

Les systèmes linéaires

On souhaite avoir une méthode algorithmique pour résoudre les système du type

$$\begin{cases} 4x - 2y = -1 \\ 7x - y = 5 \end{cases}, \quad (*)$$

où $x, y \in \mathbb{R}$ sont les inconnues. Bien sûr, ce système est à 2 équations et 2 inconnues, mais on aimerait une méthode qui fonctionne pour tout système à n équations et m inconnues.

1 DÉFINITION ET PRINCIPE DU PIVOT DE GAUSS

Définition 1 : Système linéaire

Un **système linéaire** est l'intersection de solutions de plusieurs équations linéaires.

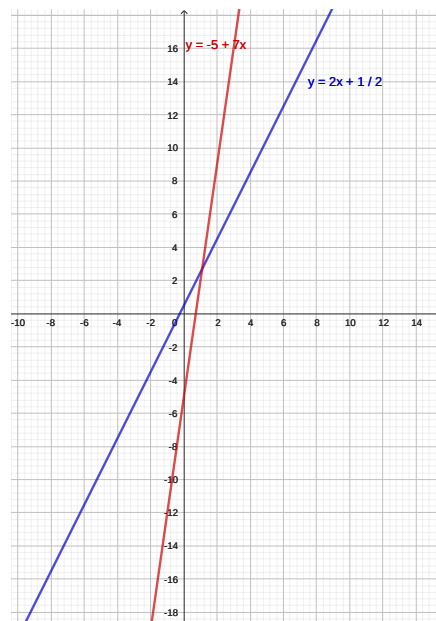
Intersections de droites

Pourquoi parler d'intersections de solutions ?

Le système (*) peut être vu comme l'intersection de deux droites. En effet, on peut réécrire les équations

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2} + 2x \\ y = -5 + 7x \end{cases} \quad (*)$$

ce qui n'est pas sans vous rappeler les droites de coefficient directeur 2 et 7 et d'ordonnée à l'origine $1/2$ et -5 respectivement. La solution de ce système est alors l'intersection des deux droites.



Il existe une méthode très efficace pour résoudre ces systèmes : **l'algorithme du pivot de Gauss**. Pour le mener à bien, on a besoin de trois opérations élémentaires.

Définition 2 : Opérations élémentaires

Soit un système (S) à n équations et m inconnues $x_1, \dots, x_m$.

$$\begin{cases} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,m} x_m = b_1 & (L_1) \\ a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \dots + a_{2,m} x_m = b_2 & (L_2) \\ \vdots & \vdots \\ a_{n,1} x_1 + a_{n,2} x_2 + \dots + a_{n,m} x_m = b_n & (L_n) \end{cases} \quad (S)$$

On note ses équations en lignes par $L_1, \dots, L_n$. On appelle **opération élémentaire** une des opérations suivantes sur les lignes de (S) :

- **Ajout à une ligne d'un multiple d'une autre** Étant donné λ un réel et $i \neq j$, on indiquera

$$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$$

pour signaler que l'on a modifié la ligne i en lui ajoutant la ligne j multipliée par λ .

- **Multiplication d'une ligne par un réel non nul** Étant donné un réel non nul μ , on indiquera

$$L_i \leftarrow \mu L_i$$

pour signaler que l'on a modifié la ligne i en la multipliant par μ .

- **Échange de deux lignes** On indiquera

$$L_i \leftrightarrow L_j$$

pour signaler que l'on a échangé les lignes i et j .

Proposition 1

Soit (S) un système linéaire. Si (S') est obtenu de (S) par opérations élémentaires alors (S') est équivalent à (S) .

Preuve. Il suffit de remarquer que chacune des trois opérations est réversible !

- $L_i \leftarrow \lambda L_i$ est inversée par $L_i \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_i$
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ est inversée par $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$
- $L_i \leftrightarrow L_j$ est inversée par elle-même.

□

Méthode du Pivot de Gauss

La méthode consiste à mettre le système "sous forme échelonnée" de manière à pouvoir, en partant de la solution de la dernière équation et en remontant, résoudre toutes les équations. On se fixe une variable, disons x_1 dans (S) . On utilise un **pivot** (ici $a_{1,1}$) pour *tuer* la variable x_1 dans toutes les équations sauf celle du pivot, en utilisant l'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$:

$$\begin{cases} \boxed{a_{1,1}} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,m} x_m = b_1 & (L_1) \\ \boxed{\phantom{a_{1,1}}} + \left(a_{2,2} - \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} \right) x_2 + \dots = b_2 - \frac{b_1}{a_{1,1}} & \left(L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} L_1 \right) \\ \vdots & \vdots \\ \boxed{\phantom{a_{1,1}}} + \left(a_{n,2} - \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} \right) x_2 + \dots = b_n - \frac{b_1}{a_{1,1}} & \left(L_n \leftarrow L_n - \frac{a_{n,1}}{a_{1,1}} L_1 \right) \end{cases}$$

Il suffit alors de répéter l'opération sur chaque variable pour obtenir un **système échelonné** "en escalier".

$$\begin{cases} x_1 + \dots = b'_1 \\ \boxed{\phantom{a_{1,1}}} + x_2 + \dots = b'_2 \\ \boxed{\phantom{a_{1,1}}} + x_3 + \dots = b'_3 \\ \vdots \\ \boxed{\phantom{a_{1,1}}} + x_n = b'_n \end{cases}$$

On remonte alors les équations : La dernière donne la valeur de x_n , l'avant dernière donne celle de x_{n-1} , ...

Il est facile de se convaincre (la démonstration rigoureuse est lourde, mais elle n'est pas difficile) que par des opérations élémentaires, on peut toujours mettre le système sous forme échelonnée, c'est-à-dire on peut remplacer le système par un autre dont la matrice est échelonnée (l'ensemble des solutions n'aura pas changé).

Nombres d'équations et d'inconnues

Point Vocabulaire : Nous ne définiront pas le terme d'équation *cohérentes et non redondantes*. Il est à comprendre dans le sens où ce type d'équations ne vont pas l'une à l'encontre d'une autre, comme

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

et ne sont pas combinaisons linéaires les unes des autres, comme

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}.$$

Il est possible qu'il y ait plus de variables que d'équation dans le système échelonné. On aura alors un système de la forme

$$\begin{cases} x_1 + \cdots & + x_{n+1} + \cdots & = b'_1 \\ \boxed{} + x_2 + \cdots & + x_{n+1} + \cdots & = b'_2 \\ \boxed{} + x_3 + \cdots & + x_{n+1} + \cdots & = b'_3 \\ \vdots & \vdots & \\ \boxed{} + x_n & + x_{n+1} + \cdots & = b'_n \end{cases}$$

Les inconnues qui apparaissent alors au début de chaque équation sont dites *inconnues principales*, les autres sont appelées les *variables libres*.

- S'il n'y a pas de variables libres, on est dans le premier cas expliqué dans la méthode. Alors le système admet une et une seule solution que l'on obtient en résolvant d'abord la dernière équation et en remontant jusqu'à la première. **On est dans le cas où il y a autant de variables que d'équations cohérentes et non redondantes.** (Voir Exemples 1,2 et 4)
- S'il y a des variables libres, on donne alors aux variables libres des valeurs arbitraires $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. On envoie les λ_i au second membre et l'on est ramené au cas précédent : il existe alors une et une seule solution pour chaque choix de $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ c'est-à-dire, une infinité de solutions dépendante de m paramètres, où m est le nombre des variables libres. **On est dans le cas où il y a plus de variables que d'équations cohérentes et non redondantes.** (Voir Exemples 3 et 5)
- S'il y a une équation incohérente le système n'a pas de solution. (Voir Exemple 6)

Quand il y a plus d'équation que de variables, soit une équation est incohérente, soit plusieurs équations sont redondantes. La même méthode permet de le savoir.

2 EXEMPLES

Exemple 1

Reprenons le système (*).

$$\begin{cases} 4x - 2y = -1 \\ 7x - y = 5 \end{cases} \quad (*)$$

À la première ligne, le coefficient 4 devant l'inconnue x_1 est non nul. On l'utilise comme pivot. L'opération élémentaire

$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{7}{4}L_1$$

a pour effet d'éliminer l'inconnue x_1 dans la deuxième équation :

$$\begin{cases} 4x - 2y = -1 \\ \frac{5}{2}y = \frac{27}{4} \end{cases}$$

Le système obtenu admet alors une unique solution, obtenue par résolution du bas vers le haut. On obtient directement

$$y = 27/10, \text{ puis } x = \frac{1}{4} \left(-1 + \frac{27}{5} \right) = 11/10.$$

En conclusion, le système (*) possède le couple $(27/10, 11/10)$ comme unique solution.

Exemple 2

On souhaite résoudre le système (1)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases} \quad (1)$$

À la première ligne, le coefficient 2 devant l'inconnue x_1 est non nul. On constate alors que les deux opérations élémentaires

$$L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \quad \text{et} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$$

ont pour effet d'éliminer l'inconnue x_1 dans les deux dernières équations :

$$(1) \iff \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_2 + x_3 = 2 \\ -3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

L'opération élémentaire $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$ donne alors

$$(1) \iff \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_2 + x_3 = 2 \\ -x_3 = -3 \end{cases}$$

Le système obtenu admet alors une unique solution, obtenue par résolution du bas vers le haut. On obtient directement

$$x_3 = 3, \text{ puis } x_2 = 3 - 2 = 1 \text{ et enfin } x_1 = \frac{1}{2}(1 + 2 \times 3 - 1) = 3.$$

En conclusion, le système (1) possède le triplet $(3, 1, 3)$ comme unique solution.

Exemple 3

On souhaite résoudre le système (2),

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases} \quad (2)$$

Comme il y a moins d'équation que de variables, on sait déjà que s'il y a des solutions, elles ne seront pas uniques ! Choisissons comme pivot le coefficient 2 devant l'inconnue x_1 de la première ligne. L'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ donne

$$(2) \iff \begin{cases} \boxed{2} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

On a bien un système complètement échelonné. On passe donc les variables libres (ici x_3) à droite des égalités. On obtient un système échelonné d'inconnues x_1 et x_2 :

$$(2) \iff \begin{cases} \boxed{2} x_1 + x_2 = 1 + 2x_3 \\ -x_2 = 2 - x_3 \end{cases}$$

Par conséquent, pour tout $x_3 \in \mathbb{R}$, il existe un unique couple (x_1, x_2) tel que le triplet (x_1, x_2, x_3) soit solution de (2). Plus précisément :

$$(2) \iff \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} + \frac{x_3}{2} \\ x_2 = -2 + x_3. \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (2) est $\left\{ \left(\frac{3}{2} + \frac{x_3}{2}, -2 + x_3, x_3 \right) \mid x_3 \in \mathbb{R} \right\}$.

Exemple 4

On souhaite résoudre le système (3),

$$(3) \iff \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y - z = 11 \\ 2x + 5y - 5z = 13 \\ x + 4y + z = 18 \end{cases} \quad (3)$$

Comme il y a plus d'équation que de variables, soit une équation est incohérente et il n'y a pas de solutions, soit plusieurs équations sont redondantes. On a

$$(3) \iff \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} \begin{cases} \boxed{1} x + 2y - 3z = 4 \\ \quad \boxed{} x + y + 2z = 7 \\ \quad \boxed{} x + y + z = 5 \\ \quad \boxed{} x + 2y + 4z = 14 \end{cases} \iff \begin{array}{l} L_3 - L_2 \rightarrow L_3 \\ L_4 - 2L_2 \rightarrow L_4 \end{array} \begin{cases} \boxed{1} x + 2y - 3z = 4 \\ \quad \boxed{1} y + 2z = 7 \\ \quad \quad -z = -2 \\ \quad \quad \quad 0 = 0 \end{cases}$$

La dernière équation, qui est une relation de compatibilité, est vérifiée. On en déduit alors en remontant les équations que le système (3) admet une unique solution $(4, 3, 2)$.

Exemple 5

On souhaite résoudre le système (4),

$$(4) \iff \begin{cases} x + y + z - 3t = 1 \\ 2x + y - z + t = -1 \end{cases} \quad (4)$$

On a alors

$$(4) \iff L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \iff \begin{cases} \boxed{1} x + y + z - 3t = 1 \\ y - 3z + 7t = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2z - 4t - 2 \\ y = -3z + 7t + 3 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système (4) est donc

$$\{(2z - 4t - 2, -3z + 7t + 3, z, t) \mid (z, t) \in \mathbb{R}^2\}$$

Exemple 6

On souhaite résoudre le système (5),

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ 3x - y + 2z = 7 \\ 8x + 2y - 2z = 9 \end{cases} \quad (5)$$

On a

$$(5) \iff \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 8L_1 \end{matrix} \begin{cases} \boxed{1} x + 2y - 3z = -1 \\ -7y + 11z = 10 \\ -14y + 22z = 17 \end{cases} \iff \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{matrix} \begin{cases} \boxed{1} x + 2y - 3z = -1 \\ \boxed{-7} y + 11z = 10 \\ 0 = -3 \end{cases}$$

La dernière équation est absurde. On en déduit alors que le système (5) n'admet aucune solution.