

Dinâmica de uma partícula material de massa constante

Introdução

Dinâmica

É o estudo da relação existente entre o movimento de um corpo e as causas desse movimento. Este movimento é o resultado da *interacção* com outros corpos que o cercam. As interacções são convenientemente descritas através de um *conceito matemático* chamado **força**.

Basicamente, o objecto da dinâmica é o estudo da relação entre **força** e **as variações do movimento de um corpo**.

Partícula material

É um corpo de dimensões desprezáveis relativamente à grandeza que se está a estudar. Considera-se a sua massa constante, $m_{\text{partícula}} = k$.

Quantidade de movimento, momento linear de uma partícula ou momento cinético

Define-se **quantidade de movimento ou momento linear de uma partícula ou momento cinético**, como o produto da sua massa pela sua velocidade.

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

É uma grandeza mais informativa que a velocidade.

Noção de Força de interacção ou de Newton

Considere-se uma partícula material de massa m , velocidade $\vec{v}_1$ no instante t_1 e $\vec{v}_2$ no instante t_2 . A variação da sua quantidade de movimento entre estes dois instantes será:

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 \Leftrightarrow \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

A variação da quantidade de movimento por unidade de tempo será:

$$\frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{t_2 - t_1} = m \frac{(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{t_2 - t_1} \Leftrightarrow \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Admitindo que o intervalo de tempo Δt tende para zero, virá

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \Leftrightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Como $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$ e fazendo $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ obtemos $\vec{F} = m\vec{a}$

A grandeza física $\mathbf{F}$ é um conceito matemático chamado **força de interacção** (força da mecânica clássica ou de Newton) e representa a taxa de variação temporal da quantidade de movimento de uma partícula material.

Consequências da noção de força: Terceira lei de Newton.

A expressão $\vec{F} = m\vec{a}$ traduz a Terceira Lei de Newton, que pode enunciar-se do seguinte modo:

Se a massa de uma partícula é constante, a força é igual ao produto da massa pela aceleração.

Lei da inércia ou 1ª lei de Newton

Admita-se que $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$. Nesse caso, $\vec{F} = 0$ e como $\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$, $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$, logo $\vec{p} = m\vec{v} = \vec{k} \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{k}$, dado a massa da partícula ser constante.

Duas situações são possíveis:

- Velocidade inicial nula, $\vec{v}_0 = 0$. Como $\vec{v} = \vec{k}$, $\vec{v} = 0$, logo o corpo estava em repouso e permanece em repouso.
- Velocidade inicial constante, $\vec{v}_0 = \vec{k}$. Como $\vec{v} = \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{v}_0$, logo o corpo estava em movimento rectilíneo e uniforme e assim permanece.

Conclusões

- Um ponto material com força de interacção nula permanece em repouso ou em movimento uniforme e rectilíneo.
- Um ponto material que não está sujeito a interacções ou em que estas se anulam chama-se **partícula livre**.
- Uma partícula livre permanece em repouso ou em movimento uniforme e rectilíneo.

A última conclusão traduz a **Lei da Inércia**, também chamada **1ª Lei de Newton** ou **Primeira Lei da Dinâmica**, tipicamente enunciada como:

Uma partícula livre move-se com velocidade constante, isto é, sem aceleração.

Um observador inercial reconhece que uma partícula é livre se ela não tiver aceleração.

Teorema da conservação da quantidade de movimento de uma partícula.

Considere-se a seguinte situação ideal: 2 partículas isoladas do universo e unicamente sujeitas às suas interações mútuas. Devido a estas interações as partículas têm velocidade individual variável e movem-se em trajectórias curvas. Num determinado instante t_1 , a partícula A está em A_1 com velocidade v_{A1} e a partícula B está em B_1 com velocidade v_{B1} . No instante t_2 , a partícula A estará em A_2 com velocidade v_{A2} e a partícula B em B_2 com velocidade v_{B2} . Designando as massas das partículas A e B por, respectivamente, m_A e m_B , a quantidade de movimento total do sistema no instante t_1 será

$$\vec{P}_1 = \vec{p}_{A1} + \vec{p}_{B1} = m_A \vec{v}_{A1} + m_B \vec{v}_{B1}$$

e no instante t_2

$$\vec{P}_2 = \vec{p}_{A2} + \vec{p}_{B2} = m_A \vec{v}_{A2} + m_B \vec{v}_{B2}$$

Sendo o sistema isolado não há interacção, logo a resultante das forças que sobre ele actuam é nula, ou seja, a variação da quantidade de movimento, admitindo as massas constantes, é igual a zero, vindo

$$\vec{P}_2 - \vec{P}_1 = 0 \Leftrightarrow \vec{P}_2 = \vec{P}_1$$

Esta igualdade traduz um dos princípios fundamentais da física, designado por **Princípio da conservação da quantidade de movimento** e que pode enunciar-se do seguinte modo:

A quantidade de movimento total de um sistema composto por duas partículas, sujeitas somente às suas interações mútuas, permanece constante.

Considerando um sistema isolado, composto por um conjunto de partículas, este princípio pode ser generalizado, vindo

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_i = \text{constante}$$

ou seja,

A quantidade de movimento total de um sistema isolado de partículas é constante.

Princípio fundamental da dinâmica ou 2ª lei de Newton

Considere-se novamente o sistema isolado constituído por duas partículas. Sendo a quantidade de movimento total constante, em dois instantes t_1 e t_2 teremos

$$\vec{P}_1 = \vec{P}_2 \Leftrightarrow \vec{p}_{A1} + \vec{p}_{B1} = \vec{p}_{A2} + \vec{p}_{B2} \Leftrightarrow \vec{p}_{A1} - \vec{p}_{A2} = \vec{p}_{B2} - \vec{p}_{B1}$$

Designando por $\Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ a variação da quantidade de movimento entre os instantes t_1 e t_2 , vem

$$-\Delta \vec{p}_A = \Delta \vec{p}_B$$

Considerando a variação instantânea e as relações anteriormente estabelecidos, virá

$$\begin{aligned} -\Delta \vec{p}_A = \Delta \vec{p}_B &\Leftrightarrow -\frac{\Delta \vec{p}_A}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{p}_B}{\Delta t} \Leftrightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(-\frac{\Delta \vec{p}_A}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}_B}{\Delta t} \Leftrightarrow \\ -\frac{d\vec{p}_A}{dt} &= \frac{d\vec{p}_B}{dt} \Leftrightarrow -\vec{F}_A = \vec{F}_B \end{aligned}$$

Quando duas partículas interagem, a força sobre uma partícula é igual em módulo e de sentido contrário, à força sobre a outra – Segunda Lei de Newton ou Lei da acção e reacção.

Teorema do Centro de Massa

Posição do centro de massa

Por definição, o centro de massa de um sistema de partículas é um ponto cujo vector de posição é dado por

$$\vec{r}_{CM} = x_{CM}\hat{i} + y_{CM}\hat{j} + z_{CM}\hat{k}$$

As coordenadas x_{CM} , y_{CM} e z_{CM} são dadas por:

$$x_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n};$$

$$y_{CM} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \dots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n};$$

$$z_{CM} = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + \dots + m_nz_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

Substituindo na expressão do vector posição e considerando

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum_{i=1}^n m_i$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n}{M}\hat{i} + \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \dots + m_ny_n}{M}\hat{j} + \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + \dots + m_nz_n}{M}\hat{k} \Leftrightarrow$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \left[m_1(x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}) + m_2(x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}) + \dots + m_n(x_n\hat{i} + y_n\hat{j} + z_n\hat{k}) \right]$$

Como $\vec{r}_i = x_i\hat{i} + y_i\hat{j} + z_i\hat{k}$, conclui-se que

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots + m_n\vec{r}_n}{M}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i\vec{r}_i}{M}$$

Velocidade do centro de massa

Conhecida a lei do movimento do centro de massa é possível determinar a lei das velocidades.

Dado que $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, vem

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt}$$

ou seja

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} &= \frac{\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{M} \\ \vec{v}_{CM} &= \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{M} \end{aligned}$$

Vindo as coordenadas da velocidade dadas por

$$\begin{aligned} v_{CM_x} &= \frac{m_1 v_{1_x} + m_2 v_{2_x} + \dots + m_n v_{n_x}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \Leftrightarrow v_{CM_x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i v_{i_x}}{M} \\ v_{CM_y} &= \frac{m_1 v_{1_y} + m_2 v_{2_y} + \dots + m_n v_{n_y}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \Leftrightarrow v_{CM_y} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i v_{i_y}}{M} \\ v_{CM_z} &= \frac{m_1 v_{1_z} + m_2 v_{2_z} + \dots + m_n v_{n_z}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \Leftrightarrow v_{CM_z} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i v_{i_z}}{M} \end{aligned}$$

Aceleração do centro de massa

$$\begin{aligned} \vec{a}_{CM} &= \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} \\ \vec{v}_{CM} &= \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{M} \\ \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} &= \frac{\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}{M} \\ \vec{a} &= \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i}{M} \end{aligned}$$

Quantidade de movimento de um sistema de partículas

A velocidade de um sistema de partículas é dada por

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{M}$$

Vem, assim

$$M \vec{v}_{CM} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \vec{p}_{sistema}$$

$$M \vec{v}_{CM} = \vec{p}_{CM}$$

$$\vec{p}_{CM} = \vec{p}_{sistema}$$

A quantidade de movimento de um sistema de partículas é igual à quantidade de movimento do seu centro de massa.

Lei fundamental da dinâmica para um sistema de partículas

Derivando em ordem ao tempo $\vec{p}_{CM} = \vec{p}_{sistema}$, vem $\frac{d\vec{p}_{CM}}{dt} = \frac{d\vec{p}_{sistema}}{dt}$

Como $\frac{d\vec{p}_{sist}}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}$ e $\frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{a}_i$

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i = \frac{d\vec{p}_{CM}}{dt}$$

com $\sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i$ representando a resultante das forças exteriores, $\vec{F}_{ext}$ que actuam no sistema de partículas, dado que, de acordo com a Lei de Acção e Reacção, a resultante das forças interiores, $\vec{F}_{int}$, é nula.

Assim,

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}_{CM}}{dt}$$

$$\vec{F}_{ext} = M \vec{a}_{CM}$$

A resultante das forças exteriores que actuam sobre um sistema de partículas é igual ao produto da massa total do sistema pela aceleração do seu centro de massa.

Princípio da conservação da quantidade de movimento para um sistema de partículas

Se a resultante das forças exteriores for nula, a aceleração do centro de massa do sistema é igualmente nula e a sua velocidade é constante.

$$\begin{aligned}\vec{F}_{ext} = 0 &\Leftrightarrow \vec{a}_{CM} = 0 \Leftrightarrow \vec{v}_{CM} = \vec{k} \\ \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}_{CM}}{dt} &\Leftrightarrow \frac{d\vec{p}_{CM}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \vec{p}_{CM} = \vec{p}_{sistema} = \vec{k}\end{aligned}$$

Se a resultante das forças exteriores que actuam sobre um sistema de partículas é nula, a quantidade de movimento do sistema é constante.

Tipo de forças a considerar num sistema de partículas materiais

Forças Interiores – forças que resultam da interacção entre as partículas do sistema.

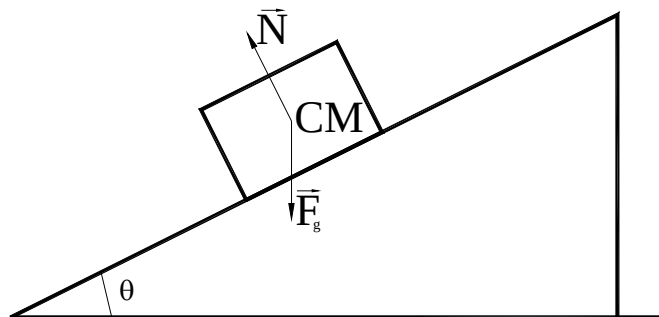
Forças Exteriores – forças que resultam da interacção com elementos estranhos ao sistema.

Forças aplicadas – forças que resultam da interacção com elementos em contacto com o sistema. Exemplo: forças de contacto.

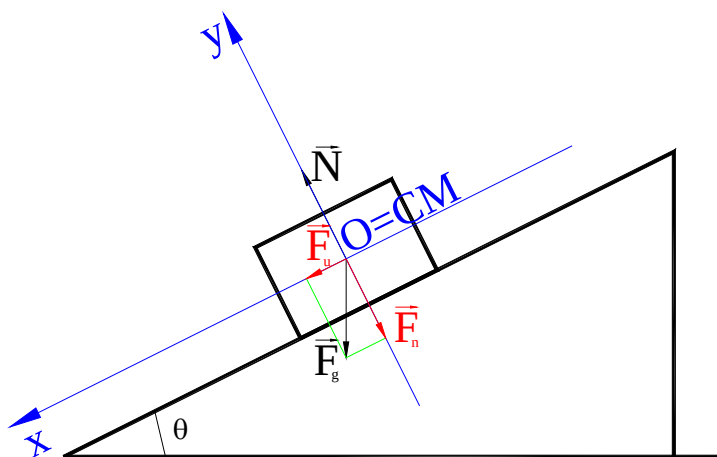
Forças de ligação – forças que limitam as possibilidades de movimento do sistema de partículas.

Aplicações

Considere-se um corpo assente sobre um plano inclinado, sujeito apenas ao seu peso próprio e à reacção do plano e descendo sem atrito.



$$\begin{cases} \vec{R}_y = 0 = \vec{N} + \vec{F}_n \\ \vec{R}_x = \vec{F}_u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N = F_n \cos \theta \\ F_u = F \sin \theta \end{cases} \Leftrightarrow ma = mg \sin \theta \Leftrightarrow a = g \sin \theta$$



Movimento no plano vertical

Fio sem massa e inextensível, roldana ideal e de massa desprezável e $m_A \neq m_B$.

Sistema: A+B+fio

Forças exteriores ao sistema: $\vec{F}_{gA}$ e $\vec{F}_{gB}$

Resultante das forças exteriores ao sistema:

$$\vec{R} = \vec{F}_{gA} + \vec{F}_{gB} \text{ com } \|\vec{R}\| = \|\vec{F}_{gB}\| - \|\vec{F}_{gA}\|$$

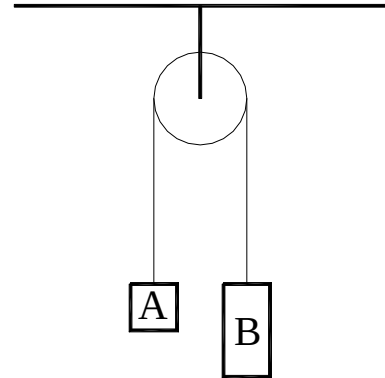
Lei fundamental da dinâmica

$$\vec{R} = m_{total} \vec{a} = (m_A + m_B) \vec{a}$$

em módulo:

$$\|\vec{F}_{gB}\| - \|\vec{F}_{gA}\| = (m_A + m_B) \|\vec{a}\| \Leftrightarrow \|\vec{a}\| = \frac{\|\vec{F}_{gB}\| - \|\vec{F}_{gA}\|}{(m_A + m_B)}$$

$$\|\vec{a}\| = \frac{m_B - m_A}{(m_A + m_B)} g \text{ Aceleração do sistema}$$

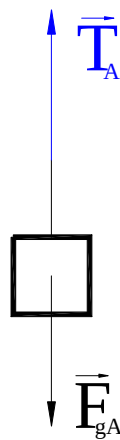


Isolamento dos corpos

$$\|\vec{R}_A\| = -\|\vec{F}_{gA}\| + \|\vec{T}_A\|$$

$$\|\vec{T}_A\| - \|\vec{F}_{gA}\| = m_A \|\vec{a}\|$$

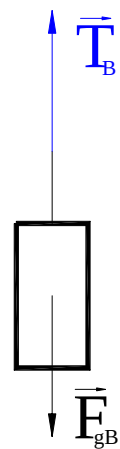
$$\|\vec{T}_A\| = \|\vec{F}_{gA}\| + m_A \|\vec{a}\|$$



$$\|\vec{R}_B\| = \|\vec{F}_{gB}\| - \|\vec{T}_B\|$$

$$\|\vec{F}_{gB}\| - \|\vec{T}_B\| = m_B \|\vec{a}\|$$

$$\|\vec{T}_B\| = \|\vec{F}_{gB}\| - m_B \|\vec{a}\|$$



$$\|\vec{T}_A\| = \|\vec{T}_B\|$$