

Fonctions réelles

Rappels et compléments

Les fonctions réelles sont les fonctions à valeur dans $\mathbb{R}$, définie sur une partie X de $\mathbb{R}$. On a besoin de quelques notions sur les parties de $\mathbb{R}$ avant de commencer.

L'ensemble des fonctions de X dans $\mathbb{R}$ est souvent noté $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ ou $\mathbb{R}^X$.

1 DÉFINITIONS AUTOUR D'UNE FONCTION RÉELLE

Définition 1 : Fonction réelle

Une fonction réelle est la donnée d'un ensemble de départ $X \subset \mathbb{R}$, et d'une manière d'associer à chaque $x \in X$ un unique élément de $\mathbb{R}$ noté $f(x)$. On note généralement

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

On note $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles définie sur X .

Point Vocabulaire : Pour tout $(x, y) \in X \times \mathbb{R}$, tel que

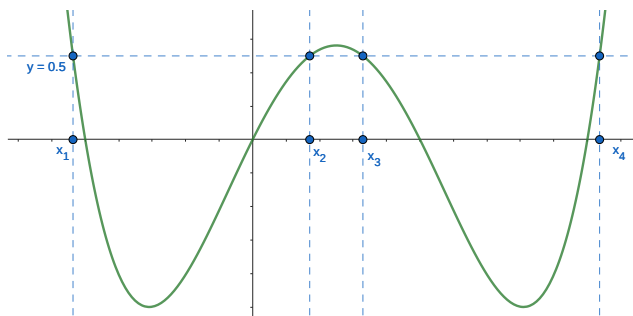
$$y = f(x),$$

on dit que y est l'**image** de x par f et que x est un **antécédent** de y par f .

On dit que f est **bien définie** lorsque pour tout $x \in X$, $f(x)$ a un sens et appartient bien à F .

L'**ensemble de définition** d'une fonction f est le plus grand ensemble de départ possible pour f . On peut le noter D_f . Tout réel $f(x)$ avec $x \in D_f$ est appelé une valeur de f .

⚠ ATTENTION On parle bien d'**un** antécédent. Sur la figure ci-dessous, y possède plusieurs antécédents par f , raison pour laquelle on parle pas de "l'" antécédent de y .



Exemple 1

Déterminons l'ensemble de définition de la fonction f définie par l'expression

$$f(x) := \frac{\sqrt{-x}}{x+2}.$$

Comme la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est définie que pour $x \geq 0$ et que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x+2}$ n'est définie que pour $x \neq -2$ seulement $f(x)$, alors

$$D_f =]-\infty, -2[\cup]-2, 0] = \mathbb{R}_- \setminus \{-2\}.$$

Définition 2 : Image d'une fonction, restriction

Soit $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Pour toute partie X de D_f , on appelle **image de X par f** , notée $f(X)$, l'ensemble

$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$$

L'image de D_f tout entier est simplement appelée l'**image de f** .

Si $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction, telle que pour tout $x \in X$, $f(x) = g(x)$, on dit que g est la **restriction de f à X** et on la note $f|_X$.

Soit $Y \subset \mathbb{R}$ telle que $D_f \subset Y$. Si $h : Y \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction, telle que pour tout $x \in D_f$, $f(x) = h(x)$, on dit que h est un **prolongement de f à Y** .

Exemple 2

- L'image de $\mathbb{R}_+$ par la fonction exponentielle est l'intervalle $[1, +\infty[$. L'image de $\mathbb{R}_-$ est $]0, 1]$.
- L'image de $\pi\mathbb{Z}$ par la fonction sinus est $\{0\}$, l'image de $[0, \pi]$ est $[0, 1]$, l'image de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est $[-1, 1]$ et l'image de $[0, 2\pi]$ est aussi $[-1, 1]$.

Point Vocabulaire : Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction. On dit que **f est à valeurs dans Y** si toute valeur de f est élément de Y , c'est à dire, si $\forall x \in X, f(x) \in Y$, ou encore de manière équivalente si $f(X) \subset Y$.

⚠ En aucun cas cela veut dire que f prend toutes les valeurs de Y .

Définition 3 : Opérations sur les fonctions

On fixe un ensemble de départ X et deux fonctions f et g définies sur X . Soit λ un réel. On définit respectivement $f + g$, λf et fg sur X par les expressions suivantes, pour tout $x \in E$:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x).$$

On dit que l'ensemble des fonctions est une *algèbre*. Si de plus, g ne s'annule pas sur E on définit

$$\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{g(x)}.$$

Point Notation : Soit $X \subset \mathbb{R}$. On appelle **fonction indicatrice** de X et on note $\mathbb{1}_X$ la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\mathbb{1}_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in X, \\ 0 & \text{si } x \notin X. \end{cases}$$

Produit de fonctions nulles

Est-il vrai qu'un produit de deux fonctions est nul si, et seulement si, l'une des deux fonctions est nulle?

Avant de répondre, il faut savoir ce qu'est "un produit de fonctions nul". C'est quand le produit des fonctions donne la fonction nulle, c'est à dire

$$\begin{aligned} 0 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 0, \end{aligned}$$

la fonction constante égale à 0. La réponse est alors **non** !

Prenons les fonctions $\mathbb{1}_{R_+}$ et $\mathbb{1}_{R_-}$, qui sont deux fonctions non nulles. Pourtant, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(\mathbb{1}_{R_+} \mathbb{1}_{R_-})(x) = \mathbb{1}_{R_+}(x) \mathbb{1}_{R_-}(x) = 0.$$

On dit que la multiplication de fonctions, contrairement à la multiplication des nombres réels, n'est pas **intègre** : un produit peut être nul sans qu'aucun facteur ne le soit ! On verra d'autres exemples de multiplications non intègres cette année.

Définition 4 : Composée de deux fonctions

Soient $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose f à valeurs dans Y . On appelle composée de g et f la fonction $g \circ f$ définie pour tout $x \in X$ par

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Proposition 1

La composition est **associative**. Soient $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h : Z \longrightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions. Si f est à valeurs dans Y et g à valeurs dans Z , alors

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

⚠ ATTENTION La composition n'est pas commutative, ne confondez pas $g \circ f$ et $f \circ g$. Il arrive d'ailleurs souvent que l'une de ces fonctions soit définie sans que l'autre le soit. Par exemple, si f est la fonction $x \longmapsto x^2$ et si g la fonction $x \longmapsto x + 1$, alors $g \circ f$ est la fonction

$$x \longmapsto x^2 + 1$$

et $f \circ g$ la fonction

$$x \longmapsto (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1.$$

Définition 5 : Monotonie

Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que f est croissante si $\forall x, y \in X, x < y \implies f(x) \leq f(y)$.
- On dit que f est strictement croissante si $\forall x, y \in X, x < y \implies f(x) < f(y)$.
- On dit que f est décroissante si $\forall x, y \in X, x < y \implies f(x) \geq f(y)$.
- On dit que f est strictement décroissante si $\forall x, y \in X, x < y \implies f(x) > f(y)$.
- On dit que f est (resp. strictement) monotone si f est (resp. strictement) croissante ou décroissante.

Proposition 2 : Conservation des monotonies

Soient $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose que la composition est possible, dans les cas où elle est écrite.

- Si f et g sont croissantes, alors $f + g$, et λf sont croissantes, pour tout $\lambda \geq 0$. Si $\lambda \leq 0$, alors λf est décroissante.
- Si f et g sont strictement croissantes, alors $f + g$, et λf sont strictement croissantes, pour tout $\lambda > 0$. Si $\lambda < 0$, alors λf est strictement décroissante.
- Si f et g sont (resp. strictement) monotones de même sens de variation, alors $g \circ f$ est (resp. strictement) croissante.
- Si f et g sont (resp. strictement) monotones de sens de variation opposés, alors $g \circ f$ est (resp. strictement) décroissante.

Preuve. On montre pour la somme de deux fonctions croissantes. Les autres démonstrations sont similaires. Soient $x, y \in X$ avec : $x \leq y$. Par hypothèse $f(x) \leq f(y)$ et $g(x) \leq g(y)$, donc par somme $f(x) + g(x) \leq f(y) + g(y)$. $\square$

Dérivation inutiles

On évite les dérivations inutiles et on utilise plutôt la Proposition ?? . Pas besoin de dériver

$$x \mapsto x + e^x, \quad x \mapsto (e^2)^x, \quad x \mapsto \ln(1 - x), \quad \text{ou } x \mapsto \sqrt{x^2 + 5}.$$

Définition 6 : Fonction majorée/minorée/bornée

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que f est **majorée** si : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in X, f(x) \leq M$. Un tel réel M est appelé un majorant de f . On dit aussi que f est majorée par M ou que M majore f .
- On dit que f est **minorée** si : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in X, f(x) \geq m$. Un tel réel m est appelé un minorant de f . On dit aussi que f est minorée par m ou que m minore f .
- On dit que f est **bornée** si f est à la fois majorée et minorée, c'est à dire, si : $\exists K \geq 0, \forall x \in X, |f(x)| \leq K$.

Définition 7 : Maximum/minimum d'une fonction

Soient $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in X$.

- On dit que f admet un **maximum** en a si pour tout $x \in X$: $f(x) \leq f(a)$. Le réel $f(a)$ est alors appelé le maximum de f et noté $\max_X f$ ou $\max_{x \in X} f(x)$.
- On dit que f admet un **minimum** en a si pour tout $x \in X$: $f(x) \geq f(a)$. Le réel $f(a)$ est alors appelé le minimum de f et noté $\min_X f$ ou $\min_{x \in X} f(x)$.

Consistance des définitions

L'étudiant attentif aura remarqué que

$$f \text{ est } \left| \begin{array}{l} \text{majorée} \\ \text{minorée} \\ \text{bornée} \end{array} \right| \iff \text{La partie } \{f(x) \mid x \in X\} \text{ de } \mathbb{R} \text{ est } \left| \begin{array}{l} \text{majorée} \\ \text{minorée} \\ \text{bornée} \end{array} \right|.$$

et

$$f \text{ admet un } \left| \begin{array}{l} \text{maximum} \\ \text{minimum} \end{array} \right| \text{ en } a \iff \text{La partie } \{f(x) \mid x \in X\} \text{ de } \mathbb{R} \text{ admet } f(a) \text{ comme } \left| \begin{array}{l} \text{plus grand} \\ \text{plus petit} \end{array} \right| \text{ élément.}$$

Rien de nouveau à apprendre donc.

⚠ ATTENTION Une fonction peut ne pas avoir de minimum et/ou de maximum. Comme par exemple le fonction

$$x \mapsto x .$$

⚠ ATTENTION Quand une fonction admet un maximum ou un minimum, il peut être atteint plusieurs fois, comme la fonction

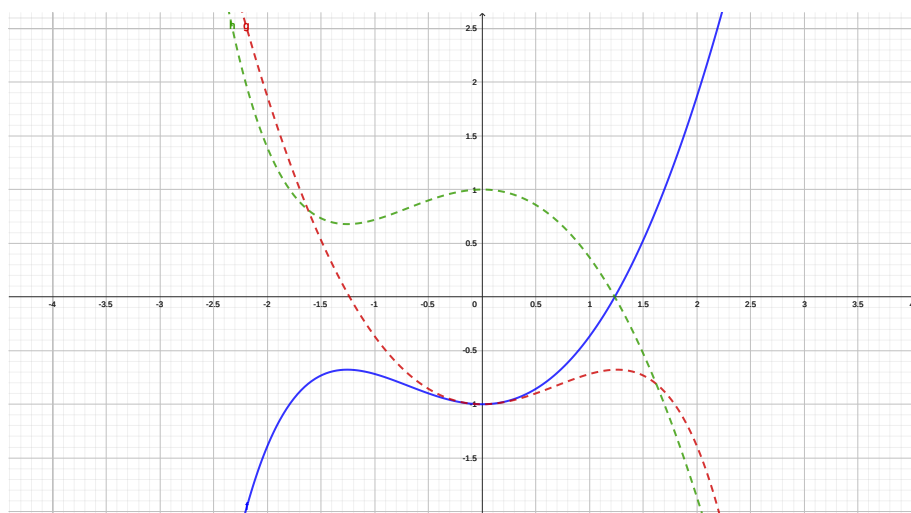
$$x \mapsto \sin x .$$

2 CAS PARTICULIERS DES TRANSFORMATIONS AFFINES DU GRAPHE

Dans cette partie, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle. Les graphes ci-dessous sont représentés dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2.1 SYMÉTRIES

Comment fait-on pour obtenir la fonction qui un graphe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ? des abscisses ? Par exemple, quelles sont les expressions des fonctions du graphe vert et rouge ?



Proposition 3

- La fonction $x \mapsto -f(x)$ est définie sur D et son graphe s'obtient à partir de celui de f par une symétrie par rapport à (Ox) .
- La fonction $x \mapsto f(-x)$ est définie sur $-D$, i.e. le symétrique de D par rapport à 0 , et son graphe s'obtient aussi à partir de celui de f par la même symétrie.

2.2 TRANSLATIONS

Définition 8 : Translation d'un ensemble

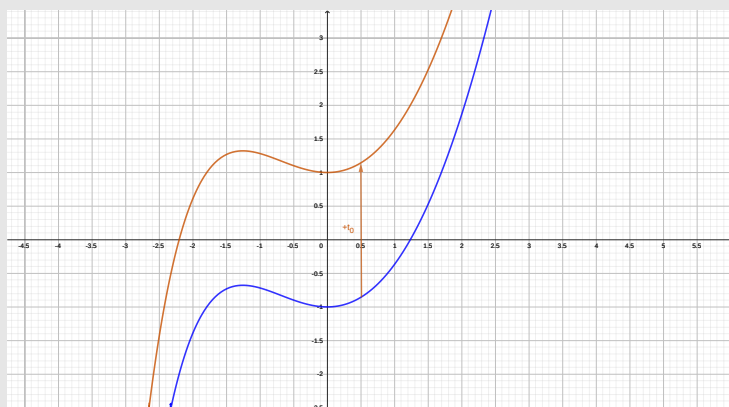
Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$. On appelle l'ensemble translaté de A par t et on note $A + t$ l'ensemble

$$A + t := \{a + t \mid a \in A\} .$$

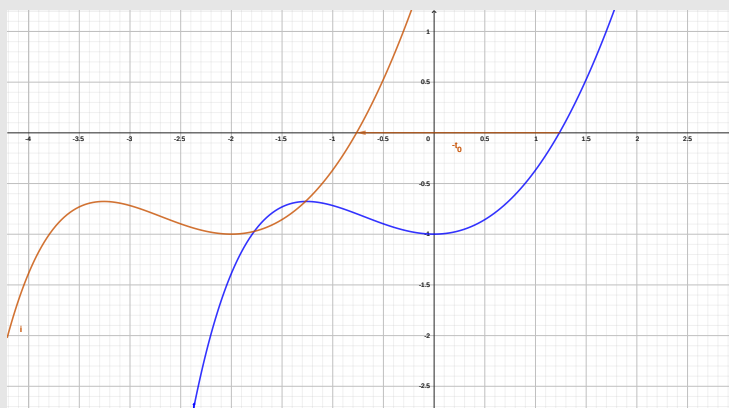
Proposition 4

Soit $f : X \rightarrow Y$, une fonction. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$.

- La fonction $x \mapsto f(x) + t_0$ est définie sur X et son graphe s'obtient à partir de celui de f par une translation de vecteur $t_0\vec{j}$.



- La fonction $x \mapsto f(x + t_0)$ est définie sur $X - t_0$, l'ensemble X translaté du vecteur $-t_0\vec{i}$, et son graphe s'obtient à partir de celui de f par une translation de vecteur $-t_0\vec{i}$.

**2.3 CONTRACTIONS, DILATATIONS****Définition 9 : Homothétie**

On rappelle qu'une **homothétie de centre O et de rapport k** est la transformation h du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ qui laisse le point O invariant et telle que, pour tout point M distinct de O :

- Les points O, M et $f(M)$ sont alignés;
- On a l'égalité

$$\frac{\overline{Of(M)}}{\overline{OM}} = k$$

En fonction du rapport k , si

- $|k| > 1$, est un **agrandissement** ou une **dilatation** de rapport $|k|$;
- $|k| < 1$, est une **réduction** ou une **contraction** de rapport $|k|$.

2.4 GRAPHE INCHANGÉ PAR TRANSFORMATION DU PLAN

Définition 10 : Parité/imparité

On suppose X symétrique par rapport à 0, c'est à dire que $\forall x \in X, -x \in X$.

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- ① On dit que f est **paire** si $\forall x \in X, f(-x) = f(x)$, c'est à dire, si le graphe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- ② On dit que f est **impaire** si $\forall x \in X, f(-x) = -f(x)$, c'est à dire, si le graphe de f est symétrique par rapport à l'origine.

Pas besoin d'étudier une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ paire ou impaire sur X tout entier, une étude sur $X \cap \mathbb{R}_+$ suffit.

Définition 11 : Périodicité

Soit $T > 0$. On suppose que X est T -périodique, c'est à dire que

$$\forall x \in D, \quad x + T \in D \quad \text{et} \quad x - T \in D$$

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est **T -périodique** ou périodique de période T si $\forall x \in X, f(x+T) = f(x)$. Le réel T est alors appelé une période de f .

Pas besoin d'étudier une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ qui est T -périodique sur X tout entier, une étude sur une période suffit, par exemple $X \cap [0, T[$.

⚠ ATTENTION Une fonction périodique ne possède jamais qu'une seule période. Tout multiple entier d'une période T est encore une période : $2T, 3T, 4T \dots$

Voilà pourquoi on ne parle jamais de « la » période, mais toujours d'une période. Certaines fonctions possèdent en revanche une plus petite période, mais pas toutes. On peut montrer que toute fonction continue non constante périodique possède une plus petite période. Les fonctions sinus et cosinus admettent par exemple 2π pour plus petite période. Certaines fonctions admettent au contraire tout réel strictement positif pour période et n'en ont donc pas de plus petite. C'est le cas des fonctions constantes et de la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$.

Proposition 5 : Opérations sur les fonctions périodiques

Soit $T > 0$. On suppose que X est T -périodique. Soient $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions T -périodiques.

- ① Les fonctions $f + g$ et $f \times g$ sont aussi T -périodiques, ainsi que $\frac{f}{g}$ si g ne s'annule pas.
- ② Pour tout $\omega > 0$, la fonction $x \mapsto f(\omega x)$ est $\frac{T}{\omega}$ -périodique sur l'ensemble dilaté/contracté $\frac{1}{\omega}X$.

Exemple 3

Par exemple, si $\omega = 2$, le graphe de la fonction $x \mapsto f(2x)$ s'obtient à partir de celui de f par une contraction horizontale de facteur 2. Si f est T -périodique, rien d'étonnant du coup à ce que $x \mapsto f(2x)$ soit $\frac{T}{2}$ -périodique.

Preuve.

- ① Concernant $f + g$, pour tout $x \in X$: $(f + g)(x + T) = f(x + T) + g(x + T) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$.
- ② Notons g la fonction $x \mapsto f(\omega x)$ définie en tout point x pour lequel $\omega x \in X$, c'est à dire, sur $\frac{1}{\omega}X$. Pour tout $x \in \frac{1}{\omega}X$: $g\left(x + \frac{T}{\omega}\right) = f\left(\omega\left(x + \frac{T}{\omega}\right)\right) = f(\omega x + T) = f(\omega x) = g(x)$.

□

3 NOTION DE LIMITE D'UNE FONCTION

3.1 VOCABULAIRE AUTOUR DES VOISINAGES

Les fonctions que l'on étudie en analyse sont généralement définies sur des intervalles ou des réunions d'intervalles comme $\mathbb{R}^*$ ou $[0, 1[\cup [5, 9]$, voire $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[+ \pi\mathbb{Z}$. Dans la suite on notera $\overline{\mathbb{R}}$ la compactification de $\mathbb{R}$, c'est à dire

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Dans le reste de ce chapitre, un voisinage $\mathcal{V}$ de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ telle que

- $\mathcal{V}$ contient un intervalle ouvert qui contient a , si $a \in \mathbb{R}$.
- $\mathcal{V}$ contient un intervalle du type $]x, +\infty[$ ou $] -\infty, x[$, si $a = +\infty$ ou $a = -\infty$, respectivement.

On peut se dire que le point a est non seulement dans $\mathcal{V}$, mais il lui reste un peu de place autour.

Définition 12 : Point de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à une partie de $\mathbb{R}$

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que a est adhérent à X si pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de a , $X \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$. Il est équivalent de dire que a est la limite d'une suite d'éléments de X .

Définition 13 : Fonction définie au voisinage d'un point

Soient $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

On dit que f est définie au voisinage de a si a est adhérent à X , et que f est définie au voisinage de a à gauche, respectivement à droite, si a est adhérent à $X \cap] -\infty, a[$, respectivement $X \cap]a, +\infty[$.

Dans ce cas, on dit que f vérifie une certaine propriété $\mathcal{P}$ au voisinage de a (resp. à gauche, resp. à droite) si f vérifie la propriété $\mathcal{P}$ sur $X \cap \mathcal{V}$ pour un certain voisinage $\mathcal{V}$ de a (resp à gauche, resp à droite).

Exemple 4

La fonction cosinus est minorée par $\frac{3}{4}$ au voisinage de 0 et est décroissante au voisinage de 0 à droite.

La fonction carré est croissante au voisinage de 0 à droite, et est minorée par 0 au voisinage de 0.

3.2 LIMITE D'UNE FONCTION

Bien sûr, la notion de limite intuitive que vous avez en tête est à garder. Mais nous avons besoin de définir les limites pour pouvoir démontrer les propositions et théorèmes sur les limites.

Définition 14 : Limite d'une fonction en un point

Soient $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à X et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f admet ℓ pour limite en a si

Pour tout voisinage $\mathcal{V}_\ell$ de ℓ , il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a sur lequel $f(x) \in \mathcal{V}_\ell$.

Notations de limite : Pour $a, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, on peut noter le fait que f a une limite ℓ en a

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_a f = \ell$$

$$\text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \quad \text{ou} \quad f \xrightarrow{a} \ell$$

Théorème 1 : Unicité de la limite

Soient $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à X .

- ① Si f possède une limite en a , cette limite est unique.
- ② Si f est définie en a et possède une limite en a , alors : $\lim_a f = f(a)$.

Preuve.

- ① Par l'absurde, faisons l'hypothèse que f possède deux limites ℓ et ℓ' différentes. Il existe alors un voisinage $\mathcal{V}_\ell$ de ℓ et un voisinage $\mathcal{V}_{\ell'}$ de ℓ' , tels que $\mathcal{V}_\ell \cap \mathcal{V}_{\ell'} = \emptyset$. Or par hypothèse sur f , il existe deux voisinages $\mathcal{V}_a$ et $\mathcal{V}'_a$ de a pour lesquels $\forall x \in X \cap \mathcal{V}_a, f(x) \in \mathcal{V}_\ell$ et $\forall x \in X \cap \mathcal{V}'_a, f(x) \in \mathcal{V}_{\ell'}$. Or $X \cap \mathcal{V}_a \cap \mathcal{V}'_a \neq \emptyset$, et pour tout $x \in X \cap \mathcal{V}_a \cap \mathcal{V}'_a : f(x) \in \mathcal{V}_\ell \cap \mathcal{V}_{\ell'}$ alors que nous avons choisi $\mathcal{V}_\ell$ et $\mathcal{V}_{\ell'}$ disjoints $\implies$ contradiction !

- ② Faisons l'hypothèse que f est définie en a , c'est à dire que $a \in X$, et possède une limite ℓ en a .

Faisons la preuve par l'absurde que $\ell \in \mathbb{R}$. Supposons donc $\ell = +\infty$ (la preuve est la même pour $\ell \neq -\infty$). Il existerait alors un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a sur lequel $f(x) \in]f(a), +\infty[$. Pour $x = a$, on aurait en particulier $f(a) \in]f(a), +\infty[\implies$ contradiction. Donc $\ell \in \mathbb{R}$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe ainsi par hypothèse un voisinage $\mathcal{V}'_a$ de a sur lequel $f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$. En particulier pour $x = a$, on a $\forall \varepsilon > 0, |f(a) - \ell| < \varepsilon$. De nouveau par l'absurde, supposons $\ell \neq f(a)$. Alors pour $\varepsilon = \frac{|f(a) - \ell|}{2}$ (la moitié de la distance entre ℓ et $f(a)$), on aurait $|f(a) - \ell| < \frac{|f(a) - \ell|}{2} \implies$ contradiction.

Donc $\ell = f(a)$.

□

Définition 15 : Les différents cas de limite d'une fonction

Soient $a, \ell \in \mathbb{R}$. Soit f une application réelle définie sur une partie D de $\mathbb{R}$. On suppose que dans chaque cas, $a, +\infty$, ou $-\infty$ soient respectivement adhérents à D .

$$f \xrightarrow{a} \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, |x - a| \leq \alpha \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

$$f \xrightarrow{a} +\infty \iff \forall M > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, |x - a| \leq \alpha \implies f(x) \geq M.$$

$$f \xrightarrow{a} -\infty \iff \forall M > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, |x - a| \leq \alpha \implies f(x) \leq -M.$$

$$f \xrightarrow{+\infty} \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in D, x \geq A \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

$$f \xrightarrow{+\infty} +\infty \iff \forall M > 0, \exists A > 0, \forall x \in D, x \geq A \implies f(x) \geq M.$$

$$f \xrightarrow{+\infty} -\infty \iff \forall M > 0, \exists A > 0, \forall x \in D, x \geq A \implies f(x) \leq -M.$$

$$f \xrightarrow{-\infty} \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in D, x \leq -A \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

$$f \xrightarrow{-\infty} +\infty \iff \forall M > 0, \exists A > 0, \forall x \in D, x \leq -A \implies f(x) \geq M.$$

$$f \xrightarrow{-\infty} -\infty \iff \forall M > 0, \exists A > 0, \forall x \in D, x \leq -A \implies f(x) \leq -M.$$

⚠ ATTENTION Dans les cas où $a \in \mathbb{R}$ et la limite est infinie, il faut que $a \notin D$.

Comme tous les nombres sont réels, il n'y a aucune différence à prendre des inégalités strictes ou larges. Choisissez ce que vous préférez.

Exemple 5

Quelques exemples de démonstrations de limites par la définition :

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{\sqrt{x}-1} = +\infty$:

Montrons la définition : $\forall M > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in]1, +\infty[, |x - 1| < \alpha \implies \frac{x+2}{\sqrt{x}-1} > M$.

Soit $M > 0$. Pour tout $x \in]1, +\infty[$, minorons $\frac{x+2}{\sqrt{x}-1} \geq \frac{3}{\sqrt{x}-1} \geq \frac{1}{\sqrt{x}-1}$.

Or $\frac{1}{\sqrt{x-1}} > M \iff \sqrt{x-1} < \frac{1}{M} \iff |x-1| < \frac{1}{M^2}$. Posons donc $\alpha = \frac{1}{M^2}$.

D'après ce qui précède on a $\forall x \in]1, +\infty[, |x-1| < \alpha \implies \frac{1}{\sqrt{x-1}} > M$. Ce qui prouve la définition.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$:

Montrons que $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x > A \implies \left| \frac{x^2}{x^2+1} - 1 \right| < \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, majorons $\left| \frac{x^2}{x^2+1} - 1 \right| = \frac{1}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2}$.

Or pour tout $x > 0, \frac{1}{x^2} < \varepsilon \iff x > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Posons donc $A = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

D'après ce qui précède $\forall x \in \mathbb{R}, x > A \implies \left| \frac{x^2}{x^2+1} - 1 \right| < \varepsilon$.

Proposition 6 : Limite finie et caractère localement borné

Soient $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à X . Si f possède une limite **finie** en a , f est bornée au voisinage de a .

Preuve. Par hypothèse, il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a sur lequel : $|f(x) - \ell| < 1$. En particulier, on a

$$|f(x)| = |(f(x) - \ell) + \ell| \leq |f(x) - \ell| + |\ell| \leq |\ell| + 1,$$

donc f est bornée sur $X \cap \mathcal{V}_a$. $\square$

3.3 LIMITES À GAUCHE ET À DROITE D'UNE FONCTION EN UN POINT

Définition 16 : Limite d'une fonction à gauche/à droite en un point

Soient $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a \in \mathbb{R}$ un point au voisinage duquel f est définie à gauche et à droite.

- On dit que f admet ℓ pour limite à gauche en a si $f|_{X \cap]-\infty, a[}$ admet ℓ pour limite en a . En tant que limite, la limite de f en a à gauche, si elle existe, est unique.

Ecrit avec les quantificateurs, f admet ℓ pour limite à gauche, si

▷ Cas où $\ell \in \mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in X, a - \alpha < x < a \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

▷ Cas où $\ell = +\infty$:

$$\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in X, a - \alpha < x < a \implies f(x) > A$$

▷ Cas où $\ell = -\infty$:

$$\forall A < 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in X, a - \alpha < x < a \implies f(x) < A$$

- On définit de même la notion de limite à droite.

▷ Cas où $\ell \in \mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in X, a < x < a + \alpha \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

▷ Cas où $\ell = +\infty$:

$$\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in X, a < x < a + \alpha \implies f(x) > A$$

▷ Cas où $\ell = -\infty$:

$$\forall A < 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in X, a < x < a + \alpha \implies f(x) < A$$

Notations de limite Pour $a, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, on peut noter le fait que f a une limite ℓ à gauche en a

$$\lim_{a^-} f \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x).$$

Exemple 6

Montrons que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

En effet, soit $A > 0$. Nous cherchons un réel $\alpha > 0$ pour lequel on aurait

$$\forall x \in]0, \alpha[, \quad \frac{1}{x} > A.$$

Or pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x} > A \iff x < \frac{1}{A}$. Nous pouvons donc choisir $\alpha = \frac{1}{A}$.

On peut montrer de même que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$. En revanche, d'après la proposition qui suit, la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ n'existe pas !

Proposition 7 : Caractérisation de la limite à l'aide des limites à gauche/à droite

Soient $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a \in \mathbb{R}$ un point au voisinage duquel f est définie à gauche et à droite.

① Si f est définie en a ,

$$\lim_a f = \ell \iff \lim_{a^-} f = \lim_{a^+} f = \ell \text{ et } \ell = f(a).$$

② Si f n'est pas définie en a ,

$$\lim_a f = \ell \iff \lim_{a^-} f = \lim_{a^+} f = \ell.$$

Preuve. Montrons seulement ①. Le point ② se montre de la même manière.

- Si $\lim_a f = \ell$, nous savons déjà que $\ell = f(a)$. On obtient le résultat $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$ par simple restriction du domaine à $X \cap]-\infty, a[$ et $X \cap]a, +\infty[$ dans la définition de la limite.
- Réciproquement, supposons qu'on ait

$$\lim_{a^-} f = \lim_{a^+} f = \ell = f(a).$$

Donc $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition des limites à gauche et à droite, il existe $\alpha^- > 0$ et $\alpha^+ > 0$ tels que pour tout $x \in X$,

$$(a - \alpha^- < x < a \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon) \quad \text{et} \quad (a < x < a + \alpha^+ \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon)$$

Posons $\alpha = \min\{\alpha^-, \alpha^+\}$. On sait que $f(a) = \ell$, et donc $|f(a) - \ell| = 0 < \varepsilon$, donc

$$\forall x \in X, \quad |x - a| < \alpha \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

□

4 COMMENT MANIPULER LES LIMITES ?

4.1 OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

Proposition 8 : Composition de limites

Soient X, Y deux parties de $\mathbb{R}$. Soient $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à X , $b \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à Y et $c \in \mathbb{R}$.

$$\text{Si } \lim_a f = b \text{ et si } \lim_b g = c, \text{ alors } \lim_a g \circ f = c.$$

Preuve. Soit $\mathcal{V}_c$ un voisinage de c .

Comme $\lim_b g = c$ et $\lim_a f = b$, il existe deux voisinages $\mathcal{V}_b$ de b et $\mathcal{V}_a$ de a pour lesquels

$$\forall x \in Y \cap \mathcal{V}_b, \quad g(x) \in \mathcal{V}_c, \quad \text{et} \quad \forall x \in X \cap \mathcal{V}_a, \quad f(x) \in \mathcal{V}_b.$$

Par composition, on a donc que $\forall x \in X \cap \mathcal{V}_a, \quad g \circ f(x) \in \mathcal{V}_c$. Ainsi $\lim_a g \circ f = c$. □

Exemple 7

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{e^{-2x} + 1}{(e^{-x} + 1)^2} = 0$$

Par composition des trois limites, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 + 1}{(y + 1)^2} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{z \rightarrow 1} \ln z = 0.$$

4.2 LIMITES ET INÉGALITÉS**Proposition 9 : Limites et inégalités strictes**

Soient $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à X et $m, M \in \mathbb{R}$.

- ① Si $\lim_a f < M$, alors $f(x) < M$ au voisinage de a .
- ② Si $\lim_a f > m$, alors $f(x) > m$ au voisinage de a .

Preuve. Prouvons ②. Entraînez vous à montrer ①. Posons $\ell = \lim_a f$. Si $\ell = +\infty$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a sur lequel $f(x) \in]m, +\infty[$. Si au contraire $\ell \in \mathbb{R}$, sachant que $\ell - m > 0$ par hypothèse, il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a sur lequel $f(x) \in]\ell - (\ell - m), \ell + (\ell - m)[\subset]m, +\infty[$.
Donc tous les deux cas $f(x) > m$ au voisinage de a . $\square$

Proposition 10

Soient $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à X . On suppose que f et g possèdent des limites finies en a .

$$\text{Si } f(x) \leq g(x) \text{ au voisinage de } a, \text{ alors } \lim_a f \leq \lim_a g$$

⚠ ATTENTION C'est faux avec des inégalités strictes ! En effet, $\frac{1}{x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, mais $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$!

Preuve. Raisonnons par l'absurde en supposant $\lim_a (g - f) < 0$. La proposition précédente affirme alors que $g(x) - f(x) < 0$ au voisinage de $a \rightarrow$ Contradiction. $\square$

4.3 CARACTÉRISATION SÉQUENTIELLE DE LIMITE D'UNE FONCTION

Séquentielle vient de *séquence* qui signifie *suite*. Dans la preuve du théorème, nous utilisons donc le langage et certains résultats sur les suites, qui ne seront démontrés que lors du chapitre correspondant.

Théorème 2

Soient a et ℓ deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$. Soit $\mathcal{V}$ un voisinage de a . On suppose que f est définie sur une partie X de $\mathbb{R}$ contenant $\mathcal{V}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- ① $\lim_a f = \ell$.
- ② Pour toute suite (u_n) d'éléments de X qui tend vers a , $(f(u_n))$ tend vers ℓ .

Preuve. On fera la démonstration dans le cas où a et ℓ sont dans $\mathbb{R}$.

- ① Supposons que $\ell = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Soit (u_n) une suite d'éléments de X , tous distincts de a , et telle que

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n.$$

Ecrivons que ℓ est la limite de f en a .

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in X, \quad 0 < |x - a| < \alpha \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Puisque (u_n) converge vers a , pour ce α il existe N dans $\mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies 0 < |u_n - a| < \alpha$$

et par conséquent

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies |f(u_n) - \ell| < \varepsilon.$$

- ② Réciproquement : Supposons que, pour toute suite (u_n) d'éléments de X distincts de a et qui converge vers a , on ait la convergence de la suite $(f(u_n))$ vers ℓ . Montrons que ℓ est la limite de f en a .

Supposons que ℓ n'est pas la limite de f en a . Alors

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \alpha > 0)(\exists x \in X), \quad 0 < |x - a| < \alpha \quad \text{et} \quad |f(x) - \ell| \geq \varepsilon.$$

Alors pour tout entier $n \geq 1$

$$(\exists v_n \in X), \quad 0 < |v_n - a| < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(v_n) - \ell| \geq \varepsilon.$$

Par construction la suite (v_n) est dans X , de plus elle converge vers a . Mais la suite $(f(v_n))$ ne converge pas vers ℓ . Ceci contredit l'hypothèse.

La démonstration dans les autres cas est identique au cas précédent, en adoptant les notations. Entraînez vous !

□

Exemple 8

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*), \quad f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Montrons que cette application n'admet pas de limite au point 0.

- La suite (u_n) définie par

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad u_n = \frac{2}{\pi(1+4n)}$$

est tel que

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad u_n \neq 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \quad \text{et} \quad f(u_n) = 1.$$

La suite $(f(u_n))$ est donc une suite constante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = 1.$$

- La suite (v_n) définie par

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad v_n = \frac{2}{\pi(3+4n)}$$

est tel que

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad v_n \neq 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0 \quad \text{et} \quad f(v_n) = -1.$$

La suite $(f(v_n))$ est donc une suite constante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(v_n) = -1$$

Les deux suites (u_n) et (v_n) tendent vers 0, alors que les limites des deux suites $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ sont distinctes.

Par la caractérisation séquentielle des limites, l'application $f : x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ n'admet pas de limite en 0.

Exemple 9

Montrer que l'application g définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*), \quad g(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

n'admet pas de limite en 0.

Exemple 10

La fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$.

En effet, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\pi = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n\pi + \frac{\pi}{2}) = +\infty$. Mais $\sin(n\pi) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et

$\sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. On conclut grâce à la caractérisation séquentielle de la limite, que sinus n'a pas de limite en $+\infty$.

5 EXISTENCES DE LIMITE

Parfois, il est trop difficile de calculer la limite d'une fonction. On peut donc utiliser les propositions suivantes pour dire que cette limite existe (et parfois nous la donne).

Théorème 3

Soient $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $m : X \rightarrow \mathbb{R}$ et $M : X \rightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à X et $\ell \in \mathbb{R}$.

① **Théorème d'encadrement**

Si $\lim_a m = \lim_a M = \ell$ et si $m(x) \leq f(x) \leq M(x)$ au voisinage de a , alors

$$\lim_a f \text{ existe et } \lim_a f = \ell.$$

② **Théorème de minoration**

Si $\lim_a m = +\infty$ et si $f(x) \geq m(x)$ au voisinage de a , alors

$$\lim_a f \text{ existe et } \lim_a f = +\infty.$$

③ **Théorème de majoration**

Si $\lim_a M = -\infty$ et si $f(x) \leq M(x)$ au voisinage de a , alors

$$\lim_a f \text{ existe et } \lim_a f = -\infty.$$

Preuve. Montrons ①. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse et par définition des limites de m et M , il existe

- un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a sur lequel $m(x) \leq f(x) \leq M(x)$,
- un voisinage $\mathcal{V}'_a$ sur lequel $\ell + \varepsilon > m(x) > \ell - \varepsilon$,
- un voisinage $\mathcal{V}''_a$ sur lequel $\ell - \varepsilon < M(x) < \ell + \varepsilon$.

Posons $\mathcal{V} = \mathcal{V}_a \cap \mathcal{V}'_a \cap \mathcal{V}''_a$. C'est un voisinage de a . Alors, pour tout $x \in X \cap \mathcal{V}$

$$\ell - \varepsilon < m(x) \leq f(x) \leq M(x) < \ell + \varepsilon$$

Donc $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. $\square$

Un résultat pratique qui découle du précédent :

Corollaire 3.1

Soient $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ et $\varepsilon : X \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à X . Si f est bornée au voisinage de a et si $\lim_a \varepsilon = 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x)f(x) = 0.$$

Théorème 4 : Théorème de la limite monotone

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$ et $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante.

- ① La limite $\lim_{a^+} f$ existe et est finie. Autrement dit, $f(a) \leq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.
- ② Pour tout $c \in]a, b[$, $\lim_{c^-} f$ et $\lim_{c^+} f$ existent et sont finies. Autrement dit

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x).$$

- ③ La limite $\lim_b f$ existe et est soit finie, soit égale à $+\infty$.

Le même théorème existe pour toutes les fonctions monotones et tous les types d'intervalle.

Donc si f est monotone, elle possède des limites à gauche et à droite en tout point où cela peut avoir un sens.

Le preuve du théorème nécessite le théorème de la borne supérieure, qui sera démontré dans un autre chapitre. Ce théorème nous dit que

Toute partie non-vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

Preuve. ① Posons: $F = f(]a, b[)$. La fonction f étant croissante et définie au voisinage de a à droite, F est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par $f(a)$, donc possède une borne inférieure ℓ d'après la propriété de la borne inférieure. En outre: $f(a) \leq \ell$.

Montrons maintenant que $\lim_{a^+} f = \ell$. Soit $\varepsilon > 0$. Le réel $\ell + \varepsilon$ ne minore pas F car ℓ en est le plus grand minorant, donc $f(x_0) < \ell + \varepsilon$ pour un certain $x_0 \in]a, b[$. Posons $\alpha = x_0 - a > 0$.

Pour tout $x \in]a, a + \alpha[$ $\ell - \varepsilon < \ell \leq f(x) \leq f(x_0) = y_0 < \ell + \varepsilon$, car d'une part f est croissante, et d'autre part $\ell = \inf F$. Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in]a, a + \alpha[, |f(x) - \ell| < \varepsilon$, i.e. $\lim_{a^+} f = \ell$.

- ② On va faire la preuve, en utilisant la définition de la limite avec les quantificateurs.

- **Limite à gauche en c .** Soit

$$E = \{f(x) \mid a < x < c\}.$$

E est une partie non vide et majorée (par $f(c)$) de $\mathbb{R}$, admet une borne supérieure ℓ . Montrons que ℓ est la limite à gauche de f en c .

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de ℓ , il existe $d \in]a, c[$ tel que

$$\ell - \varepsilon < f(d).$$

Comme l'application f est croissante sur I , pour tout $x \in]d, c[$,

$$\ell - \varepsilon < f(d) \leq f(x) \leq \ell < \ell + \varepsilon.$$

D'où

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \ell.$$

- **Limite à droite en c .** A vous de jouer !

Soit

$$E = \{f(x) \mid a < x < \beta\}.$$

E est une partie non vide et minorée (par $f(a)$) de $\mathbb{R}$, admet une borne inférieure λ . Montrons que λ est la limite à droite de f en a .

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de λ , il existe $b \in]a, \beta[$ tel que

$$f(b) < \lambda + \varepsilon.$$

Soit $r = b - a$. Comme l'application f est croissante sur I , pour tout $x \in]a, b = a + r[$,

$$\lambda - \varepsilon < \lambda \leq f(x) \leq f(b) < \lambda + \varepsilon.$$

D'où

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lambda.$$

La preuve de ③ est similaire. $\square$

On obtient les corollaires bien connus suivants

Corollaire 4.1

Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction réelle. Soit $a \in \overline{R}$, adhérent à X .

- Si f est **croissante, non majorée** dans un voisinage de a , alors

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty ,$$

- Si f est **croissante, majorée** dans un voisinage de a , alors

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \text{ est finie ,}$$

- Si f est **décroissante, non minorée** dans un voisinage de a , alors

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty ,$$

- Si f est **décroissante, minorée** dans un voisinage de a , alors

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \text{ est finie ,}$$

En a^+

On a bien sûr les mêmes résultats en a^+ . Le premier devient :
Si f est **croissante, non minorée** dans un voisinage de a , alors

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty ,$$

Preuve. On fait la preuve pour le premier cas. Les autres sont similaires. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f n'est pas majorée dans V , alors il existe $a \in V$ tel que $f(a) > \varepsilon$. Comme f est croissante sur V , alors

$$\forall x \in V, \quad (x > a) \implies (f(x) \geq f(a) > \varepsilon).$$

Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$\square$