

Fonction réelles dérivables

Dans tout le chapitre, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle.

1 DÉFINITIONS

1.1 PREMIÈRES DÉFINITIONS

Définition 1 : Dérivabilité, Nombre dérivé, fonction dérivée

Soit $a \in X$. On dit que f est **dérivable en a** (respectivement à **gauche** ou à **droite**) si la limite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{existe et est finie.}$$

$$\left(\text{respectivement } \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)$$

Cette limite est alors appelée le **nombre dérivé de f en a** et notée $f'(a)$ (respectivement nombre dérivé à **gauche** noté $f'_g(a)$ ou à **droite** noté $f'_d(a)$).

On dit que f est **dérivable sur X** si f est dérivable en tout point de X . La fonction $x \mapsto f'(x)$ est alors appelée la **dérivée de f** . On note $\mathcal{D}(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Une autre écriture de la définition

On a

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

en posant $h = x - a$.

Exemple 1

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. Cherchons la dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$ en a .

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}, \quad \frac{x^n - a^n}{x - a} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k x^{n-k-1} \xrightarrow{x \rightarrow a} \sum_{k=0}^{n-1} a^k a^{n-k-1} = na^{n-1}.$$

Donc la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto nx^{n-1}$.

Une fonction dérivable est continue

Si f est dérivable en $a \in \mathbb{R}$ alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Comme $x - a \rightarrow 0$, et $f'(a) \in \mathbb{R}$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - f(a) = 0$. Donc f est continue en a .

Exemple 2

Mais il existe des fonctions continues non dérivables.

- La fonction valeur absolue $|\cdot|$ n'est pas dérivable en 0. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{|x| - |0|}{x - 0} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = -1$.

Comme les limites à gauche et à droite sont différentes, la limite du taux d'accroissement $\frac{|x| - |0|}{x - 0}$ en 0 n'existe pas, donc $|\cdot|$ n'est pas dérivable en 0.

- La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0, car $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$.

⚠ ATTENTION Attention, les seules relations entre la fonction dérivée et la dérivabilité sont données dans ce cours. Les limites de la dérivée en un point ne donnent pas en général de bon résultats sur la dérivabilité au point.

Regardez par exemple la fonction $g : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Que remarquez vous ?

Proposition 1 : Tangente à la courbe

Si la fonction f est dérivable en a , sa courbe admet au point d'abscisse a une tangente qui a pour équation :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Si le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite infinie en a , alors la courbe admet une tangente verticale en a .

Développement limité d'ordre 1

Soit $a \in X$ tel qu'un voisinage de a soit inclus dans X . Montrons que

$$f \text{ est dérivable en } a \iff f(x) = f(a) + (x - a)l + (x - a)\varepsilon(x), \text{ où } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$$

- On suppose que f est dérivable en a . On pose

$$\varepsilon(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a).$$

Par définition de la dérivée en a , on a $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$. Et en multipliant par $x - a$, on obtient l'égalité souhaitée, avec $l = f'(a)$.

- Supposons maintenant qu'il existe un réel l et une fonction $\varepsilon : x \mapsto \varepsilon(x)$ définie sur X qui tend vers 0 quand $x \rightarrow a$ et telle que

$$f(x) = f(a) + (x - a)l + (x - a)\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

Alors le taux d'accroissement vaut pour tout $x \in X \setminus \{a\}$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l + \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l.$$

Ainsi, f est dérivable en a et $f'(a) = l$.

En posant $h = x - a \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow a$, on obtient $f(a + h) = f(a) + hf'(a) + h\alpha(h)$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0$.

Cela s'appelle le **développement limité de f en a** .

Fonction dérivée d'une fonction à plusieurs variables

Ici il n'y a aucun doute sur la variable de dérivabilité de f , puisque la fonction n'a qu'une seule variable. Si f a plusieurs variables $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ on écrira, $\frac{\partial f}{\partial x}$ pour la fonction dérivée selon la première variable. Cette notation peut quand même être utilisée dans ce chapitre.

Proposition 2 : Caractérisation de la dérivée à partir des dérivées à gauche et à droite

Soit $a \in X$ un point au voisinage duquel f est définie à gauche et à droite.

f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en a avec de plus : $f'_g(a) = f'_d(a)$.

Exemple 3

La fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \\ \sin x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ est dérivable en 0.

En effet, $f'_g(0) = f'_d(0) = 1$, donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

Exemple 4

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x^3}$ est définie et continue sur $] -\infty, 1]$. Par opérations, f est dérivable sur $] -\infty, 0[\cup]0, 1[$. On a un problème en 0 et en 1.

Mais, $\frac{f(h) - f(0)}{h} = \sqrt{1-h} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 1$ et $\frac{f(h) - f(0)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0^-} -1$.

Donc f n'est pas dérivable en 0 mais y admet un nombre dérivé à droite et à gauche, différents.

Enfin, $\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\sqrt{-h - 2h^2 - h^3}}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0^-} -\infty$.

Donc f n'est pas dérivable en 1, car il y a une tangente verticale à son graphe en cet abscisse.

Exemple 5

La fonction $f : x \mapsto (x^2 - 1) \arccos x^2$ est définie et continue sur $[-1, 1]$. Par opération f est dérivable sur $] -1, 1[$.

On a un problème en -1 et en 1. Mais, $\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = (2+h) \arccos((1+h)^2) \xrightarrow{h \rightarrow 0^-} 0$.

Donc f est dérivable en 1^- et $f'(1) = 0$.

Par parité, f est aussi dérivable en -1 et $f'(-1) = 0$.

Définition 2

On pose $f^{(0)} := f$. Pour tout entier naturel k si l'application $f^{(k)}$ est dérivable sur X , on pose $f^{(k+1)}$ l'application dérivée de $f^{(k)}$. Si $f^{(k)}$ est définie sur X on dit que f est **k -fois dérivable** sur X .

Si de plus, $f^{(k)}$ est continue sur X , on dit que f est **de classe $\mathcal{C}^k$ sur X** .

Si f est indéfiniment dérivable sur X , on dit que f est **de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I** .

On a les mêmes définitions pour les dérivées k -ième à gauche et à droite.

Fonctions usuelles $\mathcal{C}^\infty$

Les fonctions suivantes sont indéfiniment dérivables:

- Les fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$,
- Les fonctions rationnelles sur leur ensemble de définition,
- La fonction exp sur $\mathbb{R}$,
- La fonction ln sur $\mathbb{R}$,
- Les fonctions sin et cos sur $\mathbb{R}$,
- La fonction $x \rightarrow x^\alpha$, où $\alpha \in]0, 1[$, sur leur ensemble de définition privé de 0.

Exemple 6

Regardons le plus grand k pour lequel la fonction suivante est C^k . Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0, \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

A priori, il n'y a pas de raison que f soit dérivable en 0. Vérifions donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^{-\frac{1}{x}} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0.$$

Donc f est bien dérivable en 0 et $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} & \text{si } x > 0. \end{cases}$

Regardons la dérivabilité en 0 de f' .

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{2x - 0}{x - 0} = \lim_{x < 0} 2 = 2, \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3} = 0.$$

Donc $f'_g(2)(x) \neq f'_d(2)(x)$ et donc f' n'est pas dérivable en 0. Le plus grand k est donc $k = 1$

⚠ ATTENTION Une fonction peut n'être ni dérivable à gauche ni dérivable à droite en un point. C'est le cas de la fonction $x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$ en 0 prolongée par continuité en 0 par $f(0) = 0$, car

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sin \frac{1}{x} \quad \text{n'a pas de limite en 0, ni à gauche ni à droite.}$$
1.2 MANIPULATIONS DES FONCTIONS DÉRIVÉES**Proposition 3 : Combinaison linéaire, produit et quotient**

Soient $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions dérivables en $a \in X$, tel qu'un voisinage de a soit inclus dans X . Les opérations suivantes conservent la dérivabilité.

- **Combinaisons linéaires** $\forall x \in X$, et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda f + g)'(x) = \lambda f'(x) + g'(x)$,
- **Produit** $\forall x \in X$, $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
- **Inverse** $\forall x \in X$ tel que $f(x) \neq 0$, $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$,
- **Quotient** $\forall x \in X$ tel que $g(x) \neq 0$, $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$,
- **Composition** $\forall x \in X$ tel que g soit dérivable au point $y = f(x)$, $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$,
- **Réciproque** Si $f : X \xrightarrow{\text{bijective}} Y$ et si $f'(x) \neq 0$ alors $\forall x \in X$, $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Preuve. Faisons la preuve point par point.

- **Combinaisons linéaires** La fonction $\lambda f + g$ est dérivable en a puisque

$$\frac{(\lambda f + g)(x) - (\lambda f + g)(a)}{x - a} = \lambda \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda f'(a) + g'(a).$$

- **Produit** La fonction fg est dérivable en a puisque

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} g(x) + f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

- **Inverse** Puisque f est dérivable en a , donc continue en a et par propagation de l'inégalité stricte, il existe donc un voisinage V de a tel que

$$\forall x \in V, \quad f(x) \neq 0.$$

Pour tout x dans V , on a $\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)} = \frac{f(a) - f(x)}{f(x)f(a)}$, d'où

$$\frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}}{x - a} = \frac{f(a) - f(x)}{f(x)f(a)(x - a)} \xrightarrow{x \rightarrow a} -\frac{f'(a)}{(f(a))^2}.$$

- **Quotient** On écrit $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ et on obtient le résultat grâce aux deux points précédents.
- **Composition** Notons par $\mathcal{D}_f$ le domaine de définition de f et $\mathcal{D}_g$ le domaine de définition de g . Pour tout x différent de a dans $\mathcal{D}_f$ tel que $f(x) \in \mathcal{D}_g$,

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Or f est continue au point a , donc

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = b,$$

et donc

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} = g'(b) = g'(f(a)).$$

On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = g'(f(a)) \times f'(a).$$

- **Réciproque** Soit $a \in X$. Posons $b := f(a)$. Soit y dans Y . Il existe un x unique dans I tel que $y = f(x)$. Alors

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{x - a}{f(x) - f(a)} \xrightarrow{y \rightarrow b} \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

□

Exemple 7

Soit $\alpha \in]0, +\infty[$ et f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$. Cette fonction est dérivable sur $]0, +\infty[$ car $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x > 0$, on a

$$f'(x) = \alpha \cdot \frac{1}{x} \cdot \exp(\alpha \ln x) = \alpha \frac{1}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Proposition 4 : Formule de Leibniz

Soit n un entier naturel non nul. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient f et g deux applications définies sur I et n -dérivables sur I , alors l'application fg est n -dérivable sur I et

$$(\forall x \in I), \quad (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \times g^{(n-k)}(x).$$

Preuve. Faisons une preuve par récurrence sur l'entier naturel $n \geq 1$. La formule est vraie pour $n = 1$. Soit un entier $n \geq 1$ tel que

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \times g^{(n-k)}(x).$$

Par dérivation, on a pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned}
 (fg)^{(n+1)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k+1)}(x) \times g^{(n-k)}(x) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \times g^{(n+1-k)}(x) \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)}(x) \times g^{(n+1-k)}(x) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \times g^{(n+1-k)}(x) \\
 &= f(x) \times g^{(n+1)}(x) + f^{(n+1)}(x) \times g(x) + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] f^{(k)}(x) \times g^{(n+1-k)}(x) \\
 &= f(x) \times g^{(n+1)}(x) + f^{(n+1)}(x) \times g(x) + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x) \times g^{(n+1-k)}(x) \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x) \times g^{(n+1-k)}(x).
 \end{aligned}$$

□

Exemple 8

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = x^2 e^x$. Posons $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto e^x$, qui sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En tant que produit de f et g , la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $g^{(k)} = g$. De plus $f' : x \mapsto 2x$, $f'' : x \mapsto 2$ et $f^{(k)} = 0$ pour $k \geq 3$. La formule de Leibniz donne donc, pour tout entier $n \geq 2$,

$$\varphi^{(n)} = fg^{(n)} + nf'g^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2} f''g^{(n-2)}.$$

Donc en remplaçant, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\varphi^{(n)}(x) = (x^2 + 2nx + n(n-1)) e^x$$

On vérifie que cette expression est encore valable lorsque $n \in \{0, 1\}$.

Autres opérations

La somme, la composition et le quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ est de classe $\mathcal{C}^n$. Pour la somme, la dérivée n -ième est la somme des dérivées

$$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pour les autres, il n'y a pas de formule générale.

En pratique, pour montrer qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^n$, on pourra d'abord penser à la voir comme somme, produit, composition et/ou quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$.

Sinon, on pourra essayer de montrer que f est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \leq n$, par récurrence sur k (finie, si $n \in \mathbb{N}$).

Exemple 9

Considérons la fonction suivante

$$\begin{aligned}
 f : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 x &\longmapsto \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Montrons que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. C'est une composée de fonctions, donc on arrivera pas à avoir une formule exacte. Sur $]0, +\infty[$, la fonction f est $\mathcal{C}^\infty$, comme composée de 2 fonctions $\mathcal{C}^\infty$. Il reste à étudier ce qu'il se passe en 0. La fonction est bien continue. Regardons les premières dérivées. Pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right) e^{-1/x}, \quad f''(x) = \left(-\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2}\right) e^{-1/x}.$$

Il semble (à faire par récurrence) alors que

$$\forall x > 0, \quad f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x}, \quad \text{où } P_n \text{ est un polynôme.}$$

On prolonge $f^{(n)}$ en 0 par 0. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a alors

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x}}{x} = 0.$$

Cela montre que la fonction est bien $\mathcal{C}^n$ en 0 et donc que $[0, +\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 5

Soient $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, ainsi que I et J deux intervalles non vides et non réduits à un point et $f : I \rightarrow J$ une bijection de classe $\mathcal{C}^n$.

Si la dérivée première de f ne s'annule pas, alors la bijection réciproque f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$.

Preuve.

Preuve par récurrence. $\square$

2 LES THÉORÈMES DE LA DÉRIVABILITÉ

2.1 POINT CRITIQUES : EXTREMA, MINIMA, MAXIMA

Si $a \in X$ est tel qu'il existe un voisinage de a inclus dans X . On dit alors que a est **intérieur à X** . On pose a vérifiant cette propriété.

Définition 3 : Extremum local, point critique, point intérieur

- On dit que a est un point critique de f si f est dérivable en a avec $f'(a) = 0$.
- On dit que f possède un maximum local en a si f est majorée par $f(a)$ au voisinage de a .
- On dit que f possède un minimum local en a si f est minorée par $f(a)$ au voisinage de a .

Extremum global

Bien sûr, les maxima ou minima locaux ne sont pas toujours les maxima ou minima globaux !

Vocabulaire En général, on peut remplacer,

local = relatif

global = $\emptyset$

Avec les quantificateurs

Si on réécrit le voisinage de a par sa définition avec les quantificateurs, on obtient la définition de maximum suivante :

$$\forall x \in I \cap [a - \eta, a + \eta], \quad f(x) \leq f(a).$$

Proposition 6

Si f est dérivable en a et admet un extremum local en a , alors a est un point critique de f .

Preuve. Nous démontrons le résultat dans le cas d'un maximum local. Le point a est intérieur à I et f admet un maximum local en a , donc il existe $\eta > 0$ tel que $[a - \eta, a + \eta] \subset I$ et $\forall x \in [a - \eta, a + \eta] \quad f(x) \leq f(a)$.

- Pour tout $a < x \leq a + \eta$, on a $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$ et donc, par passage à la limite dans les inégalités, on a $f'(a) \leq 0$.
- On démontre de même $f'(a) \geq 0$ en considérant les x vérifiant $a - \eta \leq x < a$.

On a donc montré que $f'(a) = 0$. $\square$

En pratique

Pour trouver les extrema locaux d'une fonction, on cherche les points critiques et on regarde le comportement de f au voisinage de ces points.

⚠ ATTENTION Tout point critique n'est pas forcément le signe d'un extremum local. Pensez à la fonction $x \mapsto x^3$ en 0 !

⚠ ATTENTION On peut avoir un minimum local en a sans que f soit décroissante à gauche et croissante à droite au voisinage de a . C'est le cas de la fonction $x \mapsto x^2 + 2x^2 \sin^2 \frac{1}{x}$ prolongée par 0 en 0.

2.2 THÉORÈME DE ROLLE

Théorème 1 : Théorème de Rolle

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Soit f une fonction réelle continue sur le segment $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe un réel c dans l'intervalle $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exemple 10

Le théorème de Rolle permet de montrer que pour toute fonction n fois dérivable ayant $n + 1$ zéro, sa dérivée n -ième a au moins un zéro. Avez vous une idée ?

Preuve. Comme f est continue sur le segment $[a, b]$, donc f est bornée et atteint ses bornes. Il existe α et β dans $[a, b]$ tels que

$$f(\alpha) = m = \inf_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{et} \quad f(\beta) = M = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

- ① Si f est une application constante, alors, pour tout $c \in]a, b[$, $f'(c) = 0$.
- ② Sinon, on a $m < M$ et donc α ou β est un élément de $]a, b[$ puisque $f(a) = f(b)$. Supposons, par exemple que $\alpha \in]a, b[$. Alors pour tout x dans $]a, b[$ différent de α ,

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \leq 0 \text{ si } x < \alpha \quad \text{et} \quad \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \geq 0 \text{ si } x > \alpha.$$

Donc $f'(\alpha) = f'_g(\alpha) \leq 0 \leq f'_d(\alpha) = f'(\alpha)$. Soit $f'(\alpha) = 0$.

□

Exemple 11

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Montrons que le polynôme $P = 4\alpha X^3 + 3\beta X^2 + 2\gamma X - (\alpha + \beta + \gamma)$ possède une racine dans $]0, 1[$. On a bien sûr d'abord envie d'utiliser le TVI. Le problème est que

$$P(0) = -(\alpha + \beta + \gamma) \quad \text{et} \quad P(1) = 3\alpha + 2\beta + \gamma$$

et le signe de ces deux nombres n'est pas du tout clair.

Changeons donc de point de vue et posons $Q = \alpha X^4 + \beta X^3 + \gamma X^2 - (\alpha + \beta + \gamma)X$. Ce polynôme Q est une primitive de P et clairement $Q(0) = Q(1) = 0$. D'après le théorème de Rolle, $P = Q'$ s'annule donc au moins une fois entre 0 et 1.

Exemple 12

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$ et $f'(a)f'(b) > 0$.

Montrons qu'il existe $a < c_1 < c_2 < c_3 < b$ tels que $f'(c_1) = f'(c_2) = f'(c_3) = 0$.

Supposons $f'(a) > 0$ donc il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) > f(a) = 0$.

Comme $f'(b) > 0$, il existe $x_1 \in [x_0, b]$ tel que $f(x_1) < f(b) = 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à f sur le segment $[x_0, x_1]$, il existe $c_2 \in]x_0, x_1[$, tel que $f(c_2) = 0$.

Enfin, il suffit d'appliquer le théorème de Rolle sur $[a, c_2]$ et $[c_2, b]$.

2.3 THÉORÈMES DES ACCROISSEMENTS FINIS

Théorème 2 : Théorème des accroissements finis

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Soit f une fonction réelle continue sur le segment $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle $]a, b[$. Alors

$$\exists c \in]a, b[, \quad f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Preuve. Pour tout réel λ , on considère l'application réelle φ_λ définie sur le segment $[a, b]$ par

$$(\forall x \in [a, b]), \quad \varphi_\lambda(x) = f(x) - f(a) - \lambda(x - a).$$

φ_λ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et $\varphi_\lambda(a) = 0$.

Choisissons λ tel que $\varphi_\lambda(b) = 0$, c'est à dire $\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Alors φ_λ vérifie les hypothèses du Théorème de Rolle. Il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi_\lambda'(c) = 0$. Ce qui donne l'égalité des accroissements finis. $\square$

Exemple 13

Théorème des accroissements finis appliqué aux limites.

En appliquant le théorème des accroissements finis à $x \mapsto x^{1/x}$ entre n et $n + 1$, il existe $c \in]n, n + 1[$, tel que

$${}^{n+1}\sqrt{n+1} - \sqrt[n]{n} = \frac{1 - \ln c}{c^2} c^{1/c}.$$

Puisque $c \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$,

$${}^{n+1}\sqrt{n+1} - \sqrt[n]{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Par le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $x \mapsto xe^{1/x}$ entre x et $x + 1$, il existe $c_x \in]x, x + 1[$ tel que

$$(x + 1)e^{1/(x+1)} - xe^{1/x} = \left(\frac{c_x - 1}{c_x} \right) e^{\frac{1}{c_x}} (x + 1 - x) = \left(\frac{c_x - 1}{c_x} \right) e^{\frac{1}{c_x}}.$$

Mais $c_x \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$, car $c_x \geq x$. On obtient donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left((x + 1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} \right) = 1.$$

Interprétation géométrique

Le théorème des accroissements finis signifie qu'il existe (au moins) une tangente au graphe de f qui soit parallèle à la corde entre les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

Proposition 7

Soit f une application dérivable sur un intervalle I non vide de $\mathbb{R}$.

- ① f' est nulle sur I si et seulement si f est constante sur I .
- ② f' est positive sur I si et seulement si f est croissante sur I .

Preuve.

- ① Il est clair que si f est une application constante sur I , alors f' est l'application nulle sur I .

Supposons que l'application f' est nulle sur I . Soient a et b dans I tels que $a < b$. Par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c) = 0.$$

ce qui prouve que l'application f est constante sur I .

- ② ②.a) Supposons que l'application f' est positive sur I . Soient x et y dans I tel que $x \leq y$. Par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x, y[$ tel que

$$f(y) - f(x) = (y - x)f'(c) \geq 0$$

et l'application f est croissante sur I .

- ②.b) Supposons que l'application f est croissante sur I . Soit $a \in I$. Alors,

$$(\forall x \in I \setminus \{a\}), \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$

et par passage à la limite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \geq 0.$$

Ainsi l'application f' est positive sur I .

□

⚠ ATTENTION Une fonction continue peut très bien être croissante sans être dérivable.

Le résultat du théorème précédent est faux si l'on ne se place pas sur un intervalle. Par exemple, considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = -1/x$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $f'(x) = 1/x^2 > 0$ et pourtant f n'est pas croissante, puisque $f(-1) > f(1)$.

⚠ ATTENTION On peut avoir $f'(a) > 0$ en un point a sans que f soit strictement croissante au voisinage de a . Prenez

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x} + \frac{x}{2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on peut montrer que $f'(0) = \frac{1}{2} > 0$.

Pourtant $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, donc f' change de signe régulièrement au voisinage de 0, donc f' prend régulièrement au voisinage de 0 des valeurs proches de $-\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$ et f n'est ni croissante, ni décroissante.

Théorème 3 : L'inégalité des accroissements finis

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Soit f une fonction réelle continue sur le segment $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle $]a, b[$. S'il existe M dans $\mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in]a, b[, \quad |f'(x)| \leq M,$$

alors

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|.$$

Fonction Lipchitzienne

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $K \geq 0$. On dit que f est **K -lipschitzienne sur X** si

$$\forall x, y \in D, \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

On peut réécrire le théorème ...

Corollaire 3.1

Soient I un intervalle et f dérivable sur I . Si $|f'|$ est majorée sur I par $M \geq 0$, alors f est M -lipschitzienne sur I .

Preuve. Le théorème des accroissements finis nous donne

$$\exists c \in]a, b[, \quad f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Or $|f'(c)| \leq M$ par hypothèse, donc on a le résultat souhaité. $\square$

Exemple 14

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Soient f et g deux applications réelles continues sur le segment $[a, b]$ et dérivables sur l'intervalle $]a, b[$. Montrons que

$$\exists c \in]a, b[, \quad f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)].$$

Pour cela, on considère l'application réelle φ définie sur le segment $[a, b]$ par

$$\forall x \in [a, b], \quad \varphi(x) = [f(x) - f(a)][g(b) - g(a)] - [g(x) - g(a)][f(b) - f(a)].$$

φ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$. Par le Théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. D'où le résultat.

On appelle ce résultat le **théorème des accroissements finis généralisé**

Résoudre une inégalité (ou une égalité)

Je vous rappelle (une fois de plus), que résoudre une inégalité, c'est étudier la fonction associée. On peut aussi parfois utiliser le théorème des ou l'inégalité des accroissements finis.

Exemple 15

Montrons que, pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a $\ln(1+x) \leq x$. On passe tout à gauche et on étudie la fonction ! La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x) - x$ est définie et dérivable sur $] -1, +\infty[$, et l'on a

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = -\frac{x}{x+1}$$

On a alors le tableau de variations suivant:

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$
f		0	$-\infty$

On en déduit que f est négative, d'où l'inégalité annoncée.

Autre méthode, pour $x \in \mathbb{R}_+$, on peut facilement démontrer l'inégalité $\ln(1+x) \leq x$ à l'aide de l'inégalité des accroissements finis. En effet, en posant $f : x \mapsto \ln(1+x)$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$0 \leq f'(x) = \frac{1}{1+x} \leq 1$$

Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \ln(x+1) - \ln(1) \leq 1 \times (x - 0),$$

et la conclusion en découle.

Exemple 16

Calculons la limite de $\arctan(n^{-2}) - \arctan((n+1)^{-2})$ en $+\infty$. On rappelle que la fonction $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left| \frac{1}{1+x^2} \right| \leq 1$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, $\arctan(n^{-2}) - \arctan((n+1)^{-2}) \leq (2n+1)(n+1)^{-2}n^{-2} \rightarrow 0$.

2.4 APPLICATION DE L'INÉGALITÉ DES ACCROISSEMENTS FINIS AUX SUITES RÉCURRENTES

On s'intéresse dans cette partie aux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant

$$u_0 \in I \text{ et, } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n),$$

où $f : I \rightarrow I$ est une fonction. L'étudiant attentif aura remarqué l'hypothèse de stabilité $f(I) \subset I$.

D'après la caractérisation séquentielle de la continuité, si une telle suite converge vers un réel $\ell \in I$ et si f est continue, alors ℓ est un point fixe de f .

La difficulté est alors de démontrer que la suite converge effectivement. La proposition suivante permet de conclure dans certains cas.

Corollaire 3.2

Supposons

- que f soit dérivable sur I ,
- qu'il existe $c \in I$ tel que $f(c) = c$,
- qu'il existe $k \in [0, 1[$ tel que $|f'(x)| \leq k$ pour tout $x \in I$.

Alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers c .

Preuve. D'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à $x = u_n$ et $y = c$, on a, pour tout entier naturel n ,

$$|u_{n+1} - c| = |f(u_n) - f(c)| \leq k |u_n - c|.$$

Par une récurrence facile, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - c| \leq k^n |u_0 - c|.$$

Puisque $0 \leq k < 1$, on a $k^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, et donc $|u_n - c| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Ainsi, la suite u converge vers c . $\square$

Exemple 17

Étudions la convergence de la suite définie par

$$u_0 \in [0, 1] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 - u_n^2/4.$$

Considérons alors la fonction $f : x \mapsto 1 - x^2/4$ définie sur $[0, 1]$.

- L'intervalle $[0, 1]$ est stable par f ,
- $2\sqrt{2} - 2$ est un point fixe de f et appartient à l'intervalle,
- La fonction f est dérivable sur $[0, 1]$,
- Pour tout $x \in [0, 1]$, $f'(x) \leq 1/2$.

Donc, d'après la proposition précédente, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $2\sqrt{2} - 2$.

3 PROLONGEMENT $\mathcal{C}^k$

Corollaire 3.3 : Limite de la dérivée

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et a un élément de I . Si f est une fonction continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$, alors si

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f'(x) = l \in \overline{\mathbb{R}},$$

on a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l.$$

Par conséquent, si $l \in \mathbb{R}$, la fonction f est dérivable en a .

⚠ ATTENTION On a besoin de la continuité en a !

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & , \text{ si } x \geq 0 \\ x & , \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

On a bien f qui est C^∞ sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 1.$$

Mais f n'est pas continue, donc pas dérivable en 0.

Preuve. Soit $x \in I \setminus \{a\}$. Alors f est continue sur $I_x = [\min(x, a), \max(x, a)]$ et dérivable sur $] \min(x, a), \max(x, a)[$, puisque $a \notin] \min(x, a), \max(x, a)[$.

Donc d'après le théorème des accroissements finis (TAF), il existe un $c(x) \in] \min(x, a), \max(x, a)[$, tel que $f'(c(x)) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Quand $x \rightarrow a$, alors $c(x) \rightarrow a$ car $c(x)$ est dans l'intervalle $] \min(x, a), \max(x, a)[$ qui se réduit à un intervalle ouvert proche de a . Donc

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f'(c(x)) = \lim_{\substack{c \rightarrow a \\ c \neq a}} f'(c) = l.$$

□

⚠ ATTENTION Les limites: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ et $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)$ sont conceptuellement très différentes. La première est liée à la dérivabilité de f en a et la deuxième à la continuité de f' en a . Donc on ne confond pas !

Exemple 18

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sin(x)} & , \text{ si } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

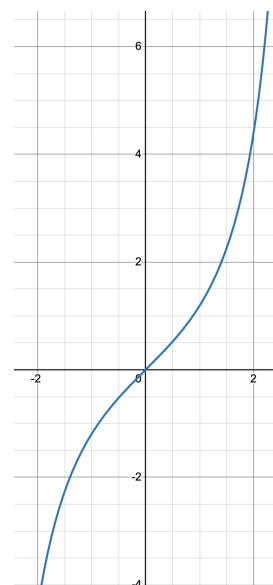
Alors f est continue sur $\mathbb{R}$ et C^∞ sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. D'après le corollaire, Pour vérifier la dérivabilité en 0, il suffit de calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$ puis de prendre la limite en 0 :

$$f'(x) = \frac{2x \sin(x) - x^2 \cos(x)}{\sin^2(x)}.$$

Comme

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin(x)} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos(x)}{\sin^2(x)} = 2 - 1 = 1,$$

alors $f'(0) = 1$.



Théorème 4 : Théorème du prolongement de classe $\mathcal{C}^1$

Soient I un intervalle, $a \in I$ et $f \in \mathcal{C}^1(I \setminus \{a\}, \mathbb{R})$. Si $\lim_a f$ et $\lim_a f'$ existent et sont finies, le prolongement par continuité de f à I tout entier est de classe $\mathcal{C}^1$.

Preuve. La fonction f possède une limite finie en a , donc possède un prolongement par continuité $\bar{f}$ à I tout entier. Ensuite, dire que f possède une limite finie ℓ en a revient à dire que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \bar{f}'(x) = \ell.$$

D'après corollaire précédent,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\bar{f}(x) - \bar{f}(a)}{x - a} = \ell,$$

donc $\bar{f}$ est dérivable en a et $\bar{f}'(a) = \ell$. Finalement, $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \bar{f}'(x) = \ell = \bar{f}'(a)$, donc $\bar{f}'$ est continue en a . On a donc montré que $\bar{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I . $\square$

Théorème 5 : Théorème du prolongement de classe $\mathcal{C}^k$

Soient I un intervalle, $k \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^k(I \setminus \{a\}, \mathbb{R})$. Si $\lim_a f^{(i)}$ existe et est finie pour tout $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, le prolongement par continuité de f à I tout entier est de classe $\mathcal{C}^k$.

Preuve. On fait la preuve par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

Pour $k = 0$, c'est la définition du prolongement par continuité !

Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose le théorème vrai au rang k . Soit $f \in \mathcal{C}^{k+1}(I \setminus \{a\}, \mathbb{R})$. On suppose que $\lim_a f^{(i)}$ existe et est finie pour tout $i \in \llbracket 0, k+1 \rrbracket$.

- D'après le théorème du prolongement de classe $\mathcal{C}^1$, le prolongement par continuité $\bar{f}$ de f à I tout entier est de classe $\mathcal{C}^1$.
- La fonction f' est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I \setminus \{a\}$ et $\lim_a (f')^{(i)}$ existe et est finie pour tout $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, donc par hypothèse de récurrence, le prolongement par continuité de f' à I tout entier est de classe $\mathcal{C}^k$.

Pour finir, $\bar{f}'$ étant continue sur I tout entier d'après le premier point, le prolongement par continuité de f' à I du deuxième point n'est autre que $\bar{f}'$.

Donc $\bar{f}'$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I , d'où $\bar{f}$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur I . $\square$

Exemple 19

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \ln(|x|), & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On souhaite déterminer la plus grande valeur k telle que f soit de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$.

On vérifie d'abord rapidement que f est bien continue sur $\mathbb{R}$.

① f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*), \quad f'(x) = x^2(1 + 3 \ln(|x|)).$$

et

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} x^2(1 + 3 \ln(|x|)) = 0 = f'(0).$$

f' est donc continue en 0 et par suite f' est continue sur $\mathbb{R}$. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

② f' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*), \quad f''(x) = x(5 + 6 \ln(|x|)).$$

et

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f''(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} x(5 + 6 \ln(|x|)) = 0 = f''(0).$$

f'' est donc continue en 0 et par suite f'' est continue sur $\mathbb{R}$. f' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

③ f'' est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*), \quad f^{(3)}(x) = 11 + 6 \ln(|x|).$$

et

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f^{(3)}(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} 11 + 6 \ln(|x|) = -\infty.$$

Donc f n'est pas de classe C^3 sur $\mathbb{R}$.

4 PETIT PLUS : DÉRIVATION DES FONCTIONS COMPLEXES SUR $\mathbb{R}$

Théorème 6 : Caractérisation de la dérivabilité à partir des parties réelle et imaginaire

Soient $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $a \in X$. f est dérivable en a si et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont. De plus, dans ce cas

$$f'(a) = \operatorname{Re}(f)'(a) + i \operatorname{Im}(f)'(a).$$

Définition 4 : Dérivation des fonctions à valeurs complexes

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si les fonctions $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont. On appelle dans ce cas nombre dérivé de f en a , le nombre complexe

$$f'(a) = \operatorname{Re}(f)'(a) + i \operatorname{Im}(f)'(a).$$

L'ensemble des fonctions complexes dérivables sur I tout entier, c'est à dire, dérivables en tout point de I , est noté $\mathcal{D}(I, \mathbb{C})$. Si $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{C})$, la fonction $x \mapsto f'(x)$ définie sur I est appelée la dérivée de f .

On fait la même, et on recommence

On peut montrer que les formules de dérivation d'une somme, d'un produit et d'un quotient de fonctions complexes sont les mêmes que pour les fonctions réelles, de même que la formule de dérivation d'une composée de fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivie d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Exemple 20

La fonction $x \mapsto e^{ix}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car les fonctions $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin x$ le sont, et sa dérivée est $x \mapsto -\sin(x) + i \cos x = ie^{ix}$.

⚠ ATTENTION Pour les fonctions complexes, pas question de parler de monotonie ou de signe de la dérivée puisqu'il n'y a pas d'inégalités dans $\mathbb{C}$, mais le théorème fondamental suivant est en revanche conservé :

Théorème 7 : Caractérisation des fonctions dérivables constantes

Soient I un intervalle et $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{C})$. La fonction f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I .

Fiche : Fonctions usuelles

Domaines, dérivabilité, dérivées

Fonction	Domaine	Dérivabilité	Nombre Dérivé	Dérivé k -ième
$x \mapsto x^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$n(n-1) \cdots (n-k+1)x^{n-k}$
$x \mapsto x^n \ (n \in \mathbb{Z}_-)$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	nx^{n-1}	$n(n-1) \cdots (n-k+1)x^{n-k}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$(-1)^k k! x^{-(k+1)}$
$x \mapsto x^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R}, x > 0)$	$]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)x^{\alpha-k}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$[0, +\infty[$	$]0, +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	dérivations successives
$x \mapsto x^{1/n} \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$[0, +\infty[$	$]0, +\infty[$	$\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$	$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{n} - k + 1\right) x^{\frac{1}{n}-k}$
$x \mapsto x $	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$\text{sgn}(x)$	Fonction nulle non définie en 0
$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^x	e^x
$x \mapsto a^x \ (a > 0)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$a^x \ln a$	$(\ln a)^k a^x$
$x \mapsto \ln x$	$]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$	$\frac{1}{x}$	$(-1)^{k-1} (k-1)! x^{-k}$
$x \mapsto \log_a x \ (a > 0, a \neq 1)$	$]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$	$\frac{1}{x \ln a}$	$(-1)^{k-1} (k-1)! (\ln a)^{-1} x^{-k}$
$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$
$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$
$x \mapsto \tan x$	$\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$	$\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$	$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$	$\emptyset$
$x \mapsto \arcsin x$	$[-1, 1]$	$] -1, 1[$	$(1-x^2)^{-1/2}$	$\emptyset$
$x \mapsto \arccos x$	$[-1, 1]$	$] -1, 1[$	$-(1-x^2)^{-1/2}$	$\emptyset$
$x \mapsto \arctan x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\emptyset$
$x \mapsto \text{sh} x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\text{ch} x$	$\begin{cases} \text{sh si } k \text{ pair,} \\ \text{ch si } k \text{ impair.} \end{cases}$
$x \mapsto \text{ch} x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\text{sh} x$	$\begin{cases} \text{ch si } k \text{ pair,} \\ \text{sh si } k \text{ impair.} \end{cases}$
$x \mapsto \tanh x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$1 - \tanh^2 x$	$\emptyset$