$

- Si $p_i > 1$ el modo es divergente.
- Si $p_i < -1$ el modo es oscilatorio divergente.
- Si $-1 < p_i < 0$ el modo es oscilatorio amortiguado.
- Si $0 < p_i < 1$ el modo es amortiguado.
- Si $p_i = 1$ el modo es divergente.
- Si $p_i = -1$ el modo es oscilatorio divergente.

Se nota que un polo doble en 1 conduce a un modo divergente mientras que un polo simple en 1 es convergente.

Par de polos complejos conjugados: $p_i = p_j^*$

En el caso de un par de polos complejos conjugados, los coeficientes de los términos simples correspondientes a los dos polos complejos de la pareja son también complejos conjugados, sea:

$$G_i + G_j = \frac{Az}{z - p_i} + \frac{A^*z}{z - p_j}$$

- Si $|p_i| > 1$ el modo es oscilatorio divergente.
- Si $|p_i| < 1$ el modo es oscilatorio amortiguado.
- Si $|p_i| = 1$ el modo es oscilatorio permanente.

El conjunto de estos resultados se pueden resumir como sigue:

- polos simples sobre el círculo unitario \rightarrow modos permanentes.
- polos múltiples sobre el círculo unitario \rightarrow modos divergentes.
- Polos en el interior del círculo unitario \rightarrow modos amortiguados sin importar la multiplicidad.
- Polos en el exterior del círculo unitario \rightarrow modos divergentes.
- 2 fuentes de oscilaciones: polos complejos conjugados y polos reales negativos (sin equivalente en sistemas continuos)
- Respuesta del sistema: suma ponderada de los modos propios y modos forzados.

Además, se constata que la convergencia de los modos hacia cero es más rápida mientras el módulo del polo p_i sea más cercano a cero. Se deduce entonces que los polos más rápidos del sistema digital son los polos más cercanos a punto O .

Caso Particular de los Sistemas de Orden 1 y 2

– Sistemas de orden 1

$$G(s) = \frac{K}{s - p} \rightarrow G(z) = \frac{K'z}{z - e^{T_e p}}$$

– Sistemas de orden 2, con 2 polos reales

$$G(s) = \frac{K}{(s - p_1)(s - p_2)} \rightarrow G(z) = \frac{K_1 z}{z - e^{T_e p_1}} + \frac{K_2 z}{z - e^{T_e p_2}} = \frac{Az + B}{(z - e^{T_e p_1})(z - e^{T_e p_2})}$$

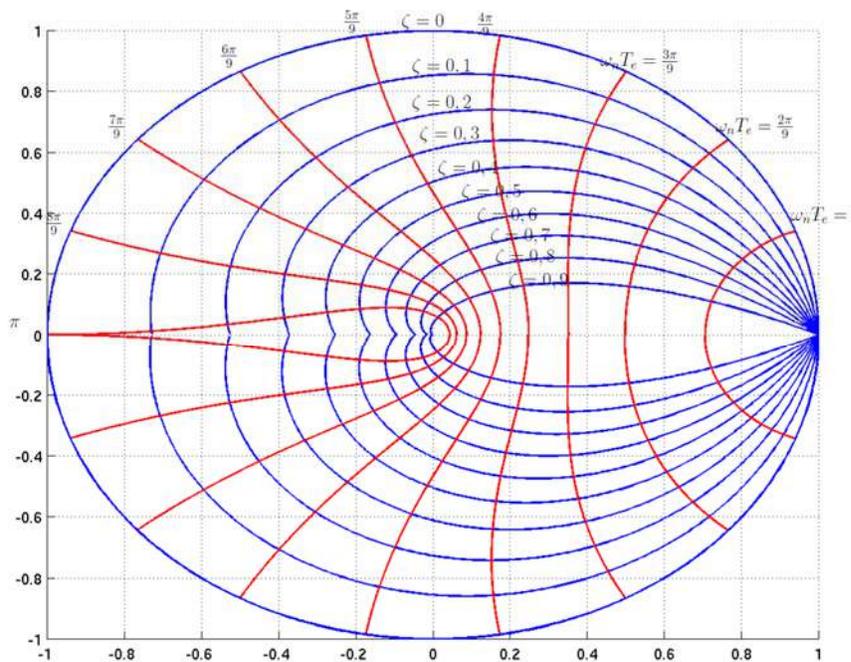
– Sistemas de orden 2, con 2 polos complejos conjugados

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{K'}{s - p} + \frac{K'^*}{s - p^*} \rightarrow G(z) = \frac{K'z}{z - e^{T_e p}} + \frac{K'^*z}{z - e^{T_e p^*}}$$

Con: $p = -\xi\omega_n + i\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$ y $z_{1,2} = e^{-T_e\xi\omega_n} e^{\pm jT_e\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}}$

Nota: Un sistema continuo sin ceros puede producir un sistema discreto con ceros. No existe una relación directa entre los ceros del modelo continuo y los ceros del modelo digital.

La siguiente figura muestra las curvas de isoamortiguamiento (azul) y de isopulsación (rojo) para sistemas numéricos de orden 2.



Criterio algebraico de Jury

Este es un criterio que permite determinar si los polos del sistema en Z están o no en interior del círculo unitario, sin necesidad de calcular el valor de estos polos. Es el equivalente a los criterios de Routh o Hurwitz en sistemas continuos.

Para una función de transferencia en Z de la forma:

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

Con la ecuación característica: $D(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$

Se construye la tabla del criterio de Jury siguiente:

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 1 & b_{0,0} = a_0 & b_{0,1} = a_1 & b_{0,2} = a_2 & \dots & \dots & \dots & b_{0,n} = a_n \\
 2 & b_{0,n} & b_{0,n-1} & b_{0,n-2} & \dots & b_{0,2} & b_{0,1} & a_0 \\
 3 & b_{1,0} & b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & \dots & b_{1,n-1} & \\
 4 & b_{1,n-1} & \dots & \dots & b_{1,2} & b_{1,1} & b_{1,0} & \\
 5 & b_{2,0} & b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,n-2} & & \\
 6 & b_{2,n-2} & \dots & b_{2,2} & b_{2,1} & b_{2,0} & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\
 2n-3 & b_{n-2,0} & b_{n-2,1} & b_{n-2,2} & & & &
 \end{array}$$

Donde:

$$b_{j+1,i} = \begin{vmatrix} b_{j,0} & b_{j,n-j-i} \\ b_{j,n-j} & b_{j,i} \end{vmatrix} \quad \forall j \in \{0, n-1\}, \forall i \in \{0, n-j-1\}$$

La tercera fila será por ejemplo:

$$b_{1,0} = \begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ a_n & a_0 \end{vmatrix}; b_{1,1} = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-1} \\ a_n & a_1 \end{vmatrix}; b_{1,2} = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-2} \\ a_n & a_2 \end{vmatrix}; b_{1,n-1} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_n & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

El criterio de Jury establece que la ecuación $D(z)$ tiene sus polos en el interior del círculo unitario si y solo si se cumplen todas las desigualdades siguientes:

1. $|a_0| - a_n < 0$
2. $D(1) > 0$
3. $(-1)^n D(-1) > 0$
4. $|b_{j,0}| - |b_{j,n-j}| > 0, \quad \forall j \in \{1, n-2\}$

Nota:

- La condición 1 implica que $a_n > 0$
- La condición 4, que debe verificarse para sistemas de orden 3 o superior, se cumple si para cada línea impar de la tabla, a excepción de la primera, el coeficiente de la primera columna tiene un valor absoluto mayor que el de la última columna no nula.

$$|b_{j,0}| - |b_{j,n-j}| > 0$$

- Para un sistema de orden 3, la cuarta condición puede simplificarse como sigue:

$$|a_0^2 - a_3^2| - |a_0a_2 - a_1a_3| > 0$$

Ejemplo 8.

Determinar la estabilidad del sistema representado por su ecuación característica discreta, en función de la ganancia $K > 0$ del controlador, utilizando el criterio de Jury:

$$D(z) = z^3 - 0.5z^2 - 0.01z + 0.005 + K$$

Solución:

1. $|a_0| - a_n = |0.005 + K| - 1 < 0 \Rightarrow |0.005 + K| < 1 \Rightarrow$
 $-1.005 < K < 0.995$
2. $D(1) > 0 \Rightarrow 1^3 - 0.5(1)^2 - 0.01 + 0.005 + K > 0 \Rightarrow$
 $K > -0.495$
3. $(-1)^n D(-1) > 0 \Rightarrow (-1)((-1)^3 - 0.5(-1)^2 - 0.01(-1) + 0.005 + K) > 0 \Rightarrow$
 $1 + 0.5 - 0.01 - 0.005 - K > 0 \Rightarrow$
 $K < 1.485$
4. $|b_{j,0}| - |b_{j,n-j}| > 0, \forall j \in \{1, n-2\} \Rightarrow |a_0^2 - a_3^2| - |a_0 a_2 - a_1 a_3| > 0 \Rightarrow$
 $|(0.005 + K)^2 - 1| > |(0.005 + K)(-0.5) - (-0.01)| \Rightarrow$
 $|K^2 + 0.01K - 0.999975| > |-0.5K + 0.0075| \Rightarrow$
 $K < 0.7806$

El sistema es estable para todo $K < 0.7806$

Controlabilidad y Observabilidad de Sistemas Digitales

En términos generales la controlabilidad y la observabilidad de los sistemas digitales no cambia en relación a la del mismo sistema representado por ecuaciones continuas.

La determinación de estas dos propiedades bajo la forma de representación de estado discretas se hace con las mismas expresiones que para los sistemas continuos, pero utilizando las matrices discretas.

Debe acotarse sin embargo que, bajo la condición particular en que $T_e = n\pi/\omega_n$, el rango de la matriz de controlabilidad y observabilidad disminuye en uno.

Esto se produce puesto que en el caso de polos complejos la matriz A puede diagonalizarse en bloques de dimensión 2 como se muestra a continuación (caso controlabilidad):

$$A = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & A_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} \vdots \\ b_i \\ \vdots \end{bmatrix}; \text{ donde } A_i = \begin{bmatrix} \alpha_i & \omega_n \\ -\omega_n & \alpha_i \end{bmatrix}$$

Discretizando el sistema con un período de muestreo T_e obtenemos:

$$A_{di} = e^{A_i T_e} = \begin{bmatrix} \cos \omega_n T_e & \sin \omega_n T_e \\ -\sin \omega_n T_e & \cos \omega_n T_e \end{bmatrix} e^{\alpha_i T_e}$$

Para este período de muestreo particular la matriz degenera convirtiéndose en:

$$A_{di} = \rho_i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de controlabilidad será en este caso:

$$[b_i \quad A_{di} b_i \quad A_{di}^2 b_i \quad \dots] = [b_i \quad \rho_i b_i \quad \rho_i^2 b_i \quad \dots]$$

Determinación de un Controlador Digital

Se pueden utilizar dos metodologías para desarrollar un controlador digital:

Método Directo:

- Se determina inicialmente el modelo digital del sistema discretizando el modelo continuo y utilizando la transformada en Z.

- Se determina el controlador digital adaptado utilizando para ello técnicas de análisis y concepción digitales.
- Se realiza un análisis del comportamiento del sistema en lazo cerrado con las ecuaciones discretas.

Método de transposición:

- Se determina el modelo continuo del sistema.
- Se determina un controlador en tiempo continuo para el sistema.
- Se realiza una conversión del controlador en tiempo continuo en un controlador en tiempo discreto por transposición (esto se puede realizar con la función `c2d` de Matlab).
- Se analiza el comportamiento del sistema en lazo cerrado.

El método directo se utiliza menos en la práctica, puesto que requiere de herramientas digitales con frecuencia poco dominadas por los ingenieros, pero los resultados obtenidos son más precisos que los que se obtienen por transposición, debido a que no se realizan aproximaciones del comportamiento continuo de los controladores digitales.

El método de Transposición

Una de las dificultades que presenta la síntesis de controladores por transposición es la selección del método de transposición adecuado en cada caso. El objetivo de la transposición es el de determinar un controlador digital para el cual el comportamiento del control digital se aproxime lo más posible al comportamiento del control analógico.

Es imposible obtener un comportamiento idéntico debido al efecto del muestreo y de la cuantificación.

El control digital obtenido será en el mejor de los casos equivalente al control analógico pero en ningún caso mejor.

Existen varias técnicas de transposición bien conocidas. Cada una de ellas presenta sus ventajas e inconvenientes y por tanto se adaptan más o menos a cada problema en particular, ninguna de ellas puede considerarse mejor que las otras de forma general.

Podemos citar entre los métodos existentes a los siguientes:

- Transposición por muestreo – bloqueo de orden cero.
- Transposición por aproximación bilineal.
- Transposición por aproximación de Euler.
- Transposición por conservación de polos y ceros.
- Transposición por muestreo – bloqueo de orden uno (argumento 'foh' de la función `c2d` de Matlab).

A continuación estudiaremos de forma somera dos de estas técnicas.

Transposición por muestreo – bloqueo de orden cero

Este método de transposición consiste simplemente en reemplazar el controlador continuo por un sistema digital compuesto de un controlador continuo al cual precede un muestreo y un bloqueo de orden cero.

La función de transferencia del controlador digital equivalente se obtienen calculando la transformada en Z del controlador analógico precedido de un bloqueo de orden cero (con Matlab función: `Cz = c2d(C, Te, 'zoh')`).

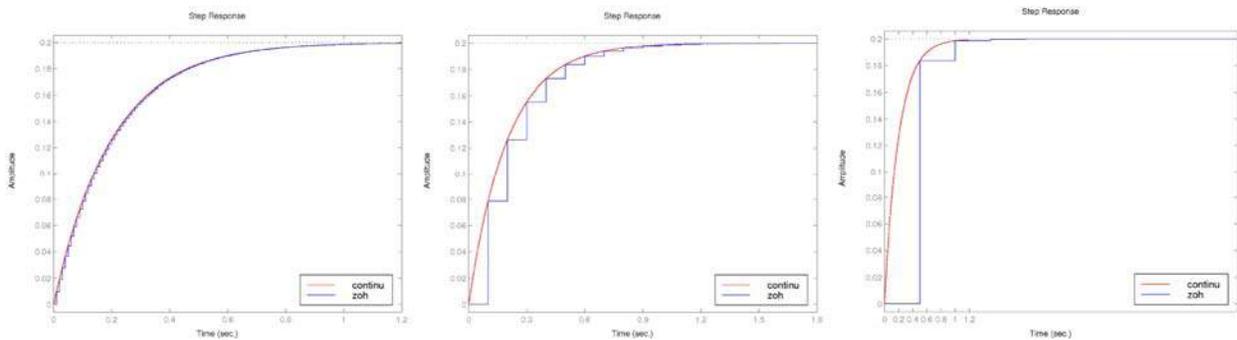
Algunas propiedades de la Transposición por muestreo – bloqueo de orden cero son:

- Los polos del controlador $C(z)$ se ubican en $z = e^{T_e p_i}$ donde p_i son los polos del controlador analógico $C(s)$. Se dice que se conservan los polos.

- Si el controlador $C(s)$ es estable, entonces el controlador $C(z)$ obtenido también será estable. Se debe sin embargo tener presente que no existe ninguna garantía en cuanto al sistema en lazo cerrado.
- Los ceros del controlador no se conservan. Si $C(s)$ no posee ceros, entonces $C(z)$ puede presentar ceros o viceversa.
- La ganancia estática del controlador se conserva.

Con este método de transposición la salida del controlador digital es igual a la salida del controlador analógico en los instantes de muestreo, y este valor se mantiene durante todo el período de muestreo. La salida digital presentará siempre un retraso respecto a la señal analógica.

La siguiente figura muestra el efecto del período de muestreo para este método



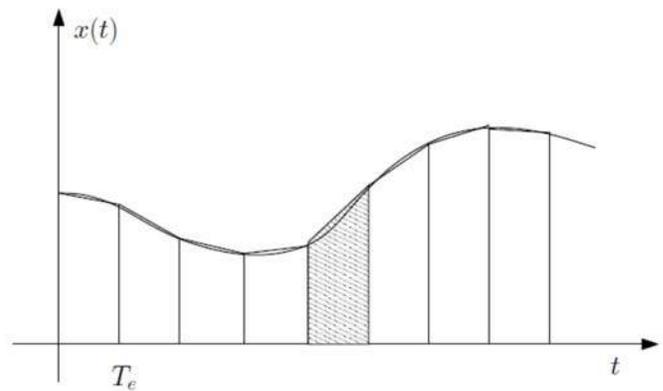
En la práctica con esta técnica de transposición se obtienen buenos resultados solamente si el período de muestreo es muy pequeño en relación al tiempo de respuesta de los sistemas controlados.

Si no se puede realizar un muestreo muy rápido, se recomienda el uso de alguna otra técnica de transposición menos sensible al período de muestreo.

Transposición por aproximación bilineal

La transposición por muestreo – bloqueo de orden cero es con frecuencia muy brusca. Se requiere por lo tanto de algunos métodos más complejos, con frecuencia basados en aproximaciones de las ecuaciones diferenciales que rigen los sistemas continuos.

El método de transposición por aproximación bilineal se basa en la aproximación de la integración de funciones con el método de los trapecios, la cual se muestra de forma gráfica en la figura. También se le conoce con el nombre de aproximación homográfica y “Tustin approximation” en inglés.



Si denotamos a $I(t)$ como la integral de la señal $x(t)$. Con esta aproximación tendremos lo siguiente:

$$I(kT_e) = I((k-1)T_e) + \frac{T_e}{2}(x(kT_e) + x((k-1)T_e))$$

Utilizando la transformada en Z , obtenemos:

$$I(z) = \frac{T_e(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})}X(z)$$

Sabiendo que para los sistemas continuos la integración es equivalente a una multiplicación por $1/s$ en el dominio de la frecuencia, se quiere hacer una aproximación de $1/s$ con la función de transferencia digital: $\frac{T_e(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})}$. Esto es equivalente a hacer el cambio de variable:

$$s \rightarrow \frac{2(z-1)}{T_e(z+1)}$$

En la función de transferencia a transponer o lo que es equivalente imponer la igualdad $z = \frac{2+Tes}{2-Tes}$.

Algunas propiedades de la transformación bilineal son:

- Se conserva la estabilidad del controlador. En efecto los polos p_i de $C(s)$ se transforman en polos en $z = \frac{2+p_iT_e}{2-p_iT_e}$. Los polos con parte real negativa se llevan por lo tanto al interior del círculo unitario. La imagen del eje imaginario obtenido por la transformación bilineal es el círculo unitario.
- Esta transposición conserva la integración ya que un polo analógico en $s = 0$ se convierte en un polo digital en $z = 1$.
- La ganancia estática del controlador y por ende del lazo cerrado se mantiene. En efecto como tenemos a $s = 0$ cuando $z = 1$ entonces $\lim_{z \rightarrow 1} C(z) = \lim_{s \rightarrow 0} C(s)$

Efecto en dominio de la frecuencia. A diferencia de la transposición por muestreo – bloqueo de orden cero, la transformación bilineal no introduce retraso. El comportamiento de la fase será mejor en términos globales. En cuanto a la amplitud, se observa que el filtrado introduce una distorsión muy importante para frecuencias cercanas a la frecuencia de Nyquist.

Efecto sobre un control integral o derivativo. La amplificación de las frecuencias cercanas a la frecuencia de Nyquist conduce a la amplificación de los ruidos a alta frecuencia, lo que no es para nada deseable, y menos aún para una acción de control derivativa. Por el contrario el efecto sobre el integrador es beneficioso, debido a que las frecuencias altas se atenúan.

Efecto del período de muestreo. Para el mismo período de muestreo la aproximación bilineal es mejor que el bloqueo de orden cero.

Corrección de la distorsión. Para corregir la distorsión que introduce la aproximación bilineal, se puede añadir un término de deformación previa “prewarping”, el cual permite corregir la distorsión para una frecuencia específica ω_0 . Para ello modificamos el cambio de variable como sigue:

$$s \rightarrow \frac{\frac{\omega_0 T_e}{2} \frac{2z-1}{T_e z+1}}{\tan \frac{\omega_0 T_e}{2}}$$

El comportamiento del controlador digital se vuelve en este caso casi idéntico al del controlador analógico, pero solo a la frecuencia específica ω_0 .

Conclusión

La aproximación bilineal permite la transposición de forma eficaz de los controladores de tipo paso bajo. Asociados a un *prewarping*, se vuelve también eficaz para filtros selectivos. Su buen comportamiento en ángulo de fase la convierte en la primera opción para controladores de tipo adelanto o atraso.

Por el contrario no está adaptada para filtros con un banda pasante ancha debido a la amplificación muy importante que produce a altas frecuencias. Se deberá entonces tener mucho cuidado en la transposición de controladores de tipo PD o PID cuando los polos del controlador trabajan a altas frecuencias.

A pesar de esto, como la mayoría de los controladores suelen ser de tipo paso bajo o pasa banda, con frecuencia es la opción por defecto.

En Matlab se obtiene con la función: $Cz = c2d(C, Te, 'tustin')$

O con un *prewarping* a la frecuencia w_0 : $Cz = c2d(C, Te, 'prewarp', w_0)$

Implementación del Control Digital

Período de muestreo

En la práctica el período de muestreo (T_e) depende del tipo de proceso (químico, térmico, mecánico, etc.) y debe seleccionarse pequeño en relación con el tiempo de respuesta (T_r) del sistema en lazo cerrado. Un valor práctico es que se debe realizar al menos 4 a 10 muestras durante el tiempo de respuesta $N_{ech} = T_r/T_e = 4 \sim 10$.

Un período de muestreo muy grande (submuestreo) tiene como consecuencia:

- Disminución del rendimiento, debido a que el control se mantiene bloqueado mucho tiempo, y no reacciona cuando se presenta una perturbación.
- Si la salida presenta ruido es conveniente añadir un filtro para mitigar el ruido antes del muestreo (antialiasing filter). Este filtro va a introducir un retraso en el lazo de control.

Un período de muestreo muy pequeño (sobremuestreo) tiene como consecuencia:

- El control se acerca más al de tiempo continuo, pero se requieren mucho más cálculos.
- Se pueden presentar problemas numéricos de cálculo fuera de línea, así como en la recurrencia de la programación de la función de transferencia en Z.
- Se presentan dificultades intrínsecas a los métodos de cálculo del control, los cuales pueden perder robustez cuando $T_e \rightarrow 0$ puesto que es posible que la señal de control tienda a infinito.

Retraso

El retraso en los sistemas de control digital debe siempre tomarse en cuenta, pues agrega una dificultad al sistema. Este retraso puede tener varios orígenes a saber:

- Muestreo.
- Filtros y retrasos de comunicación.
- Tiempo de ejecución de los códigos.
- Interrupciones.
- Dependencia de datos.
- Preeminencia de procesos de orden superior.

El retraso introduce un desfase en las señales, el cual puede producir una inestabilidad en el sistema.

Según Bode el mayor retraso admisible puede calcularse como la siguiente expresión:

$$D_{ad} = \frac{M_{\phi}\pi}{180\omega_0} [s]$$

Donde:

M_{ϕ} : Margen de fase

ω_0 : Frecuencia de cruce con $|G(j\omega_0)| = 1$

Bibliografía:

- Katsuhito OGATA. *Ingeniería de control moderna*. Prentice Hall.
- Benjamín Kuo. *Sistemas de Control Automático*. Pearson Education.
- Smith y Corripio. *Control Automático de Procesos*. Limusa.
- Distéfano, Stubberud y Williams. *Retroalimentación y sistemas de Control*. Serie Shaum. Mc Graw Hill.
- Richard C. Dorf & Robert H. Bishop. *Modern Control Systems*. Pearson, 11ava Edición, 2008.
- Philippe de Laminart. *Automatique, Commande de systèmes linéaires*. Hermes 1993.
- Florent Nageotte. *Analyse et Commande des Systèmes Numériques*. https://lsiiit-cnrs.unistra.fr/avr-fr/index.php/Page_personnelle_de_Florent_Nageotte.
- Yves Brière. *Commande des systèmes par calculateur*. <http://personnel.isae.fr/yves-briere/?lang=fr>