MATERIAL ESTRUTURADO
MATEMÁTICA

#Foco na Aprendizagem | 2021

1

Aritmética Elementar I

Adição e Subtração
Multiplicação e Divisão
Frações

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DO ENSINO MÉDIO
SISEDU
Coordenadoria Estadual de Formação Docente e Educação a Distância CED
CIENTISTA CHEFE EDUCAÇÃO
FUNCAP
CEARÁ GOVERNO DO ESTADO SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

Autores

Fernando Pimentel
Ulisses Parente
Fabrício S. Benevides
Jorge H. S. Lira
Annelise Maymone
Italândia F. de Azevedo

Equipe Programa Cientista-Chefe em Educação Básica
UFC/FUNCAP/SEDUC

Revisão

Antonio Caminha M. Neto
Fabrício S. Benevides
Jorge H. S. Lira

Sumário

Roteiros de Uso

Este caderno retoma e confere novos usos e significados às operações aritméticas com números naturais e números inteiros, justificando os algoritmos e tornando-os mais plausíveis e *transparentes*: nossa estratégia é explicá-los detalhadamente, a partir de exemplos, em termos do sistema posicional decimal e do uso das propriedades operatórias, como comutatividade, associatividade e distributividade com respeito à multiplicação. Essas propriedades deixam de ser apenas enunciados formais aos quais os alunos são apresentados sem qualquer motivação ou finalidade aparente e passam a ser vistas como fatos fundamentais que tornam os cálculos aritméticos factíveis. Enfatizamos que é exatamente essa combinação das propriedades das operações e de um sistema de numeração posicional que permite criar ou utilizar algoritmos alternativos, por vezes mais eficientes, para efetuar as operações. Finalmente, demonstramos, em algumas atividades, a relevância do cálculo mental e a necessidade prática de lidar com estimativas e arredondamentos na Aritmética.

As duas primeiras seções, 1 e 2, portanto, dizem respeito a operações aritméticas com números naturais e inteiros. Já a terceira seção, 3, trabalha conceitos iniciais sobre números racionais, ainda expressos, nesta parte do estudo, em termos de suas representações fracionárias. Na sequência dos materiais, estudaremos também a representação decimal dos números racionais e explicitaremos as equivalências dessas diversas representações. Frações e números decimais representam alguns dos temas de maior dificuldade nas várias etapas de aprendizagem. Não são apenas as operações aritméticas com frações que são pontos críticos na formação dos alunos, mas elementos ainda mais básicos como o entendimento de que as diversas *acepções* do conceito de fração são todas equivalentes. Há uma verdadeira confusão conceitual sobre frações, como aponta o Professor Hung-Hsi Wu em seu livro *Understanding Numbers in Elementary School Mathematics*. De fato, ora apresentamos frações como a parte de um todo ou um fator multiplicador; ora como a expressão de uma divisão ou, ainda, uma razão ou comparação entre duas quantidades, além de sua interpretação como (sub)múltiplo de uma unidade de medida. Essa aparente profusão de significados contribui para aprofundar imprecisões e vícios conceituais comuns entre professores e alunos e replicados em muitos livros-texto. Soma-se a esta "babel" conceitual o uso de modelos concretos de frações, como barras, "pizzas" e afins como sendo as *próprias* frações! Por fim, aspectos realmente sutis, como a **equivalência** de frações (ou seja, o fato muito refinado, do ponto de vista cognitivo, de que um mesmo objeto matemático é representado por diferentes expressões numéricas ou gráficas), não são devidamente compreendidos ou trabalhados em ambiente escolar ou nos materiais de suporte ao aluno e ao professor.

Deste modo, ocupamos boa parte do estudo na Seção 3 para, partindo de modelos concretos usuais, apresentarmos gradativamente a ideia de frações como representações de números racionais associados a pontos da reta numérica. Nesta parte preliminar, não apresentamos formalmente o conjunto dos números racionais, mas preparamos o caminho para familiarizar o aluno com a ideia de que frações equivalentes representam um mesmo ponto na reta numérica. Um ponto da forma $\frac{m}{n}$, onde m, n são naturais, com $n \neq 0$, corresponde a m vezes o comprimento de um intervalo que particiona o intervalo de 0 a 1 em n partes iguais. Motivamos e ilustramos essa definição unificadora (que fixa a linguagem) por meio de problemas e exemplos, sempre estabelecendo as equivalências com os tradicionais modelos de pizzas, barras, etc. Atentamos, ainda, para o estudo da comparação e localização de frações, outro tópico que encerra muitas dificuldades de aprendizagem, como demonstram os resultados em avaliações de larga escala, em que este assunto é contemplado em descritores específicos.

Nossa abordagem aos conceitos iniciais na definição, equivalência, ordem, comparação e localização de frações será naturalmente integrada ao estudo posterior de números decimais, números racionais, razões e proporções, estruturando a grande ideia da **proporcionalidade** desde seus fundamentos à sua manifestação mais adiante nas funções afins ou no estudo da reta em Geometria Analítica. Como exemplo disso, remetemos à nossa apresentação da equivalência e comparação de duas frações, quando explicamos o fundamento do procedimento, corriqueiro mas assaz incompreendido, do "produto dos meios pelos extremos".

Percursos Curriculares

O caderno subsidia o trabalho com o pré-requisito **Aritmética de Números Racionais** presente na Matriz dos Conhecimentos Básicos de Matemática. Partindo desse pré-requisito, o(a) professor(a) pode conduzir diversos percursos curriculares, modulados de acordo com as necessidades da turma ou mesmo de grupo de alunos em uma mesma turma. As avaliações diagnósticas revelam que é preciso suprir lacunas ou, ainda mais relevante, trazer concepções e práticas da Aritmética que explicitem seus fundamentos, expliquem os procedimentos utilizados e conectem a **recuperação de conhecimentos básicos** ao **desenvolvimento de competências complexas**. Para isso, não propomos ume mera revisão esquemática e linear da Aritmética Básica, realizada em um momento didático *apartado* do planejamento curricular dos conteúdos da série. A proposta, ao contrário, é que esta retomada da Aritmética seja natural e organicamente inserida *ao longo* do estudo dos objetos de conhecimento do Ensino Médio. Esta inserção deve ser realizada de modo suave, integrada em **sequências didáticas que combinem o pré-requisito e os objetos de conhecimento almejados**.

A seguir, apresentamos alguns exemplos de tais possibilidades de integração a determinados objetos de conhecimento previstos na Matriz.

Operações aritméticas são extensamente utilizadas na **Estatística Descritiva**, particularmente no cálculo de médias e variâncias e de outras medidas de tendência central e de dispersão. Ordenar dados numéricos ou dispô-los em eixos ou planos coordenados, gráficos de barras ou gráficos de setores são habilidades que mobilizarão conhecimentos relacionados à Aritmética. Convém propor tarefas de avaliação formativa em que os alunos farão uso inteligente e refletido dos conceitos e algoritmos estudados neste caderno no âmbito da Estatística.

Tarefas e problemas de contagem em **Combinatória** e **Probabilidade** são outros momentos naturais para uma inserção harmoniosa de retomada da Aritmética Básica no ambiente curricular do Ensino Médio. Probabilidades, quando expressas em termos de frações, ensejam uma prolífica discussão sobre equivalência, localização, representação e operações com números racionais em forma fracionária. O bônus da integrar o uso do caderno ao estudo das probabilidades é que as frações ganham um novo alcance em termos de usos e significados, ao tornarem-se modelos numéricos de uma medida de aleatoriedade (ou de frequência relativa, se combinarmos aqui a Estatística Descritiva).

Há, ainda, muitas possibilidades metodológicas de uso do caderno e suas atividades alinhado ao estudo da reta numérica e do plano cartesiano, necessárias ao trabalho com **funções** na primeira série, com **equações lineares e matrizes** na segunda série ou com a **Geometria Analítica** na terceira série, segundo as orientações da Matriz de Conhecimentos Básicos. As operações com matrizes, por exemplo, dependem da familiaridade com as operações aritméticas entre números. Portanto, encontra-se aqui um ótimo ponto de contato para uma retomada da Aritmética Básica em problemas, por exemplo, relacionados ao produto de matrizes e à resolução de sistemas lineares 2×2, por exemplo. Tanto no caso da representação geométrica de equações lineares quanto no estudo de funções afins ou da equação cartesiana da reta, podem ser propostas sequências de tarefas, em progressão didática, que demandem o uso eficiente e reflexivo de aritmética de números inteiros e de frações.

Sequências de tarefas

As tarefas nas sequências de 1 a 4 são organizadas, *tipicamente*, em um crescendo de complexidade tanto *ao longo* de uma sequência quanto de uma sequência para a outra. Apresentamos, a seguir, as sequências de modo esquemático.

Sequência 1

A sequência 1 inicia por exercícios de fixação da linguagem e da técnica, com questões que direcionam ao uso correto de conceitos e de procedimentos, ilustrado em exercícios resolvidos ou exemplos discutidos nas seções "teóricas". Gradualmente, a sequência 1 avança para questões presentes em vestibulares, ENEM, exames e olimpíadas que podem ser resolvidas usando aspectos bastante básicos dos temas estudados. Essa é uma sequência indicada particularmente aos alunos com **lacunas**

mais explícitas em seus conhecimentos básicos. Recomenda-se seu uso, portanto, em sequências didáticas em que o(a) professor(a) **recua** com maior profundidade no pré-requisito antes de associá-lo ao objeto de conhecimento cujo estudo está previsto em seu planejamento. Em resumo, a sequência permite **recuar mais** no resgate das aprendizagens e **avançar mais lentamente** de modo a permitir que os alunos efetivamente consolidem os conhecimentos e habilidades estruturais em Aritmética.

Sequência 2

A sequência 2 também inicia por exercícios de fixação similares aos da sequência 1, mas segue mais rapidamente para questões presentes em vestibulares, ENEM, exames e olimpíadas. Essas questões também envolvem apenas aspectos bastante básicos dos temas estudados, mas, desta vez, em contextos de maior complexidade. As questões não são *tecnicamente* dfíceis, por não exigirem destreza ou conhecimentos técnicos mais elaborados. No entanto, já requerem um maior domínio *conceitual* do pré-requisito. Em algumas delas, o uso da Aritmética Básica não se restringe à mera aplicação automática de um procedimento, posto que o contexto não é tão explícito ou direto. Essa é uma sequência indicada particularmente aos alunos com dificuldades na *transferência* dos conhecimentos básicos para uma situação menos corriqueira e de maior complexidade, embora tecnicamente fácil. Recomenda-se seu uso, portanto, em sequências didáticas em que o(a) professor(a) **parte** dos conhecimentos básicos estruturais do pré-requisito e tenta **transpô-los** e **articulá-los** na resolução de problemas mais próximos ao objeto de conhecimento cujo estudo está previsto em seu planejamento. Em suma, o(a) professor(a) pode elaborar sequências de atividades, baseadas nos problemas, em que os conhecimentos básicos são retomados ao mesmo tempo em que já são aplicados nos tópicos do Ensino Médio.

Sequência 3

A sequência 3 é composta de atividades que, no início, **retomam** e **aprofundam** os conhecimentos básicos do pré-requisito já em problemas de bancos como os vestibulares, ENEM, exames e olimpíadas. Gradualmente, avançamos em usos **mais complexos** e **mais técnicos** da linguagem e dos procedimentos do pré-requisito em diversas temáticas e problemas do Ensino Médio. Portanto, temos uma **maior amplitude** de possibilidades de uso do material no caderno, visto que as questões nessa sequência exigem aplicações criativas, flexíveis, reflexivas e "desautomatizadas" dos conhecimentos básicos de Aritmética Básica. Ressaltamos que os problemas não envolvem métodos ou técnicas que não estejam contempladas no caderno. No entanto, visam consolidar, nos alunos, o domínio conceitual e procedimental da Aritmética Básica necessário para que possam **transferir** esse repertório básico na lida com situações complexas que representam habilidades esperadas para a etapa de aprendizagem e o pleno uso do pensamento e conhecimento aritméticos.

Sequência 4

A sequência 4 permite **aprofundamento** na Aritmética Básica em tarefas que conectam rapidamente os alunos ao uso dos conhecimentos básicos em situações complexas. Além disso, os problemas nessa sequência abrem possibilidades de uso da linguagem básica em outros domínios da Matemática e das Ciências, permitindo ao(à) professor(a) estruturar sequências que ramifiquem para itinerários formativos ou atividades como círculos olímpicos, eletivas para ENEM e vestibulares, clubes de Matemática, entre outros percursos convidativos e acessíveis aos alunos que, tendo superado limitações na aquisição, consolidação, mobilização e transferência dos conhecimentos básicos, passam a experimentar novos domínios cognitivos e acadêmicos de exploração da Aritmética Básica.

Saberes, habilidades e descritores Impactados

Os conhecimentos e habilidades desenvolvidos ou mobilizados com o estudo deste caderno envolvem

- habilidades da BNCC, enumeradas por competências específicas:
  - EM13MAT102, EM13MAT103, EM13MAT104,
  - EM13MAT313, EM13MAT314,
  - EM13MAT405,
  - EM13MAT507.
- Habilidades do ENEM na competência de área 1 - construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais: H1, H2, H3, H4 e H5
- Habilidades do ENEM na competência de área 3 - construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano: H10, H11, H12, H13.
- Descritores na Matriz de Referência do SAEB do nono ano do Ensino Fundamental: D16 a D23.
- Descritores na Matriz de Referência do SAEB da terceira série do Ensino Médio: D14.

A BNCC pode ser lida em hipertexto no link[1]. Também estão disponíveis em sítios oficiais na internet as Matrizes de Referência do ENEM[2] e do SAEB[3].

BNCC ENEM SAEB

[1] http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/
[2] https://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf
[3] http://portal.inep.gov.br/educacao-basica/saeb/matrizes-e-escalas/

1 Adição e Subtração

Desde cedo em nossas vidas, nos habituamos às operações da aritmética elementar (adição, subtração, multiplicação e divisão), quando realizamos pagamentos, preparamos listas de compras, controlamos o tempo, comparamos e estimamos medidas, etc. Nossa habilidade em efetuar essas operações vem, muitas vezes, de situações cotidianas, quando não pensamos muito sobre a maneira como nos ensinaram a fazer as contas e as realizamos *automaticamente*. Contudo, todos nós podemos ter dificuldade com aritmética básica se não entendermos como **funcionam** as operações. Assim, vamos buscar *entender* os métodos para efetuar a adição e a subtração, deixando a multiplicação e a divisão para a seção seguinte.

1.1 – Representação e adição de números naturais

Começamos nosso roteiro com um probleminha.

Problema 1 Quanto é $99 + 999 + 9.999$?

Antes de resolvermos esse problema, devemos lembrar que números como 90, 999 ou 9.999 são **números naturais**. Damos este nome a esses números por que aparecem, *naturalmente*, quando contamos objetos em uma coleção. Logo, números naturais expressam quantidade (cardinalidade seria a palavra mais precisa).

Observação 1.1 — Nota ao professor. A BNCC menciona os diferentes usos e significados de números naturais na expressão de cardinalidade, ordem e códigos. Aqui, enfatizamos o uso dos números naturais para expressar cardinalidade. É recomendável que o(a) professor(a) possa explorar a cardinalidade a partir da noção de equivalência entre conjuntos com quantidades finitas ou enumeráveis de elementos entre os quais possa ser estabelecida uma

bijeção. Esta linguagem formal tem sua base na noção intuitiva, mas profundamente abstrata, do número comum de elementos em conjuntos de diferentes naturezas, mas que podem ser comparados por uma correspondência entre pares. Não recomendamos, a este respeito, que o(a) professor(a) aborde os números naturais de modo formal ou pretensamente rigoroso, incorrendo nos excessos da chamada Matemática Moderna, mas julgamos relevante uma reflexão sobre o número cardinal como uma propriedade comum atribuída a conjuntos diversos.

Observação 1.2 — Nota ao professor. Cabe, ainda, propor questionamentos e atividades sobre a infinidade dos números naturais e a natureza indutiva de sua construção, em que possam ser elaboradas as perguntas usuais dos alunos sobre "qual número vem depois?", "existe um número maior que todos"? e outras questões do tipo. As orientações curriculares normalmente apresentam o estudo dos números naturais por avanços graduais nas ordens, nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Embora possa ser fundamentado pedagógica e cognitivamente, esse avanço gradual, que recorta os números naturais em ordens, pode induzir concepções errôneas sobre a ideia da sucessão numérica e sobre a adição, visto que o(a) professor(a) pode ficar limitado(a), por exemplo, a apresentar apenas somas "válidas" pela quantidade de classes e ordens admitidas para aquele determinado ano escolar.

Para expressar os números naturais, usamos um sistema de numeração *posicional* e *decimal*. O que significa isso, afinal?

Dizemos que o sistema é **decimal** por utilizar apenas *dez* símbolos para representar os infinitos números naturais. Esses símbolos são os **algarismos hindu-arábicos** que todos conhecemos

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9.$$

Imaginem se, para cada quantidade que quiséssemos expressar, tivéssemos que utilizar um símbolo diferente! O escritor Jorge Luis Borges escreveu um conto sobre um sujeito chamado Funes que tinha uma memória perfeita e infinita e conseguia associar a cada número um nome e símbolo diferentes. Faça uma pesquisa sobre as formas de contar e representar números usados por povos antigos, alguns dos quais baseados em associar números a partes do corpo, como os dedos dos pés e das mãos. Em sua busca, veja também como o sistema binário, em que usamos apenas os algarismos 0 e 1, está na base da Computação. Recomendamos os vídeos da série da BBC inglesa sobre os números[1] e a série "The Code"[2].

BBC:[1] *The Code:*[2]

O problema que surge é: como expressar infinitos números usando apenas dez símbolos ou algarismos? A solução engenhosa para isso é que a quantidade representada por um algarismo, 9, por exemplo, depende de sua *posição* no número.

Por exemplo, em 99, o primeiro algarismo 9, da esquerda para a direita, representa, na verdade, 90 e não apenas 9. Por isso, dizemos que o sistema é **posicional**. Este número, *noventa e nove*, consiste em 9 *dezenas* e 9 *unidades*, ou seja, ele é decomposto da seguinte forma

$$99 = 90 + 9 \quad \text{ou} \quad 9{\times}10 + 9.$$

De modo similar, o número 999, ou *novecentos e noventa e nove*, é formado por três algarismos 9: o primeiro, da esquerda para a direita, expressa 9 *centenas*; o segundo corresponde a 9 *dezenas*; e o terceiro, a 9 *unidades*. Logo, decompomos esse número como

$$999 = 900 + 90 + 9 \quad \text{ou} \quad 9{\times}100 + 9{\times}10 + 9.$$

Quando um número possui muitos dígitos, podemos expressar as decomposições acima de forma mais compacta usando **potências**

[1] https://www.youtube.com/watch?v=Kgt3UggJ70k
[2] https://www.netflix.com/br-en/title/80063658

de 10, em que, por convenção,

$$\begin{aligned}
10^0 &= 1,\\
10^1 &= 10,\\
10^2 &= 10\times 10 = 100,\\
10^3 &= 10\times 10\times 10 = 1.000,\\
10^4 &= 10\times 10\times 10\times 10 = 10.000,\\
10^5 &= 10\times 10\times 10\times 10\times 10 = 100.000,
\end{aligned}$$

e assim por diante.

> Observe que $10\times 10^3 = 10^4$, $10^2\times 10^3 = 10^5$ e assim por diante.

A seguir, destacamos os elementos da operação de potenciação.

$$\underbrace{10}_{\text{base}}{}^{\overbrace{4}^{\text{expoente}}} = \underbrace{10.000}_{\text{potência}}$$

Com esta notação, podemos escrever, por exemplo,

$$\begin{aligned}
96.427 &= 9\times 10.000 + 6\times 1.000 + 4\times 100 + 2\times 10 + 7\times 1\\
&= 9\times 10^4 + 6\times 10^3 + 4\times 10^2 + 2\times 10^1 + 7\times 10^0.
\end{aligned}$$

número formado por 9 *dezenas de milhares*, 6 *milhares*, 4 *centenas*, 2 *dezenas* e 7 *unidades*.

Para facilitar a leitura de numerais grandes, eles são divididos em classes de três algarismos que, da direita para a esquerda, são denominadas de **classes** das *unidades*, *milhares*, *milhões*, *bilhões*, e assim por diante. Por sua vez, cada classe é dividida em três **ordens**: *unidades*, *dezenas* e *centenas*. Assim, o numeral

$$23.145.207$$

corresponde a *duas dezenas de milhão, três unidades de milhão, uma centena de milhar, quatro dezenas de milhar, cinco unidades de milhar, duas centenas e sete unidades.*

Observação 1.3 — Nota ao professor. Neste ponto, cabe propor aos alunos projetos para aprofundar o entendimento do papel do 0 e dos mecanismos dos sistemas de numeração posicionais. Poderia ser proposto que os alunos criem um sistema de numeração alternativo, por exemplo, trocando os quantidades denotadas pelos algarismos ou admitindo novos algarismos ao sistema decimal. Cabe uma reflexão sobre a conveniência de um sistema, como o posicional decimal, que já **embute** a adição e reserva ao 0 um papel especial. O livro *Alex no País dos Números*, de Alex Bellos, traz muitas curiosidades históricas sobre sistemas não-decimais, como o sistema duodecimal. Uma visão da Psicologia Cognitiva sobre o *senso numérico* e sua formação nos aprendizes pode ser encontrado na bela obra de Stanislas Dehaene, *The Number Sense*.

Exercício 1.1 Em qual dos números nas alternativas abaixo o algarismo 5 tem o valor de 500 unidades?

(a) 135.120.
(b) 5.210.
(c) 20.501.
(d) 25.100.

Solução. Percorrendo os algarismos de um número da direita para a esquerda, o algarismo 5 tem o valor de 5 unidades quando está na primeira posição, de 50 unidades quando ocupa a segunda posição, de 500 unidades quando se encontra na terceira posição, e assim por diante. Logo, a alternativa que apresenta um número em que o algarismo 5 vale 500 unidades é a de letra (c). ■

Observe que, no número 20.501, o algarismo 2 corresponde a 20.000 unidades ou 2.000 dezenas ou 200 centenas ou 20 milhares ou 2 dezenas de milhares.

Exercício 1.2 — OBMEP A - 2018 (adaptado). Qual é o valor de $2.018 + 8.012$?

A) 10.000
B) 10.010
C) 10.030
D) 10.218
E) 18.012

Solução. Os números que devemos somar são decompostos como

$$\begin{aligned}2.018 &= 2\times 10^3 + 0\times 10^2 + 1\times 10^1 + 8\times 10^0,\\ 8.012 &= 8\times 10^3 + 0\times 10^2 + 1\times 10^1 + 2\times 10^0.\end{aligned}$$

Portanto, somando esses dois números, podemos *agrupar* as potências de dez em suas decomposições, obtendo

$$2.018 + 8.012 = (2+8)\times 10^3 + (0+0)\times 10^2 + (1+1)\times 10^1 + (8+2)\times 10^0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}2.018 + 8.012 &= 10\times 10^3 + 0\times 10^2 + 2\times 10 + 10\times 1\\ &= 10^4 + 20 + 10\\ &= 10.000 + 30\\ &= 10.030.\end{aligned}$$

■

Observe que os cálculos que fizemos nesse exercício justificam a "regra do **vai um**" que usamos na escola:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 2\,0\,1\,8 \\ +\,8\,0\,1\,2 \\ \hline 1\,0\,0\,3\,0 \end{array}$$

Note que o algarismo 1 que "vai" para a ordem das dezenas corresponde à soma de 8 e 2. Já o 1 que "vai" para a ordem das dezenas de milhares corresponde à soma de $2.000 = 2\times 10^3$ e $8.000 = 8\times 10^3$.

O algarismo 0 tem um papel especial no sistema posicional decimal: veja, por exemplo, a diferença entre

$$\begin{aligned} 10.003 &= 1\times 10^4 + 3\times 10^0, \\ 10.030 &= 1\times 10^4 + 3\times 10^1, \\ 10.300 &= 1\times 10^4 + 3\times 10^2. \end{aligned}$$

Agora, podemos resolver o Problema 1 que propusemos no início desta seção. Calculamos, segundo o "vai um",

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2\,2\,2} \\ 9\,9\,9\,9 \\ 9\,9\,9 \\ +\quad 9\,9 \\ \hline 1\,1\,0\,9\,7 \end{array}$$

Quando efetuamos a soma desta maneira, começamos somando os números na ordem das unidades, obtendo $9 + 9 + 9 = 27 = 20 + 7$. Assim, "fica" o 7 na ordem das unidades e "vai" o 2 para a ordem das dezenas. De fato, o algarismo 2, representado como o primeiro da direita para a esquerda na primeira linha, corresponde a 20 unidades ou 2 *dezenas*. Agora, somando os números na ordem das dezenas, temos $20 + 90 + 90 + 90 = 290 = 200 + 90$, obtendo 2 *centenas* e 9 *dezenas*. Logo, "fica" o 9 na ordem das centenas e "vai" o 2 para a ordem das centenas. Na sequência, somamos os números na ordem das centenas, obtendo $200 + 900 + 900 = 2.000$, ou seja, 2 unidades de milhar. Logo, "vai" o 2 para a ordem das unidades de milhar e *colocamos* um algarismo 0 para *ocupar o lugar* na ordem das centenas. O próximo passo é somar os números na ordem das unidades de milhar, obtendo $2.000 + 9.000 = 11.000$, ou seja, 11 unidades de milhar ou 1 dezena de milhar e 1 unidade de milhar.

Acabamos de descrever em palavras um **algoritmo da adição** que usamos desde crianças. Além de sabermos usá-lo, é ainda mais importante entender por que funciona e se, de fato, funciona!

Um *algoritmo* é uma sequência finita de instruções, isto é, uma *receita*, que visa obter uma solução para um problema. Aqui, nosso problema é simplesmente calcular a soma de dois números naturais e a receita deve funcionar para quaisquer dois naturais.

Neste exercício, as *parcelas* da soma têm a seguinte decomposição em potências de 10:

$$\begin{aligned} 9.999 &= 9\times10^3 + 9\times10^2 + 9\times10^1 + 9\times10^0 \\ 999 &= 9\times10^2 + 9\times10^1 + 9\times10^0 \\ 99 &= 9\times10^1 + 9\times10^0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} &9.999 + 999 + 99 \\ &= 9\times10^3 + (9+9)\times10^2 + (9+9+9)\times10^1 + (9+9+9)\times10^0 \\ &= 9\times10^3 + (9+9)\times10^2 + (20+7)\times10 + (20+7) \\ &= 9\times10^3 + 18\times10^2 + 200 + 70 + 20 + 7 \\ &= 9\times10^3 + (18+2)\times10^2 + (7+2)\times10 + 7 \\ &= 9\times10^3 + 20\times10^2 + 9\times10 + 7 \\ &= (9+2)\times10^3 + 9\times10 + 7 \\ &= 11\times10^3 + 9\times10 + 7 = 11.097. \end{aligned}$$

Nesta sequência de operações, justificamos o uso do "vai" 1: o algarismo 2 que "vai" para a ordem das dezenas representa, na verdade, as 2 dezenas que são somadas às 7 dezenas na quinta linha, de cima para baixo; já o algarismo 2 que "vai" para a ordem das centenas representa, de fato, as 2 centenas que são somadas às 18 centenas na quinta linha, cujo resultado são as 20 centenas na sexta linha. O algarismo 2 que "vai" para a ordem dos unidades de milhar representa as 20 centenas ou 2 unidades de milhar na sétima linha. Essas 2 unidades de milhar são somadas às 9 já existentes, o que resulta nas 11 unidades de milhar na oitava linha.

Apresentamos, agora, uma solução mais rápida do Problema 1.

Observe que

$$
\begin{aligned}
99 + 1 &= 100,\\
999 + 1 &= 1.000,\\
9.999 + 1 &= 10.000.
\end{aligned}
$$

Somando as parcelas dos lados esquerdos e as parcelas dos lados direitos e *reagrupando* os termos, temos

$$9.999 + 999 + 99 + 1 + 1 + 1 = 10.000 + 1.000 + 100.$$

Logo,

$$9.999 + 999 + 99 + 3 = 11.100.$$

Subtraindo 3 dos dois lados da igualdade, obtemos

$$9.999 + 999 + 99 = 11.100 - 3 = 11.097.$$

Essa solução do problema dá uma ideia sobre a importância de usarmos as **propriedades operatórias** da adição, como a *comutatividade* e a *associatividade*. A comutatividade implica que as somas $1+99$ e $99 + 1$ são iguais, ou seja, que a mudança da ordem das parcelas, da esquerda para a direita, não altera a soma. Já a associatividade assegura que obtemos a mesma soma se

- somarmos as parcelas $999 + 99$ e, em seguida, somarmos 1 ao resultado, isto é, se fizermos os cálculos na ordem $(999 + 99) + 1$,
- ou se somarmos $99 + 1$ primeiro e, após, somarmos 999 ao resultado, isto é, se fizemos os cálculos na ordem $999 + (99 + 1)$.

Daqui por diante, as operações entre parênteses são efetuadas primeiro. De fato, temos uma *convenção* na Matemática para indicar a ordem em que as operações são efetuadas, como veremos adiante. O que a associatividade diz é que a ordem em que efetuamos as adições **não afeta** o resultado. No entanto, a *escolha* de uma certa ordem pode *simplificar* as contas!

Logo, usando a comutatividade e a associatividade, temos

$$999 + 1 + 99 = 999 + (99 + 1) = 999 + 100 = 1.099.$$

ou, ainda,

$$999 + 1 + 99 = (999 + 1) + 99 = 1.000 + 99 = 1.099.$$

Estes são exemplos simples de como podemos usar essas propriedades até para calcular somas **sem lápis e papel** (e sem calculadora :))!

Observação 1.4 — Nota ao professor. Algo que não fica evidente quando aprendemos ou ensinamos as operações aritméticas é o papel fundamental das propriedades operatórias e sua utilidade prática para facilitar os cálculos, permitindo e justificando o uso de estratégias mais eficientes, algumas das quais veremos abaixo com o uso do **cálculo mental**.

O que passamos a discutir, agora, são algumas estratégias e exemplos de *cálculo mental*, isto é, técnicas para realizar adições e subtrações com muito mais rapidez do que fazendo as contas à mão. Mas, você pode perguntar, porque fazer isso, se dispomos de calculadoras? Ora, o exercício de manipular números mentalmente facilita a aprendizagem das relações entre eles e, assim, da Matemática como um todo; também serve para desenvolver em você uma *intuição sobre ordens de grandeza* indispensável à vida no mundo moderno. A ideia é que você fortaleça seu *senso numérico*!

Por exemplo, para somar 63 com 32, começamos escrevendo 32 como $30 + 2$; em seguida, calculamos (mentalmente, não esqueça!) $63+30 = 93$ e, depois, juntamos o 2 que separamos, obtendo $93+2 = 95$. Em resumo, fazemos mentalmente o seguinte:

$$63 + 32 = 63 + (30 + 2) = (63 + 30) + 2 = 93 + 2 = 95.$$

Note que usamos a propriedade de *associatividade* nestas contas, quando efetuamos $63 + 30$ primeiro ao invés de $30 + 2$.

Para outro exemplo, podemos somar mentalmente 87 com 52 primeiro escrevendo $87 = 80 + 7$ e $52 = 50 + 2$, depois calculamos $80 + 50 = 130$ e $7 + 2 = 9$ e, por fim, fazemos $130 + 9 = 139$. Em resumo:

$$87 + 52 = (80 + 7) + (50 + 2) = (80 + 50) + (7 + 2) = 130 + 9 = 139.$$

Mais um exemplo: quanto é $37+95$? Nesse caso, podemos começar fazendo $37+90 = 30+90+7 = 120+7 = 127$; em seguida, somamos o 5 que foi separado, obtendo $127+5 = 120+7+5 = 120+12 = 132$. Novamente resumindo:

$$37+95 = 37+(90+5) = (37+90)+5 = 127+5 = 132.$$

Agora, calculemos a soma $628+337$ em três etapas: primeiro, escrevemos (mentalmente!) $337 = 300+30+7$; em seguida, somamos sucessivamente $628+300 = 928$, $928+30 = 958$, $958+7 = 965$. Na sua mente, essa solução deve *soar* assim:

$$628 \textit{ mais } 300 \textit{ é } 928, \textit{ mais } 30 \textit{ é } 958, \textit{ mais } 7 \textit{ é } 965.$$

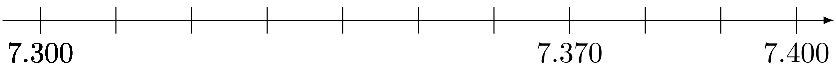
Analogamente, somamos 206 com 528 "dizendo" mentalmente:

$$206 \textit{ mais } 500 \textit{ é } 706, \textit{ mais } 20 \textit{ é } 726, \textit{ mais } 8 \textit{ é } 734.$$

Observação 1.5 — Nota ao professor. Estimar e arrendondar são recursos importantes para o cálculo mental e, em geral, para o uso das operações aritméticas no cotidiano e em vários contextos. Vejamos alguns exemplos.

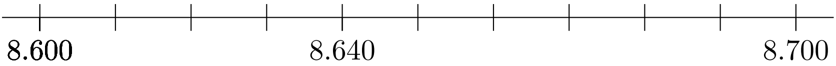
Exercício 1.3 Arredonde os números 7.370 e 8.640 para a centena mais próxima.

Solução. O número $7.370 = 7.300 + 70$ é **maior** que 7.300 e **menor** que 7.400, como representado na *reta numérica* abaixo:



Vemos, portanto, que 7.370 **está entre** 7.300 e 7.400, mas **mais próximo** de 7.400.

Da mesma forma, o número $8.640 = 8.600 + 40$ é **maior** que 8.600 e **menor** que 8.700, estando mais próximo de 8.600 do que de 8.700, como ilustrado na seguinte reta numérica:



Concluímos que 7.370 é arredondado para 7.400 ou 74 centenas e 8.640 é arredondado para 8.600 ou 86 centenas. ■

Observação 1.6 — Nota ao professor. A partir de exemplos como esse, discuta a noção de **ordem** dos números naturais, representando-a na reta numérica e observando que o número natural $n + 1$ é maior que o número natural n. Em geral, $n + m$ é maior que n, seja qual for o número natural m. Explique geometricamente o efeito da soma $n + m$ como uma *translação para a direita* de m unidades a partir do ponto que representa o número n. Por fim, ao usar a reta numérica como nos exemplos acima, determine pontos igualmente espaçados, representando acréscimos de 1 unidade, 1 dezena ou 1 centena e assim por diante, conforme o caso que estiver exemplificando.

Observação 1.7 — Nota ao professor. Ilustre a relação de ordem $n < N$ geometricamente, mostrando que, nesse caso, o ponto que representa N na reta numérica está à direita do ponto que representa n. Da mesma forma, pode interpretar a relação de ordem $m < n < N$ dizendo que n **está entre** m e N.

Exercício 1.4 Estime a soma $7.370 + 8.640$ para a centena mais próxima.

Solução. Como vimos arredondamos 7.370 para 7.400 e 8.640 para 8.600. Daí, a soma é *estimada* para

$$7.400 + 8.600 = 15.000 + 1.000 = 16.000,$$

ou seja, 160 centenas. Para determinar o erro desta estimativa, veja que o valor exato da soma é 16.010. Logo, o erro é de 10 unidades. ■

Finalizamos com mais exemplos dos processos de arredondamento e estimativa.

Exercício 1.5 Arredonde os números 56.894 e 79.882 para as unidades de milhar mais próximas.

Solução. O número $56.894 = 56.000 + 894$ **fica entre** os números 56.000 e 57.000. Todavia, fica **mais próximo** de 57.000 do que de 56.000. Logo, arredondamos 56.894 para 57 unidades de milhar.

Da mesma forma, o número $79.882 = 79.000 + 882$ fica entre os números 79.000 e 80.000, estando mais próximo de 80.000 do que de 79.000. Portanto, arredondamos 79.882 para 80 unidades de milhar. ■

Exercício 1.6 Estime a soma $56.894 + 79.882$ para a unidade de milhar mais próximas.

Solução. Usando os arrendondamentos do exercício anterior, estimamos a soma $56.894 + 79.882$ pela soma $57.000 + 80.000$, obtendo 137.000, ou seja, 137 unidades de milhar, como estimativa para a soma exata. Para determinar o erro desta estimativa, veja que o valor exato da soma é 136.776. Logo, o erro é igual a 224 unidades. ■

Exercício 1.7 Estime a soma $75.667 + 23.913 + 67.485$.

Solução. Iniciamos com uma estimativa mais grosseira: arredondamos 75.667 para 75.000, assim como 23.913 para 23.000 e 67.485 para 67.000, estimando a soma por

$$75.000 + 23.000 + 67.000 = 75.000 + 90.000 = 165.000.$$

Para melhorar esta estimativa, arredondamos 667 por 700, 913 por 900 e 485 por 500, somando a seguinte correção ao resultado anterior:

$$700 + 900 + 500 = 2.100.$$

Como estimativa mais próxima da soma exata, obtemos

$$165.000 + 2.100 = 167.100.$$

Observe que a soma exata é 167.065. Logo, o erro de nossa estimativa é de 35 unidades a mais. ■

Observação 1.8 — Nota ao professor. Nesta parte de nosso estudo, ficamos mais concentrados em entender os algoritmos e utilizá-los com eficiência e *flexibilidade*. No final de nossa apresentação, começamos a introduzir a noção de ordem e a representação geométrica dos números naturais na reta numérica. Recomendamos que o(a) professor(a) possa retomar esses aspectos, construindo representações geométricas da sucessão, ordem e adição de números naturais com o auxílio de retas numéricas graduadas em unidades, dezenas, centenas, e assim por diante, conforme o caso. O uso da reta numérica, em particular para **representação** e **localização** dos números será retomada no estudo dos números inteiros e dos números racionais.

Observação 1.9 — Nota ao professor. A noção de algoritmo, enfatizada nas passagens anteriores, pode ser explorada por conta das conexões com o Pensamento Computacional, despertando o interesse dos alunos, que poderiam ser motivados a escrever *pseudo-códigos* dos algoritmos aritméticos que explicaremos ao longo de nosso estudo da Aritmética. A propósito disso, recomendamos, por exemplo, as atividades na página da OBI[3].

OBI[3]

[3] https://olimpiada.ic.unicamp.br

Observação 1.10 — Nota ao professor. As potências de dez no sistema posicional decimal representam **ordens de grandeza** na expressão de quantidades. Há vários materiais de divulgação científica interessantes explorando as escalas, do microcosmo ao macrocosmo, expressas por diferentes potências de dez. Materiais deste tipo podem ilustrar, de modo visual e atrativo, um dos elementos da BNCC relativos à compreensão do uso do sistema decimal. Por exemplo, veja o seguinte vídeo[4].

Saiba mais[4]

1.2 – Subtração de números naturais

A subtração, depois da adição, é a segunda **operação aritmética** que estudaremos. Esta operação está associada a problemas da seguinte forma

Problema 2 Quanto dinheiro falta a João para comprar uma motoneta no valor de R$ 10.590,00, sabendo que ele já conseguiu poupar R$ 6.380,00?

Problema 3 Para pagar uma reforma urgente em casa, João gastou R$ 1.190,00 de sua poupança de R$ 6.380,00. Com quanto ficou?

Problema 4 João decidiu financiar a compra da motoneta em 24 parcelas mensais de R$ 256,00. Quanto restaria de sua renda mensal de R$ 2.130,00 após o pagamento da parcela do mês?

[4] https://www.youtube.com/watch?v=44cv416bKP4

O Problema 2 consiste em *resolver a equação*

$$6.380 + \text{quantia que falta} = 10.590.$$

Para encontrar a quantia que falta, a incógnita desta equação, calculamos a *diferença*

$$10.590 - 6.380$$

entre o valor da motoneta e a quantia que João tem atualmente. Decompondo as parcelas e reagrupando os componentes, calculamos

$$\begin{aligned} 10.590 - 6.380 &= 10.000 + 500 + 90 - 6.000 - 300 - 80 \\ &= 10.000 - 6.000 + 500 - 300 + 90 - 80 \\ &= 4.000 + 200 + 10 \\ &= 4.210. \end{aligned}$$

Numa subtração, um certo número (o *subtraendo*) é retirado de um número maior (o *minuendo*), deixando um *resto* ou *diferença*:

$$\text{minuendo} - \text{subtraendo} = \text{resto ou diferença}.$$

Para visualizar e organizar melhor essas manipulações, as escrevemos da seguinte forma, que vemos na escola:

$$\begin{array}{rccccc} & 1 & 0 & 5 & 9 & 0 \\ - & & 6 & 3 & 8 & 0 \\ \hline & & 4 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

Observe que, somando a quantia que falta ao que João já poupou, obtemos a quantia total desejada, ou seja, o valor da motoneta, isto é,

$$6.380 + 4.210 = 10.590,$$

ou seja

$$\text{subtraendo} + \text{resto ou diferença} = \text{minuendo}.$$

Neste exemplo, subtraímos unidades das unidades, dezenas das dezenas, centenas das centenas, e assim por diante. No caso da solução do Problema 3, temos uma situação diferente: para resolver este problema, precisamos *subtrair* ou retirar 1.190 reais dos 6.380 reais que João já poupara, isto é,

$$6.380 - 1.190,$$

obtendo o valor que *resta* na poupança de João após estas despesas com a reforma. “Armando” a conta como aprendemos na escola, temos:

$$\begin{array}{ccccc} & & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 18} & \\ & 6 & \cancel{3} & \cancel{8} & 0 \\ - & 1 & 1 & 9 & 0 \\ \hline & 5 & 1 & 9 & 0 \end{array}$$

O método que usamos é o de *decomposição* e *reagrupamento* do minuendo, ou seja, da parcela 6.380: como temos apenas 8 dezenas em 6.380 e 9 dezenas no subtraendo, isto é, em 1.190, “tomamos emprestado” 1 centena (ou seja, 10 dezenas) da ordem das centenas de 6.380. Com isto, ficamos com 2 centenas das 3 que tínhamos em 6.380 antes do “empréstimo”. Subtraindo 9 dezenas das $10+8 = 9$ dezenas que “temos agora”, obtemos 9 dezenas como diferença. Subtraindo 1 centena das 2 centenas que “temos agora”, obtemos 1 centena como diferença. Portanto, obtemos o número 5.190 como diferença de 6.380 e 1.190.

Para fixar ideias, calculemos a diferença entre 6.380 e 1.590. Desta vez, temos menos centenas e menos dezenas no minuendo que no subtraendo. Assim, precisamos “pedir emprestado”, ou seja, reagrupar 1 centena (10 dezenas) na ordem das dezenas; e reagrupar 1 milhar (10 centenas) na ordem das centenas. Com estes “empréstimos”, ficamos com $10 + 8 = 18$ dezenas, $10 + 2 = 12$ centenas e 5 milhares, como vemos na continha “armada” a seguir:

$$\begin{array}{ccccc} & {\scriptstyle 5} & {\scriptstyle 12} & {\scriptstyle 18} & \\ & \cancel{6} & \cancel{3} & \cancel{8} & 0 \\ - & 1 & 5 & 9 & 0 \\ \hline & 4 & 7 & 9 & 0 \end{array}$$

Para entender por que esse método de “tomar emprestado” funciona, reescrevamos os cálculos usando as decomposições do minuendo e do subtraendo em potências de 10. Temos

$$\begin{aligned}6.380 - 1.590 &= 6.000 + 300 + 80 - 1.000 - 500 - 90\\ &= 6.000 + 200 + 100 + 80 - 1.000 - 500 - 90\\ &= 6.000 + 200 - 1.000 - 500 + 180 - 90\\ &= 6.000 + 200 - 1.000 - 500 + 90\end{aligned}$$

Nesta sequência de *passos do algoritmo*, decompusemos as 3 centenas (300 unidades) em 200 unidades e 100 unidades. Somamos 100 dessas unidades às 80 que havia no minuendo, obtendo 180 unidades. Em seguida, subtraímos 90 unidades dessas 180, ficando com 90 unidades. Note que restaram 6 milhares, 2 centenas e 9 dezenas. Precisamos, agora, continuar com os próximos passos da subtração:

$$\begin{aligned}6.380 - 1.590 &= 6.000 + 200 - 1.000 - 500 + 90\\ &= 5.000 + 1.000 + 200 - 1.000 - 500 + 90\\ &= 5.000 - 1.000 + 1.000 + 200 - 500 + 90\\ &= 5.000 - 1.000 + 700 + 90\\ &= 4.000 + 700 + 90 = 4.790.\end{aligned}$$

Portanto, esta sequência de *decomposições* e *reagrupamentos* fica totalmente explicada com o uso do sistema posicional decimal: não são “regras” para serem memorizadas e usadas, apenas, mas para serem compreendidas!

Note que, nesses cálculos, “tomamos emprestado” mais do que era preciso! Poderíamos ter reagrupado apenas mais 1 dezena na ordem das dezenas, ficando com $30 - 1 = 29$ dezenas. Agora, reagrupando apenas 3 centenas da ordem dos milhares para a ordem das centenas, ficaríamos com $29 + 30 = 59$ dezenas. Portanto, subtraindo, 5 centenas (ou 50 dezenas), teríamos uma diferença de 9 dezenas. Portanto, a diferença final seria igual a $60 - 3 = 57$ centenas e 9 dezenas. Explicamos esse algoritmo da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 6.380 - 1.590 &= 6.000 + 300 + 80 - 1.000 - 500 - 90 \\ &= 6.000 + 29{\times}10 + \cancel{10} + \cancel{80} - 1.000 - 500 - \cancel{90} \\ &= 570{\times}10 + 30{\times}10 + 29{\times}10 - 1.000 - 50{\times}10 \\ &= 570{\times}10 + 9{\times}10 - 1.000 \\ &= 5.000 + 700 + 90 - 1.000 = 4.790. \end{aligned}$$

Como vemos, é possível pensar e testar diferentes *algoritmos* para efetuar subtrações (e adições). Para finalizar, apresentamos o método de *composição* e *compensação*, também visto na escola e nos livros. Por exemplo, usando este método, efetuamos a subtração do Problema 3 do seguinte modo:

$$\begin{array}{r} 6\,{}^{1}3\,{}^{1}8\;\;0 \\ -\,{}^{1}1\,{}^{1}5\;\;9\;\;0 \\ \hline 4\;\;7\;\;9\;\;0 \end{array}$$

Neste algoritmo, somamos 10 dezenas (1 centena) ao minuendo e também ao subtraendo, o que não altera o resultado da subtração: o algarismo 1 ao lado esquerdo do 8 (respectivamente, 5) na ordem das dezenas (respectivamente, centenas) no minuendo (respectivamente, subtraendo) significa que passamos a ter $10 + 8 = 18$ dezenas no minuendo (respectivamente, $1+5 = 6$ centenas no subtraendo). Em seguida, somamos 10 centenas (1 milhar) ao minuendo e também ao subtraendo, o que não modifica a diferença dos números: o algarismo 1 ao lado esquerdo do 3 (respectivamente, 1) na ordem das centenas (respectivamente, milhares) no minuendo (respectivamente, subtraendo) significa que passamos a ter $10+3 = 13$ centenas no minuendo (respectivamente, $1 + 1 = 2$ milhares no subtraendo). Subtraindo dezenas de dezenas, centenas de centenas, milhares de milhares, obtemos a diferença, ou seja, chegamos mais uma vez ao resultado 4.790. Novamente, devemos *explicar* e *justificar* este método em termos de representações decimais. Iniciamos adicionando 100 unidades ao minuendo e 100 unidades ao subtraendo:

$$\begin{aligned}6.380-1.590 &= 6.000+300+80-1.000-500-90\\ &= 6.000+300+100+80-1.000-500-100-90\\ &= 6.000+300+180-1.000-600-90\\ &= 6.000+300-1.000-600+90\end{aligned}$$

Prosseguindo, adicionamos 1.000 unidades ao minuendo e 1.000 unidades ao subtraendo:

$$\begin{aligned}6.380-1.590 &= 6.000+1.000+300-1.000-1.000-600+90\\ &= 6.000+1.300-2.000-600+90\\ &= 6.000-2.000+700+90=4.790.\end{aligned}$$

Finalmente, para resolver o Problema 4, vamos usar estratégias de **cálculo mental**, isto é, tentar efetuar as contas apenas mentalmente! Este problema resume-se a calcular a diferença

$$2.130-256.$$

Podemos decompor o minuendo e o subtraendo, mentalmente, da seguinte forma

$$\begin{aligned}2.130-256 &= 1.900+\cancel{100}+\cancel{100}+30-\cancel{200}-56\\ &= 1.900+30-56\\ &= 1.840+60+30-56\\ &= 1.840+30+4\\ &= 1.870+4=1.874.\end{aligned}$$

Concluímos mostrando de que modo podemos usar subtrações para ajudar no cálculo mental de adições. Por exemplo, para efetuar $1.874+256$, podemos "escrever mentalmente"

$$\begin{aligned}1.874+256 &= (1.880-6)+(260-4)=(1.880+260)-(6+4)\\ &= [(1.900-20)+(300-40)]-(6+4)\\ &= [(1900+300)-(20+40)]-10\\ &= 2.200-60-10=2.200-70=2.130.\end{aligned}$$

Observação 1.11 — Nota ao professor. Recomendamos que, neste ponto, o(a) professor(a) possa trabalhar com o uso de diferentes algoritmos para o cálculo de somas e diferenças. Recomendamos também que faça uso de atividades de cálculo mental, arredondamentos e estimativas.

Observação 1.12 — Nota ao professor. Sugerimos, ainda, que possa retomar as noções de sucessão e ordem, mostrando que $N - n$ expressa o quanto N é maior que n no caso em que $n < N$.

1.3 – Adição e subtração de números inteiros

Os números naturais formam um *subconjunto* do *conjunto* de números inteiros. Denotamos o conjunto de números naturais por $\mathbb{N}$ e o conjunto de números inteiros por $\mathbb{Z}$. Dito de modo simples, os números naturais

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

são os números inteiros *positivos*. **Reunimos** a estes os números inteiros negativos $\{\ldots, -3, -2, -1\}$, obtendo

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Os números inteiros podem ser representados geometricamente na *reta numérica*: o número 0 marca um ponto de referência na reta, chamado de *origem*: os números inteiros positivos são *representados* por pontos marcados à direita da origem; os números inteiros negativos são representados por pontos marcados à esquerda da origem. A distância entre pontos representando dois números *consecutivos* (por exemplo, 3 e 4; ou -4 e -3) é sempre igual a 1 (os pontos estão espaçados por intervalos de mesmo comprimento na figura).

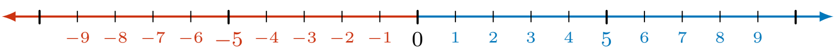


Figura 1.1: inteiros sobre a reta.

Dizemos que os pares de números -1 e 1, -2 e 2, etc., são *opostos* ou *simétricos*. O simétrico de 0 é o próprio 0. O *valor absoluto* ou *módulo* de um número inteiro n, denotado $|n|$, é definido da seguinte forma

- $|n|$ é o *oposto* de n, se n é um número inteiro negativo (por exemplo, $|-3| = 3$)
- $|n|$ é o *próprio número* n, se é um número inteiro positivo (por exemplo, $|3| = 3$).

Resumindo, números opostos têm o mesmo módulo, que pode ser interpretado como a distância *não orientada* da origem aos pontos que os representam: ou seja, os pontos que representam os números 3 e -3 estão à mesma distância da origem. Podemos representar o número oposto a um dado número n como sua *reflexão* em torno do 0, isto é, em torno da origem da reta numérica, como na figura a seguir

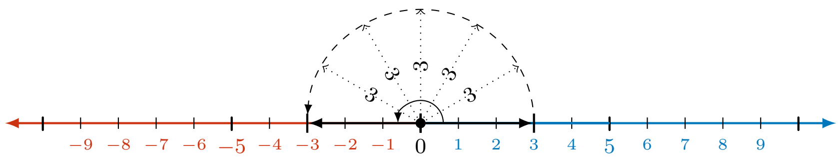


Figura 1.2: números opostos obtidos por reflexão

A adição de números inteiros pode ser visualizada por meio de translações à esquerda e à direita na reta numérica: por exemplo, a soma dos números inteiros positivos 2 e 3 pode ser representada do seguinte modo:

- partimos do ponto 2 e transladamos 3 unidades **para a direita**, ou
- partimos do ponto 3 e transladamos 2 unidades também **para a direita**.

Agora, a soma do número inteiro positivo 3 e do número inteiro negativo -2 pode ser representada geometricamente das seguintes formas:

- partimos do ponto 3 e transladamos 2 unidades **para a esquerda**,
- partimos do ponto -2 e transladamos 3 unidades **para a direita**.

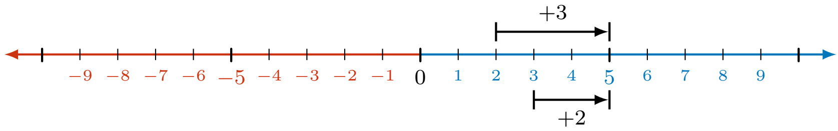


Figura 1.3: interpretação geométrica de $3 + 2 = 2 + 3 = 5$. Ambas as setas terminam no ponto 5.

Deste modo, justificamos geometricamente o seguinte resultado

$$3 + (-2) = (-2) + 3 = 1.$$

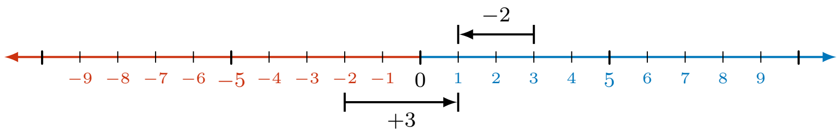
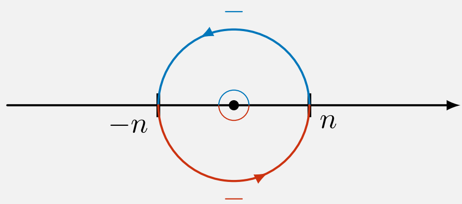


Figura 1.4: interpretação geométrica de $3 + (-2) = (-2) + 3 = 1$.

Observe, geometricamente, que o oposto do oposto de um número inteiro é o próprio número, isto é,

$$-(-n) = n,$$



o que justifica a “regra” de “*menos* com *menos* dá mais”, como vimos na escola.

De modo similar, podemos justificar e interpretar, usando translações, a soma

$$2 + (-3) = (-3) + 2 = -1.$$

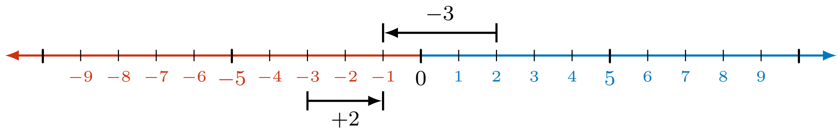


Figura 1.5: interpretação geométrica de $2 + (-3) = (-3) + 2 = -1$.

Desta vez, para calcular a soma dos dois números inteiros negativos -3 e -2, podemos realizar um dos seguintes procedimentos:

- partimos do ponto -3 e transladamos 2 unidades **para a esquerda**,
- partimos do ponto -2 e transladamos 3 unidades **para a esquerda**,

o que justifica, a partir da figura, o seguinte resultado

$$-3 + (-2) = -2 + (-3) = -5$$

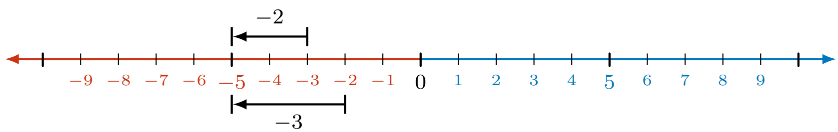


Figura 1.6: interpretação geométrica de $(-3) + (-2) = (-2) + (-3) = -5$.

Os números inteiros negativos como -2 e -3 são colocados entre parênteses nessas expressões para não confundirmos o sinal $+$, que representa a **operação** de adição, e o sinal $-$, que faz parte do próprio número! A dúvida que você deve ter, naturalmente, é: qual a relação do sinal "$-$" em "-2" com o sinal de subtração que vimos anteriormente? Vamos esclarecer este ponto logo adiante.

Para tornar mais *aceitáveis* essas **regras de sinais** da adição de números inteiros, podemos usar um exemplo com valores monetários:

receitas (ganhos, lucros, poupanças) são representadas por números inteiros positivos; despesas (gastos, prejuízos ou dívidas) são representadas por números inteiros negativos. Assim sendo, observemos que

(i) quem *tem* 30 reais e **ganha** 20 reais, passa a ter $30 + 20 = 50$ reais;

(ii) quem *tem* 30 reais e **gasta** 20 reais, passa a ter $30 + (-20) = 10$ reais, ou

(iii) quem *deve* 20 reais e **ganha** 30 reais, pode pagar sua dívida e ficar com $(-20) + 30 = 10$ reais;

(iv) quem *tem* 20 reais e **gasta** 30 reais, contrai uma dívida: $20 + (-30) = -10$, ou seja, 10 reais de *dívida*, por isso, 10 reais "negativos"; ou

(v) quem *deve* 30 reais e **ganha** 20 reais, pode diminuir sua dívida de 30 para 10 reais: $(-30) + 20 = -10$;

(vi) quem *deve* 30 reais e **gasta** mais 20 reais, aumenta sua dívida para $(-30) + (-20) = -50$ reais "negativos", isto é, 50 reais de dívidas.

Nos exemplos acima, percebemos que quando somamos um número inteiro negativo a um número inteiro positivo, estamos, de fato, efetuando uma subtração. Por exemplo

$$30 + (-20)$$

é, de fato, igual a

$$30 - 20 = 10.$$

Da mesma forma,

$$(-20) + 30 = 30 - 20 = 10.$$

Na escola, normalmente, isto é ensinado como uma "regra" em que "*mais* com *menos* dá menos". Podemos resumir esta observação **definindo** a subtração de dois números inteiros:

A diferença de dois números inteiros m e n, nesta ordem, é *definida como a soma de m com o oposto de n, isto é,*

$$m - n = m + (-n).$$

Como exemplos, temos

- $4 - 3 = 4 + (-3) = 1$ (partindo de 4, transladamos 3 unidades para a **esquerda**. Ou: tenho 4 reais e gasto 3, ficando com 1 real);
- $3 - 4 = 3 + (-4) = -1$ (partindo de 3, transladamos 4 unidades para a **esquerda**. Ou: tenho 3 reais e gasto 4, ficando com 1 real de dívida).
- $3 - (-4) = 3 + (-(-4)) = 3 + 4 = 7$ (lembre que o oposto do oposto de 4 é o próprio 4, ou seja $-(-4) = 4$).

1.3.1 – Algoritmos da adição e subtração de números inteiros

Como vimos, tanto a adição quanto a subtração foram *estendidos* dos números naturais para os números inteiros. As propriedades de *comutatividade* e *associatividade* continuam válidas e serão muito úteis para efetuarmos os cálculos aritméticos e aplicarmos algoritmos. Por exemplo, usando esta extensão da subtração para números naturais, podemos calcular

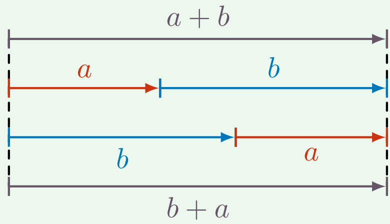
$$\begin{aligned} 6.380 - 1.590 &= 6.000 + 300 + 80 - 1.000 - 500 - 90 \\ &= 5.000 - 200 - 10 \\ &= 4.800 - 10 = 4.790. \end{aligned}$$

De modo similar, temos

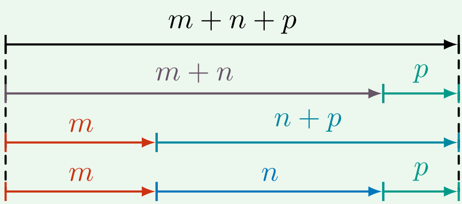
$$\begin{aligned} 1.590 - 6.380 &= 1.000 + 500 + 90 - 6.000 - 300 - 80 \\ &= -5.000 + 200 + 10 \\ &= -4.800 + 10 = -4.790. \end{aligned}$$

Percebemos que admitindo números inteiros positivos e negativos, os cálculos e algoritmos ficam muito mais rápidos e simples.

Observação 1.13 — Nota ao professor. O estudo pode ser estendido a partir daqui explorando as propriedades operatórias da adição (e subtração) de números inteiros, tais como comutatividade e associatividade. Sugerimos utilizar a reta numérica para representar geometricamente essas operações. Por exemplo, a comutatividade da adição (que diz que $a+b=b+a$ para quaisquer inteiros a e b). Tratamos acima várias casos, a depender dos sinais de a e b, usando translações. Em geral, para números positivos a adição pode ser justificada por:



A associatividade da adição, que diz que $(m+n)+p=m+(n+p)$ para quaiquer inteiros, m, n e p, no caso de inteiros positivos pode ser representada por:



Observação 1.14 — Nota ao professor. Enfatizamos que as propriedades operatórias são as que tornam os algoritmos válidos. Explorar inteligentemente essas propriedades pode tornar os cálculos menos laboriosos.

1.4 – Exercícios resolvidos e propostos

Sequência 1

Exercício 1.8 Separe os números abaixo em dois grupos, de modo que os números em cada grupo tenham a mesma soma:

$$11,\ 15,\ 19,\ 23$$

Exercício 1.9 Que número torna a igualdade abaixo correta?

$$37 + 56 = 48 + \star$$

Solução. Note que

$$37+56 = 30+7+50+6 = 30+10+7+1+40+5 = 40+8+40+5 = 48+45.$$

Logo $\star = 45$. ■

Exercício 1.10 Calcule as seguintes somas:

(a) $795 + 538$
(b) $989 + 799$
(c) $859 + 947 + 638$
(d) $6.385 + 9.725$

Solução. Em a), temos

$$795 + 538 = 700 + 90 + 5 + 500 + 30 + 8 = 1.200 + 120 + 13 = 1.333.$$

Para efetuar a adição em b), calculamos

$$989 + 799 = 990 - 1 + 800 - 1 = 1.790 - 2 = 1.788.$$

Quanto à soma em c), temos

$$\begin{aligned} 859 + 947 + 638 &= 800 + 900 + 600 + 50 + 40 + 30 + 9 + 7 + 8 \\ &= 2.300 + 120 + 24 = 2.444. \end{aligned}$$

Por fim, calculamos, em d):

$$\begin{aligned} 6.385 + 9.725 &= 6.300 + 85 + 9.700 + 25 = 15.000 + 1.000 + 110 \\ &= 16.110. \end{aligned}$$

■

Exercício 1.11 Qual das alternativas abaixo melhor aproxima o resultado da adição $587.622 + 421.256$?

(a) 1.001.000.
(b) 1.010.000
(c) 1.100.000
(d) 1.000.010
(e) 1.000.100

Escreva por extenso o número na alternativa escolhida.

Exercício 1.12 Calcule as seguintes diferenças:

(a) $1.333 - 538$
(b) $1.333 - 795$
(c) $1.768 - 989$
(d) $10.010 - 8.999$
(e) $110.010 - 101.111$

Solução. Calculamos a diferença em a) da seguinte forma

$$\begin{aligned} 1.333 - 538 &= 1.300 + 33 - 500 - 38 = 1.300 - 500 - 38 + 33 \\ &= 800 - 5 = 795. \end{aligned}$$

Quanto às operações em b), temos, usando o "método do reagrupamento" (ou da decomposição):

$$\begin{aligned} 1.333 - 795 &= 1.300 + 30 + 3 - 700 - 90 - 5 \\ &= 1.300 + 20 + 13 - 700 - 90 - 5 \\ &= 1.200 + 100 + 20 - 700 - 90 + 8 \\ &= 1.200 + 120 - 700 - 90 + 8 \\ &= 1.200 - 700 + 30 + 8 = 500 + 30 + 8 = 538. \end{aligned}$$

Observe que as contas em a) e b) comprovam que $795 + 538 = 1.333 = 538 + 795$, como já sabíamos do exercício anterior.

Passando ao cálculo da diferença em c), podemos usar o "método da compensação" (ou da composição):

$$\begin{aligned}1.768 - 989 &= 1.700 + 60 + 8 - 900 - 80 - 9\\ &= 1.700 + 60 + 10 + 8 - 900 - 80 - 10 - 9\\ &= 1.700 + 60 + 9 - 900 - 80 - 10\\ &= 1.700 + 100 + 60 + 9 - 900 - 100 - 90\\ &= 1.700 + 70 + 9 - 900 - 100\\ &= 1.700 - 1.000 + 70 + 9 = 779.\end{aligned}$$

Agora, a diferença em d) pode ser mais facilmente calculada com a seguinte estratégia:

$$\begin{aligned}10.010 - 8.999 &= 10.010 - 9.000 + 1 = 10.000 + 10 - 9000 + 1\\ &= 1.000 + 11 = 1.011.\end{aligned}$$

Finalmente, calculamos

$$\begin{aligned}&110.010 - 101.111 = \cancel{100.000} + 10.000 + 10 - \cancel{100.000} - 1.000 - 111\\ &= 9.000 + 10 - 100 - 11 = 8.900 + 10 - 11 = 8.900 - 1 = 8.899.\end{aligned}$$

■

Observação 1.15 — Nota ao professor. Encorajamos o(a) professor(a), neste ponto, a propor várias possíveis estratégias, utilizando ou não os algoritmos corriqueiros de subtração. Por exemplo, para efetuar a subtração em a), podemos recorrer à "tomada de empréstimo", calculando

$$\begin{aligned}1.333 - 538 &= 1.300 + 33 - 500 - 38 = 1.290 + 10 + 33 - 500 - 38\\ &= 1.200 - 500 + 90 + 43 - 38 = 1.200 - 500 + 90 + 5\\ &= 700 + 90 + 5 = 795.\end{aligned}$$

Esta conta pode ser visualizada da forma tradicional como

$$\begin{array}{rrrr} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 12} & {\scriptstyle 13} \\ 1 & \cancel{3} & \cancel{3} & 3 \\ - & 5 & 3 & 8 \\ \hline & 7 & 9 & 5 \end{array}$$

Já nas contas em c), há várias possibilidades de "compensação", por adição de um valor ao subtraendo e diminuição do mesmo valor (que não precisa ser múltiplo de 10, de 100, etc.) no minuendo. Por exemplo, podemos proceder da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 1.768 - 989 &= 1.700 + 60 + 8 - 900 - 80 - 9 \\ &= 1.700 + 60 + 1 + 8 - 900 - 80 - 1 - 9 \\ &= 1.700 + 60 - 900 - 80 - 1 \\ &= 1.700 + 30 + 60 - 900 - 30 - 81 \\ &= 1.700 + 9 - 930 \\ &= 700 + 1.000 - 930 + 9 = 700 + 70 + 9 = 779. \end{aligned}$$

Exercício 1.13 Qual dos números nas alternativas seguintes melhor aproxima a diferença $986.553 - 885.512$?

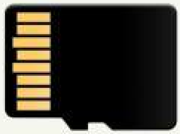
(a) 101.010
(b) 110.100
(c) 100.001
(d) 101.101
(e) 100.111

Exercício 1.14 Resolva as seguintes expressões numéricas:

(a) $14 - (-26 + 38)$.
(b) $57 + (-21) - (-64)$
(c) $-43 + 86 - 31$
(d) $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 9 + 10$
(e) $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + 9 - 10$

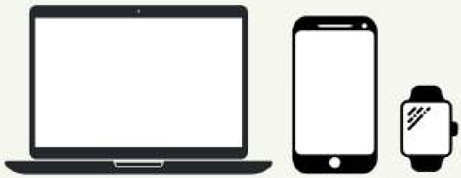
Exercício 1.15 Carlos, que tem um telefone celular com memória total interna de 128 Gigabytes (GB), comprou um cartão de memória de 64 GB. Quando Carlos inserir esse cartão no seu telefone, qual passará a ser a nova memória total interna?

(a) 128 GB
(b) 160 GB
(c) 182 GB
(d) 192 GB
(e) 256 GB



Exercício 1.16 João foi a uma loja e comprou um computador, um telefone celular e um relógio digital. Sabendo que estes itens custaram, respectivamente, R$ 4566,00, R$ 2733,00 e R$ 589,00, quanto João gastou nesta compra?

(a) R$ 6778,00
(b) R$ 6788,00
(c) R$ 6888,00
(d) R$ 7888,00
(e) R$ 8888,00



Exercício 1.17 Um vendedor ambulante chegou ao final do dia e resolveu conferir suas vendas. Em dinheiro, ele recebeu R$ 1243,00 e, no cartão, recebeu R$ 985,00. Levando em conta tudo o que ele recebeu, qual seu total das vendas?

(a) R$ 1985,00
(b) R$ 2085,00
(c) R$ 2143,00
(d) R$ 2185,00
(e) R$ 2228,00

Exercício 1.18 — ENEM 2017. As empresas que possuem Serviço de Atendimento ao Cliente (SAC), geralmente informam ao cliente que utilizam o serviço um número de protocolo de atendimento. Esse número resguarda o cliente para eventuais reclamações e é gerado consecutivamente, de acordo com os atendimentos executados. Ao término do mês de janeiro de 2012, uma empresa registrou como último protocolo do SAC o número 390.978.467. Do início do mês de fevereiro até o final do mês de dezembro de 2012, foram abertos 22.580 novos números de protocolos. O algarismo que aparece na posição da dezena de milhar do último número de protocolo de atendimento registrado pela empresa em 2012 é:

(a) 0. (b) 2. (c) 4. (d) 6. (e) 8.

Solução. Note que

$$390.978.467 + 22.580 = 391.001.047.$$

Assim, a posição referente à dezena de milhar (10.000) no número 391.001.047, que é a quinta posição da direita para a esquerda, é ocupada pelo algarismo 0. Logo, a alternativa correta é a de letra (a).

■

Exercício 1.19 Roberto nasceu em 1972. Escolha a alternativa que corresponde a quantos anos ele completou no ano de 2017.

(a) 45 anos
(b) 55 anos
(c) 64 anos
(d) 108 anos

Exercício 1.20 Segundo o Censo do IBGE, a população residente em Fortaleza era de 2.452.185 habitantes em 2010. Estima-se que até 2020 essa população tenha um aumento de aproximadamente 250.000 habitantes. Assim, espera-se que o número de habitantes de Fortaleza em 2020 seja de, aproximadamente:

(a) 2.377.215.
(b) 2.477.435.
(c) 2.479.685.
(d) 2.522.185.
(e) 2.700.000.

Exercício 1.21 Um automóvel passou pelo quilômetro 585 de uma rodovia. Ele deve chegar a seu destino no quilômetro 883. Quantos quilômetros de estrada ainda deve percorrer para chegar a seu destino?

Exercício 1.22 — ENEM 2014 - PPL. Uma loja decide premiar seus clientes. Cada cliente receberá um dos seis possíveis brindes disponíveis, conforme sua ordem de chegada na loja. Os brindes a serem distribuídos são: uma bola, um chaveiro, uma caneta, um refrigerante, um sorvete e um CD, nessa ordem. O primeiro cliente da loja recebe uma bola, o segundo recebe um chaveiro, o terceiro recebe uma caneta, o quarto recebe um refrigerante, o quinto recebe um sorvete, o sexto recebe um CD, o sétimo recebe uma bola, o oitavo recebe um chaveiro, e assim sucessivamente, segundo a ordem dos brindes.

O milésimo cliente receberá de brinde um(a)

(a) bola.
(b) caneta.
(c) refrigerante.
(d) sorvete.
(e) CD.

Solução. Precisamos identificar quantos grupos de seis clientes podemos formar com os 1.000 primeiros clientes. Começando com o primeiro cliente, cada grupo de 6 clientes recebe os prêmios na sequência definida no enunciado. O último grupo completo de seis clientes são os de números $991, 992, 993, 994, 995$ e 996. Logo após, teremos

- cliente 997: bola
- cliente 998: chaveiro
- cliente 999: caneta
- cliente 1.000: refrigerante.

Concluímos que a alternativa correta é a de letra (c). ■

Sequência 2

Exercício 1.23 Semana passada consegui ler um livro do início da página 185 até o final da página 437. Que número de páginas desse livro consegui ler naquela semana?

(a) 623 (b) 438 (c) 348 (d) 338 (e) 253

Exercício 1.24 Efetue as seguintes operações, usando diferentes estratégias:

(a) $89.477 + 20.633$
(b) $369 + 936 + 693$
(c) $120.121 - 21.111$
(d) $120.121 - 99.010$
(e) $9.999 - 11.111$

Solução. Em a), calculamos

$$\begin{aligned} 89.477 + 20.633 &= 90.000 - 1.000 + 20.000 + 400 + 600 + 77 + 33 \\ &= 110.000 - 1.000 + 1.000 + 100 + 10 = 110.110. \end{aligned}$$

Efetuamos a adição em b) como segue

$$\begin{aligned} &369 + 936 + 693 = 300 + 30 + 3 + 600 + 60 + 6 + 900 + 90 + 9 \\ &= 333 + 666 + 999 = 999 + 999 = 2.000 - 2 = 1.998. \end{aligned}$$

Quanto à diferença em c), calculamos

$$120.121-99.010 = 120.000+121-99.000-10 = 21.000+111 = 21.111$$

Finalmente, em e), temos $9.999-11.111 = 10.000-11.112 = 1.112.$ ■

Observação 1.16 — Nota ao professor. Explore exercícios desse tipo para usar arredondamentos e **estimar**, mais do que calcular exatamente, os resultados das operações, a exemplo do que apresentamos na parte final do nosso estudo sobre a adição.

Exercício 1.25 Localize os números inteiros -15, -12, 12 e 15 na reta numérica.

Observação 1.17 — Nota ao professor. Explore as noções de ordem para comparar números naturais dados com dezenas, centenas, milhares, e assim por diante, **mais próximos**. O arredondamento é uma estratégia útil, combinada ao uso da reta numérica, para determinar a localização, ainda que aproximada, de números naturais numa reta graduada em unidades, dezenas ou centenas, por exemplo.

Exercício 1.26 A tabela abaixo representa as temperaturas máxima e mínima (em graus Celsius) registradas em 2020 em quatro localidades do planeta.

Localidades	Temperatura mínima	Temperatura máxima
Toronto	$-7°C$	$27°$ C
Vladivostok	$-21°C$	$26°C$
Marrakesh	$5°C$	$36°C$
Bariloche	$-1°C$	$24°C$

Em qual dessas localidades houve maior *amplitude térmica*, isto é, maior diferença entre as temperaturas mínima e máxima?

Exercício 1.27 Felipe entrou numa loja de eletrônicos com R$ 5000,00 e comprou um *smartphone* e um relógio digital. Sabendo que esses itens custaram, respectivamente, R$ 3187,00 e R$ 839,00, quanto do dinheiro de Felipe sobrou?

(a) R$ 974,00.
(b) R$ 1813,00.
(c) R$ 1974,00.
(d) R$ 2974,00.
(e) R$ 4161,00.

Solução. Efetuando a soma dos valores, em reais, dos itens que Felipe comprou, obtemos

$$\begin{array}{rcccc} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & \\ & 3 & 1 & 8 & 7 \\ + & & 8 & 3 & 9 \\ \hline & 4 & 0 & 2 & 6 \end{array}$$

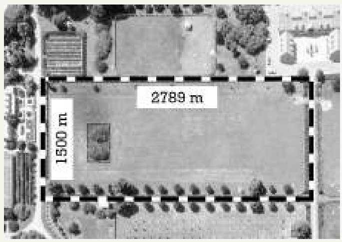
Portanto, Felipe gastou R$ 4026,00 na compra. Visto que ele tinha R$ 5000,00, a subtração

$$5000 - 4026 = 5000 - (4025 + 1) = 975 - 1 = 974$$

nos dá o valor, em reais, do restante do dinheiro de Felipe. Assim, a alternativa (a) é a correta. ■

Exercício 1.28 Um fazendeiro mediu sua terra, de formato retangular, para cercá-la inteiramente com uma cerca de madeira. Quantos metros de cerca ele deverá fazer, se sua fazenda possui 1500 metros de largura por 2789 metros de comprimento?

(a) 3000 metros.
(b) 4289 metros.
(c) 8000 metros.
(d) 8578 metros.
(e) 9000 metros.



Solução. Antes de resolver o problema, devemos observar que um retângulo possui 4 lados. Os lados da frente e do fundo medem 1500 metros, pois essa é a medida da largura do retângulo que forma o terreno. Então, esses dois lados medem, ao todo, $1500 + 1500 = 3000$ metros. Os dois lados da lateral do retângulo medem 2789 metros, que é a largura do terreno. Seu comprimento total é 5578 metros, pois

$$\begin{array}{r} {}^{1\,1\,1} \\ 2\,7\,8\,9 \\ +\,2\,7\,8\,9 \\ \hline 5\,5\,7\,8 \end{array}$$

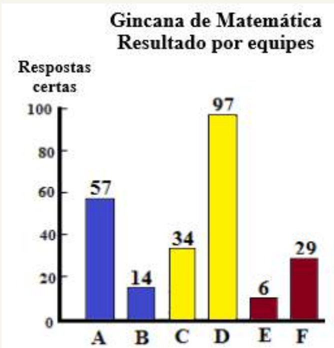
Assim, a metragem total da cerca que o comerciante deverá comprar é de $3000 + 5578 = 8578$ metros:

$$\begin{array}{r} 3\,0\,0\,0 \\ +\,5\,5\,7\,8 \\ \hline 8\,5\,7\,8 \end{array}$$

A alternativa correta é a de letra (d). ■

Exercício 1.29 Certa escola organizou uma gincana de Matemática que foi disputada por 3 equipes, formadas por 2 alunos cada uma. Ao final da gincana, foi construído um gráfico com os resultados obtidos por cada equipe. Os alunos, A, B, C, D, E, F conseguiram as pontuações indicadas no gráfico abaixo. Sabendo que a equipe azul era formada pelos alunos A e B, a equipe amarela pelos alunos C e D e a equipe vermelha pelos alunos E e F, pergunta-se: quantos pontos fez a equipe vencedora?

(a) 131 pontos
(b) 97 pontos
(c) 71 pontos
(d) 35 pontos
(e) 29 pontos



Exercício 1.30 A conta de Vivian tinha um saldo positivo igual a R$ 850,00 e este saldo não poderia ficar negativo. Vivian teve de pagar R$ 142,00 da conta de água, R$ 198,00 da conta de luz, R$ 48,00 da conta do celular, R$ 100,00 das compras de mercado e R$ 35,00 de transporte. Qual o novo saldo da conta de Vivian?

(a) R$ 525,00
(b) R$ 469,00
(c) R$ 427,00
(d) R$ 375,00
(e) R$ 327,00

Exercício 1.31 Um marido é 10 anos mais velho que sua esposa. Esta, por sua vez, tinha 22 anos quando o filho deles nasceu. O filho do casal tinha 8 anos quando sua irmã nasceu. Esta última fez 6 anos ontem. Qual é a idade do marido?

(a) 42 anos. (b) 44 anos. (c) 46 anos. (d) 48 anos.

Solução. Uma vez que a filha completou 6 anos de idade, o filho tem, agora, $8 + 6 = 14$ anos. Logo, a esposa tem $22 + 14 = 36$ anos e o esposo $36 + 10 = 46$ anos. A alternativa (c) é a correta. ■

Exercício 1.32 Certo asteroide é visível da Terra a olho nu a cada 67 anos, tendo sido visto pela última vez no ano de 1954. Qual é o primeiro ano de nosso século em que ele tornará a ser visto a olho nu de nosso planeta?

(a) 1987.
(b) 2008.
(c) 2021.
(d) 2045.
(e) 2088.

Exercício 1.33 — PUC-RJ 2007. Um taxista trocou uma nota de 50 reais por notas de 2 reais e 5 reais num total de 19 notas. Quantas notas de cada valor o taxista recebeu?

(a) 9 notas de 5 reais e 10 notas de 2 reais.
(b) 4 notas de 5 reais e 15 notas de 2 reais.
(c) 15 notas de 5 reais e 4 notas de 2 reais.
(d) 12 notas de 5 reais e 7 notas de 2 reais.
(e) 7 notas de 5 reais e 12 notas de 2 reais.

Solução. O valor recebido em notas de 2 reais é, por definição, um número par. Subtraindo esse valor de 50, obtemos também um número par. Esse número par deve ser um *múltiplo* de 5, pois é recebido apenas em notas de 5 reais. As possibilidades são $10, 20, 30, 40$ reais com, respectivamente, $2, 4, 6$ ou 8 notas de 5 reais. Com 4 notas de 5 reais, ou seja, 20 reais, ficam 30 reais em 15 notas de 2. Logo, deste modo, o taxista recebe 4 notas de 5 reais e 15 notas de 2 reais, em um total de 10 notas. A alternativa correta é a de letra (b). ■

Observação 1.18 — Nota ao professor. Exercícios dessa natureza podem ser resolvidos com o uso de sistemas de equações lineares. No entanto, o interesse aqui é por soluções *inteiras* dessas equações que, neste contexto, são exemplos de **equações diofantinas**. A este respeito, recomendamos ao professor a leitura de materiais como `https://rpm.org.br/cdrpm/19/9.htm`

Exercício 1.34 — ENEM 2018. Um edifício tem a numeração dos andares iniciando no térreo (T), e continuando com primeiro, segundo, terceiro, ..., até o último andar. Uma criança entrou no elevador e, tocando no painel, seguiu uma sequência de andares, parando, abrindo e fechando a porta em diversos andares. A partir de onde entrou a criança, o elevador subiu sete andares, em seguida desceu dez, desceu mais treze, subiu nove, desceu quatro e parou no quinto andar, finalizando a sequência. Considere que, no trajeto seguido pela criança, o elevador parou uma vez no último andar do edifício.

De acordo com as informações dadas, o último andar do edifício é o

(a) 16°.
(b) 22°.
(c) 23°.
(d) 25°.
(e) 32°.

Exercício 1.35 — UERJ 2014 - adaptado. Cientistas da Nasa recalculam idade da estrela mais velha já descoberta. Cientistas da agência espacial americana (Nasa) recalcularam a idade da estrela mais velha já descoberta, conhecida como "Estrela Matusalém" ou HD 140283. Eles estimam que a estrela possua 14.500 milhões de anos, com margem de erro de 800 milhões para menos ou para mais, o que significa que ela pode ter de x a y anos.

Adaptado de g1.globo.com, 11/03/2013.

De acordo com as informações do texto, a soma $x + y$ é igual a:

(a) 137×10^7.
(b) 15×10^8.
(c) 235×10^7.
(d) 29×10^8.

Observação 1.19 — Nota ao professor. Esse exercício permite à(ao) professora(or) enveredar pelo tema da notação científica, ordens de grandeza, algarismos significativos e erros: ao mesmo tempo, envolve habilidades previstas na BNCC, retoma operações aritméticas e o sistema posicional decimal no contexto de questões de vestibulares e, não menos importante, abre uma excelente oportunidade para discutir instigantes contextos científicos da Astronomia, Cosmologia e exploração espacial. Uma atividade de avaliação formativa seria, por exemplo, propor projetos que envolvessem a montagem de linhas do tempo como o famoso *Calendário Cósmico* da série *Cosmos* de Carl Sagan Wikipedia[5].

Saiba mais[5]

Exercício 1.36 — Canguru 2016 - Prova J. Em oito cartões foram escritos exatamente um dos números 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 e colocados numa caixa. Eva tirou alguns desses cartões sem olhar e Alice ficou com o resto dos cartões. Ambas somaram os números de seus cartões, verificando que a soma de Eva era a de Alice mais 31. Quantos cartões tirou Eva?

(a) 2. (b) 3. (c) 4. (d) 5. (e) 6.

Exercício 1.37 — Canguru 2014. No número do ano 2014, os algarismos são diferentes e o último algarismo é maior do que a soma dos outros três algarismos.

Antes de 2014, há quantos anos isto aconteceu pela última vez?

(a) 5.
(b) 215.
(c) 305.
(d) 395.
(e) 485.

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Cosmic_Calendar

Sequência 3

Exercício 1.38 Num jogo de futebol americano, os "Caçadores" venceram os "Gladiadores" por uma diferença de 59 pontos. Se os "Caçadores" fizeram 163 pontos, quantos pontos fizeram os "Gladiadores"?

(a) 59 pontos.
(b) 63 pontos.
(c) 80 pontos.
(d) 104 pontos.
(e) 222 pontos.

Exercício 1.39 — UFRGS. O dispensador de dinheiro do caixa eletrônico de um banco foi abastecido apenas com cédulas de R$ 5,00 e de R$ 20,00. Um cliente, ao realizar um saque, constatou que o dispensador liberou 6 cédulas, dentre as quais havia pelo menos uma de cada valor. Com base nesses dados, é correto afirmar que a única alternativa que apresenta uma quantia que poderia ter sido sacada pelo cliente é:

(a) R$ 90,00.
(b) R$ 95,00.
(c) R$ 100,00.
(d) R$ 110,00.
(e) R$ 120,00.

Exercício 1.40 No Dia dos Pais, numa promoção, uma camisa e uma calça custavam, juntas, R$ 190,00. Sabendo que a camisa custava R$ 30,00 a mais que a calça, qual era o preço da camisa?

(a) R$ 190,00.
(b) R$ 110,00.
(c) R$ 80,00.
(d) R$ 30,00.

Solução. Se os dois objetos tivessem o mesmo preço, cada um custaria R$ 95,00, pois $95+95 = 180+10 = 190$. No entanto, para que a diferença entre os preços fosse de R$ 30,00, precisariamos aumentar R$ 15,00 no preço de um e diminuir R$ 15,00 no preço do outro. Ou seja, o preço da camisa deveria ser $95 + 15 = 110$ reais e o preço da calça deveria ser $95 - 15 = 80$ reais. A alternativa correta é a de letra (b). ■

Exercício 1.41 A soma de dois números é 104 e sua diferença é 32. Qual é o valor do maior desses dois números?

Observação 1.20 — Nota ao professor. Use este tipo de exercício como uma introdução ao pensamento algébrico sem, contudo, necessariamente modelar o problema em termos de equações lineares e tentar resolvê-lo unicamente pelos métodos corriqueiros (e.g., eliminação ou substituição). Importante desenvolver estratégias baseadas em raciocínio lógico, como o método da "falsa posição" que usamos no exercício anterior. Sobre o **método da falsa posição**, veja https://en.wikipedia.org/wiki/Regula_falsi

Exercício 1.42 — UFSJ 2004. Entre os números abaixo discriminados, o ÚNICO que pode ser escrito como a soma de três números inteiros consecutivos é

(a) -30522.
(b) 28613.
(c) -34811.
(d) 25432.

Solução. Podemos representar os três números inteiros como $n-1, n, n+1$. Somando estes números, temos

$$(n-1) + n + (n+1) = n + n + n = 3 \times n.$$

Portanto, a soma desses três números deve ser um *múltiplo* de 3. O único número, nas alternativas, com esta propriedade é -30.522. De fato, temos

$$-30.522 = -10.174 - 10.174 - 10.174.$$

Logo,

$$-30.522 = -10.173 - 10.174 - 10.175$$

■

Exercício 1.43 — ENEM 2010 - PPL. Nos últimos anos, a corrida de rua cresce no Brasil. Nunca se falou tanto no assunto como hoje, e a quantidade de adeptos aumenta progressivamente, afinal, correr traz inúmeros benefícios para a saúde física e mental, além de ser um esporte que não exige um alto investimento financeiro.

Disponível em: http://www.webrun.com.br. Acesso em: 28 abr. 2010.

Um corredor estipulou um plano de treinamento diário, correndo 3 quilômetros no primeiro dia e aumentando 500 metros por dia, a partir do segundo. Contudo, seu médico cardiologista autorizou essa atividade até que o corredor atingisse, no máximo, 10 km de corrida em um mesmo dia de treino.

Se o atleta cumprir a recomendação médica e praticar o treinamento estipulado corretamente em dias consecutivos, pode-se afirmar que esse planejamento de treino só poderá ser executado em, exatamente,

(a) 12 dias.
(b) 13 dias.
(c) 14 dias.
(d) 15 dias.
(e) 16 dias.

Solução. Segundo o plano de treinamento diário, a cada dia o corredor percorre 500 metros a mais. Portanto, corre $500 + 500 = 1.000$ metros ou 1 quilômetro a mais a cada 2 dias. Portanto, começando com 3 quilômetros por dia, chega a 10 quilômetros por dia, ou seja, 7 quilômetros a mais, por aumentos progressivos em $7 \times 2 = 14$ dias depois do primeiro dia. Portanto, todo o treinamento deve durar 15 dias, o que corresponde à alternativa (d). ■

Exercício 1.44 Calcule a soma

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100$$

dos 100 primeiros números naturais.

Solução. Somando os números naturais de 1 a 100 duas vezes, uma em ordem crescente, outra em ordem decrescente, temos

$$\begin{array}{lllllll} 1 & +2 & +3 & +\ldots+98 & +99 & +100 \\ +100 & +99 & +98 & +\ldots+3 & +2 & +1 \\ \hline 101 & +101 & +101 & +\ldots+101 & +101 & +101, \end{array}$$

ou seja, **duas vezes** a soma dos números naturais de 1 a 100 equivale a 100 vezes o número 101. Logo, a soma é dada por

$$\underbrace{101 + 101 + 101 + \ldots + 101 + 101 + 101}_{50 \text{ vezes}}$$

Concluímos que a soma dos números naturais de 1 a 100 é igual a 5.050. ■

Observação 1.21 O raciocínio que usamos para resolver este problema se aplica ao cálculo da soma dos números naturais de 1 a n, para um dado $n > 1$. Duas vezes esta soma equivale a n somas de 1 e n. Portanto, a soma é dada por

$$\frac{1}{2}\times n\times(n+1). \tag{1.1}$$

Calculamos, deste modo, a soma dos 200 primeiros números naturais como sendo

$$\frac{1}{2}\times 200\times(200+1) = 100\times 201 = 20.100$$

Observação 1.22 — Nota ao professor. A discussão deste problema e de sua generalização para $n \in \mathbb{N}$ qualquer parece um ponto ideal para trabalhar a noção de demonstração. Em particular, pode ser um momento para apresentar a construção indutiva dos números naturais e o Princípio da Indução Finita. Note que “o passo da indução” na demonstração da expressão acima para a soma dos n primeiros números naturais é dado apenas observando que

$$\frac{1}{2}\times n\times(n+1)+(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)\times(n+2).$$

Exercício 1.45 — ENEM 2014 - PPL. Um ciclista participará de uma competição e treinará alguns dias da seguinte maneira: no primeiro dia, pedalará 60 km; no segundo dia, a mesma distância do primeiro mais r km; no terceiro dia, a mesma distância do segundo mais r km; e assim sucessivamente, sempre pedalando a mesma distância do dia anterior mais r km. No último dia, ele deverá percorrer 180 km, completando o treinamento com um total de 1 560 km.

A distância r que o ciclista deverá pedalar a mais a cada dia, em km, é

(a) 3. (b) 7. (c) 10. (d) 13. (e) 20.

Solução. A soma das distâncias percorridas nesses d dias pelo ciclista é igual a 1560 quilômetros e é dada por

$$60+(60+r)+(60+r+r)+\ldots+(60+\underbrace{r+\ldots+r}_{d-1\text{ vezes}}),$$

expressão em que o número 60 aparece d vezes. Rearranjando as parcelas (graças à comutatividade e associatividade da adição), temos

$$1.560=\underbrace{60+\ldots+60}_{d\text{ vezes}}+r+2\times r+\ldots+(d-1)\times r.$$

Usando a expressão na Observação 1.21 para $n=d-1$, temos

$$\begin{aligned}1.560&=60\times d+r\times(1+2+\ldots+(d-1))\\&=60\times d+r\times\frac{1}{2}\times(d-1)\times(d-1+1)\\&=60\times d+\frac{1}{2}\times r\times(d-1)\times d.\end{aligned}$$

Agora, considere a informação de que, no último dia, o ciclista percorreu 180 quilômetros. Portanto,

$$60 + \underbrace{r + \ldots + r}_{d-1 \text{ vezes}} = 60 + r\times(d-1) = 180.$$

Logo, $r\times(d-1) = 180 - 60 = 120$. Substituindo este dado nas expressões anteriores, obtemos

$$\begin{aligned} 1.560 &= 60\times d + \frac{1}{2}120\times d \\ &= 60d + 60d = 120d. \end{aligned}$$

Concluímos que $d = 13$ e $r = 10$, o que corresponde à alternativa de letra (c). ■

Observação 1.23 — Nota ao professor. A solução tornou-se mais longa porque embutimos na discussão a demonstração da expressão da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética. De modo geral, se uma progressão aritmética tem primeiro termo dado por a e uma razão r, a soma dos seus $n \in \mathbb{N}$ primeiros termos pode ser deduzida a partir da expressão da soma dos n primeiros números naturais:

$$\begin{aligned} a + (a+r) + \ldots + [a + (n-1)r] &= n\times a + r\times[1 + \ldots + (n-1)] \\ &= n\times a + \frac{1}{2}\times(n-1)\times(n-1+1)\times r \\ &= n\times a + \frac{1}{2}n(n-1)r \\ &= \frac{1}{2}n[a + a + (n-1)\times r] \end{aligned}$$

Exercício 1.46 — Canguru 2016 - Prova J. O pequeno Lucas inventou seu próprio meio de representar números negativos antes de aprender a usar o sinal de menos. Contando de trás para a frente, ele escreve: $\ldots, 3, 2, 1, 0, 00, 000, 0000, \ldots$ Dessa forma, se ele calcular a soma $000 + 0000$, que número ele escreverá com sua notação?

(a) 1.
(b) 00000.
(c) 000000.
(d) 0000000.
(e) 00000000.

Solução. Observe que 00 representa o número -1, 000 representa o número -2, 0000 representa o número -3, e assim por diante. Logo, $000 + 0000$ equivale a $-2 + (-3) = -5$. O número -5 é representado por uma sequência de 6 zeros, isto é, por 000000, o que corresponde à alternativa (c). ■

Exercício 1.47 — FUVEST 2006. Um número natural N tem três algarismos. Quando dele subtraímos 396 resulta o número que é obtido invertendo-se a ordem dos algarismos de N. Se, além disso, a soma do algarismo das centenas e do algarismo das unidades de N é igual a 8, então o algarismo das centenas de N é

(a) 4.
(b) 5.
(c) 6.
(d) 7.
(e) 8.

Solução. Como o número N tem três algarismos, pode ser decomposto como

$$N = 100 \times a + 10 \times b + c,$$

onde a, b e c são algarismos (de 0 a 9, sendo que a não é 0). Subtraindo 396 de N, obtemos, de acordo com o enunciado, o número

$$M = 100 \times c + 10 \times b + a.$$

Portanto, subtraindo M de N, obtemos 396:

$$100 \times a + 10 \times b + c - (100 \times c + 10 \times b + a) = 396$$

Logo,

$$99a - 99c = 396.$$

Mas $396 = 99 \times 4$. Deduzimos que $a - c = 4$. Como a soma do algarismo das centenas a e do algarismo das unidades c é igual a 8, temos $a + c = 8$ e, portanto

$$\begin{aligned} a - c &= 4, \\ a + c &= 8. \end{aligned}$$

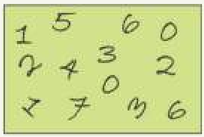
Concluímos que $a = 6$ e $c = 2$. A resposta correta é a alternativa de letra (c).

■

Exercício 1.48 — Canguru 2016 - Prova J. As faces de um dado são numeradas de 1 a 6, de modo que a soma dos números em faces opostas é a mesma. Os numerais ímpares 1, 3 e 5 são transformados nos ímpares -1, -3 e -5 , com o acréscimo do sinal de menos. Se lançarmos dois dados iguais a esse, qual dos números a seguir não pode ser a soma dos dois resultados?

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6 (e) 7

Exercício 1.49 — KangoTreino (adaptado). Geraldinho quer apagar números do quadro ao lado de modo que sempre que ele apaga um algarismo dever remover todas as cópias do mesmo. Ele quer deixar apenas três algarismos distintos de forma que a soma deles seja a menor possível. Qual é a soma dos valores dos números que ele deverá apagar?



(a) 10. (b) 34. (c) 36. (d) 38. (e) 40.

Solução. Vamos primeiro reorganizar os números do quadro, do menor para o maior, considerando as repetições:

$$0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 7.$$

A soma de todos eles é igual a:

$$0 + 0 + 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 5 + 6 + 6 + 7 = 40.$$

- A soma dos ‘0’s do quadro é 0.
- A soma dos ‘1’s do quadro é 2.
- A soma dos ‘2’s do quadro é 4.
- A soma dos ‘3’s do quadro é 6.
- A soma dos ‘4’s do quadro é 4.
- A soma dos ‘5’s do quadro é 5.
- A soma dos ‘6’s do quadro é 12.
- A soma dos ‘7’s do quadro é 7.

As três menores somas possíveis são 0, 2 e 4 e elas somam um total de $0+2+4=6$. Tal soma pode ser obtida deixando no quadro os números 0, 0, 1, 1, 2 e 2, ou deixando os números 0, 0, 1, 1 e 4. Em todo caso, a soma dos algarismos que foram apagados é:

$$40-6=34.$$

Assim, a alternativa correta é a de letra (b).

■

Exercício 1.50 — Círculos Matemáticos de Moscou. João e Cândido estão usando uma balança de mola para pesar suas mochilas.

Quando pesadas separadamente, a balança mostra 3 kg e 2 kg; quando são pesadas juntas, a balança mostra 6 kg.

– “Isto não pode estar certo”, disse Cândido. “Dois mais três não é igual a seis!”
– “Você não está vendo?”, respondeu João. “O ponteiro da balança não está no zero.”

Quanto as mochilas pesam de fato?

(a) 2 kg e 1 kg.
(b) 3 kg e 2 kg.
(c) 4 kg e 3 kg.
(d) 5 kg e 4 kg.
(e) 6 kg e 5 kg.

Solução. Se X é o valor exibido na balança quando nenhum peso está sobre ela, então as informações apresentadas podem ser expressas assim:

- Quando a mochila de João é pesada, a balança mostra seu peso real somado a X (veja que, se X for negativo, então isso significa que a balança mostra menos que o peso real). Portanto, o peso real da mochila de João é $3 - X$.
- Quando a mochila de Cândido é pesada, a balança mostra seu peso real somado a X (novamente aqui, se X for negativo, então isso significa que a balança mostra menos que o peso real). Portanto, o peso real da mochila de Cândido é $2 - X$.
- Quando as duas mochilas são pesada juntas, a balança mostra a soma de seus pesos reais acrescida de X. Portanto, a soma dos pesos reais das mochilas é $6 - X$.

Assim,

$$6 - X = (3 - X) + (2 - X) = 5 - 2X,$$

o que nos dá $2X - X = 5 - 6$, isto é, $X = -1$. Portanto, as mochilas de João e Cândido pesam, efetivamente, $3 - (-1) = 4\,\text{kg}$ e $2 - (-1) = 3\,\text{kg}$, respectivamente. A alternativa correta é (c). ■

Exercício 1.51 O visor das calculadoras comuns possui espaço máximo para oito algarismos. Se digitarmos nela o maior número possível e, em seguida, subtrairmos dele o maior número par possível, a que resultado chegaremos?

(a) 0. (b) 1. (c) 2. (d) 3. (e) 4.

Exercício 1.52 — OBMEP (adaptada). Numa adição de 7 parcelas foram adicionadas 3 unidades a cada uma das parcelas. Na nova operação, o que ocorre com a soma original das parcelas?

(a) Não se altera.
(b) É acrescida de 3 unidades.
(c) É acrescida de 7 unidades.
(d) É acrescida de 21 unidades.
(e) É acrescida de 3 parcelas.

Solução. Como não são informadas as 7 parcelas (e tampouco precisaremos dessa informação), escrevemos a soma delas como

$$A + B + C + D + E + F + G.$$

Somando 3 unidades a cada parcela e usando a *comutatividade* e *associatividade* da adição, calculamos

$$\begin{aligned}
&(A+3) + (B+3) + (C+3) + (D+3) + (E+3) + (F+3) + (G+3)\\
&= (A+B+C+D+E+F+G) + (3+3+3+3+3+3+3)\\
&= (A+B+C+D+E+F+G) + 21.
\end{aligned}$$

Logo, a soma inicial é *acrescida*, isto é, aumentada, em 21 unidades. A alternativa correta é a de letra (d). ■

Exercício 1.53 — FGV-RJ 2016. O número 2016 pode ser decomposto como a soma de dois números naturais ímpares de várias maneiras. Por exemplo, $1 + 2015$ e $13 + 2003$ são duas dessas decomposições. Considere que as decomposições $1 + 2015$ e $2015 + 1$ sejam iguais.

O número de decomposições diferentes é

(a) 505. (b) 504. (c) 507. (d) 506. (e) 503.

Exercício 1.54 — UECE 2015. No Brasil, os veículos de pequeno, médio e grande porte que se movimentam sobre quatro ou mais pneus são identificados com placas alfanuméricas que possuem sete dígitos, dos quais três são letras do alfabeto português e quatro são algarismos de 0 a 9, inclusive estes. Quantos desses veículos podem ser emplacados utilizando somente letras vogais e algarismos pares?

(a) 78625 (b) 78125. (c) 80626 (d) 80125

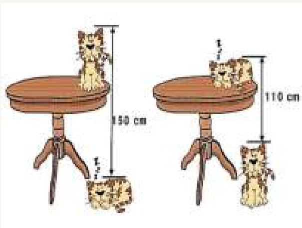
Sequência 4

Exercício 1.55 — UECE 2020.2. Se forem listados, em ordem crescente, todos os números de cinco dígitos distintos obtidos com os algarismos 2, 3, 4, 6 e 7, é correto dizer que o número 62.437 ocupa a posição (ordem) de número

(a) 8. (b) 10. (c) 7. (d) 9.

Exercício 1.56 Para pagar uma conta, Débora apresentou ao caixa uma nota de 50 reais. Contudo, ele lhe disse que o dinheiro não era suficiente, e então Débora lhe deu outra nota de R\$ 50,00. O caixa devolveu-lhe um troco de R\$ 27,00, mas Débora percebeu que ainda faltavam 9,00 reais de troco. Qual foi o valor da compra que Débora efetuou?

Exercício 1.57 — Canguru 2018 - Prova J. Considere as duas distâncias verticais indicadas na figura. Os gatos são do mesmo tamanho. Qual é a altura da mesa, em centímetros?



(a) 110.
(b) 120.
(c) 130.

(d) 140.
(e) 150.

Solução. Olhando para a figura, concluímos que

$$\text{altura do gato em pé} \ + \ \text{altura da mesa} \ - \ \text{altura do gato deitado} = 150$$

e

$$\text{altura do gato deitado} \ + \ \text{altura da mesa} \ - \ \text{altura do gato em pé} = 110$$

Portanto, somando os lados esquerdo e direito das duas equações, temos

$$\cancel{\text{altura do gato em pé}} \ + \ \text{altura da mesa} \ - \ \cancel{\text{altura do gato deitado}}$$
$$+ \ \cancel{\text{altura do gato deitado}} \ + \ \text{altura da mesa} \ - \ \cancel{\text{altura do gato em pé}}$$
$$= 150 + 110 = 260.$$

Concluímos que

$$\text{altura da mesa} \ = 130 \text{ centímetros.}$$

A alternativa correta é a de letra (c) ■

Exercício 1.58 — UEL. O caixa de um banco trocou a ordem dos dois algarismos do valor da conta a ser paga por um cliente, cobrando R$ 27,00 a mais. Sendo 11 a soma dos algarismos, o valor correto a ser pago pelo cliente era de:

(a) R$ 29,00.
(b) R$ 38,00.
(c) R$ 47,00.
(d) R$ 74,00.
(e) R$ 83,00.

Solução. O número, de dois algarismos, pode ser decomposto como $10a + b$, onde a e b são algarismos de 0 a 9, com a diferente de 0. Trocando a ordem dos algarismos, obtém-se o número cuja decomposição decimal é $10b + a$. A diferença entre os dois valores é igual a 27 reais. Portanto,

$$10b + a - (10a + b) = 27,$$

ou seja

$$9b - 9a = 27,$$

o que implica que $b - a = 3$. Como os algarismos têm soma igual a 11, isto é, $b + a = 11$, concluímos que $b = 7$ e $a = 4$. Logo, o valor correto a ser pago é R\$ 47,00. A alternativa correta é a de letra (c). ■

Exercício 1.59 — OBMEP 2016. Janaína escreveu no quadro-negro dois números cuja soma é igual a 1357. Ela observou que um desses números poderia ser obtido apagando o algarismo das unidades do outro. Qual é esse algarismo?

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7 (e) 8

Solução. Começamos observando que o maior desses dois números deve ser da forma

$$1.000 + 100\times A + 10\times B + C,$$

onde A, B e C são algarismos (de 0 a 9, portanto). Logo, o número menor é da forma

$$100 + 10\times A + B.$$

Somando os dois números obtemos

$$\begin{aligned} &1.000 + 100\times A + 10\times B + C + (100 + 10\times A + B) \\ &= 1.000 + 100 + (100 + 10)\times A + (10 + 1)\times B + C \\ &= 1.100 + 110\times A + 11\times B + C. \end{aligned}$$

Por outro lado, podemos decompor o resultado da soma, 1.357, como

$$1.357 = 1.100 + 220 + 33 + 4$$

Comparando as decomposições, concluímos que $A = 2$, $B = 3$ e $C = 4$. Portanto, o algarismo apagado é 4. A alternativa correta é a de letra (a). ■

Exercício 1.60 — Canguru 2016. Usando cada algarismo de 1 a 9 exatamente uma vez, podemos escrever três números de três algarismos. Qual dos números a seguir não pode ser a soma desses três números?

(a) 1500.
(b) 1503.
(c) 1512.
(d) 1521.
(e) 1575.

Exercício 1.61 — OBMEP 2011. Com os algarismos 1, 4, 6 e 8 pode-se formar vários números de três algarismos distintos. Qual é a soma de todos esses números?

(a) 12654.
(b) 12740.
(c) 13124.
(d) 13210.
(e) 13320.

Exercício 1.62 — OBMEP 2012. Ana escreveu cinco números em uma folha de papel. Escondendo cada um deles e somando os outros quatro, ela obteve os seguintes resultados: 29, 32, 35, 39 e 41. Qual é a soma do maior com o menor dos números que Ana escreveu?

(a) 10.
(b) 12.
(c) 15.
(d) 18.
(e) 20.

Observação 1.24 No sistema de numeração binário, ou de base 2, um número natural é escrito como somas de potências de 2. Por exemplo, temos

$$16 = 2^4,$$
$$17 = 2^4 + 1 = 2^4 + 2^0, \qquad 18 = 2^4 + 2 = 2^4 + 2^1,$$

e assim por diante. Assim sendo, escrevemos esses números em base 2 da seguinte forma, respectivamente:

$$16 = 1000,$$
$$17 = 1001, \qquad 18 = 1010.$$

Repare que, nas expressões do lado esquerdo, usamos o sistema decimal e, no lado direito, o sistema binário. Quando uma dada potência aparece na decomposição binária, temos o algarismo 1 na posição correspondente; se não aparece, pomos o algarismo 0.

Obs Para tornar a linguagem mais clara, lembre-se, por exemplo, que a potência 2^6, por exemplo, significa o produto

$$\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{6 \text{ vezes}}$$

em que a **base** 2 aparece 6 vezes como fator no produto. O número 6 é o **expoente**. Sendo assim, o número 70, por exemplo, pode ser decomposto em potências de 2 do seguinte modo:

$$70 = 64 + 6 = 64 + 4 + 2 = 2^6 + 2^2 + 2^1.$$

Portanto, 70 seria escrito como 1000110 no sistema de numeração binário.

Exercício 1.63 — ENEM 2016. Computadores utilizam, por padrão, dados em formato binário, em que cada dígito, denominado de *bit*, pode assumir dois valores (0 ou 1). Para representação de caracteres e outras informações, e necessário fazer uso de uma sequência de *bits*, o *byte*. No passado, um *byte* era composto de 6 *bits* em alguns computadores, mas atualmente tem-se a padronização que o *byte* é um octeto, ou seja, uma sequência de 8 *bits*. Esse padrão permite representar apenas 28 informações distintas.

Se um novo padrão for proposto, de modo que um *byte* seja capaz de representar pelo menos 2 560 informações distintas, o número de *bits* em um *byte* deve passar de 8 para

(a) 10. (b) 12. (c) 13. (d) 18. (e) 20.

Exercício 1.64 — UECE 2019.1. Qualquer número inteiro positivo pode ser expresso, de modo único, como soma de potências de 2. Exemplos: $63 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$ (seis parcelas), $64 = 2^6$ (uma parcela), $68 = 2^2 + 2^6$ (duas parcelas). O número de parcelas na expressão de 2018 como soma de potências inteiras de 2 é

(a) 8. (b) 10. (c) 7. (d) 9.

Solução. A potência de 2 *mais próxima e menor que* 2.018 é $1.024 = 2^{10}$. Tomando a diferença, temos

$$2.018 - 1.024 = 2.018 - 1.018 - 6 = 1.000 - 6 = 994.$$

Agora, a potência de 2 mais próxima e menor que 994 é $512 = 2^9$. A diferença, agora, é dada por

$$994 - 512 = 482.$$

Desta vez, aproximamos 482 por $256 = 2^8$, com diferença dada por $482 - 256 = 226$. Por sua vez, 226 é aproximado por $128 = 2^7$, com diferença igual a 98. Procedendo *iterativamente* deste modo, temos

$$98 = 64 + 34 = 2^6 + 34$$
$$34 = 32 + 2 = 2^5 + 2^1.$$

Concluímos que

$$2.018 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^1.$$

A alternativa correta é a de letra (c), ou seja, 7 parcelas. ■

Observação 1.25 Decorre da solução que 2.018 é escrito no sistema de numeração binário, ou de **base** 2, como

$$11111100010.$$

Exercício 1.65 — PUC-RJ 2008. A soma dos números inteiros x que satisfazem $2x + 1 \leq x + 3 \leq 4x$ é:

(a) 0. (b) 1. (c) 2. (d) 3. (e) -2

Exercício 1.66 — Circulo Matemático Moscou. O que é maior, a soma de todos os números pares de 0 a 100 ou a soma de todos os números ímpares de 1 a 99? Por quanto?

Solução. Veja que a soma de todos os pares de 0 a 100 pode ser escrita como

$$\begin{aligned} &0 + 2 + 4 + \ldots + 98 + 100 \\ &= (1+1) + (3+1) + \ldots + (97+1) + (99+1) \\ &= 1 + 3 + \ldots + 97 + 99 + (\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1 + 1}_{50 \text{ vezes}}) \end{aligned}$$

Concluímos que a soma dos números pares de 0 a 100 é igual a soma dos números ímpares de 1 a 99 *mais* 50. ∎

Exercício 1.67
Na adição ao lado, símbolos iguais representam um mesmo algarismo e símbolos diferentes representam algarismos diferentes. Substitua esses símbolos por algarismos, de modo que a adição tenha sentido.

$$\begin{array}{r} \triangle \\ \triangle \\ + \quad \square \\ \hline \square\,\triangle \end{array}$$

Solução. Observe que a adição acima parece uma equação. De fato, fazendo uso das propriedades do sistema de numeração decimal, a adição equivale a

$$\triangle + \triangle + \square = 10 \times \square + \triangle,$$

ou seja, a $\triangle = 9\times\square$. Como $\triangle$ é um algarismo, vale no máximo 9. Portanto, devemos necessariamente ter $\square = 1$, pois, se $\square$ fosse maior que 1, então $\triangle$ teria dois algarismos; e se $\square = 0$ teríamos $\square = \triangle = 0$ (mas os símbolos deveriam ser diferentes). Assim, $\triangle = 9$. ■

Exercício 1.68 — OBM. A adição a seguir está incorreta.

$$\begin{array}{r} 742586 \\ +\,829430 \\ \hline 1212016 \end{array}$$

Entretanto, se substituirmos todas as ocorrências de certo algarismo a por outro algarismo b, a conta ficará correta. Qual é o valor de $a + b$?

(a) 6. (b) 7. (c) 8. (d) 9.

Solução. Começamos executando o algoritmo da adição, para descobrir a partir de qual coluna a soma está incorreta. A primeira coluna dá direita nos dá $6 + 0 = 6$ (correto). A coluna a seguir traz $8+3 = 11$, o que nos faz, no resultado, escrever 1 na coluna das dezenas e levar 1 para a coluna das centenas (correto). A seguir, somamos $1+5+4 = 10$, escrevemos 0 no total e levamos 1 para a próxima coluna da direita (correto). A soma da próxima coluna então é $1 + 2 + 9 = 12$, e vai 1 de novo (correto). Na adição feita na quinta coluna aparece o primeiro erro, pois $1 + 4 + 2 = 7$ mas, no resultado, há um algarismo 1 nessa coluna. Assim, na quinta coluna temos de trocar ou o algarismo 4, ou o algarismo 2 ou o algarismo 1.

O algarismo 1 não pode ser trocado diretamente por um número à nossa escolha, pois ele vem da soma da coluna anterior. Veja que em uma soma com apenas 2 parcelas, o número que vai de uma coluna para outra só pode ser 0 ou 1 (já que a soma de dois algarismos é no máximo 18 e a esta soma adicionamos no máximo 1 que vem da coluna que o antecede). Logo, só teríamos chance de trocar esse 1 por 0, mas isso não resolve o problema na coluna da dezena de milhar.

Se trocarmos o 4, devemos trocá-lo por 8 (pois $1+8+2 = 11$), mas isso estraga a adição feita na terceira coluna (ou seja, na coluna das centenas). Se trocarmos o 2, devemos trocá-lo por 6 (pois $1+4+6 = 11$), e veja que isso não estraga nem a adição da quarta coluna (pois $1 + 6 + 9 = 16$) nem a da sexta coluna (pois $1 + 7 + 8 = 16$). Assim, essa é a substituição indicada, a qual nos dá

$$\begin{array}{r} 746\,586 \\ +\,869\,430 \\ \hline 1616\,016 \end{array}$$

Portanto, $a = 2$ e $b = 6$, de forma que $a + b = 8$. A alternativa correta é a de letra (c). ■

Exercício 1.69

Na conta ao lado, cada letra representa um algarismo não nulo. Qual é o algarismo representado pela letra C?

$$\begin{array}{cccc} & \mathrm{U} & \mathrm{F} & \mathrm{C} \\ + & & \mathrm{U} & \mathrm{F} \\ \hline & 5 & 0 & 1 \end{array}$$

(a) 1. (b) 4. (c) 5. (d) 6. (e) 7.

Solução. Sabendo que os algarismos são todos não nulos, podemos observar que:

- somando os algarismos das unidades, obtemos $\mathrm{C} + \mathrm{F} = 11$, ou seja, C e F são tais que na casa das unidades do resultado fica um e vai um;
- somando os algarismos das dezenas, obtemos $1 + \mathrm{F} + \mathrm{U} = 10$, ou seja, F e U são tais que na casa das dezenas do resultado fica zero e vai um;
- somando os algarismos das centenas, obtemos $1 + \mathrm{U} = 5$.

Assim, $\mathrm{U} = 5 - 1 = 4$, $\mathrm{F} = 10 - 1 - \mathrm{U} = 5$ e $\mathrm{C} = 11 - \mathrm{F} = 6$. Portanto, a alternativa correta é a de letra (d). ■

Exercício 1.70 — OBMEP. Na conta abaixo, cada letra representa um algarismo diferente. Qual é o algarismo representado pela letra P?

$$\begin{array}{r} O\ B\ M\ E\ P \\ +\quad O\ B\ M \\ \hline 2\ 0\ 0\ 0\ 0 \end{array}$$

(a) 1. (b) 2. (c) 3. (d) 4. (e) 5.

Solução. Vejam que a soma de dois algarismos distintos não pode ser igual a zero (caso contrário, cada um deles deveria ser 0). Além disso, é no máximo 18. Assim, observamos que:

- somando os algarismos das unidades, obtemos $P + M = 10$, ou seja, P e M são tais que na casa das unidades do resultado fica zero e vai um;
- somando os algarismos das dezenas, obtemos $1 + E + B = 10$, ou seja, E e B são tais que na casa das dezenas do resultado fica zero e vai um;
- somando os algarismos das centenas, obtemos $1 + M + O = 10$, ou seja, M e O são tais que na casa das centenas do resultado fica zero e vai um;
- somando os algarismos unidades de milhar, obtemos $1 + B = 10$, ou seja, B é tal que na casa das unidades de milhar do resultado fica zero e vai um;
- somando os algarismos das dezenas de milhar, obtemos $1+O = 2$.

Assim,

$$O = 2 - 1 = 1, \qquad B = 10 - 1 = 9, \qquad M = 10 - 1 - O = 8,$$
$$E = 10 - 1 - B = 0 \quad \text{e} \quad P = 10 - M = 2.$$

Portanto, a alternativa correta é a de letra (b). ■

Exercício 1.71

Na subtração ao lado, cada letra representa um algarismo não nulo. Qual é o algarismo representado pela letra C?

$$\begin{array}{r} 7\ 1\ 1 \\ -\quad A\ B \\ \hline A\ B\ C \end{array}$$

(a) 5. (b) 6. (c) 7. (d) 8. (e) 9.

Solução. Inicialmente, observemos que a subtração $701 - AB = ABC$ é equivalente à soma $ABC + AB = 711$, ou seja,

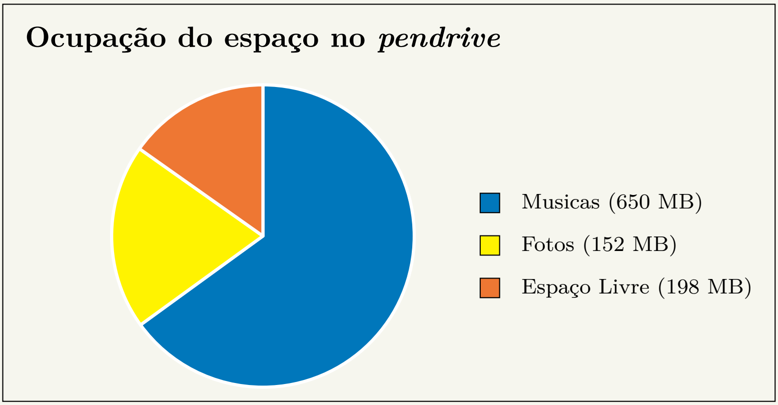
$$\begin{array}{cccc} & A & B & C \\ + & & A & B \\ \hline & 7 & 1 & 1 \end{array}$$

Desta forma, sabendo que os algarismos são todos não nulos, podemos proceder como nos exercícios anteriores:

- somando os algarismos das unidades, obtemos $C + B = 11$, ou seja, C e B são tais que na casa das unidades do resultado fica um e vai um;
- somando os algarismos das dezenas, obtemos $1 + B + A = 11$, ou seja, B e A são tais que na casa das dezenas do resultado fica um e vai um;
- somando os algarismos das centenas, obtemos $1 + A = 7$.

Assim, $A = 7 - 1 = 6$, $B = 11 - 1 - A = 4$ e $C = 11 - B = 7$. Portanto, a alternativa correta é (c). ■

Exercício 1.72 — PISA (adaptado). Um *pendrive* é um pequeno periférico removível que permite o armazenamento de dados. Ivan possui um *pendrive* com capacidade de 1 GB (equivalente a 1000 MB), para arquivar suas músicas e fotos. O diagrama abaixo apresenta a ocupação atual do espaço de seu *pendrive*:



Ivan deseja transferir um álbum de fotos de 350 MB para seu *pendrive*, porém o espaço não é suficiente. Ele não quer apagar fotos, mas gostaria de apagar, no máximo, dois álbuns de músicas. Eis os tamanhos dos álbuns de músicas arquivadas no *pendrive* de Ivan:

Álbum	**Tamanho**
1	100 MB
2	75 MB
3	80 MB
4	55 MB
5	60 MB
6	80 MB
7	75 MB
8	125 MB

Apagando no máximo dois álbuns de músicas Ivan pode liberar espaço suficiente em seu *pendrive* para adicionar o álbum de fotos?

(a) Não. Ivan só conseguirá liberar espaço se apagar todos os álbuns de músicas.
(b) Não. Ivan só conseguirá liberar espaço se apagar pelo menos três álbuns de músicas.
(c) Sim. Ivan conseguirá liberar espaço, mas a única opção é apagar os álbuns de músicas 1 e 8.
(d) Sim. Ivan conseguirá liberar espaço, mas as únicas opções são apagando os álbuns de músicas 1 e 8, 3 e 8 ou 6 e 8.
(e) Sim. Ivan conseguirá liberar espaço, e as opções são apagar os álbuns de músicas 1 e 8, 3 e 8, 6 e 8, 2 e 8 ou 7 e 8.

Solução. No diagrama lê-se que *pendrive* de Ivan tem 152 MB de espaço livre. Assim, para transferir o álbum de 350 MB ele precisa apagar $350 - 152 = 198$ MB. Para satisfazer o problema, Ivan precisa escolher (no máximo) dois álbuns de músicas que somem, pelo menos, 198 MB. Observando a tabela, vê-se que cada um dos pares de álbuns apresentados na alternativa (e) somam 200 MB, pelo menos. Logo, esta é a alternativa correta. ■

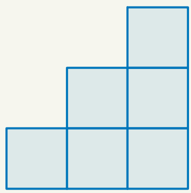
Exercício 1.73 Pedro e seu pai, em certo momento, tinham idades com algarismos invertidos: Pedro tinha 14 anos, enquanto seu pai tinha 41 anos. Supondo que isso aconteceu em 1998, em que ano essa coincidência voltou a acontecer?

Exercício 1.74
Na conta ao lado, se substituirmos os símbolos por algarismos de maneira que ela faça sentido (símbolos iguais representando um mesmo algarismo), então o maior valor possível para $\triangle + \square$ é:

$$\begin{array}{rr} & \triangle \\ & \triangle \\ & \triangle \\ & \triangle \\ + & \square \\ \hline \square & \triangle \end{array}$$

(a) 15. (b) 14. (c) 13. (d) 12. (e) 11.

Exercício 1.75
De quantas maneiras podemos colocar números de 1 a 5 em cada um dos quadrados abaixo, de tal forma que a soma dos números nos quadrados seja 25 e que em cada linha ou coluna de quadrados nenhum número se repita?



(a) 2. (b) 3. (c) 4. (d) 5. (e) 6.

Exercício 1.76 — OBMEP 2011. Esmeralda tem 11 notas de dois reais, Rosa tem 7 notas de cinco reais e Nelly tem 3 notas de dez reais. Qual é o menor número possível do total de notas que devem mudar de mãos de forma que todas as moças fiquem com a mesma quantia?

(a) 5. (b) 6. (c) 7. (d) 8. (e) 9.

Exercício 1.77 O Táler (plural táleres) é a moeda oficial de um país distante. Nesse país, existem notas de 1, 2, 3, 4 e 5 táleres. De quantas maneiras se pode pagar uma conta de 25 táleres usando exatamente 6 cédulas?

(a) 5.
(b) 6.
(c) 7.
(d) 8.
(e) 9.

Exercício 1.78 — UECE 2019.1. Considere a soma dos números inteiros ímpares positivos agrupados do seguinte modo: $1 + (3 + 5) + (7 + 9 + 11) + (13 + 15 + 17 + 19) + (21 + 23 + 25 + 27 + 29) + \ldots$ O grupo de ordem n é formado pela soma de n inteiros positivos ímpares e consecutivos. Assim, pode-se afirmar corretamente que a soma dos números que compõem o décimo primeiro grupo é igual a

(a) 1223. (b) 1331. (c) 1113. (d) 1431.

2 Multiplicação e Divisão

2.1 – Somando repetidamente uma parcela

Nesta seção, vamos voltar à história de nosso amigo João e seu esforço para comprar uma motoneta.

> **Problema 5** João resolveu financiar a compra de uma motoneta que custaria R\$ 10.590,00 à vista. Caso pague uma entrada de R\$ 5.190,00 e 24 parcelas mensais, iguais a R\$ 256,00, quanto pagará de juros ao todo neste financiamento?

Ao fim dos 24 meses, João pagará o valor inicial, ou seja, uma entrada de R\$ 5.190,00 *mais* 24 **vezes** a parcela de R\$ 256,00, isto é,

$$\underbrace{256 + 256 + \ldots + 256}_{\text{24 vezes}}$$

ou seja, precisamos somar *repetidas* parcelas iguais a 256. Esta adição de 24 parcelas repetidas, iguais a 256, pode ser escrita como a **multiplicação**

$$24 \times 256$$

dos números naturais 24 e 256. Usaremos um *algoritmo* (uma sequência de passos) para calcular o *produto*, isto é, o resultado da multiplicação. O primeiro passo é usar a *comutatividade* e a *distributividade* da multiplicação com relação à adição, decompondo a parcela 24 em $20 + 4$:

$$\begin{aligned} 256 \times 24 &= 256 \times (20 + 4) \\ &= 256 \times 20 + 256 \times 4. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Para calcular a parcela 256×4, decompomos 256 em $200 + 50 + 6$ e usamos, uma vez mais, a distributividade:

$$\begin{aligned} 256\times 4 &= (200+50+6)\times 4 \\ &= 200\times 4 + 50\times 4 + 6\times 4 \\ &= 800+200+20+4 \\ &= 1.000+24 = 1.024. \end{aligned} \tag{2.2}$$

O penúltimo passo do algoritmo é calcular

$$\begin{aligned} 256\times 20 &= 256\times 2\times 10 = (200+50+6)\times 2\times 10 \\ &= (200\times 2 + 50\times 2 + 6\times 2)\times 10 \\ &= (400+100+12)\times 10 \\ &= 512\times 10 = 5.120. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Na primeira linha dos cálculos acima, usamos a *associatividade* da multiplicação. Finalmente, somamos os resultados em 2.2 e 2.3 para obter

$$\begin{aligned} 256\times 24 &= 256\times 20 + 256\times 4 \\ &= 1.024 + 5.120 = 6.144. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Na escola, costumamos utilizar um dispositivo prático que permite visualizar mais facilmente a aplicação das propriedades da multiplicação. Para a multiplicação acima, esse dispositivo é:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ 1} \quad \\ {\scriptstyle 2\ 2} \quad \\ 2\,5\,6 \\ \times\, 2\,4 \\ \hline 1\,0\,2\,4 \\ +\,5\,1\,2\,0 \\ \hline 6\,1\,4\,4 \end{array}$$

Começamos multiplicando 4 por 6 na coluna das unidades (mais à direita), o que resulta em $24 = 20 + 4$, sendo que as 4 unidades ficam na coluna das unidades e as 20 unidades (ou 2 dezenas) "vão" para a coluna das dezenas, o que simbolizamos com o algarismo 2 à direita na segunda linha. Em seguida, multiplicamos 4 por 50 (representado pelo algarismo 5 na coluna das dezenas na terceira linha), obtendo $4\times 50 = 200$. Somamos 200 e 20 (as 2 dezenas na segunda linha), obtemos 2 centenas (que "vão" para a coluna das centenas na forma do algarismo 2 à esquerda na segunda linha) e 2 dezenas que "ficam" na coluna das dezenas. Na sequência, multiplicamos 4 por 200 (representado pelo algarismo 2 na terceira linha) e somamos o resultado às 2 centenas que "foram" para a coluna das centenas, obtendo $4\times 200 + 200 = 800 + 200 = 1.000$. Assim, chegamos ao resultado $1.000 + 20 + 4 = 1.024$ na quinta linha.

Continuando o processo, multiplicamos agora 20 (representado pelo algarismo 2 na quarta linha) e 6, obtendo $120 = 100 + 20$ unidades, das quais 100 "vão" para a coluna das centenas (o algarismo 1 na primeira linha, à direita) e 2 dezenas "ficam" na coluna das dezenas (representadas pelo número 20 na sexta linha). Em seguida, multiplicamos 20 por 50, obtendo 1.000 unidades ou 10 centenas, às quais somamos a 1 centena que "foi" para a coluna das centenas, obtendo 11 centenas ou, seja, 1 milhar (que "vai" para a coluna dos milhares, representados pelo algarismo 1 na primeira linha, à esquerda) e 1 centena que "fica" na coluna das centenas, na sexta linha. Por fim, multiplicamos 20 por 200 (representado pelo algarismo 2 na terceira linha), obtendo $20\times 200 = 4.000$ ou 4 milhares; somamos o 1 milhar que "foi" para a coluna dos milhares, obtendo 5 milhares, representados pelo algarismo 5 na sexta linha. Com estes passos, chegamos ao resultado na sexta linha: $5.000 + 100 + 20 = 5.120$.

Perceba que essas ações são exatamente as mesmas que detalhamos nas linhas de (**??**).

Observação 2.1 Os algortimos de multiplicação ainda "dão o que falar" em termos de pesquisa. Para um exemplo, veja os seguintes artigos da Quanta Magazine

https://www.quantamagazine.org/mathematicians-discover-the-perfect-way-to-multiply-20190411/

e

https://www.quantamagazine.org/the-math-behind-a-faster-multiplication-algorithm-20190923/

Observação 2.2 É importante notar que há várias formas de efetuar a multiplicação, ou seja, não há uma única maneira de executar o algoritmo da multiplicação! Deve-se apenas ficar atento ao uso adequado das propriedades fundamentais, o que garante que o resultado obtido estará correto. Por exemplo, uma estratégia alternativa para calcular o produto acima é a seguinte: utilizando a *associatividade* da multiplicação, calculamos

$$256{\times}20 = 256{\times}2{\times}10 = 512{\times}10 = 5.120.$$

E, usando a *distributividade* em relação à adição, obtemos

$$256{\times}4 = (250+6){\times}4 = 250{\times}4 + 6{\times}4 = 1.000 + 24 = 1.024.$$

Somando os dois resultados, temos

$$256{\times}24 = 256{\times}20 + 256{\times}4 = 5.120 + 1.024 = 6.144.$$

Outra abordagem para simplificar as contas feitas nessas multiplicação combina divisões e multiplicações. Por exemplo

$$24{\times}250 = 24{\times}1.000 : 4 = 24.000 : 4 = 6.000.$$

e

$$24{\times}6 = 4{\times}6{\times}6 = 4{\times}36 = 2{\times}72 = 144.$$

Pode-se, ainda, empregar decomposições diferentes das que apresentamos acima, envolvendo *subtrações* e *divisões*, como em

$$\begin{aligned} 256{\times}24 &= 256{\times}(25-1) = 256{\times}25 - 256{\times}1 \\ &= (256{\times}100) : 4 - 256 = 25.600 : 4 - 256 \\ &= (24.000 + 1.600) : 4 - 256 = 6.000 + 400 - 256 \\ &= 6.000 + 144 = 6.144. \end{aligned}$$

Outro algoritmo seria aplicar a propriedade distributiva duplamente:

$$
\begin{aligned}
256\times 24 &= (25\times 10+6)\times(2\times 10+4)\\
&= 25\times 10\times 2\times 10+6\times 2\times 10+25\times 10\times 4+6\times 4\\
&= 50\times 100+12\times 10+100\times 10+24\\
&= 6.000+120+24=6.144.
\end{aligned}
$$

Os cálculos acima podem ser organizados no seguinte dispositivo prático:

$$
\begin{array}{r}
2\,5\,6\\
\times\,2\,4\\
\hline
2\,4\\
1\,0\,0\,0\\
1\,2\,0\\
+\,5\,0\,0\,0\\
\hline
6\,1\,4\,4
\end{array}
$$

Essas abordagens alternativas permitem efetuar corretamente as multiplicações de forma mais rápida e segura, porque envolvem contas mais fáceis de checar. Além disso, sugerem estratégias úteis de **cálculo mental**.

Observação 2.3 — Nota ao professor. Feito este preâmbulo, em que discutimos o(s) algoritmo(s) da multiplicação, cabe reforçar a noção e notação de potências de dez que usamos no início, ao trabalharmos com o sistema posicional decimal. Com a apresentação da adição e da multiplicação, decomposições decimais como

$$
\begin{aligned}
6.114 &= 6.000+100+10+4\\
&= 6\times 1.000+1\times 100+1\times 10+4\times 1\\
&= 6\times 10^3+1\times 10^2+1\times 10+4\times 1
\end{aligned}
$$

ficam inteiramente expiicadas e justificadas. Além disso, fica também mais clara, por exemplo, que 10^3 é uma notação para $10\times 10\times 10$, e assim por diante.

2.2 – Propriedades da multiplicação

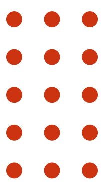
No que segue, vamos discutir as seguintes *propriedades operatórias* da multiplicação que justificam os diversos *algoritmos* usados para efetuar essa operação:

- comutatividade
- associatividade
- distributividade (em relação à adição)

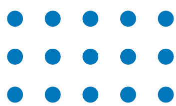
A) A propriedade comutativa

A propriedade *comutativa* vale tanto para a adição como para a multiplicação. No caso da adição, esta propriedade assegura que a ordem em que dispomos as parcelas em uma adição não altera o resultado, isto é, não modifica a soma. É uma propriedade tão óbvia que fazemos uso dela sem nos darmos conta. Por exemplo, se andamos 3 metros e, em seguida, *mais* 5 metros, percorremos a mesma distância que se andássemos 5 metros e, em seguida, *mais* 3 metros: seriam os mesmos 8 metros de percurso. Em símbolos, $m + n = n + m$, para todos os naturais m e n.

A multiplicação também é comutativa, mas isso não é tão óbvio quanto o é para a adição. Por exemplo, alguém pode legitimamente questionar se, de fato, 3 fileiras com 5 alunos têm a mesma quantidade de pessoas que 5 fileiras com 3 alunos. Uma maneira de verificar essa igualdade é representar as duas situações como nas figuras abaixo:



$3{\times}5$



$5{\times}3$

A figura acima, à esquerda, traz 3 colunas com 5 pontos iguais em cada, representando a multiplicação $3{\times}5 = 5 + 5 + 5$. Já na figura à direita, temos 5 colunas de 3 pontos, o que representa a multiplicação

$5{\times}3 = 3+3+3+3+3$. É fácil ver que os pontos da esquerda e da direita formam "retângulos" iguais, sendo que um é obtido do outro por uma rotação (trocando-se linhas por colunas e vice-versa). Como ambos os "retângulos", $3{\times}5$ e $5{\times}3$, têm a mesma quantidade total de pontos (a saber, 15), constatamos que $5{\times}3 = 3{\times}5$ (ambos iguais a 15).

Observação 2.4 Podemos usar o argumento dos retângulos para "provar" que um retângulo com 3 metros de base e 5 metros de altura tem a mesma *área* de um retângulo com 5 metros de base e 3 metros de altura. Neste caso, a área é dada pelo produto $3{\times}5 = 5{\times}3 = 15$ metros quadrados.

Podemos **generalizar** facilmente a discussão acima para concluir que $m{\times}n = n{\times}m$, quaisquer que sejam os naturais m e n.

Observação 2.5 — Nota ao professor. O(a) professor(a) atento(a) pode ter reparado que usamos um contexto de translação ou de medidas de comprimento quando tratamos da adição e de sua propriedade de comutatividade; e que usamos um exemplo relativo à área para tratar da multiplicação e de sua propriedade de comutatividade. Essas distinção entre as naturezas geométricas das operações remetem à visão grega da Aritmética. Sugerimos ao(à) professor(a) a leitura dos artigos de D. H. Fowler e de P. McLoughlin e M. Droujkova disponíveis no AVACED, além de outras referências sobre modelos geométricos de multiplicação. Com isto, proponha atividades aos alunos como a elaboração de rotinas no GeoGebra para *implementar* as técnicas geométricas de multiplicação usadas pelos gregos antigos.

B) A propriedade distributiva

Ao escrevermos várias operações numa mesma sentença, *convencionamos* a seguinte *relação de prioridade* entre as operações: multiplicações devem ser realizadas antes de adições e subtrações. Por exemplo,

$$3{\times}5 + 2 = 15 + 2 = 17.$$

A multiplicação tem prioridade (em relação à adição) mesmo que ela apareça mais à direita na **expressão numérica**:

$$2 + 3\times 5 = 2 + 15 = 17.$$

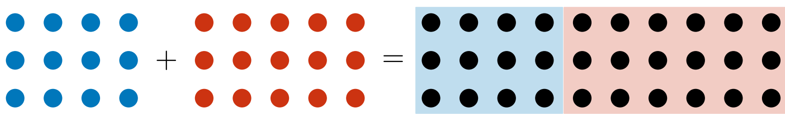
Para alterar a ordem em que as operações devem ser feitas e, assim, inverter as prioridades, temos de usar parênteses, com a convenção de que as operações entre parênteses devem ser realizadas antes das outras operações. Assim,

$$3\times(5 + 2) = 3\times 7 = 21.$$

A propriedade *distributiva* da multiplicação transforma uma multiplicação com parênteses em operações sem parênteses. Em símbolos, a *distributividade da multiplicação em relação à adição* diz que

$$m\times(n + p) = m\times n + m\times p,$$

para todos os números m, n e p. Como no caso da propriedade comutativa, podemos visualizar a propriedade distributiva usando retângulos conforme vemos na Figura 2.1.



3×4 $\quad$ 3×5 $\quad$ $3\times(4 + 5) = 3\times 9$

Figura 2.1: Representação da propriedade distributiva organizando objetos em retângulos.

Observação 2.6 Essa mesma representação geométrica pode ser usada para vermos a distributividade da seguinte forma: somando as áreas de um retângulo com 4 metros de base e 3 metros de altura e de outro retângulo com 5 metros de base e 3 de metros de altura, obtemos uma área total igual a de um retângulo com $4 + 5 = 9$ metros de base e 3 de altura.

Já a *distributividade da multiplicação em relação à subtração* diz que

$$m\times(n - p) = m\times n - m\times p,$$

para todos os números m, n e p.

Faça uma figura semelhante à acima para verificar essa forma da distributividade considerando que $n > p$.

Um uso interessante das propriedades distributivas é transformar multiplicações trabalhosas em outras mais simples, que apenas necessitem de cálculo mental, juntamente com adições ou subtrações. Por exemplo, para calcular 18×23 podemos fazer

$$18\times 23 = 18\times(20 + 3) = 18\times 20 + 18\times 3 = 360 + 54 = 414.$$

Outra alternativa seria

$$18\times 23 = (20 - 2)\times 23 = 20\times 23 - 2\times 23 = 460 - 46 = 414.$$

C) A propriedade associativa

A *propriedade associativa* (ou simplesmente a *associatividade*) da multiplicação de números naturais diz que, se tivermos multiplicações na **expressão numérica**, então parênteses são desnecessários. Por exemplo, aplicando a propriedade associativa para calcular

$$3\times 5\times 10,$$

garantimos que tanto faz calcular primeiro 3×5 e, depois, multiplicar o resultado por 10 (isto é, fazer $(3\times 5)\times 10 = 15\times 10 = 150$), quanto calcular primeiro 5×10 e, em seguida, multiplicar o resultado por 3 (isto é, fazer $3\times(5\times 10) = 3\times 50 = 150$). Em símbolos, $(3\times 5)\times 10 = 3\times(5\times 10)$ e, mais geralmente,

$$(m\times n)\times p = m\times(n\times p),$$

para todos os números m, n e p.

Não vamos dar um argumento geral para justificar a última igualdade acima, mas sugerimos que você tente pensar em modelos para interpretar visualmente a associatividade, tornando-a mais intuitiva, como fizemos na subseção A) para justificar a comutatividade. Desta vez, você pode agrupar os pontinhos em caixas (paralelepípedos) de dimensões m, n e p (largura, comprimento e altura, em alguma ordem).

Problema 6 — Círculo Matemático de Moscou. O que é maior, 333333×444444 ou 222222×666667? Qual é a diferença entre eles?

2.3 – A tabuada

Muita gente não consegue fazer multiplicações com facilidade com papel e caneta ou mentalmente porque não lembra de cor os resultados de multiplicações de números pequenos. Para ajudar nisso, é importante memorizar a famosa *tabuada de multiplicação*, que traz os resultados das multiplicações de números de 1 a 9 (veja a tabela a seguir).

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Figura 2.2: A tabuada de multiplicação.

Escrever os resultados da tabuada de multiplicação é bastante simples, se virmos o preenchimento da tabela como uma espécie de *Sudoku*[1] no qual os números em cada casa têm certas propriedades fáceis de lembrar, e que listamos a seguir:

(a) A tabuada de multiplicação por 1 não oferece resistência.

[1]Sudoku é um famoso quebra-cabeça baseado na colocação lógica de números sobre um tabuleiro.

(b) A tabela é *simétrica em relação à diagonal descendente.* Isso segue da comutatividade da multiplicação. Por exemplo, $5{\times}4 = 4{\times}5 = 20$ são entradas simétricas em relaçâo à diagonal descendente.

(c) A coluna (ou linha) do 9 é montada iniciando pelo número 09 e fazendo o dígito da dezena aumentar de 0 a 8 à medida que o da unidade diminui de 9 a 1. Realmente, os resultados de $9{\times}k$ quando k varia de 1 a 9, são sucessivamente iguais a 09, 18, 27, $\ldots$, 72, 81.

(d) Para lembrar a tabuada de multiplicação do 4, podemos observar que, como $4{\times}k = 2{\times}(2{\times}k)$, obtemos a tabuada de 4 multiplicando por 2 os resultados da tabuada de 2.

(e) Da mesma forma, como $8{\times}k = 4{\times}(2{\times}k)$, para escrever os resultados da tabuada do 8, multiplicamos os resultados da tabuada do 2 por 4.

(f) Um raciocínio análogo vale para a tabuada do 6, se já soubermos as tabuadas do 2 e do 3, pois $6{\times}k = 2{\times}(3{\times}k) = 3{\times}(2{\times}k)$.

(g) Os resultados da tabuada de multiplicação por 5 são fáceis de memorizar, ainda mais se lembrarmos que multiplicar por 5 é o mesmo que multiplicar por 10 (e, para isso, basta adicionar um zero à direita do número) e, em seguida, dividir o resultado por 2. Por exemplo, podemos calcular $7{\times}5 = \frac{7\times 10}{2} = \frac{70}{2} = 35$.

(h) A tabuada de multiplicação por 7 pode ser lembrada usando a simetria da tabela: $7{\times}k = k{\times}7$. Por exemplo, se já sabemos a tabuada do 4, segundo a qual $4{\times}7 = 28$, então sabemos também que $7{\times}4 = 28$.

Os números na diagonal descendente são os *quadrados* dos números de 1 a 9.

Aprende-se, portanto, a tabuada da multiplicação, não por memorização direta, mas aplicando-a e observando suas propriedades.

Observação 2.7 — Nota ao professor. Um *mito educacional* prevalente é de que, na era da *internet*, memorizar fatos e treinar procedimentos deveriam dar lugar ao desenvolvimento **direto** de competências como *aprender a aprender*. Neste material, trabalhamos para ampliar a compreensão e o uso reflexivo dos procedimentos de cálculo aritmético, mas não desconhecemos a importância de ajudar os aprendizes a desenvolver, em sua memória de longo prazo, modelos mentais que os tornem aptos e destros nesses procedimentos. Os achados da Psicologia Cognitiva mostram como, desta forma, "liberamos" a memória de trabalho, que é limitada, quando esta é demandada a resolver problemas complexos ou em contextos novos. A respeito desses temas, sugerimos uma pesquisa sobre os textos, palestras e *blogs* de Daisy Christodoulou `https://daisychristodoulou.com/blog/`, Daniel Williangham `http://www.danielwillingham.com/articles.html` e da Iniciativa Educação `https://www.iniciativaeducacao.org/pt/ed-on/ed-on-artigos`

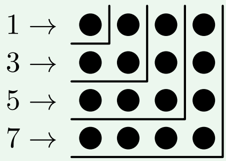
Tampouco ignoramos a relevância cognitiva de que os alunos trabalhem a partir de seus erros, reconhecendo-os (em vez de ficarem desmotivados ou se perceberem como ineptos) e criando, sob supervisão do professor, métodos e estratégias flexíveis e matematicamente corretas. Isto vai além de uma mera destreza, mecânica e irrefletida, nos algoritmos usuais, admitidos como regras que devam ser seguidas sem justificativas. Sobre estes pontos, recomendamos a leitura dos textos de Jo Boaler e dos pesquisadores que lidam com as *Mentalidades Matemáticas*.

Problema 7 Somando os números ímpares em sequência, obtemos quadrados dos números naturais. Vejamos:

$$1 + 3 = 4 = 2^2,$$
$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2,$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2,$$

e assim por diante. Esse padrão se mantém? Se sua resposta é "sim", como você poderia justificá-la geometricamente?

Observação 2.8 — Nota ao professor. Recomendamos discutir problemas dessa natureza em atividades de avaliação formativa em que sejam trabalhados os padrões e regularidades de sequências numéricas. Já vimos alguns exercícios na seção anterior, relacionados à soma de sequências em crescimento aritmético. Desta vez, a ideia é elaborar o fato de que podemos representar a soma de ímpares geometricamente, dispondo a quantidade resultante em um quadrado, como sugere a figura:



Esta seria uma “prova” geométrica a partir da qual o(a) professor(a) pode explorar, uma vez, a ideia de demonstração por indução finita e, em geral, o estudo de padrões numéricos associado. Com isto, são mobilizadas diversas habilidades previstas na BNCC.

Observação 2.9 — Nota ao professor. O uso da tabuada será fundamental para as aproximações e estimativas necessárias ao uso correto e eficiente do algoritmo da divisão euclidiana, como veremos nos exemplos que discutiremos em detalhe.

2.4 – A multiplicação cruzada

Na seção anterior, vimos que pode ser muito vantajoso empregar estratégias alternativas para calcular produtos. Aqui, aprofundamos essas considerações, apresentando um algoritmo de multiplicação que se vale de maneira eficiente das propriedades do sistema posicional decimal. Ele é chamado de *método da multiplicação cruzada*, por motivos que ficarão evidentes na sua descrição mediante o exemplo apresentado logo abaixo.

Exemplo

Para efetuar o produto $57{\times}36$ pelo método da multiplicação cruzada, escrevemos diretamente o resultado da operação da *direita para a esquerda*[2] como explicamos abaixo.

$$\begin{array}{r} 5\,7 \\ 3\,6 \\ \hline 2 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 5\,7 \\ 3\,6 \\ \hline 5\,2 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 5\,7 \\ 3\,6 \\ \hline 2\,0\,5\,2 \end{array}$$

Iniciamos efetuando a multiplicação $7{\times}6 = 42$. Escrevemos 2 na última coluna da direita e levamos 4 para a próxima etapa, que é calcular a expressão $4 + (5{\times}6 + 7{\times}3) = 55$. Essa etapa é que dá o nome do método, pois nela as multiplicações são cruzadas:

$$\begin{array}{ccc} 5 & & 7 \\ & \times & \\ 3 & & 6 \end{array}$$

Escreve-se 5 ao lado do numeral 2, e leva-se (o outro) 5 para o último passo, que é calcular a expressão $5 + 5{\times}3 = 20$. Então, escreve-se 20 à esquerda de 52, obtendo 2052 como resultado da multiplicação.

Esse método é validado pelas propriedades do sistema posicional decimal e pela propriedade distributiva. De fato, distribuindo produtos, obtemos

$$\begin{aligned} 57{\times}36 &= (50 + 7){\times}(30 + 6) \\ &= 50{\times}30 + (7{\times}30) + (50{\times}6) + 7{\times}6. \end{aligned}$$

Aplicando novamente a propriedade distributiva, temos que

$$\begin{aligned} 57{\times}36 &= (5{\times}3){\times}100 + ((7{\times}3) + (5{\times}6)){\times}10 + 7{\times}6 \\ &= 15{\times}100 + 51{\times}10 + 42. \end{aligned}$$

(Veja que a multiplicação cruzada aparece na penúltima igualdade.) Assim, $57{\times}36$ são 15 centenas, 51 dezenas e 42 unidades. Mas 42

[2] Quando se usa caneta e papel, geralmente é mais eficiente resolver as operações da direita para a esquerda.

unidades são 4 dezenas mais duas unidades, ao passo que 51 dezenas são 5 centenas mais uma dezena; dessa forma, justificamos levar 4 para a "casa" das dezenas e 5 para a "casa" das centenas). Consequentemente, 57×36 são $15 + 5 = 20$ centenas, $1 + 4 = 5$ dezenas e 2 unidades.

2.5 – Divisões de números naturais

Nesta seção, estudaremos a divisão de um número natural por outro, diferente de zero. Por exemplo, podemos dividir 24 unidades em 4 partes de 6 unidades ou em 6 partes de 4 unidades. Representamos essas divisões, respectivamente, por

$$24 : 4 = 6 \quad \text{e} \quad 24 : 6 = 4$$

ou

$$\frac{24}{4} = 6 \quad \text{e} \quad \frac{24}{6} = 4.$$

Esses divisões são justificadas pelo fato de que

$$4\times6 = 24 \quad \text{e} \quad 6\times4 = 24,$$

como vimos na tabuada acima. Observamos que, *agrupando* as 24 unidades em conjuntos de 6 unidades ou de 4 unidades, não há *restos*. Temos um exemplo de divisão exata. Não seria o caso das divisões

$$\frac{25}{4} \text{ ou } 25 : 4, \quad \frac{26}{4} \text{ ou } 26 : 4, \quad \frac{27}{4} \text{ ou } 27 : 4,$$

em que temos, nessa ordem,

$$\begin{aligned} 25 &= 4\times6 + 1,\\ 26 &= 4\times6 + 2,\\ 27 &= 4\times6 + 3. \end{aligned}$$

Nessas divisões, temos *restos* 1, 2 e 3, respectivamente, que, por serem números menores que 4, não permitem, obviamente, formar mais grupos de 4 unidades. Continuando, vejamos que

$$28 = 4\times6 + 4 = 4\times7,$$

ou seja, que formamos mais um grupo de 4 unidades com o resto igual a 4, finalizando a divisão com resto 0. Prosseguindo, temos

$$29 = 4\times6 + 5 = 4\times7 + 1,$$
$$30 = 4\times6 + 6 = 4\times7 + 2,$$

e assim por diante, com os restos $0, 1, 2$ e 3 aparecendo **sucessiva** e **repetidamente** nas divisões por 4.

De modo geral, ao dividir um número por 4, devemos encontrar o múltiplo de 4 **mais próximo** e **menor** que este dado número. Por exemplo, ao dividirmos 253 por 4, podemos ver que

$$\begin{aligned} 253 : 4 &= (24\times10 + 13) : 4 = (4\times6\times10 + 13) : 4 \\ &= 6\times10 + 13 : 4 = 60 + (12 + 1) : 4 \\ &= 60 + (3\times4 + 1) : 4 = 63 + 1 : 4. \end{aligned}$$

Resumimos o resultado dessa *sequência de divisões*, escrevendo

$$253 = 4\times63 + 1,$$

onde 1 representa o *resto* desta divisão e o resultado 63 é o *quociente* da divisão de 253 (o *dividendo*) por 4 (o *divisor*). Note que o *algoritmo da divisão*, isto é, a sequência de passos, parou ao chegarmos a um número, o resto, que não poderia mais ser dividido em partes de 4 unidades. De fato, dividindo 1 por 4, temos apenas uma *fração* de uma unidade, que denotamos por $\frac{1}{4}$.

De modo geral, a divisão (chamada euclidiana) de um número natural m, o dividendo, por um número natural não-nulo n, o divisor, resulta em um quociente q e em um resto r, que pode ser igual a 0 e é menor do que o divisor n. Escrevemos:

$$\underset{\text{dividendo}}{m} = \overset{\text{divisor}}{n}\times\underset{\text{quociente}}{q} + \overset{\text{resto}}{r}$$

Para reforçar nosso entendimento da divisão euclidiana, consideremos, agora, a divisão de 6.157 por 24. Lembremos que, nas seções anteriores, tínhamos calculado

$$6.144 = 24\times256.$$

Logo, *sabendo* desta informação, decompomos 6.561 em $6.144 + 417$ e escrevemos

$$6.561 : 24 = (6.144 + 417) : 24 = 6.144 : 24 + 417 : 24 = 256 + 417 : 24.$$

Note que o *algoritmo euclidiano da divisão* não pára nesta etapa: devemos prosseguir dividindo 417 por 24. A ideia fundamental, na próxima etapa, é encontrar o *múltiplo* de 24 mais próximo e menor que 417. Podemos tentar $24 \times 20 = 480$, mas este número é maior que 417. Portanto, outra tentativa seria $24 \times 15 = 12 \times 2 \times 15 = 12 \times 30 = 360$, mas, desta vez, obtemos uma *aproximação* ainda não muito boa de 417, já que

$$417 = 360 + 57 = 24 \times 15 + \color{red}{57}.$$

Uma vez que $57 = 48 + 9 = 24 \times 2 + 9$, concluímos que a melhor aproximação de 417 por um múltiplo de 24 é $24 \times 15 + 24 \times 2 = 360 + 48 = 408$. Em resumo, escrevemos

$$\begin{aligned} 6.165 : 24 &= 256 + 417 : 24 = \\ &= 256 + (24 \times 17 + 9) : 24 \\ &= 256 + 17 + 9 : 24 = 273 + 9 : 24. \end{aligned}$$

O algoritmo pára aqui, uma vez que o resto 9 é menor que 24 e, portanto, dividindo este resto por 24, obtemos apenas uma fração, $\frac{9}{24}$ de uma unidade. Concluímos que

$$6.561 = 24 \times 273 + 9.$$

Observe que começamos estas contas com a informação, já *conhecida*, de que $6.144 = 24 \times 256$. Caso não tivéssemos essa informação, como poderíamos proceder? O algoritmo da divisão neste caso, poderia ser executado da seguinte forma

$$\begin{aligned}
6.561 : 24 &= (6.500 + 61) : 24 = (65\times 100 + 61) : 24 \\
&= [(48 + 17)\times 100 + 61] : 24 = (48\times 100) : 24 + (17\times 100 + 61) : 24 \\
&= 2\times 100 + (176\times 10 + 1) : 24 \\
&= 2\times 100 + [(168 + 8)\times 10 + 1] : 24 \\
&= 2\times 100 + (168\times 10) : 24 + (8\times 10 + 1) : 24 \\
&= 2\times 100 + 7\times 10 + (72 + 9) : 24 \\
&= 2\times 100 + 7\times 10 + 72 : 24 + 9 : 24 \\
&= 2\times 100 + 7\times 10 + 3 + 9 : 24 = 273 + 9 : 24.
\end{aligned}$$

Podemos organizar os passos do algoritmo da divisão com o uso do seguinte diagrama (“método da chave”):

$$\begin{array}{rrrrr|l}
 & 6 & 5 & 6 & 1 & 2\,4 \\ \cline{6-6}
- & 4 & 8 & & & 2\,7\,3 \\ \cline{2-3}
 & 1 & 7 & 6 & & \\
- & 1 & 6 & 8 & & \\ \cline{2-4}
 & & & 8 & 1 & \\
 & & - & 7 & 2 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 9 &
\end{array}$$

Para reforçar as ideias, vamos, agora, usar o “método da chave” para dividir 98.016 por 24:

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
 & 9 & 8 & 0 & 1 & 6 & 2\,4 \\ \cline{7-7}
- & 9 & 6 & & & & 4\,0\,8\,4 \\ \cline{2-3}
 & & 2 & 0 & & & \\
 & - & & 0 & & & \\ \cline{3-4}
 & & 2 & 0 & 1 & & \\
 & - & 1 & 9 & 2 & & \\ \cline{3-5}
 & & & & 9 & 6 & \\
 & & & - & 9 & 6 & \\ \cline{5-6}
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

O primeiro passo no algoritmo representado pelo diagrama acima é decompor 98.016 em 98.000 + 16. Em seguida, para dividir 98.000 por 24, verificamos que o múltiplo de 24 mais próximo e menor que

98 é 96 $= 24\times4$. Logo, $96.000 = 24\times4.000$. Calculamos a diferença $98.000-96.000 = 2.000$. Portanto, precisamos dividir as 2.016 unidades restantes por 24. Para isto, decompomos $2016 = 2010+6$. Observamos que o múltiplo de 24 mais próximo e menor que 201 é $192 = 24\times8$. Logo, $1.920 = 24\times80$. Calculamos a diferença $2.010 - 1.920 = 90$. Somando estas 90 unidades às 6 restantes, temos 96. Dividimos este resto, 96, por 24, obtendo $96 = 24\times4$. Com estas divisões sucessivas, concluímos que

$$98.016 = 24\times(4.000 + 80 + 4) = 24\times4.084.$$

Observamos que as várias etapas nas divisões sucessivas aparecem naturalmente quando efetuamos a multiplicação do divisor e do quociente usando a distributividade, decompondo ambos. Temos

$$\begin{aligned} 24\times4.084 &= 24\times(4.000 + 80 + 4) = 24\times4\times1.000 + 24\times(80 + 4) \\ &= 96.000 + 24\times8\times10 + 24\times4 \\ &= 96.000 + 1.920 + 96. \end{aligned}$$

Observação 2.10 — Nota ao professor. Enfatizamos a importância de efetuar o algoritmo escolhendo as melhores aproximações em cada etapa. Isso envolve bastante prática com a tabuada de multiplicação. Recomendamos que o(a) professor(a) proponha exercícios práticos com o uso de cálculo mental, aproximações, arredondamentos e estimativas.

Exercício 2.1 Estime o produto 732×341.

Solução. Arrendondamos 732 por 700 e 341 por 300 obtendo a seguinte estimativa para o produto

$$700\times300 = 210.000$$

Para melhorar esta estimativa, somamos a este resultado os seguintes produtos

$$700\times40 = 28.000 \quad \text{e} \quad 300\times30 = 9.000,$$

obtendo

$$210.000 + 28.000 + 9.000 = 247.000,$$

estimativa melhor para o produto exato, que é igual a 249.612. ■

Exercício 2.2 Estime o quociente 24.961 : 71.

Solução. Arredondamos 71 por 70 e 24.961 por 21.000, o múltiplo de 70 **mais próximo** e **menor** que 24.961. O quociente estimado é 21.000 : 70 = 300. Agora, arredondamos a diferença 24.961 − 21.000 = 3.961 para 3.500, o múltiplo de 70 mais próximo e menor que 3.961. Dividindo 3.500 por 70, obtemos 50. Logo, melhoramos a estimativa do quociente para 300 + 50 = 350. Podemos resumir estas contas, escrevendo-as da seguinte forma

$$\frac{24.961}{71} \approx \frac{21.000 + 3.500}{70} = 300 + 50 = 350,$$

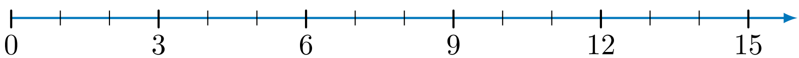
onde o símbolo ≈ significa "aproximadamente". Observe que o quociente exato é 351, com resto igual a 40. ■

2.6 – Múltiplos e divisores

Fixemos um número natural, por exemplo, 3. Somando parcelas iguais a 3, obtemos todos os seus *múltiplos*:

$$\begin{aligned}
1{\times}3 &= 3,\\
2{\times}3 &= 3 + 3 = 6,\\
3{\times}3 &= 3 + 3 + 3 = 9,\\
4{\times}3 &= 3 + 3 + 3 + 3 = 12,
\end{aligned}$$

e assim por diante. Esses múltiplos de 3 podem ser representados na reta da seguinte forma:



Incluímos o 0, que também é um múltiplo de 3 pois $0{\times}3 = 0$. Obviamente, esta lista de múltiplos é infinita. De fato, todos os números da forma

$$n{\times}3 = \underbrace{3 + 3 + \ldots + 3}_{n \text{ vezes}}$$

são múltiplos de 3. No último produto acima, a letra n representa um número natural qualquer, isto é, n pode ser igual a $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ Ao efetuar os sucessivos produtos $n{\times}3$, construímos a linha da tabuada de multiplicação do número 3. Dizemos, ainda, que 3 é um *divisor* ou *submúltiplo* (ou *fator*) dos números $0, 3, 6, 9, \ldots$, da forma $n{\times}3$.

Observe que os múltiplos de três são pontos na reta, espaçados um do outro por uma distância sempre igual a 3. Assim, "pulamos" de ponto em ponto, da esquerda para a direita, somando 3 repetidamente.

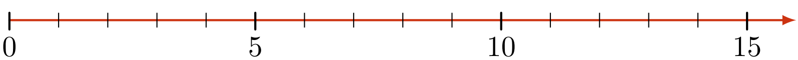
De modo similar, os múltiplos de 5 são os números da forma

$$n{\times}5 = \underbrace{5 + 5 + \ldots + 5}_{n \text{ vezes}},$$

onde n é um número natural. Por exemplo, os números

$$\begin{aligned} 0{\times}5 &= 0, \\ 1{\times}5 &= 5, \\ 2{\times}3 &= 5 + 5 = 10, \\ 3{\times}5 &= 5 + 5 + 5 = 15 \end{aligned}$$

são múltiplos de 5, os quais podem ser representados na reta como segue:



Na reta acima, os números marcados estão espaçados por distâncias sempre iguais a 5. Assim, "avançamos" de 5 em 5, determinando os sucessivos múltiplos de 5. Neste caso, observamos que 5 é um *divisor* ou *submúltiplo* (ou *fator*) comum a todos os números $0, 5, 10, 15, \ldots$, da forma $n{\times}5$.

Em resumo, dizemos que 90 é um múltiplo de 3 (ou, equivalentemente, que 3 é fator de 90), visto que

$$90 = 3 \times 30,$$

ou seja,

$$\frac{90}{3} = 90 : 3 = 30.$$

Da mesma forma, dizemos que 5 é fator de 90 (ou, equivalentemente, que 90 é múltiplo de 5) uma vez que

$$\frac{90}{5} = 90 : 5 = 18,$$

ou seja,

$$90 = 5 \times 16.$$

Em ambos os exemplos, temos *divisões exatas*, isto é, com resto igual a zero.

Uma forma de determinar múltiplos e divisores e de explicar essas divisões exatas é a **fatoração**: fatorar um dado número significa escrevê-lo como produto de seus divisores ou *fatores*. Por exemplo, temos

$$\begin{aligned} 90 &= 2 \times 45 \\ &= 2 \times 3 \times 15 \\ &= 2 \times 3 \times 3 \times 5. \end{aligned}$$

Note que a sequência de fatorações pára na terceira linha, pois os números $2, 3$ e 5 já "não podem" mais ser divididos: de modo mais claro, cada um desses números tem como divisores apenas o número 1 e o próprio número. São exemplos de **números primos**.

Um número natural é *primo* quando tem exatamente dois fatores positivos: o número 1 e o próprio número, necessariamente. Alguns exemplos de números primos são $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$, bem como os números 1.597 e 2.147.483.647 (como verificar?). Observe que o número 1 *não é primo* pois tem um único fator positivo, o próprio número 1. Um número *composto* é um número natural, diferente de 0 e 1, que não é primo. Por exemplo, $6 = 2\times 3$ é um número composto.

Observação 2.11 — Nota ao professor. Neste ponto, podem ser sugeridas atividades de avaliação formativa sobre a história dos números primos. Há materiais interessantes que aliam notas históricas, curiosidades e elementos da Matemática refinada que tem sido usada na pesquisa sobre esses números. Mencionamos, por exemplo,

https://primes.utm.edu/curios/page.php/1597.html

bem como o conhecido livro de Marcus Du Sautoy, *A Música dos Números Primos*.

Portanto, concluímos que o número 90 é fatorado em seus *fatores primos* da seguinte forma, que é única, a menos da ordem dos fatores:

$$90 = 2\times 3\times 3\times 5.$$

Esta fatoração explica as divisões *exatas* de 90 por seus divisores ou fatores. De fato, temos

$$\frac{90}{3} = \frac{2\times 3\times 3\times 5}{3} = 2\times 3\times 5 = 30.$$

De forma similar, temos

$$\frac{90}{5} = \frac{2\times 3\times 3\times 5}{5} = 2\times 3\times 3 = 18.$$

Além dos fatores primos 2, 3 e 5, o número 90 tem outros fatores ou divisores de 90, *compostos* por esses fatores primos, a saber,

$$\begin{aligned}
&2\times 3 = 6,\;\; 2\times 5 = 10,\;\; 3\times 3 = 9,\;\; 3\times 5 = 15,\\
&2\times 3\times 3 = 18,\;\; 2\times 3\times 5 = 30,\;\; 3\times 3\times 5 = 45,\\
&2\times 3\times 3\times 5 = 90.
\end{aligned}$$

Observe que os todos os divisores de 90 devem ter fatores iguais aos fatores de 90: um número que tiver um fator diferente dos fatores de

90 não pode ser um divisor de 90. Além disso, cada um destes fatores aparece no divisor, no máximo, o mesmo número de vezes em que aparece em 90. Por exemplo, temos

$$\frac{90}{15} = \frac{2\times 3\times 3\times 5}{3\times 5} = 2\times 3 = 6 \qquad \text{e} \qquad \frac{90}{18} = \frac{2\times 3\times 3\times 5}{2\times 3\times 3} = 5.$$

No entanto, observe que $12 = 2\times 2\times 3$ tem 2 fatores iguais a 2 e não apenas 1, como 90. Logo

$$\frac{90}{12} = \frac{2\times 3\times 3\times 5}{2\times 2\times 3}$$

não é uma divisão exata, ou seja, tem resto diferente de zero. Vejamos:

$$\frac{90}{12} = \frac{84+6}{12} = 7 + \frac{6}{12},$$

o que é uma forma de escrever

$$90 = 12\times 7 + 6.$$

Para fixar esses fatos, vejamos mais um exemplo, fatorando, agora, o número 675, ou seja, escrevendo esse número como produto de seus divisores ou *fatores*:

$$\begin{aligned} 675 &= 3\times 225 \\ &= 3\times 3\times 75 \\ &= 3\times 3\times 3\times 25 \\ &= 3\times 3\times 3\times 5\times 5. \end{aligned}$$

Aqui, também, a fatoração pára com esses fatores 3 e 5 que já não podem ser divididos em outros fatores menores, além de 1. Obtivemos, deste modo, a fatoração de 675 em *fatores primos*. Uma vez que

$$675 = 3\times 3\times 3\times 5\times 5,$$

observamos que $3\times 3\times 5 = 45$ é um divisor de 675. No entanto, $5\times 5\times 5 = 125$ não é divisor de 675, visto que tem 3 fatores iguais a 5, enquanto 675 tem apenas 2 fatores iguais a 5. De fato,

$$\frac{675}{125} = \frac{625+50}{125} = 5 + \frac{50}{125},$$

o que pode ser escrito como na forma da divisão euclidiana

$$675 = 125\times 5 + 50.$$

Observação 2.12 A existência da fatoração de um número natural maior que 1 em *fatores primos* (única, a menos da ordem dos fatores) é assegurada pelo chamado **Teorema Fundamental da Aritmética**, apresentado pelo matemático grego Euclides (que viveu entre os séculos III e II a.C.) em sua célebre obra *Os Elementos*.

Apresentemos mais um exemplo, mostrando de que modo podemos *compor* diferentes números com os mesmos fatores primos, repetindo-os de diferentes maneiras, em diferentes números de vezes. Por exemplo, determinemos as fatorações primas, únicas a menos da ordem dos fatores, dos números 315, 525 e 735. Temos, como nos exemplos anteriores,

$$315 = 3\times 105 = 3\times 3\times 35 = 3\times 3\times 5\times 7.$$

Na última linha, temos apenas os fatores primos $3, 5$ e 7, não havendo mais como prosseguir e encontrar fatores ainda menores. Escrevemos, sucintamente, esta fatoração prima usando a notação de *potências*, isto é,

$$315 = 3^{2}\times 5^{1}\times 7^{1},$$

o que significa que temos 2 fatores iguais a 3, 1 fator igual a 5 e 1 fator igual a 7. Procedendo da mesma forma, temos

$$525 = 3\times 175 = 3\times 5\times 35 = 3\times 5\times 5\times 7.$$

Paramos o processo na última igualdade, quando encontramos os fatores primos $3, 5$ e 7. Usando *potências* desses fatores, escrevemos a fatoração prima como

$$525 = 3^{1}\times 5^{2}\times 7^{1},$$

o que significa que temos 1 único fator igual a 3, 2 fatores iguais a 5 e 1 fator igual a 7. Finalmente, fatoramos 735, encontrando

$$735 = 3\times 245 = 3\times 5\times 49 = 3\times 5\times 7\times 7.$$

ou, em termos de potências dos fatores primos,

$$735 = 3^1 \times 5^1 \times 7^2.$$

Em resumo, obtivemos as seguintes fatorações em fatores primos:

$$\begin{aligned} 315 &= 3^2 \times 5^1 \times 7^1, \\ 525 &= 3^1 \times 5^2 \times 7^1, \\ 735 &= 3^1 \times 5^1 \times 7^2. \end{aligned}$$

Com essas fatorações, concluímos, por exemplo, que *qualquer múltiplo* de 315 e 525 deve ter, *pelo menos*, 2 fatores iguais 3, 2 fatores iguais a 5 e 1 fator igual a 7.

Múltiplos e divisores comuns

Observamos que 15 é um múltiplo *comum* de 3 e de 5: de fato, foi marcado tanto na reta dos múltiplos de 3 como na dos múltiplos de 5, como vimos na seção anterior. Estendendo as listas dos múltiplos de 3 e de 5, encontraremos outros múltiplos comuns a esses dois números. Vejamos: os primeiros múltiplos de 3 são

$$0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, \ldots,$$

enquanto os primeiros múltiplos de 5 são

$$0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, \ldots.$$

Perceba que, na lista dos múltiplos de 3, a cada **cinco** números encontramos um valor que também é múltiplo de 5: encontramos 0, 15, 30, 45, e assim por diante. Por outro lado, na lista dos múltiplos de 5 (ver acima), a cada **três** números, encontramos um múltiplo de 3. E os múltiplos encontrados são os mesmos que no caso anterior: 0, 15, 30, 45, e assim por diante. Esses números são os *múltiplos comuns* de 3 e 5.

O menor múltiplo comum positivo (diferente de 0, portanto) dos números 3 e 5 é 15; dizemos que esse número é o *mínimo múltiplo* *comum* ou MMC de 3 e 5. Nesse exemplo (mas não sempre, como veremos), o MMC é dado pelo produto de 3 e 5, ou seja,

$$\mathrm{MMC}(3,5) = 15 = 3\times 5.$$

Usando o mesmo processo descrito acima (isto é, comparando os múltiplos sucessivos de dois números para encontrar seu MMC), obtemos $\mathrm{MMC}(7,10) = 70$. De fato, os múltiplos positivos de 7 são:

$$7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, \ldots$$

E os múltiplos positivos de 10 são:

$$10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, \ldots$$

Com o mesmo argumento, podemos comprovar que $\mathrm{MMC}(3,20) = 60$ e $\mathrm{MMC}(9,11) = 99$. Para todos esses pares de números acima, seus respectivos mínimos múltiplos comuns são iguais a seus produtos. Porém, esta **não** é uma regra geral (um teorema, deveríamos dizer). De fato, vejamos o que ocorre com os múltiplos de 6 e 15. Os múltiplos de 6 são

$$0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, \ldots,$$

enquanto os múltiplos de 15 são

$$0, 15, 30, 45, 60, 75, 90, \ldots$$

Assim, vemos que o mínimo múltiplo comum de 6 e 15 é 30, e não $6\times 15 = 90$. Dessa forma, o mínimo múltiplo comum de dois números **nem sempre** é igual a seu produto. Uma forma de explicar isso é observar a *fatoração* dos números 6 e 15, ou seja, escrevermos esses números como produtos de seus divisores ou fatores. Temos

$$6 = 2\times 3 \qquad \text{e} \qquad 15 = 5\times 3.$$

Ou seja, 6 e 15 são ambos múltiplos de 3. Isto é, 3 é um divisor comum de 6 e 15. Logo, qualquer múltiplo de 6 e de 15 é também múltiplo de 3. Por exemplo, o produto de 6 e 15

$$90 = 6\times 15 = 2\times 3\times 5\times 3 = 2\times 5\times 3\times 3$$

é múltiplo comum desses dois números. Mas, podemos encontrar um múltiplo comum de 6 e 15 *menor* que seu produto, bastando suprimir um dos fatores iguais a 3. Obtemos, assim,

$$2\times5\times3 = 30.$$

Concluímos que 30 é o *mínimo múltiplo comum* de 6 e 15, pois eliminamos o fator 3 "a mais" e não há como eliminar outros além desse. Para reforçar o entendimento, calculemos, agora, o MMC de 12 e 18. O produto desses dois números,

$$12\times18 = 216,$$

é um múltiplo comum dos dois, mas não é o *mínimo múltiplo comum*. De fato, podemos *fatorar* 12 e 18, obtendo

$$12 = 2\times2\times3,$$
$$18 = 2\times3\times3.$$

Lembre-se que *fatorar* significa escrever um número como produto de seus divisores. A partir desta fatoração, observamos que *qualquer* múltiplo comum de 12 e 18 deve ter pelo menos 2 fatores iguais a 2 e 2 fatores iguais a 3. Ou seja, qualquer múltiplo comum de 12 e 18 deve ser múltiplo de

$$2\times2\times3\times3 = 36.$$

Este é o *mínimo* múltiplo comum de 12 e 18, isto é, $\text{MMC}(12, 18) = 36$. De fato, com 2 fatores iguais a 2 e 2 fatores iguais a 3, temos

$$2\times2\times3\times3 = 12\times3,$$
$$2\times2\times3\times3 = 2\times18.$$

Observe que o produto de 12 e 18 seria *fatorado* como

$$216 = 12\times18 = 2\times2\times2\times3\times3\times3,$$

ou seja, teríamos 3 fatores iguais a 2 e 3 fatores iguais a 3. Eliminando um fator 2 e um fator 3, obtemos o *mínimo múltiplo comum*:

$$\frac{216}{6} = \frac{2\times2\times2\times3\times3\times3}{2\times3} = 2\times2\times3\times3 = 36.$$

Para finalizar e fixar ideias, discutamos mais um exemplo: o MMC de 90 e 675. Lembremos que as fatorações desses números em *fatores primos* são dadas por

$$90 = 2\times3\times3\times5,$$
$$675 = 3\times3\times3\times5\times5.$$

Portanto, qualquer múltiplo comum a 90 e 675 deve ter, *pelo menos*, 1 fator igual a 2, 3 fatores iguais a 3 e 2 fatores iguais a 5, isto é, deve ter, no mínimo, o fator

$$2\times3\times3\times3\times5\times5 = 1.350.$$

Este é o *mínimo múltiplo comum* de 90 e 675, ou seja, $\mathrm{MMC}(90, 675) = 1.350$. Perceba que o produto de 90 e 675

$$90\times675 = (2\times3\times3\times5)\times(3\times3\times3\times5\times5) = 2\times3\times3\times3\times3\times3\times5\times5\times5$$

não é o mínimo múltiplo comum desses dois números. De fato, para obter o MMC de 90 e 675, devemos "eliminar" 2 fatores iguais a 3 e 1 fator igual a 5 do produto, obtendo

$$\frac{2\times3\times3\times3\times3\times3\times5\times5\times5}{3\times3\times5} = 2\times3\times3\times3\times5\times5 = 1.350 = \mathrm{MMC}(90, 675).$$

Observe que o número $3\times3\times5 = 45$ é um *divisor comum* de 90 e 675. De fato, é o maior ou *máximo divisor comum* de 90 e 675, o que denotamos por

$$\mathrm{MDC}(90{,}675) = 45.$$

Logo, neste caso,

$$\frac{90\times675}{\mathrm{MDC}(90, 675)} = \mathrm{MMC}(90, 675). \tag{2.5}$$

Com base nos exemplos acima, formulamos as seguintes "hipóteses" ou "conjecturas", para usar um termo da tradição matemática.

Conjectura: o MMC de dois números é igual a seu produto se, e somente se, o único divisor ou fator (positivo) comum aos dois números é o número 1.

Conjectura: o MMC e o MDC de dois números naturais m e n, diferentes de zero, estão relacionados da seguinte forma

$$\frac{m\times n}{\mathrm{MDC}(m,n)} = \mathrm{MMC}(m,n) \tag{2.6}$$

ou, equivalentemente,

$$m\times n = \mathrm{MMC}(m,n)\times \mathrm{MDC}(m,n). \tag{2.7}$$

Esta conjectura pode ser **demonstrada** observando que, para dois naturais quaisquer, m e n, o expoente de cada fator primo na fatoração de $m\times n$ é a soma dos expoentes dos fatores nas fatorações de cada um. Por outro lado, a soma pode sempre ser vista como a soma do maior com o menor deles. Vamos estudar mais alguns exemplos para nos convencermos desta conjectura. Os exemplos, por si sós, não *provam matematicamente* a conjectura: são apenas evidências que usamos para torná-las plausíveis e *induzí-las*.

Por exemplo, relembremos as fatorações primas dos números 315, 525 e 735:

$$\begin{aligned} 315 &= 3^2\times 5^1\times 7^1,\\ 525 &= 3^1\times 5^2\times 7^1,\\ 735 &= 3^1\times 5^1\times 7^2. \end{aligned}$$

Com essas fatorações, concluímos que *qualquer múltiplo* de 315 e 525 deve ter, *pelo menos*, 2 fatores iguais 3, 2 fatores iguais a 5 e 1 fator igual a 7. Logo, o *menor* dos múltiplos comuns de 315 e 525 é

$$\mathrm{MMC}(315,525) = 3^2\times 5^2\times 7^1 = 1.575.$$

Da mesma forma, *qualquer múltiplo* de 315 e 735 deve ter, *pelo menos*, 2 fatores iguais 3, 1 fator igual a 5 e 2 fatores iguais a 7. Logo, o *menor* dos múltiplos comuns de 315 e 735 é

$$\mathrm{MMC}(315,735) = 3^2\times 5^1\times 7^2 = 2.205.$$

Analogamente, todo múltiplo comum de 525 e 735 deve ter, pelo menos, 1 fator igual a 3, 2 fatores iguais a 5 e 2 fatores iguais a 7. Portanto,

$$\text{MMC}(525{,}735) = 3^1 \times 5^2 \times 7^2 = 3.675.$$

Concluímos, além disso, que o mínimo múltiplo comum dos três números, 315, 525 e 735, tem 2 fatores iguais a 3, 2 fatores iguais a 5 e 2 fatores iguais a 7, isto é,

$$\text{MMC}(315{,}525{,}735) = 3^2 \times 5^2 \times 7^2 = 11.025.$$

Agora, determinemos os *divisores comuns* desses números. Por exemplo, observamos que *qualquer divisor* ou *fator* de 315 e 525 deve ter, *no máximo*, 1 fator igual a 3, 1 fator igual a 5 e 1 fator igual a 7. Ou seja, os divisores comuns de 315 e 525 são

$$1, 3, 5, 7, 3\times 5 = 15, 3\times 7 = 21, 5\times 7 = 35, 3\times 5\times 7 = 105.$$

Logo, o *máximo divisor comum* de 315 e 525 é

$$\text{MDC}(315{,}525) = 105.$$

Da mesma forma, deduzimos que

$$\text{MDC}(315, 735) = 105 \qquad \text{e} \qquad \text{MDC}(525, 735) = 105.$$

De fato, observamos que

$$\begin{aligned} 315 &= 3\times 105, \\ 525 &= 5\times 105, \\ 735 &= 7\times 105. \end{aligned}$$

Concluímos que $\text{MDC}(315, 525, 735) = 105$. Observemos que

$$\begin{aligned} 315\times 525 &= (3^2\times 5\times 7)\times(3\times 5^2\times 7) = (3\times 5\times 7)\times(3^2\times 5^2\times 7) \\ &= \text{MDC}(315, 525)\times \text{MMC}(315{,}525), \\ 315\times 735 &= (3^2\times 5\times 7)\times(3\times 5\times 7^2) = (3\times 5\times 7)\times(3^2\times 5\times 7^2) \\ &= \text{MDC}(315, 735)\times \text{MMC}(315{,}735), \\ 525\times 735 &= (3^2\times 5\times 7)\times(3\times 5^2\times 7^2) = (3\times 5\times 7)\times(3\times 5^2\times 7^2) \\ &= \text{MDC}(525, 735)\times \text{MMC}(525, 735). \end{aligned}$$

Podemos *induzir* duas regras práticas a partir desses exemplos:

- para determinar o MMC de dois números, multiplicamos *todos* os fatores primos desses dois números, elevados às *maiores* potências em que aparecem em cada número;
- para determinar o MDC de dois números, multiplicamos os fatores primos *comuns* desses dois números, elevados às *menores* potências em que aparecem em cada número.

Refinando a terminologia acima, dizemos que dois números inteiros são *primos entre si* quando seu único fator positivo comum é o próprio 1. Consequentemente, o *maior divisor comum* (MDC) de dois números primos entre si é o número 1. Em particular, usando a expressão 2.7 acima, verifica-se facilmente que o MMC de dois números é igual a seu produto apenas quando esses dois números são primos entre si. Realmente, nesse caso seu MDC é igual a 1.

Por exemplo, dados os números $m = 9.000$ e $= 668$, com fatorações da forma

$$m = 9.000 = 2^3 \times 3^2 \times 5^3,$$
$$n = 1.008 = 2^4 \times 3^2 \times 7,$$

temos

$$\text{MMC}(m, n) = 2^4 \times 3^2 \times 5^3 \times 7 = 126.000$$

e

$$\text{MDC}(m,n) = 2^3 \times 3^2 = 72.$$

Outra maneira de calcular o MDC desses dois números é usar o *algoritmo euclidiano da divisão*, que estudamos antes. Dividindo 9.000 por 1.008, temos

$$9.000 = 1.008 \times 8 + 936.$$

Um divisor comum de 9.000 e de 1.008 é também divisor de 936 assim como um divisor comum de 1.008 e 936 é também divisor de 9.000. Assim, deduzimos que

$$\text{MDC}(9.000, 1.008) = \text{MDC}(1.008, 936).$$

Agora, dividindo 1.008 por 936 com o uso do algoritmo euclidiano da divisão, obtemos

$$1.008 = 936 \times 1 + 72.$$

Desta vez, observamos que um divisor comum de 1.008 e de 936 é também divisor de 72 assim como um divisor comum de 936 e 72 é também divisor de 1.008. Assim, deduzimos que

$$\text{MDC}(9.000, 1.008) = \text{MDC}(1.008, 936) = \text{MDC}(936, 72)$$

Prosseguindo com as divisões sucessivas, temos

$$936 = 72\times 13,$$

uma divisão exata com resto 0. Logo, deduzimos, com esta sequência de divisões, que

$$\text{MDC}(9.000, 1.008) = \text{MDC}(1.008, 936) = \text{MDC}(936, 72) = 72,$$

como já havíamos demonstrado antes.

Observação 2.13 — Nota ao professor. Esta seção de nosso estudo oferece muitas possibilidades de investigação científica para os alunos. Sugerimos, por exemplo, pesquisa sobre a utilização dos números primos em Criptografia, aplicação de extrema importância para a proteção de dados na *internet*. A este respeito, há o texto do Prof. Manoel Lemos (UFPE), disponível em https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/PM_04.pdf além de *O Livro dos Códigos*, de Simon Singh. Outra área bastante ativa é a da busca de padrões na distribuição de números primos na reta numérica, um dos principais temas da chamada Teoria Analítica dos Números.

2.7 – Exercícios resolvidos e propostos

Sequência 1

Exercício 2.3 Calcule os seguintes produtos:

(a) 50×16. (b) 52×16. (c) 52×18. (d) 520×160.

Solução. Temos $50\times16 = 50\times2\times8 = 100\times8 = 800$. Assim,

$$52\times16 = (50+2)\times16 = 50\times16 + 2\times16 = 800 + 32 = 832.$$

Da mesma forma,

$$52\times18 = 52\times(16+2) = 52\times16 + 52\times2 = 832 + 104 = 936.$$

Além disso, $520\times160 = 52\times16\times10\times10 = 832\times100 = 83.200$. ■

Exercício 2.4 Calcule os seguintes produtos usando diferentes estratégias:

(*a*) 2020×2020. (*b*) 2019×2021. (*c*) 365×24. (*d*) 99×999.

Solução. a) Temos

$$\begin{aligned} 2020\times2020 &= (2000+20)\times(2000+20)\\ &= 2000\times2000 + 2000\times20 + 20\times2000 + 20\times20\\ &= 4000000 + 80000 + 400 = 4080400. \end{aligned}$$

b) Agora,

$$\begin{aligned} 2019\times2021 &= (2020-1)\times(2020+1)\\ &= 2000\times2000 + \cancel{2020\times1} - \cancel{1\times2020} - 1\times1\\ &= 2020\times2020 - 1 = 4080400 - 1 = 4080399. \end{aligned}$$

c) Podemos calcular este produto da seguinte forma

$$\begin{aligned} 365\times24 &= 360\times24 + 5\times24 = 12\times30\times12\times2 + 10\times12\\ &= 144\times2\times30 + 120 = 288\times30 + 120 = 8640 + 120 = 8760. \end{aligned}$$

De outro modo, calculamos

$$\begin{aligned} 365\times24 &= 365\times2\times12 = (600+130)\times12 = 7200 + 130\times12\\ &= 7200 + 120\times12 + 10\times12 = 7200 + 1440 + 120\\ &= 7200 + 1560 = 8760. \end{aligned}$$

d) Desta vez, calculamos

$$\begin{aligned} 99\times 999 &= 99\times(1000-1) = 99000-99 = 90000+9000-99 \\ &= 90000+8900+100-99 = 90000+8900+1 = 98901, \end{aligned}$$

resultado que pode ser obtido também da seguinte forma

$$\begin{aligned} 99\times 999 &= (100-1)\times 999 = 99900-999 = 99000-99 \\ &= 98900+100-99 = 98900+1 = 98901. \end{aligned}$$

■

Exercício 2.5 Efetue as seguintes divisões usando diferentes estratégias:

(a) 40044 : 6. (b) 40046 : 6. (c) 40044 : 12. (d) 40046 : 39.

Solução. a) Temos

$$\begin{aligned} 40044 &= 36000+4000+44 = 36000+3600+400+44 \\ &= 36000+3600+360+40+44 \\ &= 36000+3600+360+36+4+44 \\ &= 36000+3600+360+36+48 \\ &= 6\times 6000+6\times 600+6\times 60+6\times 6+6\times 8 \\ &= 6\times(6000+600+6+8) = 6\times 6674. \end{aligned}$$

b) Com isto, calculamos

$$40046 = 40044+2 = 6\times 6674+2,$$

uma divisão não exata com quociente 6674 e resto 2.
c) Observe que $12 = 6\times 2$. Assim, dividir 40044 por 12 significa dividir inicialmente por 6 e, em seguida, dividir o resultado por 2. Assim

$$\frac{40044}{12} = \frac{6\times 6674}{6\times 2} = \frac{6674}{2} = 3337.$$

Podemos obter este resultado diretamente, calculando, como antes

$$\begin{aligned}
40044 &= 36000 + 3600 + 360 + 36 + 48 \\
&= 12{\times}3000 + 12{\times}300 + 12{\times}30 + 12{\times}3 + 12{\times}4 \\
&= 6{\times}(3000 + 300 + 30 + 7) = 6{\times}3337.
\end{aligned}$$

Uma terceira forma de calcular esta divisão é observar que $12 = 4{\times}3$: dividimos 40044 por 4, obtendo 10011 e, em seguida, dividimos este resultado por 3, obtendo

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ \cline{7-7}
- & \underline{\;} & \underline{9} & & & & 3\,3\,3\,7 \\
 & & 1 & 0 & & & \\
 & - & \underline{\;} & \underline{9} & & & \\
 & & & 1 & 1 & & \\
 & & - & \underline{\;} & \underline{9} & & \\
 & & & & 2 & 1 & \\
 & & & - & \underline{2} & \underline{1} & \\
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

■

Observação 2.14 — Nota ao professor. Importante apresentar ao aluno as muitas possibilidades de procedimentos corretos e justificados que, em casos como os dos exercícios anteriores, podem simplificar multiplicações e divisões.

Observação 2.15 — Nota ao professor. Vez por outra, usamos a barra horizontal como em

$$\frac{25}{4}$$

para simbolizar a divisão $25 : 4$. Este uso antecipa a discussão de *frações*, que faremos em seguida, relacionando-as à operação de divisão desde já.

Exercício 2.6 Uma grande escola organizou seus alunos do Ensino Médio em 18 turmas de 35 alunos. Se fossem igualmente agrupados em 15 turmas, quantos alunos haveria por turma?

Solução. O número total de alunos é dado por

$$18\times35 = 6\times3\times5\times7 = 15\times6\times7 = 15\times42.$$

Portanto, os alunos podem ser reagrupados em 15 turmas com 42 alunos cada. Note que não é preciso efetuar o produto para resolvermos o problema! De todo modo, temos, facilmente $18\times35 = 9\times2\times35 = 9\times70 = 630$ alunos. ■

Exercício 2.7 Em uma divisão, o divisor é 29 e o quociente é igual a 15. Sabendo que o resto dessa divisão é o maior possível, qual é o valor do dividendo?

(a) 239. (b) 293. (c) 449. (d) 463. (e) 827.

Solução. Em uma divisão por 15, o maior resto possível é 14. Assim, o dividendo é igual a $15\times29 + 14$. Para calcular este valor, efetuamos estas operações da seguinte forma (que não é única):

$$15\times29 + 14 = 15\times29 + 15 - 1 = 15\times30 - 1 = 450 - 1 = 449$$

Portanto, a alternativa correta é a de letra (c). ■

Exercício 2.8 Carla ganhou de presente de aniversário o Jogo da Vida. Depois de jogar uma partida, ela somou suas notas e descobriu que tinha 6050 reais. Como nesse jogo há somente notas de 100 reais, de 10 reais e de 1 real, Carla pode ter ganho:

(a) 6 notas de 100 reais e 5 notas de 1 real.
(b) 6 notas de 100 reais e 5 notas de 10 reais.
(c) 60 notas de 100 reais e 5 notas de 1 real.
(d) 60 notas de 100 reais e 5 notas de 10 reais.
(e) 600 notas de 10 reais e 50 notas de 10 reais.

Exercício 2.9 A área de um retângulo é igual a $180\,\text{cm}^2$. Se a sua altura mede 12 cm, qual é a medida de sua base?

(a) 8 cm
(b) 10 cm
(c) 12 cm
(d) 14 cm
(e) 15 cm

Exercício 2.10 Uma empresa tem 50 funcionários. O gasto com cada funcionário é de R$ 990,00 (salário) e mais R$ 330,00 (cesta básica). Quanto essa empresa gasta com seus funcionários?

(a) R$ 76.000,00
(b) R$ 66.000,00
(c) R$ 65.000,00
(d) R$ 49.500,00
(e) R$ 16.500,00

Solução. Podemos resolver o problema de diversas maneiras. Por exemplo, podemos começar somando os custos com cada funcionário, isto é, calculando

$$990 + 330 = 1320$$

e, em seguida, multiplicar o resultado por 50. Uma vez que $50 = 100 : 2$, temos

$$1320\times 50 = 1320\times 100 : 2 = 660\times 100 = 66.000 \text{ reais},$$

o que corresponde à alternativa (b). ■

Exercício 2.11 Em Borgeslândia, existe uma biblioteca com 50.070 livros disponíveis. Todos estão dispostos em estantes, que comportam 610 livros cada. Quantas estantes completamente cheias são necessárias para guardar todos esses livros? Quantos livros devem ficar na estante que não estará completa?

Solução. Apresentando a divisão 50070 : 610 usando uma “chave”, temos

$$
\begin{array}{r|l}
50070 & 610 \\ \cline{2-2}
-\underline{4880} & 82 \\
1270 & \\
-\underline{1220} & \\
50 &
\end{array}
$$

Para verificar estes cálculos, efetuamos a multiplicação do quociente do divisor, temos

$$
\begin{aligned}
&82\times 610 + 50 = 80\times 610 + 2\times 610 + 50 = 48800 + 1220 + 50 \\
&= 48800 + 1270 = 50070
\end{aligned}
$$

Concluímos que serão usadas 82 estantes completamente cheias (cada uma com 610 livros) e 1 estante com apenas 50 livros. ■

Exercício 2.12 Patrícia foi com mais quatro amigas a uma pizzaria e comeram uma pizza que custou R\$ 50,00 e outra pizza que custou R\$ 30,00. Para beber, cada menina pediu dois copos de suco de laranja. Cada copo de suco custou R\$ 5,00. Sabendo que Patrícia e suas amigas dividiram a conta igualmente, qual foi o valor pago por cada uma delas?

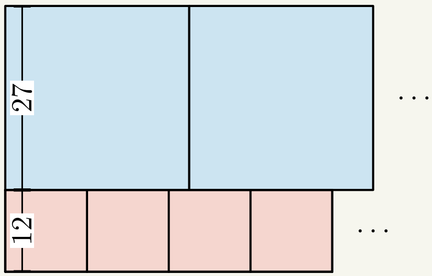
(a) R\$ 21,00
(b) R\$ 26,00
(c) R\$ 31,00
(d) R\$ 40,00
(e) R\$ 130,00

Exercício 2.13 Em uma fila para comprar ingressos para um jogo de futebol, havia 100 torcedores aguardando atendimento. Se 5 pessoas são atendidas a cada 3 minutos, qual a estimativa do tempo para o centésimo torcedor ser atendido?

(a) 30 minutos
(b) 40 minutos

(c) 50 minutos
(d) 60 minutos
(e) 61 minutos

Exercício 2.14 Para revestir uma região retangular, utilizamos placas quadradas de 27 centímetros de lado e placas quadradas menores, com 12 centímetros de lado, até que as laterais estejam perfeitamente alinhadas, conforme a seguinte figura sugere.



Qual será o comprimento dessa região retangular?

(a) 54 (b) 108 (c) 216 (d) 324

Solução. As placas estarão perfeitamente alinhadas pela *primeira vez* em um comprimento que seja o primeiro múltiplo comum de 12 e de 27 centímetros. Ou seja, o comprimento que buscamos é o *mínimo múltiplo comum* de $12 = 2^2 \times 3$ e $27 = 3^3$, dado por

$$\text{MDC}(12, 27) = 2^2 \times 3^3 = 36 \times 3 = 108 \text{ centímetros},$$

o que corresponde a $108 : 27 = 4$ placas de lado maior alinhadas a $108 : 12 = 9$ placas de lado menor. ■

Obs Lembre da notação de potências: por exemplo, a **potência** 2^6 significa o produto

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

em que o fator 2 (chamado base) aparece 6 vezes. O número 6 é chamado **expoente**. Observe a seguinte propriedade das potências:

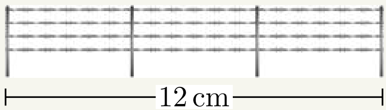
$$2^3 \times 2^6 = 2^9$$

bem como

$$2^9 : 2^3 = 2^6.$$

Exercício 2.15 Joaquim tem 120 postes de madeira para construir uma cerca. Sabe-se que os postes serão usados para cercar apenas um lado de seu sítio. Se cada quatro postes igualmente espaçados cercam 12 metros, usando-se todos os postes igualmente espaçados será possível fazer uma cerca de quantos metros?

(a) 476 m.
(b) 380 m.
(c) 357 m.
(d) 350 m.
(e) 320 m.



(imagem de vecteezy.com)

Exercício 2.16 A distância da casa de Roberto a sua escola é de 350 metros. Sabendo-se que ele vai e volta da escola a pé de segunda a sexta, quantos metros ele percorre por semana no trajeto casa-escola-casa, se ele sempre faz o mesmo caminho?

(a) 700 m
(b) 1400 m
(c) 1750 m
(d) 3500 m
(e) 7000 m

Observação 2.16 — Nota ao professor. Os dois exercícios seguintes lidam com ordens de grandeza, expressas em termos de potências de dez. Sugerimos que o(a) professor(a) explore ordens de grandeza em vários contextos científicos, sociais e econômicos, promovendo, nos alunos, noções adequadas sobre essas ordens e, em paralelo, sobre múltiplos e submúltiplos de unidades de medida padronizada que sejam mais adequadas em alguns desses contextos.

Exercício 2.17 A luz emitida pelo Sol chega à Terra em aproximadamente 8 minutos a uma velocidade aproximada de 300.000 quilômetros por segundo. Qual das potências de 10 abaixo melhor *aproxima* a distância percorrida pela luz do Sol à Terra em quilômetros?

(a) 1.000.000.000
(b) 100.000.000
(c) 10.000.000
(d) 1.000.000
(e) 100.000

Solução. Em 8 minutos, temos $8 \times 60 = 480$ segundos, tempo em que a luz percorre

$$300000 \times 480 = 3 \times 48 \times 10^5 \times 10 = 144 \times 10^6 \approx 10^8 \text{ quilômetros.}$$

■

Exercício 2.18 O Sol tem diâmetro de 1.392.700 quilômetros e Júpiter é o maior planeta do Sistema Solar com diâmetro de 139.820 quilômetros. Qual a razão aproximada entre os diâmetros do Sol e de Júpiter?

(a) 1.000.000
(b) 10.000
(c) 1000
(d) 100
(e) 10

Solução. A razão entre os diâmetros de Júpiter e da Terra é aproximada por

$$\frac{1.392.700}{139.820} \approx \frac{139 \times 10^4}{139 \times 10^3} = 10$$

■

Obs

Usaremos, alguma vezes, uma barra horizontal entre dois números para indicar a divisão de um pelo outro. Por exemplo

$$\frac{216}{8}$$

significa, nesse contexto, a divisão 216 : 8.

Obs

Relembre a propriedade de divisão de potências com mesma base. Por exemplo

$$\frac{2^9}{2^3} = 2^6.$$

Exercício 2.19 Uma fábrica de bombons produziu 210 bombons de chocolate e 160 bombons de morango. Deseja-se embalar todos esses bombons em caixas com a mesma quantidade de bombons, sendo que cada caixa deve conter um único sabor de bombons. Sabendo que a quantidade de caixas utilizadas deve ser a menor possível, quantos bombons deverão ser colocados em cada caixa?

(a) 8 bombons
(b) 10 bombons
(c) 16 bombons
(d) 20 bombons
(e) 30 bombons

Exercício 2.20 — ENEM 2020 - Reaplicação. Um banho propicia ao indivíduo um momento de conforto e reenergização. Porém, o desperdício de água gera prejuízo para todos. Considere que cada uma das cinco pessoas de uma família toma dois banhos por dia, de 15 minutos cada. Sabe-se que a cada hora de banho são gastos aproximadamente 540 litros de água. Considerando que um mês tem 30 dias, podemos perceber que o consumo de água é bem significativo. A quantidade total de litros de água consumida, nos banhos dessa família, durante um mês, é mais próxima de

(a) 1350.

(b) 2700.
(c) 20250.
(d) 20520.
(e) 40500.

Solução. De acordo com os dados do enunciado, as cinco pessoas da família, juntas, tomam $5\times2 = 10$ banhos por dia, de 15 minutos cada. Logo, gastam, juntas, $30\times10\times15$ minutos de banho por mês. Como 1 hora equivale a 60 minutos, esse tempo total de banho é igual a

$$30\times10\times15 = 15\times5\times4\times15 = 15\times5\times60 \text{ minutos} = 15\times5 \text{ horas},$$

ou seja, 75 horas de banho por mês! Assim, o consumo de água nesses banhos, por mês, é dado por 75×540 litros, visto que 1 hora de banho corresponde a 540 litros de água. Calculando este produto, temos 40500 litros de água. Portanto, a alternativa correta é a de letra (e). ■

Exercício 2.21 — ENEM 2020. Segundo indicação de um veterinário, um cão de pequeno porte, nos dois primeiros meses de vida, deverá ser alimentado diariamente com 50 g de suplemento e tomar banho quatro vezes por mês. O dono de um cão de pequeno porte, seguindo orientações desse veterinário, utilizou no primeiro mês os produtos/serviços de um determinado pet shop, em que os preços estão apresentados no quadro.

Produtos/serviços	Largura (cm)
Suplemento	R$ 8,00 (pacote de 500 g)
Banho	R$ 30,00 (preço unitário)

No mês subsequente, o fabricante reajustou o preço do suplemento, que, nesse pet shop, passou a custar R$ 9,00 cada pacote de 500 g. Visando manter o mesmo gasto mensal para o dono do cão, o gerente do pet shop decidiu reduzir o preço unitário do banho. Para efeito de cálculos, considere o mês comercial de 30 dias.

Disponível em: http://carodinheiro.blogfolha.uol.com.br. Acesso em: 20 jan. 2015 (adaptado).

Nessas condições, o valor unitário do banho, em real, passou a ser

(a) 27,00.
(b) 29,00.
(c) 29,25.
(d) 29,50.
(e) 29,75.

Solução. Com uma ração diária de 50 gramas de suplemento, o cão consome $30 \times 50 = 1.500$ gramas de suplemento por mês (de 30 dias). Como um pacote de suplemento contém 500 gramas, são necessários 3 pacotes por mês, uma vez que $1500 : 500 = 3$. Visto que cada pacote custava 8,00, o valor gasto com suplemento era igual a $3 \times 8 = 24$ reais.

Por outro lado, com os 4 banhos mensais, o dono gastava $4 \times 30 = 120$ reais. Logo, o gasto mensal total era igual a $24 + 120 = 144$ reais. Com o pacote de suplemento passando a custar 9 reais, o gasto com o suplemento passa a ser $3 \times 9 = 27$ reais, valor da alternativa (a). Sobrariam, então, $144 - 27 = 117$ reais para os 4 banhos. Dividindo 117 por 4 temos

$$117 = 116 + 1 = 4 \times 29 + 1,$$

ou seja, quociente 29 e resto 1, o que nos dá 29 reais e 25 centavos. ■

Exercício 2.22 — ENEM 2020. Na central nuclear de Angra dos Reis, os resíduos produzidos em duas décadas de operações somam quase 446 toneladas de combustível usado, que permanecerá radioativo durante milhares de anos. O Ibama condicionou o início da operação de Angra 3, previsto para 2014, à aprovação de um projeto de depósito definitivo. A Comissão Nacional de Energia Nuclear (CNEN) se comprometeu a apresentar, até 2010, um modelo de depósito para armazenar o lixo radioativo por 500 anos, em vez de milhares de anos.

Época, 8 set. 2008 (adaptado).

Supondo que a taxa de produção de combustível permaneça constante e que seja necessário certo volume V para o armazenamento das 446 toneladas já produzidas, qual é o volume mínimo aproximado que um depósito deve ter para armazenar o lixo radioativo produzido em 500 anos?

(a) $25\,V$.
(b) $149\,V$.
(c) $1340\,V$.
(d) $11150\,V$.
(e) $14887\,V$.

Solução. Uma *década* equivale a 10 anos, duas décadas a 20 anos. Logo, 500 anos são equivalentes $500 : 20 = 25$ vezes duas décadas. Portanto, em 500 anos teremos *proporcionalmente* 25 vezes mais material radioativo do que em duas décadas. Assim, é preciso ter 25 vezes o volume V. Portanto, a alternativa correta é a de letra (a). ∎

Sequência 2

Exercício 2.23 Se dividirmos o número 4284 por 6, a divisão será exata. Mas, se dividirmos por 60, qual será o resto?

(a) 20. (b) 22. (c) 23. (d) 24. (e) 34.

Solução. Observamos que é possível decompor 4.284 em múltiplos de 6. Vejamos

$$4.284 = 4.200+60+24 = 6\times700+6\times10+6\times4 = 6\times(700+10+4) = 6\times714.$$

Portanto, temos uma divisão *exata* $4.284 : 6 = 714$. A mesma decomposição pode ser agrupada em múltiplos de 60:

$$\begin{aligned}4.284 &= 4.200 + 60 + 24 = 60\times70 + 60\times1 + 24 = 60\times(70+1) + 24\\ &= 60\times71 + 24.\end{aligned}$$

Como $24 < 60$, concluímos que, na divisão de 4.284 por 60, temos quociente 71 e *resto* 24. ∎

Exercício 2.24 Qual é a diferença entre o quociente e o resto da divisão de 272 por 7?

(a) 1. (b) 3. (c) 32. (d) 38. (e) 265.

Solução. Para efetuar a divisão de 272 por 7, calculamos as seguintes divisões sucessivamente:

$$\begin{aligned} 272 &= 210 + 62 = 7{\times}30 + 62 \\ &= 7{\times}30 + 56 + 6 = 7{\times}30 + 7{\times}8 + 6 \\ &= 7{\times}38 + 6. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que o quociente desta divisão é 38 e o resto é 6, com a diferença dos dos dois dada por $38 - 6 = 32$, o que corresponde à alternativa (c). ■

Observação 2.17 As contas que fizemos acima podem ser apresentadas usando o "método da chave", tornando-se mais familiares a quem está acostumado a esta forma de representar o algoritmo da divisão. Vejamos

$$\begin{array}{rrr|l} & 2 & 7\ 2 & \;7 \\ \cline{4-4} - & 2 & 1 & \;3\ 8 \\ \cline{2-3} & & 6\ 2 & \\ & - & 5\ 6 & \\ \cline{3-3} & & 6 & \end{array}$$

Esta **não** é a única forma e de efetuar esta divisão. Poderíamos, por exemplo, *aproximar* o dividendo 272 pelo múltiplo de 7 mais próximo (e maior) que seria 280. Assim, teríamos

$$\begin{aligned} 272 &= 280 - 8 = 7{\times}40 - 8 = 7{\times}40 - 14 + 6 \\ &= 7{\times}40 - 7{\times}2 + 6 = 7{\times}38 + 6. \end{aligned}$$

Exercício 2.25 Uma campanha beneficente recebeu 56 caixas, cada uma contendo 24 latas de leite em pó. a) Quantas latas de leite em pó foram recebidas, ao todo? b) Caso a campanha houvesse recebido 1356 latas de leite em pó, quantas caixas iguais, com capacidade para 24 latas, seriam necessárias para guardar todas as latas? Alguma caixa ficaria com menos latas?

Solução. a) Basta efetuarmos a multiplicação 56×24. Para tanto, podemos usar a distributividade da multiplicação em relação à adição de números naturais, obtendo

$$\begin{aligned} 56 \times 24 &= (50+6) \times (20+4) = 50 \times 20 + 50 \times 4 + 6 \times 20 + 6 \times 4 \\ &= 1000 + 200 + 120 + 24 = 1344. \end{aligned}$$

Para resolvermos o problema b), simplesmente observamos que

$$1356 = 1344 + 12 = 24 \times 56 + 12,$$

ou seja, serão usadas 56 caixas cheias e mais 1 caixa contendo apenas 12 latas em vez de 24. Trata-se de uma divisão *não* exata, com resto igual a 12. ■

Observação 2.18 — Nota ao professor. Exercícios como esse são rotineiros e pouco interessantes. No entanto, são úteis para explorar as diversas maneiras segundo as quais uma operação, neste caso a multiplicação, pode ser efetuada.

Exercício 2.26 Uma empresa doou 250.880 quilogramas de alimentos para serem distribuídos por igual em 256 comunidades. Quantos quilogramas serão distribuídos a cada comunidade?

Solução. Uma vez mais, basta efetuarmos a divisão de 250.880 por 256:

$$\begin{array}{rrrrrrr|l} & 2 & 5 & 0 & 8 & 8 & 0 & 2\,5\,6 \\ \cline{8-8} - & 2 & 3 & 0 & 4 & & & 9\,8\,0 \\ \cline{2-5} & & 2 & 0 & 4 & 8 & & \\ & - & 2 & 0 & 4 & 8 & & \\ \cline{3-6} & & & & & 0 & 0 & \\ & & & & - & & 0 & \\ \cline{6-7} & & & & & & 0 & \end{array}$$

Cada uma das 256 comunidades receberá 980 quilogramas de alimentos. ■

Observação 2.19 Observamos que, fatorando tanto o dividendo quanto o divisor em seus fatores primos, obtemos $250.880 = 2^{10}\times 5\times 7^2$ e $256 = 2^8$. Estas fatorações facilitam bastante a divisão, visto que

$$\frac{250.880}{256} = \frac{2^{10}\times 5\times 7^2}{2^8} = 2^2\times 5\times 7^2 = 980.$$

Exercício 2.27 Débora fez uma prova com 70 questões. Ela gastou, em média, três minutos na resolução de cada questão. Quanto tempo Débora levou para fazer a prova?

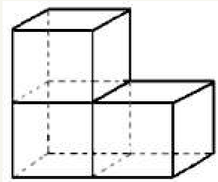
Solução. O tempo total de resolução da prova é igual a 3×70, ou seja, 210 minutos. Por fim, recordando que uma hora tem 60 minutos e notando que a divisão de 210 por 60 tem quociente 3 e resto 30, concluímos que Débora fez a prova em 3 horas e 30 minutos. ■

Exercício 2.28 Uma impressora produz 15 cópias por minuto. Uma outra impressora imprime o triplo de cópias dos mesmos impressos em um minuto. Quantas cópias a segunda impressora produz em 12 minutos?

Solução. A solução deste problema requer duas multiplicações. Inicialmente devemos multiplicar 3 por 15 (obtendo 45) para saber quantas cópias a segunda impressora produz por minuto. A seguir, multiplicamos 45 por 12 para calcular quantas cópias a segunda impressora produz em 12 minutos. Você pode usar o método que lhe for mais familiar para calcular o produto 45×12. Um forma rápida de fazer isso é observando que

$$45\times 12 = 45\times 10 + 45\times 2 = 450 + 90 = 540.$$ ■

Exercício 2.29 — UNICAMP.
A figura ao lado foi construída com lápis de madeira novos, sem apontar. Cada um desses lápis tem 22 centímetros de comprimento, e foi colado nas extremidades, sem sobreposição, de maneira que o lado (aresta) de cada quadrado seja um desses lápis. Calcule quantos centímetros de lápis foram utilizados para construir a estrutura.



Solução. A solução deste exercício tem duas etapas. A primeira consiste na contagem da quantidade de lápis usados para construir a estrutura. Tal contagem pode ser feita diretamente da figura, onde se vê que foram utilizados 28 lápis (10 na parte frontal, 10 na parte posterior e 8 ligando a face frontal à face posterior da estrutura). Como cada lápis mede 22 cm, no total os lápis medem

$$28 \times 22 = 28 \times (20 + 2) = 560 + 56 = 616$$

centímetros. ■

Exercício 2.30 Qual é o MDC e o MMC dos números 64, 96 e 840?

Solução. Para calcular o MDC (e MMC) desse números, consideramos suas fatorações em *fatores primos*. Temos $64 = 2^6$, $96 = 2^5 \times 3$ e $840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$. Assim, os números 2, 3, 5, 7 são os únicos números primos que são fatores de pelo menos um dos números 64, 96 e 840. Logo, o MDC tem os fatores comuns aos 3 números, elevados aos *menores* expoentes. Assim,

$$\mathrm{MDC}(64, 96, 840) = 2^3 = 8.$$

Já o MMC é dado pelo produto de *todos* os fatores, elevados aos *maiores* expoentes. Portanto,

$$\mathrm{MMC}(64, 96, 840) = 2^6 \times 3 \times 5 \times 7 = 6.720.$$

■

Exercício 2.31 Quais o MMC e MDC dos números 420, 576 e 3388?

Exercício 2.32 Dona Ilda tem duas filhas. A primeira gosta de comer sushi a cada 8 dias e a segunda come sushi a cada 12 dias. Dona Ilda, por sua vez, prefere comer sushi a cada 21 dias. Se todas elas comeram sushi hoje, quantos dias se passarão até que as três voltem a comer sushi em um mesmo dia?

(a) 88 dias (b) 96 dias (c) 144 dias (d) 168 dias (e) 210 dias

Solução. O número de dias após os quais Dona Ilda e suas duas filhas comerão sushi novamente em um mesmo dia deve ser múltiplo de 8, já que a primeira filha come sushi de 8 em 8 dias. Analogamente, deve ser múltiplo de 12 e de 21. Logo, deve ser um *múltiplo comum* de 8, 12 e 21. De fato, deve ser o menor ou *mínimo múltiplo comum* (MMC) de 8, 12 e 21. Fatorando esses números em *fatores primos*, obtemos $8 = 2\times2\times2 = 2^3$, $12 = 2\times2\times3 = 2^2\times3$ e $21 = 3\times7$. Assim, o MMC de 8, 12 e 21 é dado pelo produto de todos os fatores nessas fatorações, elevados aos *maiores* expoentes com que aparecem, isto é,

$$\text{MMC}(8, 12, 21) = 2^3\times3\times7 = 8\times21 = 168.$$

Assim, as três mulheres voltarão a comer sushi em um mesmo dia após 168 dias e a alternativa correta é a de letra (d). ■

Sequência 3

Exercício 2.33 — ENEM 2020- adaptado. Para aumentar a arrecadação de seu restaurante que cobra por quilograma, o proprietário contratou um cantor e passou a cobrar dos clientes um valor fixo de couvert artístico, além do valor da comida. Depois, analisando as planilhas do restaurante, verificou-se em um dia que 30 clientes consumiram um total de 10 kg de comida em um período de 1 hora, sendo que dois desses clientes pagaram R$ 50,00 e R$ 34,00 e consumiram 500 g e 300 g, respectivamente. Qual foi a arrecadação obtida pelo restaurante nesse período de 1 hora, em real?

(a) 800,00
(b) 810,00
(c) 820,00
(d) 1100,00
(e) 2700,00

Solução. Note que, aumentando 200 gramas no peso da comida, o valor, com o couvert incluído, passa de R\$ 34,00 para R\$ 50,00. Portanto, 200 gramas de comida equivalem a $50 - 34 = 16$ reais. Note que, como o couvert é fixo, ele foi subtraído nessa conta. Assim, 100 gramas correspondem, *proporcionalmente*, a 8 reais. Um consumo de 10 quilogramas, ou seja, 10.000 gramas, equivale a 100×100 gramas. Logo, o valor desses 10 quilogramas é

$$100 \times 8 = 800 \text{ reais.}$$

Da mesma forma, 500 gramas de comida custariam $5 \times 8 = 40$ reais. Concluímos, que o couvert custa $50 - 40 = 10$ reais *por cliente*. Os trinta clientes, juntos, pagaram $30 \times 10 = 300$ de couvert. Logo, os 30 clientes pagaram, ao todo $800 + 300 = 1.100$ reais. Portanto, a alternativa correta é a da letra (d). ■

Exercício 2.34 Em uma árvore de Natal as lâmpadas verdes piscam a cada 5 segundos, as lâmpadas vermelhas a cada 3 segundos, as lâmpadas azuis a cada 6 segundos e as lâmpadas amarelas a cada 8 segundos. De quantos em quantos segundos as quatro lâmpadas acendem ao mesmo tempo?

(a) 120 segundos
(b) 150 segundos
(c) 180 segundos
(d) 210 segundos
(e) 240 segundos

Exercício 2.35 Em uma escola de bairro, foram distribuído 144 cadernos, 192 lápis e 216 borrachas, de modo que o maior número possível de alunos fosse contemplado e todos recebessem o mesmo número de cadernos, o mesmo número de lápis e o mesmo número de borrachas. Como não houve sobra de material, qual o número de cadernos que cada aluno recebeu?

(a) 6 cadernos
(b) 8 cadernos.
(c) 9 cadernos
(d) 12 cadernos
(e) 24 cadernos

Exercício 2.36 A fatoração completa de 600 é $2^a \times 3^b \times 5^c$. Qual é o valor de $a + b + c$?

(a) 4. (b) 5. (c) 6. (d) 8. (e) 9.

Exercício 2.37 Detemine todos os divisores do número 504.

Solução. Fatorando 504 em seus fatores primos, temos

$$\begin{aligned} 504 &= 2\times 252 \\ &= 2\times 2\times 126 \\ &= 2\times 2\times 2\times 63 \\ &= 2\times 2\times 2\times 3\times 21 \\ &= 2\times 2\times 2\times 3\times 3\times 7 = 2^3\times 3^2\times 7. \end{aligned}$$

Portanto, os divisores do número 504 têm a decomposição em fatores primos da forma $2^a\times 3^b\times 7^c$, onde o expoente a vai de 0 a 3, o expoente b vai de 0 a 2 e o expoente c pode ser 0 ou 1. São, portanto,

$$(3+1)\times(2+1)\times(1+1) = 24 \text{ divisores.}$$

A lista desses divisores é a seguinte

1	2	3	7		
2×2	2×3	2×7	3×3	3×7	
$2\times2\times2$	$2\times2\times3$	$2\times2\times7$	$2\times3\times3$	$2\times3\times7$	$3\times3\times7$
$2\times2\times2\times3$	$2\times2\times2\times7$	$2\times2\times3\times3$	$2\times2\times3\times7$	$2\times3\times3\times7$	
$2\times2\times2\times3\times3$	$2\times2\times2\times3\times7$	$2\times2\times3\times3\times7$			
$2\times2\times2\times3\times3\times7.$					

■

Exercício 2.38 Demonstre que 2685 é um múltiplo de 3 sem efetuar divisões.

Solução. Temos

$$\begin{aligned} 2.685 &= 2.000 + 600 + 80 + 5 \\ &= 2\times(999+1) + 6\times(99+1) + 8\times(9+1) + 5 \\ &= 2\times999 + 6\times99 + 8\times9 + 2 + 6 + 8 + 5 \\ &= \text{múltiplo de } 3 + 21. \end{aligned}$$

Na última linha, temos a soma de dois múltiplos de 3 que é, portanto, também um múltiplo de 3. ■

Exercício 2.39 Demonstre que 2682 é um múltiplo de 9 sem efetuar divisões.

Solução. Temos

$$\begin{aligned} 2.682 &= 2.000 + 600 + 80 + 2 \\ &= 2\times(999+1) + 6\times(99+1) + 8\times(9+1) + 2 \\ &= 2\times999 + 6\times99 + 8\times9 + 2 + 6 + 8 + 2 \\ &= \text{múltiplo de } 9 + 18. \end{aligned}$$

Na última linha, temos a soma de dois múltiplos de 9 que é, portanto, também um múltiplo de 9. ■

Exercício 2.40 Calcule o *resto* da divisão de 2687 por 9 sem efetuar divisões.

Solução. Temos

$$\begin{aligned}2.687 &= 2.000 + 600 + 80 + 7\\ &= 2\times(999+1) + 6\times(99+1) + 8\times(9+1) + 7\\ &= 2\times 999 + 6\times 99 + 8\times 9 + 2 + 6 + 8 + 7\\ &= \text{múltiplo de } 9 + 18 + 5 = \text{múltiplo de } 9 + 5.\end{aligned}$$

Depois da última igualdade, temos um múltiplo de 9 e um número menor que 9, que, por definição, é o resto: 5. ■

Observação 2.20 Dados dois múltiplos a e b de um número natural n, a soma deles também será múltiplo deste mesmo número natural. De fato, como a e b são múltiplos de n, existem naturais k e ℓ tais que

$$a = k\times n \qquad \text{e} \qquad b = \ell\times n.$$

Assim, usando a distributividade da multiplicação em relação à adição, temos

$$a + b = k\times n + \ell\times n = (k+\ell)\times n,$$

o que mostra que $a+b$ é múltiplo de n.

Observação 2.21 — Nota ao professor. Esta sequência dos três últimos exercícios enfoca os chamados *critérios de divisibilidade*. Os elementos fundamentais da **demonstração** desses critérios são apresentados nas resoluções. Se, por um lado, evitamos uma prova formal (que pode ser, depois dessa sequência, cuidadosamente trabalhada pelo professor), por outro não recaímos no lugar-comum de apresentá-los como *fatos* arbitrários para os quais pode parecer que não há justificativa plausível, como quando dizemos que um "número é divisível por 9 quando a soma de seus algarismos é divisível por 9". O professor pode dirigir atividades de avaliação formativa a respeito tanto de critérios de divisibilidade quanto sobre problemas interessantes envolvendo **congruência**, conceito que também está implícito nessa sequência.

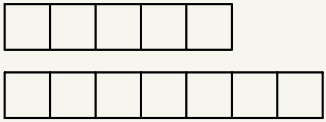
Exercício 2.41 — OBMEP 2019. Os estudantes de uma escola foram divididos em equipes de 8 meninas e 5 meninos cada uma. Se nessa escola há 60 meninas a mais do que meninos, qual é o número total de estudantes?

(a) 130 (b) 260 (c) 390 (d) 520 (e) 650

Solução. Cada equipe, formada por 8 meninas e 5 meninos, tem 13 alunos. O total de alunos é dado, portanto, pelo produto do número de equipes por 13. Por outro lado, a diferença entre o número de meninas e o número de meninos em cada equipe é igual a $8 - 5 = 3$. Assim, o número de equipes, multiplicado por 3, é igual a 60, a diferença total entre o número de meninas e o número de meninos. Concluímos que há $60 : 3 = 20$ equipes. Portanto, deduzimos que há $20 \times 13 = 260$ alunos. A alternativa correta é a de letra (b). ■

Observação 2.22 — Nota ao professor. Temos apresentado vários exemplos em que utilizamos *pensamento* algébrico, mas sem recorrer a notações algébricas e sem modelar os problemas *explicitamente* em termos de equações lineares, “regras de três” e assim por diante. Esta é uma abordagem apropriada para desenvolver habilidades de raciocínio lógico no estudante, sem desencorajá-lo com todo o aparato da linguagem de variáveis, equações e sistemas, que é totalmente dispensável para este tipo de problemas. Além disso, demonstramos, com esses exercícios, como mobilizar conhecimentos *aritméticos* básicos para resolver problemas do ENEM e das fases iniciais da OBMEP em que, supostamente, são requisitadas habilidades mais complexas.

Exercício 2.42 — Revista Canguru - 2020, p. 44, adaptado. Bia tem várias peças de comprimento 5 e de comprimento 7, como estas:



Juntando e enfileirando essas peças, Bia consegue obter peças maiores com diferentes comprimentos. Qual dos comprimentos a seguir ela **não** vai conseguir obter fazendo isso?

(a) 10 (b) 12 (c) 13 (d) 14 (e) 15

Solução. Bia pode obter comprimentos que são somas de múltiplos de 5 e de múltiplos de 7. Este é o caso de $10 = 5\times2$, $12 = 5+5$, $14 = 7\times2$ e $15 = 5\times3$. Mas *não* é o caso de 13. De fato, o múltiplo de 5 mais próximo (e menor) de 13 é 10. Subtraindo, não obtemos um múltiplo de 7, visto que $13 - 10 = 3$. Da mesma forma, o múltiplo de 7 mais próximo (e menor) de 13 é o próprio 7. Subtraindo, não obtemos um múltiplo de 5, visto que $13 - 7 = 6$. ■

Exercício 2.43 — KangoTreino 2020. Alice vai ao clube todos os dias, Beto a cada dois dias, Carmen a cada três dias, Daniel a cada quatro dias, Elena a cada cinco dias, Félix a cada seis dias e Gabi a cada sete dias. Hoje todos eles estão no clube. Daqui a quantos dias todos eles se encontrarão no clube novamente?

(a) 27 (b) 28 (c) 210 (d) 420 (e) 5040

Exercício 2.44 Roberto pratica esportes e todos os dias corre pela manhã. Seu desafio é correr sempre 2 km a mais que no dia anterior. Se na segunda feira ele correu 3 km, no domingo ele correrá quantos quilômetros? E na semana toda, quantos kilômetros terá corrido?

(a) No domingo, 15 km e, na semana, 63 km.
(b) No domingo, 14 km e, na semana, 17 km.
(c) No domingo, 17 km e, na semana, 63 km.

(d) No domingo, 21 km e, na semana, 63 km.
(e) No domingo, 15 km e, na semana, 17 km.

Exercício 2.45 Um pequeno agricultor pode ensacar sua produção de café, que é inferior a 100 quilogramas, em sacos de 18 quilogramas, deixando 7 quilogramas de fora. Uma alternativa é usar sacos de 20 quilogramas para ensacar o café, deixando apenas 1 quilograma de fora. Qual a produção de café do agricultor em quilogramas?

Solução. Os múltiplos de 18 menores que 100 e maiores que 0 são $18, 36, 54, 72, 90$. Portanto, as possíveis quantidades de café produzido são

$$18+7=25,\ 36+7=43,\ 54+7=61,\ 72+7=79,\ 90+7=97.$$

Subtraindo 1 quilograma de cada um dos números desta relação, o único múltiplo de 20 que temos é $61-1=60$. Logo a quantidade de café produzida pelo agricultor é de 61 quilogramas. ■

Exercício 2.46 — ENEM 2014. Durante a Segunda Guerra Mundial, para decifrarem as mensagens secretas, foi utilizada a técnica de decomposição em fatores primos. Um número N é dado pela expressão $2^x \cdot 5^y \cdot 7^z$, na qual x, y e z são números inteiros não negativos. Sabe-se que N é múltiplo de 10 e não é múltiplo de 7.

O número de divisores de N, diferentes de N, é

(a) $x \cdot y \cdot z$
(b) $(x+1)\cdot(y+1)$
(c) $x \cdot y \cdot z - 1$
(d) $(x+1)\cdot(y+1)\cdot z$
(e) $(x+1)\cdot(y+1)\cdot(z+1)-1$

Obs Aqui, estamos usando $\cdot$ para simbolizar a multiplicação: isto é, $3 \cdot 5$ significa o produto 3×5.

Solução. Os divisores de N devem ter apenas os fatores $2, 5$ e 7 e sua fatoração deve ser da forma $2^a \cdot 5^b \cdot 7^c$ onde o expoente a está entre 0 e x ($x+1$ possibilidades), o expoente b está entre 0 e y ($y+1$ possibilidades) e o expoente c deve ser igual a 0 (apenas 1 possibilidade). Esta última afirmação vem do fato de que $z = 0$, pois N **não** é múltiplo de 7. Observe, da mesma forma, que, como N é múltiplo de $10 = 2\times5$, deve haver pelo menos um fator igual a 2 e pelo menos um fator igual a 5 na fatoração de N. Portanto, devemos ter $x \geq 1$ e $y \geq 1$. De toda forma, o número total de divisores de N é dado por

$$(x+1)\cdot(y+1)\cdot(z+1).$$

Excluindo o próprio N, ficamos $(x+1)\cdot(y+1)\cdot(z+1) - 1$ divisores, o que corresponde à alternativa (e). ■

Exercício 2.47 — ENEM 2020. Após o término das inscrições de um concurso, cujo número de vagas é fixo, foi divulgado que a razão entre o número de candidatos e o número de vagas, nesta ordem, era igual a 300. Entretanto, as inscrições foram prorrogadas, inscrevendo-se mais 4 000 candidatos, fazendo com que a razão anteriormente referida passasse a ser igual a 400. Todos os candidatos inscritos fizeram a prova, e o total de candidatos aprovados foi igual à quantidade de vagas. Os demais candidatos foram reprovados. Nessas condições, quantos foram os candidatos reprovados?

(a) 11960 (b) 11970 (c) 15960 (d) 15970 (e) 19960

Solução. O número anterior de candidatos era igual a 300 vezes o número de vagas. Esse número aumentou com mais 4.000 inscritos e passou a ser 400 vezes o número de vagas. Portanto, 300 vezes o número de vagas *mais* 4.000 resulta em 400 vezes o número de vagas. Assim, 4.000 candidatos equivalem a 100 vezes o número de vagas. Concluímos que havia 40 vagas, apenas. O número final de candidatos inscritos foi, portanto,

$$400\times40 = 16.000.$$

Como havia 40 vagas e foram preenchidas, o número de candidatos reprovados foi $16.000 - 40 = 15.960$, o que corresponde à alternativa (c). ■

Exercício 2.48 Prove que

(a) a soma de dois números pares é um número par;
(b) a soma de dois números ímpares é um número par;
(c) a soma de um número ímpar e um número par é um número ímpar.

Exercício 2.49 — FUVEST 1987. A diferença entre o cubo da soma de dois números inteiros e a soma de seus cubos pode ser

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7 (e) 8

Solução. Se m e n são esses dois números inteiros, o cubo de sua soma é expandido como segue:

$$\begin{aligned}(m+n)^3 &= (m+n)\cdot(m+n)\cdot(m+n)\\ &= m^3 + 3\cdot m^2\cdot n + 3\cdot m\cdot n^2 + n^3,\end{aligned}$$

em que o primeiro termo corresponde à única forma de termos 3 fatores iguais a m, o segundo a termos apenas 1 fator igual a n, o terceiro a termos apenas 1 fator igual a m e o último à única forma de termos 3 fatores iguais a n. A soma dos cubos de m e n é dada por

$$m^3 + n^3.$$

A diferença entre o **cubo da soma** e a **soma dos cubos** é, portanto, igual a

$$3\cdot m^2\cdot n + 3\cdot m\cdot n^2 = 3\cdot m\cdot n\cdot(m+n),$$

um múltiplo de 3. A única alternativa que corresponde a um múltiplo de 3 é a de letra (c). ■

Exercício 2.50 — FUVEST 2000. Se x e y são dois números inteiros, estritamente positivos e consecutivos, qual dos números abaixo é necessariamente um número ímpar?

(a) $2x + 3y$
(b) $3x + 2y$
(c) $xy + 1$
(d) $2xy + 2$
(e) $x + y + 1$

Solução. Como x e y são inteiros positivos consecutivos, um deles é par e o outro é ímpar. Portanto, sua soma $x + y$ é ímpar (prove!). Assim, $x + y + 1$ é par. Já o número

$$2xy + 2 = 2(xy + 1)$$

é, obviamente, um múltiplo de 2, ou seja, é par. Se x é o número ímpar e y o par, o número $2x + 3y$ é par. Se x é o número par e y o ímpar, o número $3x + 2y$ é par. Por fim, o produto xy dos dois números é par, pois um deles é par. Assim, $xy + 1$ é, necessariamente, um número impar. A alternativa correta é a de letra (c). ■

Exercício 2.51 — UFC 1999. Determine o número inteiro n que satisfaz simultaneamente às seguintes condições

i) n está compreendido entre 6.000 e 7.000;
ii) n dividido por 35, ou por 45, ou por 50 deixa sempre resto 11.

Exercício 2.52 — FUVEST 2001. Uma senhora tinha entre trinta e quarenta ações para dividir igualmente entre todos os seus netos. Num ano, quanto tinha 3 netos, se a partilha fosse feita, deixaria 1 ação sobrando. No ano seguinte, nasceu mais um neto e, ao dividir igualmente entre os quatro netos o mesmo número de ações, ela observou que sobrariam 3 ações. Nesta última situação, quantas ações receberá cada neto?

(a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 9 (e) 10

Exercício 2.53 — FUVEST 1997. O menor número natural n, diferente de zero, que torna o produto de 3888 por n um cubo perfeito é

(a) 6 (b) 12 (c) 15 (d) 18 (e) 24

Solução. O número 3.888 é fatorado da seguinte forma

$$3.888 = 2^4 \times 3^5.$$

Multiplicando este número por $2^2 \times 3 = 12$, temos

$$12 \times 3.888 = 2^{4+2} \times 3^{5+1} = 2^6 \times 3^6 = (2^2 \times 3^2)^3,$$

ou seja, obtemos o cubo do número $2^2 \times 3^2 = 36$. ■

Sequência 4

Exercício 2.54 — FUVEST 2017. Sejam a e b dois números inteiros positivos. Diz se que a e b são equivalentes se a soma dos divisores positivos de a coincide com a soma dos divisores positivos de b. Constituem dois inteiros positivos equivalentes:

(a) 8 e 9.
(b) 9 e 11.
(c) 10 e 12.
(d) 15 e 20.
(e) 16 e 25.

Exercício 2.55 — KangoTreino 2020. 800 zarcs valem o mesmo do que 100 zercs. 100 zarcs equivalem a 250 zircs. Quantos zercs correspondem a 100 zircs?

(a) 2 (b) 5 (c) 10 (d) 25 (e) 50

Solução. Note que 1.000 zircs, ou seja, 4×250 zircs valem $4 \times 100 =$ 400 zarcs. Como 800 zarcs valem 100 zercs, $400 = 800 : 2$ zarcs equivalem a $100 : 2 = 50$ zercs. Concluímos, com esta cadeia de equivalências, que 1.000 zircs valem 50 zercs. Portanto, $100 = 1.000 : 10$ zircs valem $50 : 10 = 5$ zercs. Logo, a alternativa correta é a de letra (b).

■

Exercício 2.56 — ENEM 2020 - adaptado. Uma microempresa produz um tipo de agenda personalizada para brindes. O custo de produção de cada unidade é de R$ 7,00 e são comercializadas em pacotes com 40 agendas, que são vendidos por R$ 600,00. Além disso, essa empresa tem um custo mensal fixo de R$ 12 800,00 que não depende do número de agendas produzidas.

Qual é o número mínimo de pacotes de agendas que devem ser vendidos mensalmente para que essa microempresa não tenha prejuízo no mês?

(a) 36 (b) 40 (c) 280 (d) 305 (e) 320

Solução. O custo do pacote de 40 agendas é $40 \times 7 = 280$ reais. Vendendo um pacote por 600 reais, a microempresa tem *lucro* de $600 - 280 = 320$ reais. Portanto, para compensar os custos fixos mensais, é preciso que sejam vendidos

$$\frac{12.800}{320} = 40 \text{ pacotes,}$$

no mínimo.

■

Exercício 2.57 — UECE 2018. Se $p_1, p_2, \ldots, p_{18}$ são números inteiros positivos primos e distintos e se $p = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{18}$, então o número de divisores de p, inteiros positivos e distintos entre si, é igual a

(a) 2^{18}.
(b) $2^{18} - 1$.
(c) $2^{18} + 1$.
(d) $2^{18} + 2$.

Solução. Os fatores primos dos divisores de p, maiores que 1, são, necessariamente, fatores primos de p. Cada um desses fatores primos,

$p_1, \ldots, p_{18}$ **pode ou não** aparecer na fatoração do divisor. Assim, para cada um dos 18 fatores primos, temos as duas possibilidades: que não seja fator do divisor; ou que seja fator, mas apareça uma única vez. Assim, pelo **princípio multiplicativo** da contagem, o número de possíveis divisores é

$$\underbrace{2\times2\times\ldots\times2}_{18 \text{ vezes}} = 2^{18}$$

Devemos subtrair desta conta o divisor *trivial* 1, que corresponde ao caso em que todos os fatores primos são elevados a 0. Assim, a resposta correta é $2^{18} - 1$, ou seja, o número na letra (b). ■

Exercício 2.58 — ENEM 2021. Um marceneiro visitou 5 madeireiras para comprar tábuas que lhe permitissem construir 5 prateleiras de formato retangular, de dimensões iguais a 30 cm de largura por 120 cm de comprimento cada, tendo como objetivo minimizar a sobra de madeira, podendo, para isso, fazer qualquer tipo de emenda. As dimensões das tábuas encontradas nas madeireiras estão descritas no quadro.

Madeireira	Largura (cm)	Comprimento (cm)
I	40	100
II	30	110
III	35	120
IV	25	150
V	20	200

Em qual madeireira o marceneiro deve comprar as tábuas para atingir seu objetivo?

(a) I (b) II (c) III (d) IV (e) V

Exercício 2.59 — Círculos de Matemática da OBMEP - adaptado. Sabendo-se que $998.001 \times 17 = 16.966.017$, qual das alternativas corresponde a um múltiplo de 17?

(a) 16.966.011.

(b) 16.966.015.
(c) 16.966.021.
(d) 16.966.025.
(e) 16.966.034.

Exercício 2.60 — G1 - IFBA 2017 e Espm 2016. Na multiplicação ao lado, cada letra representa um algarismo do sistema decimal de numeração. O valor de $A+B+C+D$ é:

$$\begin{array}{r} A\,B\,C \\ \times \quad 9 \\ \hline 7\,D\,C\,6 \end{array}$$

(a) 22. (b) 20. (c) 24. (d) 21. (e) 23.

Solução. O produto $9{\times}C$ deve ser um número que tem 6 como algarismo das unidades. Como $0 \le C \le 9$, a única possibilidade é $C = 4$, com o que teríamos $9{\times}C = 36$. Agora, devemos ter um algarismo B tal que $9{\times}B + 3$ seja um número cujo algarismo das unidades é $C = 4$. Logo, a única possibilidade é que $B = 9$, de modo que $9{\times}B + 3 = 81 + 3 = 84$. Por fim, o produto $9{\times}A$, somado com 8, deve ser um número cujo algarismo das dezenas seja 7. Há apenas uma escolha possível, a saber, $A = 7$, para a qual teríamos $9{\times}A + 8 = 63 + 8 = 71$. Concluímos que $A = 7$ e $D = 1$. Portanto, $A + B + C + D = 7 + 9 + 4 + 1 = 21$. A resposta correta é (d). ■

Exercício 2.61 Dividindo 42 por 6, o quociente é 7 e o resto é zero. Somando 1 ao dividendo e tornando a dividir por 6, o quociente continua sendo 7 e o resto passa a ser 1. Qual o maior número que podemos somar a 42 para que a divisão por 6 continue tendo quociente 7?

(a) 0. (b) 3. (c) 4. (d) 5. (e) 6.

Exercício 2.62 — OBM. Dos números a seguir, qual é o único que pode ser escrito como produto de quatro números naturais consecutivos?

(a) 712 (b) 548 (c) 1026 (d) 1456 (e) 1680

Solução. Esses quatro números consecutivos devem deixar restos $0, 1, 2$ e 3 quando divididos por 4, não necessariamente nesta ordem. Portanto, exatamente um deles é múltiplo de 4. Da mesma forma, devem deixar restos $0, 1$ e 2, quando divididos por 3. Logo, pelo menos um deles é múltiplo de 3. Por fim, pelo menos dois desses números são **pares**, isto é, divisíveis por 2. Observamos que um dos números pares, se for dividido por 2, resulta em um número **ímpar**. Logo, *não* é múltiplo de 4. Concluímos que o produto dos quatro números deve ser múltiplo comum de múltiplo de $2\times3\times4 = 24$. ■

Observação 2.23 Lembre que, pelo algoritmo euclidiano da divisão, quando dividimos um número natural m por um número natural n, não nulo, obtemos um resto r que deve ser maior ou igual a 0 e *menor* que n. Por exemplo, podemos ver que os únicos restos possíveis na divisão por $n = 4$ são

- 0 (quando m é múltiplo de 4),
- 1 (quando m é um múltiplo de 4, mais 1),
- 2 (quando m é um múltiplo de 4, mais 2),
- $n - 1 = 3$ (quando m é um múltiplo de 4, mais 3).

Exercício 2.63 Mostre que o produto 135×375 é um quadrado perfeito.

Obs Um *quadrado perfeito* é um número da forma n^2 ou $n\times n$, onde n é um número natural.

Exercício 2.64 — UECE 2019. Se o resto da divisão do número inteiro positivo b por 7 é igual a 5, então o resto da divisão do número $b^2 + b + 11$ por 7 é igual a

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

Solução. Dividindo b por 7, temos resto 5. Logo, b tem a forma

$$b = \text{múltiplo de } 7 + 5.$$

Assim (verifique!),

$$b^2 = (\text{múltiplos de } 7) + 25 = \text{múltiplos de } 7 + 21 + 4$$
$$= (\text{múltiplos de } 7) + 4.$$

Logo, a expressão $b^2 + b + 1$ tem a seguinte decomposição

$$b^2 + b + 1 = (\text{múltiplos de } 7) + 4 + 5 + 1 = (\text{múltiplos de } 7) + 7 + 3$$
$$= (\text{múltiplos de } 7) + 3.$$

Portanto, o resto da divisão deste número por 7 é igual a 3, o que corresponde à alternativa (b). ■

Exercício 2.65 — Canguru 2017 - Prova J. Repetindo um par de algarismos ab três vezes, escrevemos um número de seis algarismos. Este número é divisível por qual dos números a seguir?

(a) 2 (b) 5 (c) 9 (d) 11 (e) 13

Exercício 2.66 Sem efetuar divisões, determine o resto da divisão de 5^{100} por 3.

Exercício 2.67 — OBM. Letícia vendeu todos os seus CDs de videogames para três amigos, que lhe pagaram, respectivamente, R$ 240,00, R$ 180,00 e R$ 320,00. Todos os CDs tinham o mesmo preço. Quantos CDs tinha Letícia, no mínimo?

(a) 20. (b) 21. (c) 25. (d) 28. (e) 37.

Exercício 2.68 — Canguru 2017 - Prova J. Numa sala há quatro crianças com menos de 18 anos e com idades diferentes. Se o produto de suas idades é 882, qual é a soma dessas idades?

(a) 23 (b) 25 (c) 27 (d) 31 (e) 33

3 Frações: conceitos iniciais

Começamos, nesta seção, nosso estudo das *frações* com probleminhas simples que nos mostram a necessidade de ampliarmos o conjunto de números que usamos, até agora restrito aos números naturais e inteiros. Assim como a ampliação do conjunto dos números naturais para o conjunto dos números inteiros tornou as operações de adição e subtração mais claras e gerais, esta nova ampliação, dos inteiros para os **números racionais** (aqui, ainda expressos como frações) permitirá tornar a operação de divisão mais compreensível, principalmente quando envolver restos não nulos.

Na escola, usamos frações para simbolizar o resultado de uma divisão como 15 : 6, que expressamos como a fração

$$\frac{15}{6} \quad \begin{array}{l} \text{numerador} \\ \text{denominador} \end{array}$$

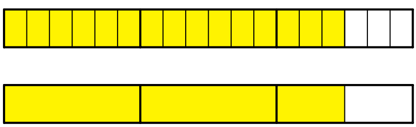
Lembremos que, ao dividir 15 por 6, obtemos um quociente 2 e um *resto* 3, ou seja,

$$15 = 6\times 2 + 3.$$

Dividindo o resto 3 pelo divisor 6, não obtemos um número inteiro e sim um número fracionário

$$\frac{3}{6}$$

que podemos interpretar como uma *parte* de uma unidade. É bastante comum visualizarmos esta operação de divisão e as frações usando **barras** como na figura a seguir:

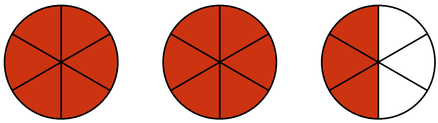


$$= \frac{15}{6}$$

$$= 2 + \frac{3}{6}$$

em que a primeira barra é dividida em retângulos menores, *agrupados* de 6 em 6. Portanto, 15 unidades equivalem a 2 *grupos* de 6 e **parte** de outro grupo de 6, que corresponde a 3 das 6 unidades neste grupo. A segunda barra representa esses 2 grupos de 6 e a fração do terceiro grupo. Observe que a **unidade de medida** na segunda barra é 6 vezes *maior* do que na primeira.

Podemos também visualizar e interpretar as frações em termos de **gráficos de setores** ou **pizzas**, para dar-lhes um nome mais atraente: se cada unidade ou pizza é dividida em seis partes ou fatias, 15 dessas partes podem ser representadas na seguinte figura



em que as 15 fatias destacadas correspondem a 2 pizzas inteiras e $\frac{3}{6}$ da terceira (ou seja, a 3 fatias das 6 em que cortamos a terceira).

Em resumo, seja usando barras ou pizzas, temos a fração $\frac{3}{6}$ vem da divisão 15 : 6 que calculamos em termos de frações como

$$\frac{15}{6} = 2 + \frac{3}{6},$$

Vejamos um problema, relacionado a *unidades de medida* de comprimento ou distância em que frações como esta podem surgem naturalmente.

Problema 8 Uma medida tradicional de comprimento (distância), usada pelos habitantes da zona rural, é a **légua**. Se 1 légua corresponde a 6 quilômetros, quantas léguas correspondem a 15 quilômetros?

Para resolvermos o problema 8, consideramos as duas retas numéricas abaixo, em que os números na primeira indicam distâncias em quilômetros e os números na segunda, distância em léguas.

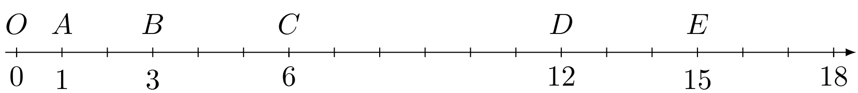


Figura 3.1: Distâncias em quilômetros

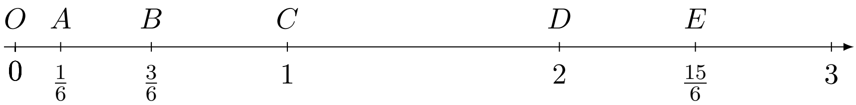


Figura 3.2: Distâncias em léguas

Comparando essas escalas, vemos que

- o ponto C corresponde a uma distância de 6 quilômetros ou 1 légua,
- o ponto D corresponde a uma distância de 12 quilômetros ou 2 léguas,
- o ponto E corresponde a uma distância de 15 quilômetros ou $\frac{15}{6}$ léguas,
- o ponto A corresponde a uma distância de 1 quilômetro ou $\frac{1}{6}$ de légua,
- o ponto B corresponde a uma distância de 3 quilômetros ou $\frac{3}{6}$ de légua.

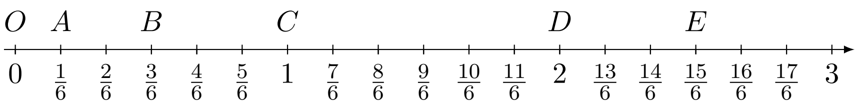


Figura 3.3: Conversão de quilômetros em milhas: 1 quilômetro $= \frac{1}{6}$ de milha. 1 milha = 6 quilômetros

As **frações**

$$0 = \frac{0}{6}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{2}{6}, \quad \frac{3}{6}, \quad \frac{4}{6}, \quad \frac{5}{6}, \quad \frac{6}{6} = 1, \quad \frac{7}{6}, \ldots$$

(lêem-se “um sexto”, “dois sextos”, e assim por diante) representam pontos que dividem a reta numérica em segmentos de comprimentos iguais. Por exemplo, a distância entre os pontos O e C, igual a 1 milha, é 6 *vezes maior* do que a distância do ponto O ao ponto A, que é igual à **fração**

$$\frac{1}{6}$$

de milha. Assim,

$$6\times\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1.$$

Da mesma forma, a distância entre os pontos O e B é dada pela fração $\frac{3}{6}$ e é 3 vezes maior do que a distância entre os pontos O e A, ou seja,

$$3\times\frac{1}{6}=\frac{3}{6}.$$

De modo geral, dado um número natural m, a **fração**

$$\frac{m}{6}$$

representa um ponto cuja distância ao ponto O é m **vezes maior** do que a distância do ponto O ao ponto A, ou seja,

$$\frac{m}{6}=m\times\frac{1}{6}=\underbrace{\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{6}}_{m\text{ vezes}}.$$

Por exemplo, a distância do ponto O ao ponto D é 12 *vezes maior* do que a distância do ponto O ao ponto A, sendo dada por

$$\frac{12}{6}=12\times\frac{1}{6}.$$

Observe também que essa distância é 2 vezes maior que a distância do ponto O ao ponto C, ou seja,

$$\frac{12}{6}=2,$$

o que reforça o fato de que frações expressam *divisões*. Ressaltando esta ideia, vejamos que a distância de O a E é dada pela **soma** das distâncias de O a D e de D a E, isto é,

$$\frac{15}{6}=\frac{12}{6}+\frac{3}{6}=2+\frac{3}{6}.$$

Esta é uma forma de expressar a *divisão* com resto

$$15=6\times 2+3.$$

De modo similar, a distância de B a C é igual a **diferença** da distância O a C e da distância de O a B. Logo, é igual a

$$1 - \frac{3}{6} = \frac{6}{6} - \frac{3}{6} = \frac{3}{6},$$

conclusão que pode ser vista geometricamente, já que os segmentos de O a B e de B a C dividem o segmento de O a C ao **meio**. Portanto,

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

uma igualdade ou **equivalência** que estudaremos mais adiante. Veja que a terceira pizza na figura do início da seção foi também dividida ao meio.

De modo geral, dado um número natural n, diferente de zero, a **fração**

$$\frac{1}{n}$$

representa um ponto A na reta numérica, entre os pontos O e C, tal que a distância de O a C é n **vezes maior** que a distância de O a A. Dito de outro modo, as frações

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1$$

dividem o segmento de O a C em n segmentos de comprimentos iguais. Dado outro número natural m, a **fração**

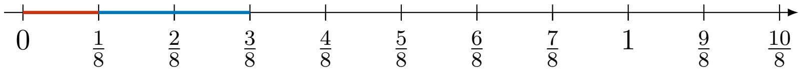
$$\frac{m}{n}$$

representa um ponto cuja distância a O é igual a m vezes a distância de O ao ponto A, ou seja,

$$\frac{m}{n} = m \times \frac{1}{n} = \underbrace{\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{n \text{ vezes}}$$

O número m é chamado de **numerador** e o número n de **denominador**.

Vejamos, na figura abaixo, o caso em que $n = 8$, ou seja, em que dividimos o segmento de 0 a 1 em 8 partes de mesmo comprimento, igual a $\frac{1}{8}$:



Observemos que, somando os comprimentos dos segmentos destacados na figura acima, temos

$$\frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3}{8} = 3 \times \frac{1}{8}.$$

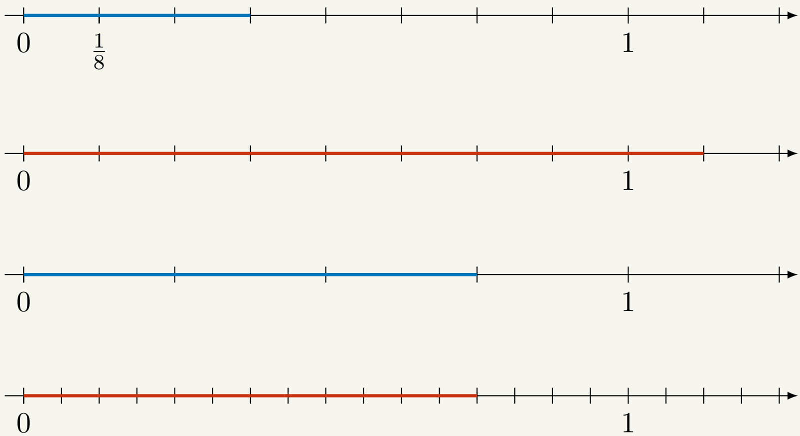
Observamos também que

$$\frac{10}{8} = \frac{8}{8} + \frac{2}{8} = 1 + \frac{2}{8},$$

uma maneira de expressar o resultado da divisão

$$10 = 8 \times 1 + 2.$$

Exercício 3.1 Escreva a fração correspondente aos segmentos destacados (mais escuros) nas retas numéricas abaixo:



Solução. Na primeira figura, o segmento de 0 a 1 está *particionado* em 8 segmentos de comprimento $\frac{1}{8}$. O segmento destacado tem 3 vezes esse comprimento. Portanto, mede

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=3\times\frac{1}{8}=\frac{3}{8}.$$

Na segunda figura, o segmento destacado é 3 vezes maior do que aquele destacado na figura anterior e 9 vezes maior do que o segmento de comprimento $\frac{1}{8}$. Logo, sua medida é igual a

$$3\times\frac{3}{8}=\frac{9}{8} \quad \text{ou} \quad 9\times\frac{1}{8}=\frac{9}{8}.$$

Observamos que

$$\frac{9}{8}=\frac{8}{8}+\frac{1}{8}=1+\frac{1}{8}.$$

Na terceira figura, o segmento de 0 a 1 é particionado em 4 segmentos de comprimento igual a $\frac{1}{4}$. Deste modo, o segmento destacado equivale a 3 segmentos de comprimento $\frac{1}{4}$, isto é, mede $\frac{3}{4}$. Observe que cada segmento de comprimento $\frac{1}{4}$ tem o dobro do comprimento do segmento de comprimento $\frac{1}{8}$. Portanto,

$$\frac{3}{4}=3\times\frac{1}{4}=3\times 2\times\frac{1}{8}=\frac{6}{8}.$$

Portanto, as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{8}$ indicam o mesmo comprimento:

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}.$$

Dizemos, assim, que são frações **equivalentes**.

Na última figura, temos um segmento destacado de mesmo comprimento que o da terceira figura. Note que, na terceira figura, cada um dos 4 segmentos que particionam o segmento de 0 a 1 é 4 vezes maior do que os segmentos que particionam o segmento de 0 a 1 na quarta figura. Logo, cada um dos segmentos menores na quarta figura mede

$$\frac{1}{4}:4=\frac{1}{16}$$

e o segmento destacado mede

$$12 \times \frac{1}{16} = \frac{12}{16}.$$

Comparando os segmentos destacados na terceira e quarta figuras, concluímos que suas medidas são iguais, isto é,

$$\frac{3}{4} = \frac{12}{16},$$

encontrando mais um exemplo de frações equivalentes. ■

Observação 3.1 Em todos os exemplos que discutimos, usamos a reta numérica e associamos as frações a medidas de distância ou comprimento. No entanto, podemos usar a reta e as frações em outros contextos, envolvendo outras grandezas e medidas. Na verdade, frações são formas de representar os **números racionais**, que são objetos matemáticos abstratos e, portanto, cuja definição não requer que sejam medidas de algo concreto.

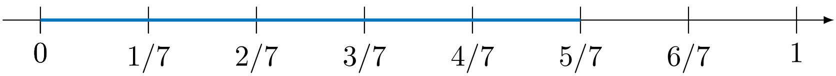
Observação 3.2 — Nota ao professor. Neste ponto, convém usar as representações das frações em retas com diversas graduações (assim como em "pizzas" com diferentes números de fatias ou barras com diferentes números de subdivisões para explorar as ideias de equivalência de frações (que podemos entender como o efeito da mudança de "unidades de medida" ou de "escala", alterando proporcionalmente o total de partes do todo e o total de partes consideradas). Da mesma forma, essas representações das frações permitem uma introdução bastante intuitiva da adição, multiplicação e mesmo divisão de frações, como acabamos de ver.

A este respeito, considere a seguinte situação-problema, em que as frações representam uma grandeza bem diferente de comprimento ou distância. Mesmo assim, usaremos sua *representação* como pontos na reta numérica.

Exercício 3.2 Em uma prova, um aluno acertou 15 questões, o que corresponde a $\frac{5}{7}$ do total de questões. Nesta prova havia quantas questões?

(a) 20 (b) 21 (c) 28 (d) 30 (e) 35

Solução. Vamos representar o total de questões da prova pelo segmento de reta entre os pontos 0 e 1 na reta numérica. Sendo assim, particionamos esse segmento em 7 segmentos de mesmo comprimento e destacamos 5 desses segmentos para representar o total de questões respondidas corretamente:



Como 5 dos segmentos menores correspondem a 15 questões, cada um desses segmentos corresponde a $15 : 5 = 3$ questões. Isso pode ser visualizado (veja a próxima figura) **particionando** cada segmento menor em 3 partes e observando que, agora, cada parte corresponde a uma questão. Portanto, os 7 segmentos (que representam o total de questões da prova) correspondem a $7 \times 3 = 21$ questões.

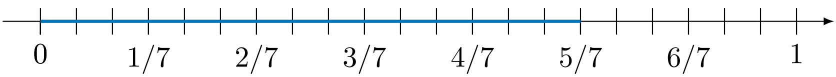


Figura 3.4: $\frac{5}{7}$ do segmento ou 15 questões

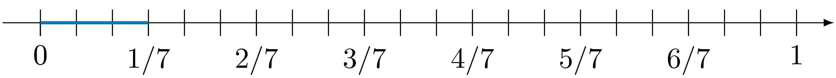


Figura 3.5: $\frac{1}{7}$ do segmento ou 3 questões

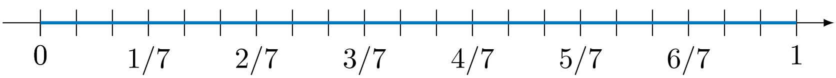


Figura 3.6: $\frac{7}{7}$ do segmento, o segmento inteiro ou $7 \times 3 = 21$ questões

O seguinte problema também envolve frações em outro contexto, desta vez relacionado a tempo e valores monetários.

Exercício 3.3 Um técnico de informática cobra R$ 100,00 por cada hora de serviço. Sabendo que o serviço de um cliente demorou $2\frac{1}{4}$ horas, quanto o técnico cobrou desse cliente?

Solução. Perceba que o serviço do cliente demorou 2 horas inteiras e um $\frac{1}{4}$ da terceira hora. Portanto, o valor *proporcional* a ser pago pelo cliente por este $\frac{1}{4}$ de hora é dado por

$$100\times\frac{1}{4} = \frac{100}{4} = 25,$$

o que expressa a *divisão* $100 : 4 = 25$. Logo, o serviço completo custou ao cliente o valor de

$$100 + 100 + 25 = 225 \text{ reais},$$

em que as 2 primeiras parcelas se referem às 2 horas completas e a terceira parcela ao $\frac{1}{4}$ de hora. Representamos a solução geometricamente da seguinte forma:

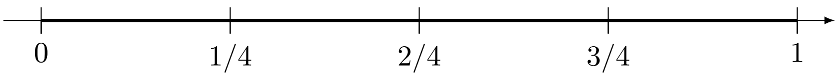


Figura 3.7: $\frac{4}{4}$ de hora, ou 1 uma hora inteira, custando 100 reais

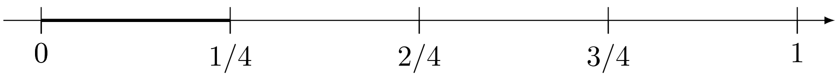


Figura 3.8: $\frac{1}{4}$ de hora, custando $\frac{1}{4}\times 100 = 100 : 4 = 25$ reais

Outra forma de resolver o problema é observar que

$$2\frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4} = \frac{8}{4} + \frac{1}{4} = \frac{9}{4},$$

isto é, que o tempo total do serviço foi de $\frac{9}{4}$ horas e, portanto, o que o valor *proporcional* a ser pago é

$$\frac{9}{4}\times 100 = 9\times\frac{100}{4} = 9\times 25 = 225 \text{ reais.}$$

■

Observação 3.3 Observe que dividir uma quantidade por 4 é equivalente a multiplicar por $\frac{1}{4}$. Mais geralmente, dividir uma quantidade por um número natural não nulo n é equivalente a multiplicar pela fração $\frac{1}{n}$.

Observação 3.4 Uma forma de denotar frações em que o numerador é maior que o denominador (frações inadequadamente chamadas de *impróprias*) é escrevê-las como uma soma, mas omitindo o sinal $+$. No exemplo anterior, tínhamos

$$\frac{9}{4} = \frac{8}{4} + \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4}$$

que foi denotada por

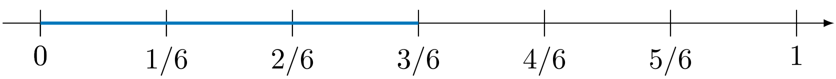
$$2\frac{1}{4}.$$

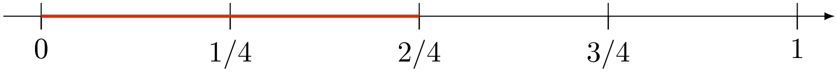
3.1 – Frações equivalentes

Diferentes frações podem representar uma mesma quantidade. Esta frase ficará mais precisa quando estudarmos os chamados **números racionais**. Por ora, vamos entender geometricamente o que significa esta afirmação. Dizemos que as frações

$$\frac{2}{4} \quad \text{e} \quad \frac{3}{6}$$

são **equivalentes** por representarem o mesmo ponto na reta numérica. De fato, temos





As diferentes representações surgem por que adotamos *graduações* diferentes da reta, particionando-a em segmentos de comprimentos diferentes: a primeira reta é particionada em segmentos de comprimento $\frac{1}{6}$, menores do que os segmentos de comprimento $\frac{1}{4}$ em que particionamos a segunda reta. Duas frações equivalentes representam o mesmo ponto nestas retas e, portanto, o mesmo comprimento, medido desde o ponto 0. Temos, então, uma igualdade ou **equivalência** de frações:

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6}.$$

Note que se multiplicarmos cada um dos lados dessa igualdade por 12, que é um *múltiplo comum* de 4 e 6, a igualdade se mantém:

$$12\times\frac{2}{4} = 12\times\frac{3}{6}.$$

Esta segunda igualdade é verdadeira, pois, do lado esquerdo, temos

$$12\times\frac{2}{4} = 12\times2\times\frac{1}{4} = 2\times12\times\frac{1}{4} = 2\times3 = 6,$$

enquanto o lado direito é dado por

$$12\times\frac{3}{6} = 12\times3\times\frac{1}{6} = 3\times12\times\frac{1}{6} = 3\times2 = 6.$$

Como a segunda igualdade é verdadeira, a primeira também o é. Logo, "comprovamos" que as frações são equivalentes.

De modo geral, as frações $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$ ou seja, a igualdade

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$$

é verdadeira *se, e somente se,*

$$q\times m = p\times n.$$

Nestas expressões, m, n, p e q são números naturais, com n e q diferentes de 0.

De fato, basta multiplicarmos cada um dos lados da igualdade pelo produto $q{\times}n$, obtendo

$$q{\times}n{\times}\frac{m}{n} = q{\times}n{\times}\frac{p}{q},$$

igualdade que pode ser reescrita como

$$q{\times}m{\times}n{\times}\frac{1}{n} = n{\times}p{\times}q{\times}\frac{1}{q},$$

donde concluímos que

$$q{\times}m = n{\times}p.$$

Usando a definição acima de equivalência de frações, vamos, agora, apresentar algumas **regras práticas** para verificar se duas frações são equivalentes.

Observação 3.5 Se multiplicarmos ou dividirmos o numerador e o denominador de uma fração **por um mesmo número** a natural diferente de zero, obtemos uma fração equivalente. De fato,

$$\frac{m}{n} = \frac{m{\times}a}{n{\times}a}$$

visto que

$$m{\times}n{\times}a = n{\times}m{\times}a.$$

Da mesma forma,

$$\frac{m}{n} = \frac{m:a}{n:a}.$$

Neste caso, a deve ser um *divisor ou fator comum* de m e n com $m : a = p$ e $n : a = q$. Assim, temos

$$\frac{m}{n} = \frac{p{\times}a}{q{\times}a} = \frac{p}{q} = \frac{m:a}{n:a},$$

como queríamos demonstrar.

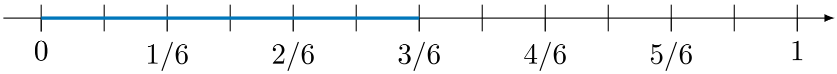
Por exemplo, no caso das frações $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{6}$, multiplicando *tanto* o numerador *quanto* o denominador por 3 e por 2, respectivamente, obtemos:

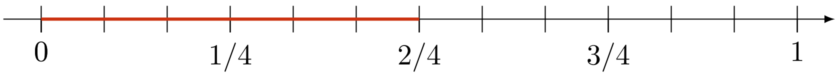
$$\frac{2}{4} = \frac{2\times3}{4\times3} = \frac{6}{12}$$

e

$$\frac{3}{6} = \frac{3\times2}{6\times2} = \frac{6}{12},$$

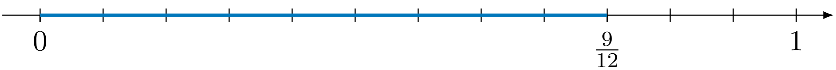
o que corresponde, na reta, a particionarmos cada segmento de comprimento $\frac{1}{4}$ em 3 partes e cada segmento de comprimento $\frac{1}{6}$ em 2 partes, conforme representado nas seguintes figuras:

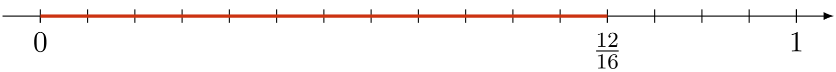




Note que os comprimentos realçados nos dois segmentos são iguais, o que justifica, geometricamente, a equivalência das frações.

Podemos, portanto, particionar um dado segmento (por exemplo, o segmento de 0 a 1) em *mais* segmentos de comprimento *menor*, **multiplicando** numerador e denominador por um mesmo fator. Inversamente, podemos particionar um dado segmento em *menos* segmentos de comprimento *maior*, **dividindo** numerador e denominador por um mesmo fator. Por exemplo, consideremos as frações $\frac{9}{12}$ e $\frac{12}{16}$, representadas nas retas numéricas abaixo





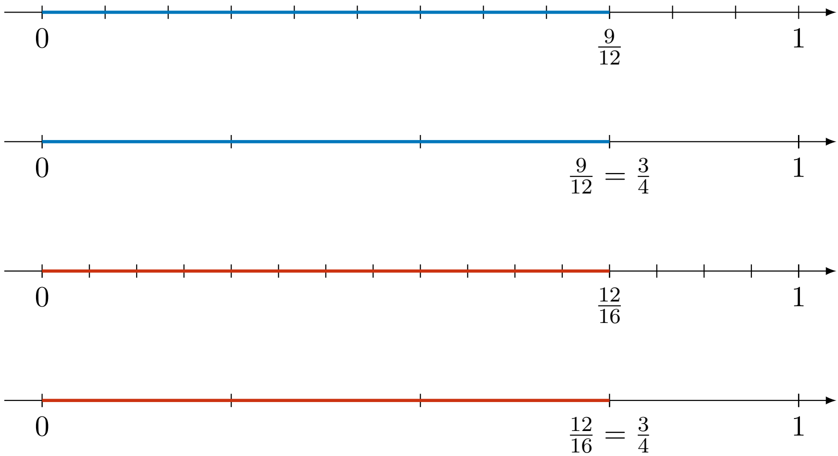
Dividindo tanto os numeradores quanto os denominadores das frações $\frac{9}{12}$ e $\frac{12}{16}$ por 3 e por 4, respectivamente, obtemos

$$\frac{9:3}{12:3} = \frac{3}{4}$$

e

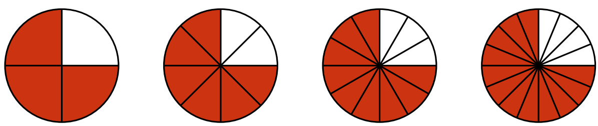
$$\frac{12:4}{16:4} = \frac{3}{4}$$

o que significa, geometricamente, termos segmentos com comprimentos 3 vezes maior na primeira reta e 4 vezes maior na segunda:



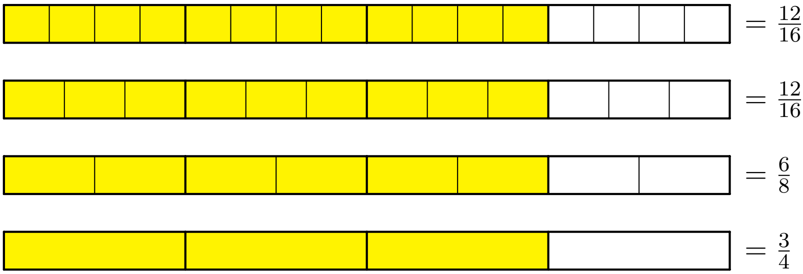
Recapitulando, quando multiplicamos o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número natural diferente de zero, aumentamos a quantidade de partes nas quais um dado segmento é dividido, bem como aumentamos *proporcionalmente* a quantidade de partes tomadas. Por outro lado, quando dividimos o numerador e o denominador por um mesmo natural diferente de zero, diminuímos *proporcionalmente* essas quantidades de partes. Em ambos esses casos, obtemos uma fração equivalente à inicial.

A equivalência das frações que vimos acima pode ser representada utilizando-se "pizzas" ou barras como segue. Por exemplo, as fatias destacadas das pizzas



$\frac{3}{4}$ $\quad$ $\frac{6}{8}$ $\quad$ $\frac{9}{12}$ $\quad$ $\frac{12}{16}$

representam as frações equivalentes indicadas abaixo de cada uma delas. Essas mesmas frações podem ser visualizadas nas barras como as partes destacadas, todas de mesmo comprimento:



Uma infinidade de frações equivalentes a uma dada fração pode ser obtida, portanto, multiplicando ou dividindo numerador e denominador por um mesmo fator. Por exemplo, multiplicando-os por 2, 3, 4, e assim por diante, temos

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \ldots$$

Da mesma forma, divisões sucessivas do numerador e denominador (isto é, *simplificações* das frações) produzem uma sequência de frações equivalentes

$$\ldots = \frac{32}{20} = \frac{24}{15} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

em que a última é **irredutível**. Isto significa que 5 e 8 não têm *divisores comuns* além de 1. Portanto, não há mais como dividir, com resto 0, tanto o numerador quanto o denominador por um mesmo número. Lembremos, de nosso estudo anterior, que, neste caso, dizemos que 5 e 8 são *primos entre si*, ou seja, MDC(5,8) = 1.

Todas as frações equivalentes a uma fração dada são equivalentes a uma fração irredutível. Esse conjunto de frações equivalentes, com uma representante que é *irredutível*, define uma mesma quantidade ou mesmo ponto na reta numérica. Mais precisamente, define um **número racional**, como estudaremos adiante.

Observação 3.6 Quando dividimos o numerador e o denominador da fração $\frac{m}{n}$ pelo MDC(m, n), obtemos a forma irredutível da fração. Realmente, após executar essa *simplificação*, não haverá outro fator comum maior que 1 pelo qual possamos dividir o numerador e o denominador, o que torna impossível uma outra *simplificação*.

Por exemplo, uma vez que MDC$(15, 24) = 3$, ao dividirmos o numerador e denominador da fração $\frac{24}{15}$ por 3, obtemos uma fração irredutível

$$\frac{24}{15} = \frac{24 : 3}{15 : 3} = \frac{8}{5}.$$

Exercício 3.4 — OBM 2004. Simplificando a fração

$$\frac{2004 + 2004}{2004 + 2004 + 2004},$$

obtemos:

(a) 2004. (b) $\frac{113}{355}$. (c) $\frac{1}{2004}$. (d) $\frac{2}{3}$. (e) $\frac{2}{7}$.

Solução. Observe que

$$2004 + 2004 = 2\times 2004;$$
$$2004 + 2004 + 2004 = 3\times 2004.$$

Daí,

$$\frac{2004 + 2004}{2004 + 2004 + 2004} = \frac{2\times \cancel{2004}}{3\times \cancel{2004}} = \frac{2}{3}.$$

Portanto, a forma simplificada da fração dada no exercício é $\frac{2}{3}$ e a alternativa correta é a de letra (d). ∎

Exercício 3.5 O Clube de Regatas do Flamengo foi o campeão brasileiro de futebol do ano de 2019. Durante esse ano, o clube fez uma campanha incrível. Até a trigésima quinta rodada, havia feito 84 pontos, de um total de $35\times 3 = 105$ pontos possíveis. Que fração irredutível representa o aproveitamento do Flamengo (número de pontos ganhos em relação ao número de pontos possíveis)?

Solução. A fração que representa o aproveitamento do Flamengo com relação ao total de pontos disputados é

$$\frac{84}{105}.$$

Calculando MDC(84, 105) pelo método da fatoração, temos $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ e $105 = 3 \times 5 \times 7$. Logo, tomando os fatores comuns aos dois números com seus *e*xpoentes mínimos, obtemos

$$\text{MDC}(84, 105) = 3 \times 7 = 21.$$

Dessa forma, dividindo o numerador e o denominador da fração $\frac{84}{105}$ por 21, simplificamos essa fração, obtendo

$$\frac{84 : 21}{105 : 21} = \frac{4}{5},$$

a fração **irredutível** que representa o aproveitamento do Flamengo.

■

Exercício 3.6 Qual das frações abaixo **não** é equivalente a $\frac{12}{18}$.

(a) $\frac{6}{9}$. (b) $\frac{10}{16}$. (c) $\frac{4}{6}$. (d) $\frac{8}{12}$. (e) $\frac{2}{3}$.

Solução. Uma possibilidade é simplificar as frações dadas, obtendo

$$\frac{12}{18} = \frac{12 : 2}{18 : 2} = \frac{6}{9} = \frac{6 : 3}{9 : 3} = \frac{2}{3}.$$

Logo, $\frac{6}{9}$ e $\frac{2}{3}$ são frações equivalentes a $\frac{12}{18}$. Por outro lado,

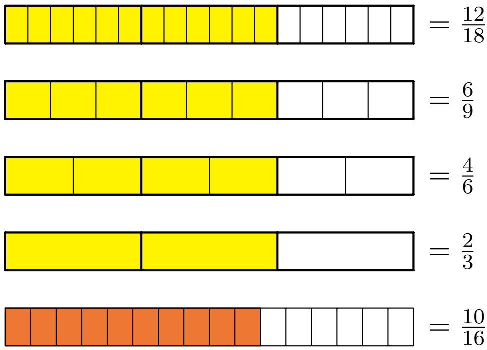
$$\frac{8}{12} = \frac{8 : 2}{12 : 2} = \frac{4}{6} = \frac{4 : 2}{6 : 2} = \frac{2}{3}.$$

Assim, $\frac{8}{12}$ também é equivalente a $\frac{12}{18}$. Finalmente,

$$\frac{10}{16} = \frac{10 : 2}{16 : 2} = \frac{5}{8}.$$

Mas, como $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{8}$ são frações irredutíveis diferentes, concluímos que $\frac{10}{16}$ e $\frac{12}{18}$ não são equivalentes. Portanto, a alternativa que apresenta uma fração que não é equivalente a $\frac{12}{18}$ é a letra (b).

Para entendermos esses cálculos geometricamente, representemos as frações utilizando **barras** de mesmo comprimento, como nas figuras abaixo, particionadas em 18, 9,6,3 ou 16 partes iguais, respectivamente:



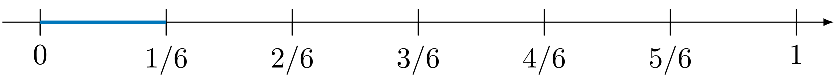
Uma solução alternativa seria verificar as equivalências de $\frac{12}{18}$ e $\frac{6}{9}$ (analogamente, para as frações dos itens (c), (d), (e)) calculando os produtos 12×9 e 6×18: como $12\times 9 = 108 = 6\times 18$, as frações $\frac{12}{18}$ e $\frac{6}{9}$ são equivalentes. Da mesma forma, $\frac{12}{18}$ não é equivalente a $\frac{10}{16}$ porque $12\times 16 = 192$ e $10\times 18 = 180$, logo, $12\times 16 \neq 10\times 18$. ■

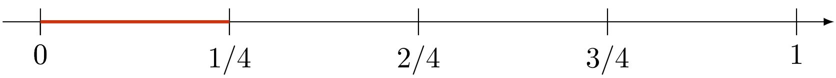
3.2 – Comparando frações

Na seção anterior, estudamos a equivalência ou igualdade de frações. Agora, nosso intuito é *comparar* e *ordenar* frações. Começamos observando que, dados dois números naturais n e N com $n < N$ (lê-se: n é *menor* que N), temos

$$\frac{1}{N} < \frac{1}{n}$$

(lê-se: $\frac{1}{N}$ é *menor* que $\frac{1}{n}$). Vejamos o exemplo em que $n = 4$ e $N = 6$:

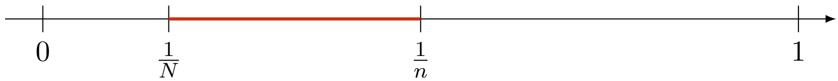




Observe que cada um dos 6 segmentos entre 0 e 1 na primeira reta têm comprimento menor que cada um dos 4 segmentos entre 0 e 1 na segunda reta. Logo,

$$\frac{1}{6} < \frac{1}{4}.$$

Note que o ponto na reta numérica representado pela fração $\frac{1}{4}$ fica **à direita** do ponto representado pela fração $\frac{1}{6}$. De modo geral, o ponto representado pela fração $\frac{1}{n}$ fica à direita do ponto representado pela fração $\frac{1}{N}$:



Observação 3.7 Em geral, temos

$$\frac{m}{N} < \frac{m}{n},$$

ou seja, dadas duas frações com **mesmo numerador** e denominadores diferentes, a maior fração é a de **menor denominador**. Agora, observamos que, se $m < M$, então

$$\frac{m}{n} < \frac{M}{n},$$

ou seja, dadas duas frações com **mesmo denominador** e numeradores diferentes, a maior fração é a de **maior numerador**.

Por exemplo, observando as retas numéricas acima, comprovanos que

$$\frac{1}{6} < \frac{2}{6} < \frac{2}{4} < \frac{3}{4}.$$

Estas "regras" de comparação ou ordenação podem ser justificadas em termos de divisões: por exemplo, a **desigualdade**

$$\frac{2}{6} < \frac{2}{4}$$

pode significar que, dividindo 2 unidades em 4 partes resulta em partes maiores do que obtemos dividindo essas mesmas 2 unidades em 6 partes.

O próximo passo é justificar desigualdades da forma

$$\frac{2}{6} < \frac{3}{4}.$$

Note que, multiplicando cada um dos lados da desigualdade por 12, que é *múltiplo comum* de 4 e 6, mantemos a desigualdade com

$$12\times\frac{2}{6} < 12\times\frac{3}{4},$$

onde o lado esquerdo é dado por

$$12\times\frac{2}{6} = 12\times2\times\frac{1}{6} = 2\times12\times\frac{1}{6} = 2\times\frac{12}{6} = 2\times2 = 4$$

enquanto o lado direito é calculado como

$$12\times\frac{3}{4} = 12\times3\times\frac{1}{4} = 3\times12\times\frac{1}{4} = 3\times\frac{12}{4} = 3\times3 = 9,$$

ou seja, obtemos $4 < 9$, que é uma desigualdade verdadeira. Concluímos que a desigualdade inicial é também verdadeira.

A desigualdade

$$\frac{m}{n} < \frac{p}{q}$$

é verdadeira **se, e somente se**

$$q\times m < n\times p.$$

De fato, multiplicando cada um dos lados da desigualdade

$$\frac{m}{n} < \frac{p}{q}$$

pelo produto $n\times q$ dos denominadores, temos

$$n\times q\times\frac{m}{n} < n\times q\times\frac{p}{q}.$$

Logo

$$q\times m\times\frac{n}{n} < n\times p\times\frac{q}{q}$$

e, portanto,

$$q\times m < n\times p.$$

Observação 3.8 Para verificar a desigualdade

$$\frac{m}{n} < \frac{p}{q},$$

basta multiplicar cada um dos lados da desigualdade por um múltiplo comum dos denominadores n e q (por exemplo, o $\text{MMC}(n, q)$).

Podemos usar algumas “regras práticas” para comparar ou ordenar frações. Por exemplo, para verificar a desigualdade

$$\frac{5}{8} < \frac{4}{6}$$

substituímos cada uma das frações da desigualdade por frações equivalentes, com mesmo denominador. O **denominador comum** pode ser, por exemplo, o *mínimo múltiplo comum* $\text{MMC}(6{,}8) = 24$. Temos, então, as seguintes equivalências

$$\frac{5\times 3}{8\times 3} = \frac{15}{24}$$

e

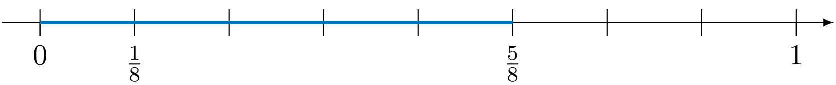
$$\frac{4\times 4}{6\times 4} = \frac{16}{24}.$$

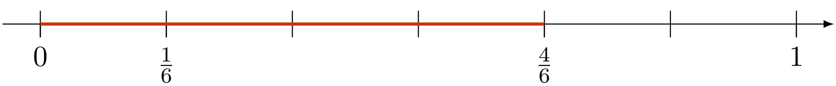
Assim, a desigualdade que queremos verificar torna-se

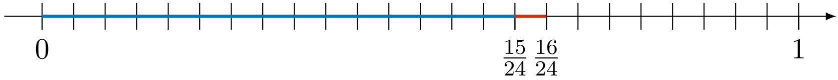
$$\frac{15}{24} < \frac{16}{24},$$

que é uma desigualdade verdadeira.

Podemos explicar essa comparação geometricamente com as seguintes retas numéricas:







Note que, da primeira para a terceira reta, cada segmento de comprimento $\frac{1}{8}$ foi particionado em 3 partes, cada uma com comprimento igual a $\frac{1}{24}$, enquanto que, da segunda para a terceira reta, cada segmento de comprimento $\frac{1}{6}$ foi particionado em 4 partes, cada uma com comprimento também igual a $\frac{1}{24}$.

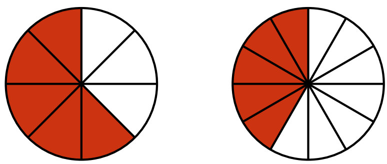
Observação 3.9 No exemplo acima, ao invés de usar o MMC, poderíamos ter usado qualquer múltiplo comum dos denominadores 6 e 8. Um múltiplo comum fácil de encontrar é o produto dos denominadores. No caso acima, $6 \times 8 = 48$. Sendo assim, a desigualdade passaria a ser

$$\frac{30}{48} < \frac{32}{48}$$

obtida multiplicando numerador e o denominador de $\frac{5}{8}$ por 6 e multiplicando numerador e o denominador de $\frac{4}{6}$ por 8.

Exercício 3.7 Em uma pizzaria, todas as pizzas têm o mesmo sabor e o mesmo tamanho. Entretanto, cada pizza pode ser dividida em 8 ou em 12 pedaços iguais. Na semana passada, as amigas Gabi e Carol foram a essa pizzaria. Gabi pediu uma pizza dividida em 8 pedaços e comeu 5 desses pedaços. Carol pediu uma pizza dividida em 12 pedaços e também comeu 5 pedaços. Qual das duas comeu mais pizza?

Solução. Gabi comeu $\frac{5}{8}$ e Carol comeu $\frac{5}{12}$ de uma pizza, como representado nas seguintes figuras:



Gabi Carol

Como $8 \times 12 = 96$, temos que

$$\frac{5}{8} = \frac{5 \times 12}{8 \times 12} = \frac{60}{96} \quad \text{e} \quad \frac{5}{12} = \frac{5 \times 8}{12 \times 8} = \frac{40}{96}.$$

Assim, $\frac{5}{8}$ é equivalente a $\frac{60}{96}$ e $\frac{5}{12}$ é equivalente a $\frac{40}{96}$. Portanto, como $\frac{60}{96} > \frac{40}{96}$, concluímos que

$$\frac{5}{8} > \frac{5}{12},$$

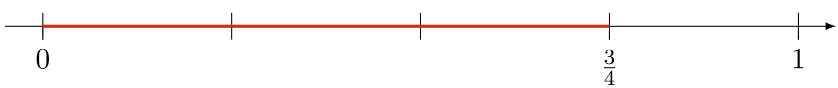
ou seja, Gabi comeu mais pizza que Carol. ■

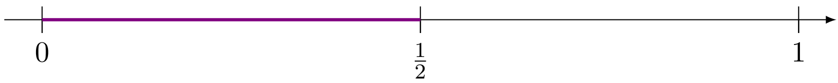
Observação 3.10 No exercício acima, observe que as duas amigas comeram o mesmo número de pedaços de pizza. Entretanto, os pedaços da pizza de Gabi eram maiores que os pedaços da pizza de Carol, pois a pizza de Gabi foi dividida em 8 pedaços mas a de Carol foi dividida em 12 pedaços. Portanto, sem fazer contas, podemos afirmar que $\frac{5}{8} > \frac{5}{12}$. Lembremos: quando duas frações têm o mesmo numerador, a maior delas é a que possui o **menor** denominador.

Exercício 3.8 Alan, Tiago e Isa disputaram um jogo de dardos. Terminado o jogo, Alan acertou $\frac{2}{5}$, Tiago $\frac{3}{4}$ e Isa $\frac{1}{2}$ do total de dardos que atingiram o alvo.

(a) Quem acertou mais dardos?
(b) Quem acertou menos dardos?

Solução. Para resolver esse exercício, devemos encontrar a maior e a menor dentre as frações $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{2}$. Representando essas frações nas retas numéricas a seguir, constatamos que $\frac{3}{4}$ é a maior e $\frac{2}{5}$ é a menor das três frações.





Para confirmar o que já conseguimos deduzir a partir das figuras, procuremos frações com um mesmo denominador, cada uma delas equivalente a uma das frações $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{2}$.

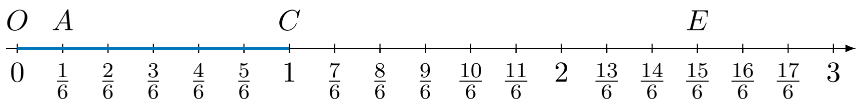
Para isso, evidentemente, podemos usar como **denominador comum** o produto $5{\times}4{\times}2 = 40$ dos denominadores das frações dadas. No entanto, tudo o que precisamos é de um denominador que seja **múltiplo comum** de 5, 4 e 2 ao mesmo tempo. Logo, basta utilizarmos o *mínimo múltiplo comum*(MMC) desses números. Como $\text{MMC}(5, 4, 2) = 20$, temos

$$\frac{2}{5} = \frac{2{\times}4}{5{\times}4} = \frac{8}{20}, \quad \frac{3}{4} = \frac{3{\times}5}{4{\times}5} = \frac{15}{20} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} = \frac{1{\times}10}{2{\times}10} = \frac{10}{20}.$$

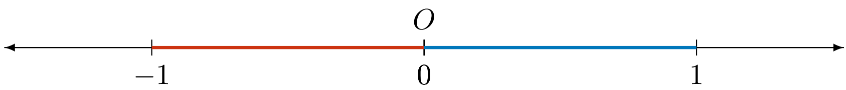
Assim, uma vez que $\frac{15}{20}$ é a maior fração dentre $\frac{8}{20}$, $\frac{15}{20}$ e $\frac{10}{20}$, concluímos que Tiago foi quem acertou mais dardos. Essa é a resposta para o item (a). E como a fração $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$ é a menor das três frações, Alan foi quem acertou menos, o que responde o item (b). ■

3.3 – Os números racionais na reta numérica

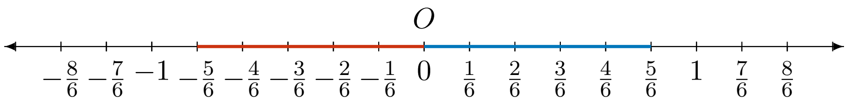
Resumindo o que vimos acima, uma fração $\frac{m}{n}$ (onde m, n são números naturais com $n \neq 0$) representa um ponto E sobre a reta numérica cuja *distância* ao ponto O, representado pelo número 0, é m vezes maior que a distância do ponto A ao ponto O. Por sua vez, a distância do ponto O ao ponto A é n *vezes menor* que 1, a distância de O a C. A reta a seguir representa o exemplo em que $m = 15$ e $n = 6$:



Vimos anteriormente que números inteiros opostos correspondem a pontos à mesma distância do ponto O, chamado **origem** e que corresponde a zero. Portanto, um número inteiro e seu *oposto* ou *simétrico* são associados a pontos em posições *simétricas* na reta, com relação à origem O. Por exemplo, os números 1 e -1 são opostos um do outro e são representados na reta da seguinte forma:



Podemos fazer o mesmo com respeito a frações positivas e seus *opostos* ou *simétricos*. Vejamos o exemplo das frações $\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \ldots$ e seus opostos ou simétricos $-\frac{1}{6}, -\frac{2}{6}, \ldots$

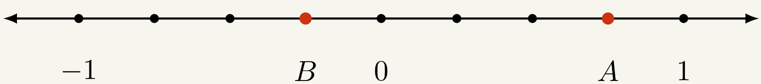


O *conjunto* das frações positivas, o zero e as frações negativas formam os **números racionais** na reta numérica. Estudaremos isso de modo mais preciso mais adiante. Por ora, diremos que cada número racional, positivo ou negativo, é representado por frações equivalentes a uma dada fração irredutível ou a seu oposto.

Observação 3.11 Frações, tanto positivas quanto negativas, podem ser comparadas e ordenadas na reta numérica: na orientação usual da reta (da esquerda para a direita), quanto mais à direita uma fração estiver, maior ela será. Sendo assim, e observando o exemplo acima, temos:

$$-\frac{3}{6} < -\frac{2}{6} < -\frac{1}{6} < 0 < \frac{1}{6} < \frac{2}{6} < \frac{3}{6}.$$

Exercício 3.9 As frações representadas pelas letras A e B na reta numérica desenhada abaixo são, respectivamente, iguais a:



(a) $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{4}$.

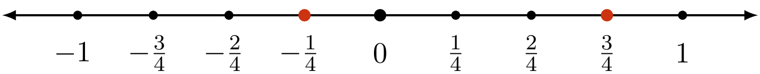
(b) $\frac{3}{4}$ e $-\frac{1}{4}$.

(c) $-\frac{3}{4}$ e $-\frac{1}{4}$.

(d) $-\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{4}$.

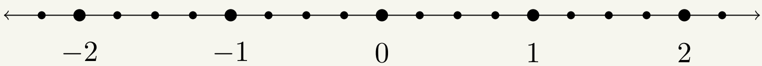
(e) $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$.

Solução. Observe que o segmento de 0 a 1 foi particionado em 4 segmentos (menores) de mesmo tamanho. Assim, os pontos marcados sobre a reta e pertencentes ao segmento de 0 a 1 representam as frações $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{4}$ (também podemos escrever $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$). Como o segmento de -1 a 0 foi também particionado em 4 segmentos de mesmo tamanho, os pontos marcados na reta e pertencentes ao segmento de -1 a 0 representam as frações $-\frac{3}{4}$, $-\frac{2}{4}$ e $-\frac{1}{4}$ (também podemos escrever $-\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$). Veja a figura abaixo:



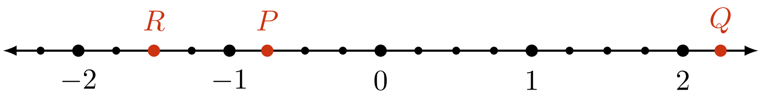
Logo, $A = \frac{3}{4}$ e $B = -\frac{1}{4}$, ou seja, a alternativa correta é a de letra (b). ■

Exercício 3.10 Localize os pontos $P = -\frac{3}{4}$, $Q = \frac{9}{4}$ e $R = -\frac{3}{2}$ na reta numérica abaixo.



Solução. Outra vez, temos que os segmentos de comprimento unitário estão particionados, cada um, em 4 segmentos de mesmo comprimento. Assim, a distância entre dois pontos consecutivos é sempre igual a $\frac{1}{4}$. Desse modo, para marcar o ponto $P = -\frac{3}{4}$ basta contar, a partir do zero, 3 "passos" de tamanho $\frac{1}{4}$ para a *esquerda*. Para marcar $\frac{9}{4}$, basta contar 9 "passos" de tamanho $\frac{1}{4}$ para a *direita*.

Já para o ponto $R = -\frac{3}{2}$, primeiro observamos que $-\frac{3}{2} = -\frac{6}{4}$; assim, para marcar R, basta contar 6 "passos" de tamanho $\frac{1}{4}$ para a esquerda.

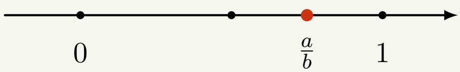


Note que

$$\begin{array}{r|l} 9 & 4 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$$

Logo, $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$ (2 inteiros e um quarto). Desse modo, podemos dar 1 "passo" de tamanho $\frac{1}{4}$ à direita do 2 para chegar ao ponto $\frac{9}{4}$. De maneira similar, $-\frac{3}{2} = -\frac{6}{4} = -1\frac{2}{4}$, ou seja, dando dois "passos" de tamanho $\frac{1}{4}$ à esquerda, a partir de -1, chegamos ao ponto $-\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$. ■

Exercício 3.11 — OBM. A fração $\frac{a}{b}$, onde a e b são números naturais, representa um número entre 0 e 1, na posição indicada no desenho a seguir. Qual é um possível valor para a soma $a + b$?



(a) 1. (b) 2. (c) 3. (d) 4. (e) 5.

Solução. Resolveremos esse exercício por exclusão de itens. Observe que a fração $\frac{a}{b}$ é maior que $\frac{1}{2}$ (e menor que 1). Mantenha em mente que $a \geq 0$ e $b > 0$ são inteiros.

(a) $a + b = 1$ implica $a = 0$ e $b = 1$, ou seja, $\frac{a}{b} = 0$, o que é incompatível com o desenho.
(b) $a + b = 2$ implica $a = 0$ e $b = 2$ ou $a = 1$ e $b = 1$, ou seja, $\frac{a}{b} = 0$ ou $\frac{a}{b} = 1$, também incompatíveis com o desenho.
(c) $a + b = 3$ implica $\frac{a}{b} = 0$, ou $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$, ou $\frac{a}{b} = \frac{2}{1} = 2 > 1$, todos incompatíveis.

(d) Os casos em que $a+b=4$ são: $\frac{a}{b}=\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$ ou $\frac{a}{b}=\frac{2}{2}=1$ ou $\frac{a}{b}=\frac{3}{1}=3>1$, todos incompatíveis.

Como todas as quatro primeiras alternativas são falsas, a alternativa (e) deve ser a verdadeira. De fato, $a+b=5$ nos dá os seguintes casos: $\frac{a}{b}=\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$, ou $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}>\frac{1}{2}$, ou $\frac{a}{b}=\frac{3}{2}>1$, ou $\frac{a}{b}=\frac{4}{1}=4>1$. Assim, podemos concluir que o único caso compatível com o desenho é $a=2$ e $b=3$, o que nos dá a fração $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$. ■

3.4 – Exercícios resolvidos e propostos

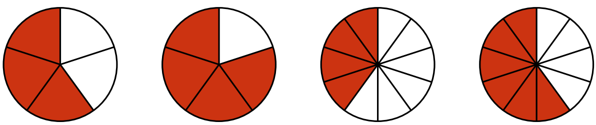
Sequência 1

Exercício 3.12 Represente geometricamente as seguintes frações, usando setores circulares ("pizzas") ou barras:

(a) $\frac{3}{5}$. (b) $\frac{4}{5}$. (c) $\frac{4}{10}$. (d) $\frac{6}{10}$.

Em seguida, coloque as frações em ordem crescente.

Solução. A figura seguinte traz as representações geométricas das frações usando "pizzas":



$\frac{3}{5}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{4}{10}$ $\frac{6}{10}$

Observe, a partir dessas figuras, que $\frac{3}{5}<\frac{4}{5}$, o que é natural, visto que a primeira fração corresponde a 3 partes dentre 5 enquanto a segunda equivale a 4 partes dentre 5. Portanto, a segunda fração corresponde a *mais partes*. De modo similar, deduzimos que $\frac{4}{10}<\frac{6}{10}$. Também com base nas figuras observe que $\frac{4}{10}<\frac{4}{5}$. De fato, a primeira fração corresponde a 4 unidades divididas em 10 partes enquanto a segunda equivale a 4 unidades, mas divididas em 5 partes e, portanto, em *partes* *maiores*. Finalmente, note que $\frac{3}{5}$ e $\frac{6}{10}$ representam a mesma fração da pizza. Portanto, essas frações são equivalentes: $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$.

Utilizando barras, as frações poderiam ser representadas do seguinte modo:

$= \frac{3}{5}$

$= \frac{4}{5}$

$= \frac{4}{10}$

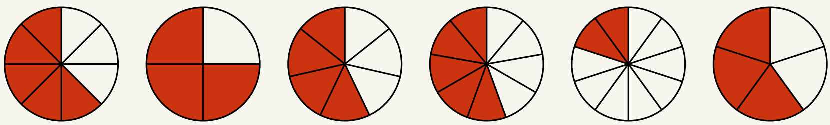
$= \frac{6}{10}$

As barras deixam ainda mais claro que

$$\frac{4}{10} < \frac{3}{5} = \frac{6}{10} < \frac{4}{5}.$$

■

Exercício 3.13 Escreva a fração correspondente à região destacada em cada uma das figuras abaixo.



Em seguida, escreva as frações em ordem crescente.

Exercício 3.14 — ANRESC. Em qual das figuras abaixo o número de bolinhas pintadas de preto representa $\frac{1}{3}$ do total de bolinhas?

(a) ● ● ○ ○ ○ ○
(b) ● ● ● ○ ○ ○
(c) ● ● ● ● ○ ○
(d) ● ● ● ● ● ○

Exercício 3.15 Calcule o resultado das seguintes divisões usando frações:

(a) $\frac{11}{5}$. (b) $\frac{12}{5}$. (c) $\frac{13}{5}$. (d) $\frac{14}{5}$.

Em seguida, represente as frações utilizando segmentos da reta numérica. De quais números naturais essas frações estão *mais próximas*?

Solução. Dividindo 11 por 5, obtemos quociente 2 e resto 1, visto que

$$11 = 10 + 1 = 5 \times 2 + 1.$$

Logo

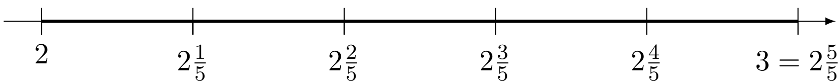
$$\frac{11}{5} = 2 + \frac{1}{5}.$$

Da mesma forma, concluímos que

$$\frac{12}{5} = 2 + \frac{2}{5} \qquad \frac{13}{5} = 2 + \frac{3}{5} \qquad \frac{14}{5} = 2 + \frac{4}{5}$$

Logo, estas frações estão *localizadas* na reta numérica entre os pontos correspondentes a 2 e 3, uma vez que

$$2 < 2 + \frac{1}{5} < 2 + \frac{2}{5} < 2 + \frac{3}{5} < 2 + \frac{4}{5} < 2 + \frac{5}{5} = 2 + 1 = 3.$$

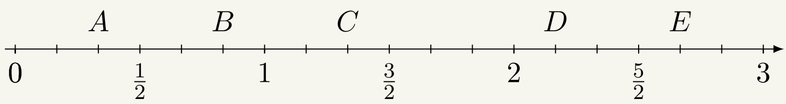


Concluímos que as frações $2\frac{1}{5}$ e $2\frac{2}{5}$ estão mais próximas do número natural 2 e as frações $2\frac{3}{5}$ e $2\frac{4}{5}$ estão mais próximas do número natural 3. ■

Exercício 3.16 Quais números naturais *melhor aproximam* cada uma das seguintes frações?

(a) $\frac{11}{25}$. (b) $\frac{17}{25}$. (c) $\frac{56}{25}$. (d) $\frac{126}{25}$.

Exercício 3.17 Associe a cada um dos pontos A, B, C, D e E uma das frações nas alternativas seguintes:



(a) $\frac{13}{6}$ (b) $\frac{16}{12}$ (c) $\frac{8}{3}$ (d) $\frac{10}{12}$ (e) $\frac{2}{6}$

Exercício 3.18 Calcule as seguintes frações:

(a) $\frac{1}{5}$ de 75. (b) $\frac{2}{5}$ de 75. (c) $\frac{3}{5}$ de 75. (d) $\frac{4}{5}$ de 75.

Em seguida, represente as frações utilizando barras.

Solução. Observamos que dividindo 75 em 5 partes iguais, cada uma dessas partes corresponde a $\frac{1}{5}$ de 75, ou seja, é igual a

$$\frac{1}{5}\times 75 = \frac{75}{5} = 15.$$

Somando estas 5 partes, temos $5\times 15 = 75$. Somando 2 dessas partes, obtemos

$$\frac{2}{5}\times 75 = 2\times\frac{75}{5} = 2\times 15 = 30.$$

Da mesma forma, calculamos

$$\frac{3}{5}\times 75 = 3\times 15 = 45$$

e

$$\frac{4}{4}\times 75 = 4\times 15 = 60.$$

Representando essas **frações de** 75 utilizando barras, temos

■

Exercício 3.19 Em um conjunto de 75 alunos, 30 são torcedores do Ceará e 45 são torcedores do Fortaleza. a) Quais frações do total de alunos representam os *subconjuntos* de torcedores do Ceará e de torcedores do Fortaleza? b) Qual a *razão* entre as quantidades de torcedores do Ceará e de torcedores de Fortaleza?

Solução. A **fração** que corresponde ao subconjunto de torcedores do Ceará é igual a

$$\frac{\text{total de alunos torcedores do Ceará}}{\text{total de alunos}} = \frac{30}{75} = \frac{2}{5}$$

e a **fração** que corresponde ao subconjunto de torcedores do Fortaleza é dada por

$$\frac{\text{total de alunos torcedores do Fortaleza}}{\text{total de alunos}} = \frac{45}{75} = \frac{3}{5}.$$

Note que $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{5}{5} = 1$. A **razão** entre a quantidade de torcedores do Ceará e de torcedores do Fortaleza é dada por

$$\frac{\text{total de alunos torcedores do Fortaleza}}{\text{total de alunos torcedores do Ceará}} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}.$$

■

Exercício 3.20 Quais das frações abaixo são equivalentes a $\frac{16}{10}$?

(a) $\frac{16+2}{10+2}$ (b) $\frac{16:2}{10:2}$ (c) $\frac{8\times 4}{5\times 4}$ (d) $\frac{64:4}{40:4}$ (e) $\frac{16-2}{10-2}$

Justifique sua resposta com cálculos e com representações geométricas das frações.

Exercício 3.21 Em uma turma da primeira série, há 6 alunas para cada 5 alunos. Esta *proporção* será a mesma caso ingressem exatamente mais 2 alunos e mais 2 alunas nesta turma? E caso dobrássemos o número de alunos e o número de alunas? Justifique sua respostas (com cálculos, barras, pizzas ou segmentos da reta numérica, conforme preferir).

Exercício 3.22 Localize as seguintes frações na reta numérica:

(a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{4}{3}$ (c) $\frac{12}{9}$ (d) $\frac{12}{3}$ (e) $\frac{3}{12}$

Exercício 3.23 Compare e ordene as seguintes frações:

(a) $\frac{52}{25}$ (b) $\frac{52}{24}$ (c) $\frac{55}{25}$ (d) $\frac{52}{55}$ (e) $\frac{55}{52}$

Exercício 3.24 Calcule as seguintes frações

(a) $\frac{3}{4}$ de 180.
(b) $\frac{4}{3}$ de 180.
(c) $\frac{12}{3}$ de 180.
(d) $\frac{3}{12}$ de 180.

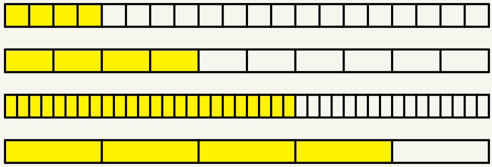
Em seguida, represente as frações utilizando barras.

Exercício 3.25 Simplifique as seguintes frações, obtendo suas formas *irredutíveis*

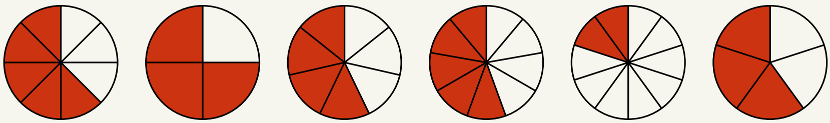
(a) $\frac{27}{125}$ (b) $\frac{144}{81}$ (c) $\frac{60}{128}$ (d) $\frac{145}{250}$ (e) $\frac{62}{58}$

Exercício 3.26 Qual fração representa a soma das frações ilustradas pelas barras na seguinte figura?

Exercício 3.27 Qual fração representa a soma das frações ilustradas pelas barras na seguinte figura?



Exercício 3.28 Qual fração representa a soma das frações ilustradas pelas "pizzas" na seguinte figura?



Exercício 3.29 Calcule as seguintes frações e as escreva em sua forma irredutível:

(a) $\frac{1}{8}+\frac{3}{8}$ (b) $2\times\frac{5}{8}$ (c) $\frac{5}{8}:2$ (d) $\frac{1}{2}\times\frac{5}{6}$ (e) $\frac{5}{8}:\frac{1}{2}$

Em seguida, represente estas frações geometricamente (com barras, "pizzas" ou segmentos da reta numérica.

Exercício 3.30 — KangoTreino 4 - 2020. Qual é o valor da expressão

$$\frac{2020+2020+2020+2020+2020}{2019+2019+2019+2019+2019}?$$

(a) $\frac{1}{2020}$
(b) $\frac{2021}{2019}$
(c) $1+\frac{1}{2019}$
(d) $\frac{20}{19}$
(e) 5

Sequência 2

Exercício 3.31 Uma coleção tem 300 selos.

(a) 100 selos correspondem a que fração da coleção?
(b) 200 selos correspondem a que fração da coleção?
(c) 60 selos correspondem a que fração da coleção?
(d) 180 selos correspondem a que fração da coleção?

Exercício 3.32 (a) Que fração do dia representa o período de 5 horas que Joaquim passa na escola?
(b) Que fração do mês de janeiro representa a primeira semana do mês (7 dias)?
(c) Que fração do ano corresponde a um trimestre (período de três meses)?
(d) Que fração de uma década representa um período de 3 anos?
(e) Que fração de um século corresponde a um período de 25 anos?

Exercício 3.33 — SAT - adaptado. A tabela seguinte classifica 103 elementos químicos como metais, metalóides ou não-metais e como sólidos, líquidos e gasosos em temperatura e pressão normais.

	Sólidos	Líquidos	Gasosos	Total
Metais	77	1	0	78
Metalóides	7	0	0	7
Não-metais	6	1	11	18
Total	90	2	11	103

Que fração de sólidos e líquidos na tabela são metalóides?

Exercício 3.34 Em cada alternativa, ponha as frações em ordem crescente:

(a) $\frac{9}{7}$, $\frac{9}{11}$, $\frac{9}{20}$ e $\frac{9}{13}$.

(b) $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{11}$, $\frac{1}{6}$ e $\frac{2}{13}$.

(c) $\frac{8}{20}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{3}{15}$ e $\frac{20}{25}$.

(d) $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$ e $\frac{1}{9}$.

Em seguida, localize essas frações na reta numérica.

Exercício 3.35 Numa prova de Matemática havia 15 exercícios.

(a) José errou 5 exercícios dessa prova. Escreva a fração que representa o número de erros cometidos por José em relação ao total de questões da prova.

(b) Obtenha também a fração que representa o número de acertos de José.

(c) Henrique errou $\frac{1}{5}$ dos exercícios dessa prova. Quantos exercícios ele acertou?

Solução. A fração que representa a *razão* entre o número de erros cometidos por José e o número total de questões da prova é

$$\frac{\text{número de erros}}{\text{número total de questões}} = \frac{5}{15} = \frac{5:5}{15:5} = \frac{1}{3}.$$

Logo, podemos dizer que José errou $\frac{1}{3}$ das questões da prova. De fato, dividindo o número total de 15 questões em 3 partes iguais, temos partes com 5 questões, exatamente o número de questões em que José cometeu erros. Também concluímos que ele acertou 10 questões, ou seja, os outros $\frac{2}{3}$ da prova.

Agora, dividindo o número total de questões em 5 partes iguais, obtemos partes com 3 questões cada. Ou seja, $\frac{1}{5}$ do número de questões equivale a 3 questões. Essa foi a quantidade de acertos de Henrique. ■

Exercício 3.36 Para encher $\frac{3}{4}$ de uma piscina são necessários 30.000 litros de água. Qual é a capacidade da piscina?

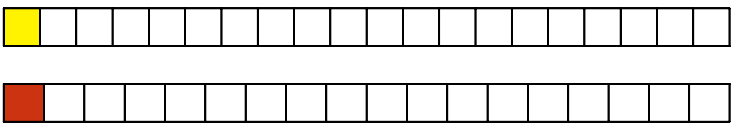
Solução. Se $\frac{3}{4}$ da capacidade da piscina correspondem a 30.000 litros, $\frac{1}{4}$ corresponde a $30.000 : 3 = 10.000$ litros. Portanto, a capacidade total da piscina, ou seja, os $\frac{4}{4}$ de sua capacidade correspondem a $4 \times 10.000 = 40.000$ litros. ■

Exercício 3.37 João está participando de uma corrida de bicicletas, na qual o percurso total da prova é de 48 km. Ele já percorreu $\frac{3}{4}$ desse percurso. Quantos quilômetros João já percorreu?

Exercício 3.38 Vinte amigos resolveram alugar uma casa de praia para passar uma temporada. O valor do aluguel deveria ser dividido igualmente entre todos eles. No entanto, no dia do passeio, dois dos vinte amigos desistiram, de forma que o valor do aluguel teve de ser dividido igualmente apenas entre aquelas que compareceram. A fração do valor total do aluguel pago por cada um dos amigos que compareceu é

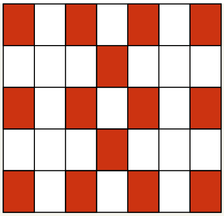
(a) $\dfrac{1}{20}$. (b) $\dfrac{18}{20}$. (c) $\dfrac{1}{10}$. (d) $\dfrac{1}{18}$. (e) $\dfrac{2}{18}$.

Solução. As barras abaixo representam a divisão do aluguel entre 20 pessoas e entre $20 - 2 = 18$ pessoas:



Com menos pessoas para dividir o aluguel, a fração que cada um deve pagar aumentou de $\frac{1}{20}$ para $\frac{1}{18}$. ■

Exercício 3.39 Qual a forma irredutível da fração correspondente à região pintada de vermelho na bandeira representada abaixo?



Exercício 3.40 Mateus e Guilherme trabalham na mesma empresa e recebem o mesmo salário. Mateus economiza $\frac{1}{6}$ do seu salário, enquanto Guilherme economiza $\frac{2}{11}$. Qual dos dois consegue economizar mais?

Solução. Basta observarmos que $\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$. Como

$$\frac{2}{12} < \frac{2}{11},$$

concluímos que Mateus economiza *menos* que Guilherme. ■

Observação 3.12 — Nota ao professor. Este é mais um exercício sobre comparação de frações em que **não** se faz necessário "tirar o mínimo" para que as frações sejam escritas com um denominador comum e, só então, possam ser comparadas.

Exercício 3.41 — CMPA. Os gatos são animais fascinantes. São espertos, brincalhões, companheiros e não exigem muita atenção. Além disso, sua inteligência é surpreendente. No mundo, há 5 raças que se destacam pela inteligência: Angorá Turco, Siamês, Sphynx, Balinês e Bangal. Em um centro de treinamento, existem apenas essas 5 raças de gatos e sabe-se que, do total de gatos, $\frac{1}{8}$ é da raça Angorá Turco, $\frac{3}{10}$ são da raça Siamês, $\frac{13}{40}$ são da raça Sphynx, $\frac{1}{16}$ é da raça Balinês e $\frac{3}{16}$ são da raça Bangal. É correto afirmar que, nesse centro:

(a) a maioria dos gatos é da raça Siamês.
(b) há mais gatos da raça Balinês que da raça Bangal.
(c) existe a mesma quantidade de gatos das raças Angorá Turco

e Sphynx.

(d) a raça que tem o menor número de gatos é a Angorá Turco.

(e) há menos gatos da raça Siamês que da raça Sphynx.

Solução. Iniciamos observando que 160 é um *múltiplo comum* dos denominadores $8, 10, 16, 40$. Com isto, vamos determinar frações equivalentes às frações no enunciado com denominadores iguais a 160. Temos

$$\frac{1}{8} = \frac{1\times 20}{8\times 20} = \frac{20}{160} \quad \text{e} \quad \frac{3}{10} = \frac{3\times 16}{10\times 16} = \frac{48}{160}.$$

Da mesma forma, calculamos

$$\frac{13}{40} = \frac{13\times 4}{40\times 4} = \frac{52}{160} \quad \text{e} \quad \frac{1}{16} = \frac{1\times 10}{16\times 10} = \frac{10}{160} \quad \text{e} \quad \frac{3}{16} = \frac{3\times 10}{16\times 10} = \frac{30}{160}.$$

Uma vez que

$$\frac{10}{160} < \frac{20}{160} < \frac{30}{160} < \frac{48}{160} < \frac{52}{160},$$

concluímos que a alternativa correta é a da letra (e).

Observação 3.13 Note que não havia necessidade de encontrarmos frações equivalentes às frações dadas e com um denominador comum. Basta, por exemplo, constatar que

$$\frac{1}{16} < \frac{1}{8} = \frac{2}{16} < \frac{3}{16}.$$

Além disso,

$$\frac{3}{16} < \frac{3}{10} = \frac{12}{40} < \frac{13}{40}.$$

Deste modo, comparamos todas as frações que aparecem no enunciado do problema.

■

Exercício 3.42 César gastou $\frac{1}{4}$ da mesada na compra de um livro e $\frac{2}{5}$ na compra de duas revistas.

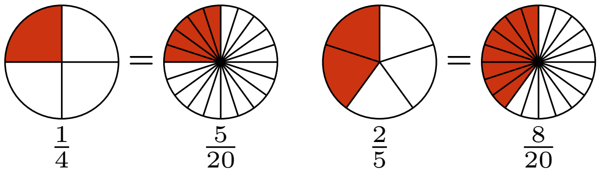
(a) Qual das compras foi a mais cara?

(b) Se César tinha 120 reais, com quantos reais ele ficou?

Solução. Observe que o mínimo múltiplo comum aos denominadores 4 e 5 é 20, o produto dos dois (vimos antes que isso ocorre por que 3 e 5 não tem fatores comuns, isto é, são primos entre si). Portanto, temos as seguintes equivalências de frações

$$\frac{1}{4}=\frac{1\times 5}{4\times 5}=\frac{5}{20} \qquad \text{e} \qquad \frac{2}{5}=\frac{2\times 4}{5\times 4}=\frac{8}{20},$$

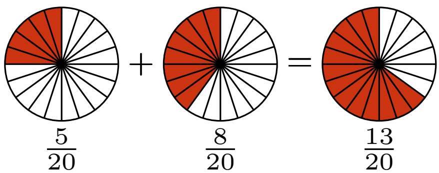
representada nas seguintes "pizzas":



Concluímos que as duas revistas, juntas, são mais caras que o livro. Além disso, *somando* as frações da mesada representadas pelas duas compras, deduzimos que César gastou

$$\frac{5}{20}+\frac{8}{20}=\frac{13}{20}$$

de sua mesada. Representando essa soma com "pizzas", temos



Como a mesada é de 120 reais, $\frac{1}{20}$ da mesada é igual a $120 : 20 = 6$ reais. Logo, $\frac{13}{20}$ da mesada equivalem a $13\times 6 = 78$ reais. Portanto, após as compras, César ficou com $120 - 78 = 120 - 80 + 2 = 42$ reais. Note que esses 42 reais restantes correspondem a

$$\frac{20}{20}-\frac{13}{20}=\frac{7}{20} \text{ da mesada.}$$

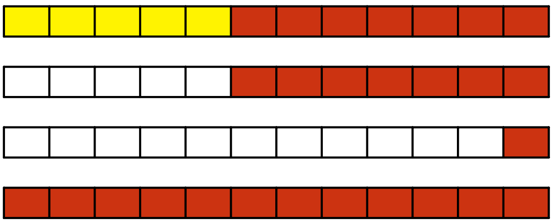
De fato, como $\frac{1}{20}$ da mesada são 6 reais, $\frac{7}{20}$ dela são $7\times 6 = 42$ reais. ■

Exercício 3.43 Fernando juntou $\frac{5}{12}$ das figurinhas de um álbum de jogadores de futebol. Ainda faltam 63 figurinhas para completar o álbum. Quantas figurinhas tem o álbum completo?

Solução. As 63 figurinhas que *faltam* correspondem a

$$\frac{12}{12} - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$$

do total de figurinhas do álbum completo. Logo, $\frac{1}{12}$ do total de figurinhas equivale a $63 : 7 = 9$ figurinhas. Portanto, o álbum completo tem $12 \times 9 = 108$ figurinhas. Representemos esta solução com o uso de barras:



$\frac{12}{12} - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$

$\frac{7}{12}$ do todo $= 63$

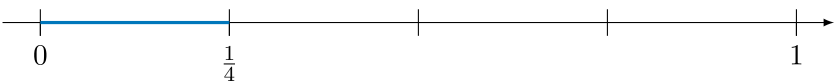
$\frac{1}{12}$ do todo $= \frac{63}{7} = 9$

$\frac{12}{12}$ do todo $= 12 \times 9 = 108$

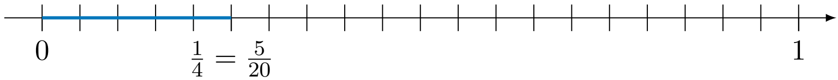
■

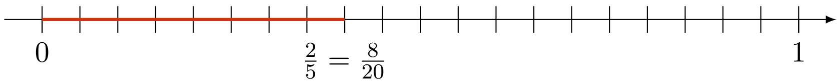
Exercício 3.44 Na última eleição para a prefeitura da cidade de Numeropólis, os candidatos Arquimedes e Euclides obtiveram, respectivamente, $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{5}$ do total de votos válidos. Sabendo que o restante do total de votos válidos, ou seja, 6.300 votos, foi dado ao candidato Tales, pergunta-se: quantos votos cada um dos candidatos recebeu? Qual dos três candidatos foi eleito?

Solução. Representemos as frações de votos válidos dos candidatos Arquimedes e Euclides por pontos na reta numérica como segue

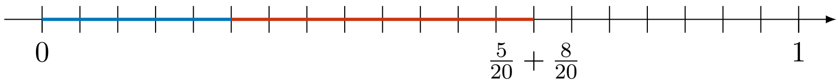


Particionando cada um dos 4 segmentos de comprimentos iguais entre 0 e 1 na primeira reta em 5 partes iguais e cada um dos 4 segmentos de comprimentos iguais entre 0 e 1 na primeira reta em 5 partes iguais, obtemos





Somando essas duas frações, obtemos



Esses $\frac{13}{20}$ dos votos válidos correspondem ao total de votos dos candidatos Arquimedes e Euclides. Logo, os votos válidos restantes, do candidato Tales, correspondem a

$$\frac{20}{20} - \frac{13}{20} = \frac{7}{20}$$

dos votos. Logo $\frac{7}{20}$ dos votos equivalem a 6.300 votos. Portanto, $\frac{1}{20}$ dos votos é igual a $6.300 : 7 = 900$. Assim, o total de votos é igual a $12 \times 900 = 10.800$ votos. Concluímos que a distribuição de votos válidos foi a seguinte:

(a) votos recebidos por Arquimedes: $\frac{5}{20}$ dos votos válidos, ou $5 \times 900 =$ 4.500 votos;

(b) votos recebidos por Euclides: $\frac{8}{20}$ dos votos válidos, ou $8 \times 900 = 7.200$ votos;

(c) votos recebidos por Tales: $\frac{7}{20}$ dos votos válidos, ou $7 \times 900 = 6.300$ votos,

o que comprova que Euclides foi o candidato vencedor. ■

Exercício 3.45 A Região Nordeste tem área aproximadamente igual a $1.560.000\,\mathrm{km}^2$, o que corresponde a cerca de $\frac{1}{5}$ da superfície territorial do Brasil. Sabendo disso, qual é, aproximadamente, a superfície territorial brasileira em quilômetros quadrados?

Exercício 3.46 Cerca de três décimos da população do Ceará, ou seja, aproximadamente 2.700.000 pessoas, vivem em Fortaleza. Pode-se afirmar que o Ceará tem cerca de:

(a) 900.000 habitantes.
(b) 2.700.000 habitantes.
(c) 8.100.000 habitantes.
(d) 9.000.000 habitantes.

Exercício 3.47 Se a população do Ceará representa $\frac{16}{100}$ da população do Nordeste e o Nordeste cerca de $\frac{1}{4}$ da população do Brasil, a população do Ceará corresponde, aproximadamente, a qual fração da população brasileira?

Exercício 3.48 A *razão* atual entre a população do Ceará (cerca de 9.200.000 de habitantes) e a do Brasil é aproximadamente igual a $\frac{4}{100}$. Qual seria este fração se a população do Ceará aumentasse em 400.000 pessoas e a população do Brasil em 10.000.000?

Exercício 3.49 Um colégio organizou uma olimpíada de Matemática composta de três fases. Um total de 96 alunos se inscreveu nessa olimpíada. Sabe-se, ainda, que:

I. $\frac{3}{8}$ dos alunos inscritos não obtiveram a pontuação necessária para realizar a segunda fase.

II. $\frac{1}{3}$ dos alunos que participaram da segunda fase foram classificados para a terceira fase.

III. $\frac{3}{4}$ dos alunos que participaram da terceira fase não conseguiram concluí-la.

Desse modo, o número de alunos que completou as três fases da maratona foi

(a) 36. (b) 60. (c) 20. (d) 5. (e) 15.

Exercício 3.50 — Banco OBMEP - adaptada. Em um país com 14 milhões de habitantes, $\frac{15}{10.000}$ da população contraiu um certo tipo de gripe. Quantos habitantes não contraíram essa gripe?

(a) 13.979.000.
(b) 1.397.900.
(c) 139.790.
(d) 13.979.
(e) 139.790.000.

Solução. Os habitantes que não contraíram correspondem a

$$\frac{10.000}{10.000} - \frac{15}{10.000} = \frac{9.985}{10.000}$$

da população do país, ou seja, a

$$\frac{9.985}{10.000} \times 14.000.000 = 9.985 \times 14 \times 100 = 13.979.000$$

habitantes. Logo, a alternativa correta é a de letra a). ■

Sequência 3

Exercício 3.51 — Revista Canguru 2020. Qual das frações a seguir tem o maior valor?

(a) $\frac{8+5}{3}$ (b) $\frac{8}{3+5}$ (c) $\frac{3+5}{8}$ (d) $\frac{8+3}{5}$ (e) $\frac{3}{8+5}$

Solução. Note que as frações em (b) e (c) são ambas iguais a 1, uma vez que

$$\frac{3+5}{8} = \frac{8}{8} = 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{8}{3+5} = \frac{8}{8} = 1.$$

Além disso, a fração em (e) é menor que 1, pois

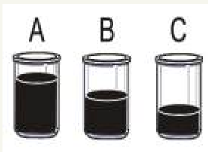
$$\frac{3}{8+5} = \frac{3}{13} < 1.$$

Finalmente, comparemos as frações em (a) e (d), ambas *maiores* que 1. Temos

$$\frac{8+5}{3} = \frac{13}{3} = \frac{65}{15} \qquad \text{e} \qquad \frac{8+3}{5} = \frac{11}{5} = \frac{33}{15}.$$

Concluímos que a fração na alternativa (a) é maior que a fração na alternativa (d) e, portanto, é a maior das cinco. ■

Exercício 3.52 — Banco OBMEP 2006.
Três frascos, todos com capacidade igual a um litro, contêm quantidades diferentes de um mesmo líquido, conforme ilustração a seguir. Qual das alternativas abaixo melhor expressa, aproximadamente, o volume de líquido contido nos frascos A, B e C, nesta ordem?



(a) $\frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{2}{5}$.

(b) $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$.

(c) $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{2}{4}$.

(d) $\frac{2}{3}, \frac{4}{7}, \frac{3}{4}$.

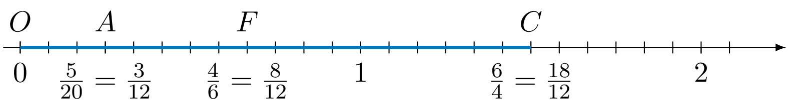
(e) $\frac{3}{3}, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}$.

Exercício 3.53 — ENEM 2014. André, Carlos e Fábio estudam em uma mesma escola e desejam saber quem mora mais perto da escola. André mora a cinco vinte avos de um quilômetro da escola. Carlos mora a seis quartos de um quilômetro da escola. Já Fábio mora a quatro sextos de um quilômetro da escola.

A ordenação dos estudantes de acordo com a ordem decrescente das distâncias de suas respectivas casas à escola é

(a) André, Carlos e Fábio.
(b) André, Fábio e Carlos.
(c) Carlos, André e Fábio.
(d) Carlos, Fábio e André.
(e) Fábio, Carlos e André.

Solução. Representemos na seguinte reta numéricas as distâncias das casas de André (ponto A), Carlos (ponto C) e Fábio (ponto F) à escola (ponto O, origem), que são, respectivamente, dadas pelas frações $\frac{5}{20}$, $\frac{6}{4}$ e $\frac{4}{6}$:



Observe que, para comparar essas distâncias, observamos que

$$\frac{5}{20} = \frac{5:5}{20:5} = \frac{1}{4} < 1 < \frac{6}{4}$$

Além disso, $\frac{4}{6} < 1 < \frac{6}{4}$ e

$$\frac{5}{20} = \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{2}{3} = \frac{4}{6}.$$

Logo, a ordem crescente deve ser $\frac{5}{20} < \frac{4}{6} < \frac{6}{4}$, o que corresponde à alternativa (b).

Observação 3.14 Para verificar esta ordem de outro modo, podemos usar as seguintes equivalências das frações:

$$\frac{4}{6} = \frac{4\times2}{6\times2} = \frac{8}{12} \quad \text{e} \quad \frac{6}{4} = \frac{6\times3}{4\times3} = \frac{18}{12}.$$

Temos também

$$\frac{5}{20} = \frac{5:5}{20:5} = \frac{1}{4} = \frac{1\times3}{4\times3} = \frac{3}{12}.$$

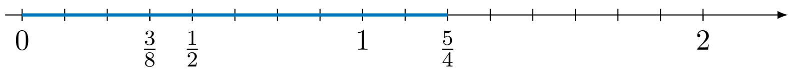
Assim, uma vez que $\frac{3}{12} < \frac{8}{12} < \frac{18}{12}$ (como representado na reta), comprovamos a resposta que já tínhamos deduzido.

■

Exercício 3.54 — ENEM 2016. Nas construções prediais são utilizados tubos de diferentes medidas para a instalação da rede de água. Essas medidas são conhecidas pelo seu diâmetro, muitas vezes medido em polegada. Alguns desses tubos, com medidas em polegada, são os tubos de $1/2$, $3/8$ e $5/4$. Colocando os valores dessas medidas em ordem crescente, encontramos

(a) $1/2$, $3/8$, $5/4$.
(b) $1/2$, $5/4$, $3/8$.
(c) $3/8$, $1/2$, $5/4$.
(d) $3/8$, $5/4$, $1/2$.
(e) $5/4$, $1/2$, $3/8$

Solução. Representemos as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$ e $\frac{5}{4}$ na reta numérica como segue:

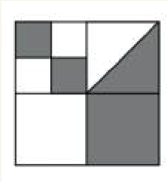


Note que $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$ e $\frac{5}{4} = \frac{10}{8}$. Logo, a ordem correta é a que aparece na alternativa (c).

■

Exercício 3.55 Determine a localização e a distância entre os pontos na reta numérica que representam as frações $\frac{4}{6}$ e $\frac{6}{4}$. Faça o mesmo para as frações $\frac{3}{8}$ e $\frac{5}{4}$.

Exercício 3.56 — Revista Canguru 2020. Num desses quadrados menores também foi desenhada uma diagonal.



Qual fração do quadrado original foi escurecida?

(a) $\frac{4}{5}$ (b) $\frac{3}{8}$ (c) $\frac{4}{9}$ (d) $\frac{1}{3}$ (e) $\frac{1}{2}$

Exercício 3.57 — Banco OBMEP. Qual dos números a seguir está situado entre $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{4}$?

(a) $\frac{1}{6}$. (b) $\frac{4}{3}$. (c) $\frac{5}{2}$. (d) $\frac{4}{7}$. (e) $\frac{1}{4}$.

Solução. Inicialmente, observamos que

$$\frac{2}{5} < \frac{3}{4}$$

De fato, multiplicando ambos os lados dessa desigualdade pelo *múltiplo comum* 20, temos, do lado esquerdo

$$20 \times \frac{2}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

e, do lado direito,

$$20 \times \frac{3}{4} = \frac{60}{4} = 15.$$

De modo similar, demonstra-se que

$$\frac{1}{4} < \frac{2}{5}$$

bastando, para isso, multiplicar ambos os lados pelo múltiplo comum 20, obtendo $5 < 8$.

Agora, observamos que

$$\frac{1}{6} < \frac{1}{5} < \frac{2}{5}.$$

Além disso, ambas as frações $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$ e $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ são maiores que 1 e, portanto, maiores que $\frac{3}{4}$. Resta, portanto, verificarmos se $\frac{4}{7}$ *está entre* $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{4}$. Temos

$$\frac{2}{5} < \frac{4}{7}$$

uma vez que, multiplicando os dois lados da desigualdade por 35, obtemos $2{\times}7 = 14 < 5{\times}4 = 20$. Do mesmo modo, para verificar que

$$\frac{4}{7} < \frac{3}{4},$$

multiplicamos ambos os lados da desigualdade por 28, obtendo $16 < 21$. Portanto, a alternativa correta é a de letra (d). Para finalizar, representemos estas cinco frações na reta numérica:

■

Exercício 3.58 — Banco OBMEP 2020. Uma escola com 862 alunos participará de uma gincana, cujas regras são:

I) o número de inscritos tem que ser um número $\frac{2}{3}$ e $\frac{7}{9}$ do total de alunos da escola.

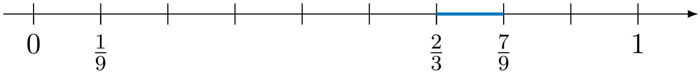
II) Como os alunos serão divididos em grupos com 11 alunos, o número de inscritos deverá ser múltiplo de 11.

Quantas são as possíveis quantidades de inscritos desta escola?

Solução. Antes de mais nada, localizemos as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{7}{9}$ na reta numérica. Para isso, observamos que

$$\frac{2}{3} = \frac{2{\times}3}{3{\times}3} = \frac{6}{9}.$$

Assim, temos



Passamos, agora, à resolução do problema. Calculando $\frac{2}{3}$ do total de 862 alunos da escola, temos

$$\frac{2}{3}\times 862 > \frac{2}{3}\times 861 = 2\times\frac{861}{3} = 2\times 287 = 574.$$

Por outro lado, calculamos $\frac{7}{9}$ do total de 862 alunos, obtendo

$$\frac{7}{9}\times 862 < \frac{7}{9}\times 864 = 7\times\frac{864}{9} = 7\times 96 = 672.$$

O primeiro múltiplo de 11 entre 575 e 671 é $583 = 11\times 53$ e o último desses múltiplos é $660 = 11\times 60$. Portanto, temos $60 - 53 + 1 = 8$ possibilidades de números de inscritos de acordo com as regras I) e II). ■

Exercício 3.59 Em cada planeta do Sistema Solar, um ano (ou período orbital) pode ser definido como o número de dias (terrestres) para que o planeta complete uma volta em torno do Sol. Vejamos a duração aproximadas dos anos em alguns planetas:

	Mercúrio	Vênus	Terra	Marte
Dias	88	225	365	686

Um ano em Mercúrio corresponde a aproximadamente a qual fração de um ano em Marte ?

Solução. Note que

$$1 \text{ ano em Mercúrio } = 88\times 1 \text{ dia na Terra} = 88\times\frac{1}{686} \text{ ano em Marte.}$$

Logo, deduzimos que

$$1 \text{ ano em Mercúrio } = \frac{88}{686} \text{ ano em Marte.}$$

Esta fração pode ser simplificada:

$$\frac{88:2}{686:2} = \frac{44}{343}.$$

Podemos *aproximar* esta fração por

$$\frac{40}{320} = \frac{1}{8}.$$

Logo, podemos afirmar que 1 ano em Mercúrio corresponde a aproximadamente $\frac{1}{8}$ de ano em Marte ou, equivalentemente, que 1 ano em Marte equivale a 8 anos em Mercúrio!

Observação 3.15 Esta é uma boa aproximação, visto que, dividindo 686 por 88, obtemos

$$\frac{686}{88} = \frac{616+70}{88} = \frac{616}{88} + \frac{70}{88} = 7 + \frac{70}{88},$$

ou seja, temos 7 anos e um **excesso** de 70 dias ou

$$\frac{686}{88} = \frac{704-18}{88} = \frac{704}{88} - \frac{18}{88} = 8 - \frac{18}{88},$$

ou seja, temos 8 anos e uma **falta** de apenas 18 dias.

■

Exercício 3.60 Em países anglófonos, a **milha** é usada como uma medida de comprimento (distância, usualmente), sendo que 10 milhas correspondem aproximadamente a 16 quilômetros. A uma velocidade média de 80 quilômetros por hora quantas milhas seriam percorridas em 72 minutos?

Solução. A esta velocidade média, percorre-se 80 quilômetros em uma hora. Como cada 16 quilômetros equivalem a 10 milhas, 1 quilômetro corresponde a

$$\frac{10}{16} \text{ milha},$$

uma fração de uma milha. Logo, um percurso de 80 quilômetros corresponde a

$$80\times\frac{10}{16} = 80\times10\times\frac{1}{16} = 10\times80\times\frac{1}{16} = 10\times\frac{80}{16} = 10\times5 = 50$$

milhas *por hora*. Como 72 minutos correspondem a

$$60 \text{ minutos} + 12 \text{ minutos} = 1 \text{ hora} + \frac{1}{5} \text{ hora},$$

concluímos que, nestes 72 minutos ou $1\frac{1}{5}$, percorre-se

$$50 + \frac{1}{5}\times50 = 50 + 10 = 60 \text{ milhas}.$$

■

Exercício 3.61 A **densidade demográfica** de uma região é igual a *razão* entre seu número de habitantes e sua área territorial. Sabendo que o Piauí tem cerca de $\frac{36}{100}$ da população do Ceará e que sua área territorial é cerca de $\frac{169}{100}$ vezes maior do que a área territorial do Ceará, podemos concluir que a densidade demográfica do Piauí é

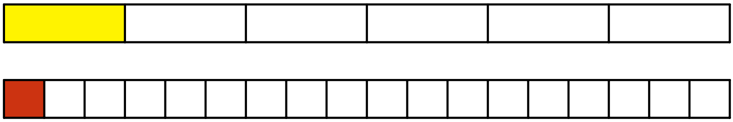
(a) $\frac{169}{100}$ vezes a densidade demográfica do Ceará.
(b) $\frac{36}{100}$ vezes a densidade demográfica do Ceará.
(c) $\frac{36}{169}$ vezes a densidade demográfica do Ceará.
(d) $\frac{169}{36}$ vezes a densidade demográfica do Ceará.

Exercício 3.62 — Banco OBMEP 2006. A sexta parte dos alunos de uma classe usam óculos. Dentre os que usam óculos, $\frac{1}{3}$ são meninas. Além disso, 4 meninos usam óculos. Quantos são os alunos dessa classe?

Solução. De acordo com o enunciado, $\frac{1}{6}$ dos alunos usam óculos. Desses, $\frac{1}{3}$ são meninas e, portanto, $\frac{2}{3}$ são meninos, o que corresponde a 4 alunos. Observe que $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{6}$ é dado por

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{6} = \frac{1}{18}.$$

De fato, dividindo $\frac{1}{6}$ em três partes iguais, temos $\frac{1}{18}$. Veja o modelo deste cálculo usando barras:



Voltando à resolução do problema, concluímos que $\frac{1}{18}$ do total de alunos equivale a 4 alunos. Logo, o número total de alunos é igual a $18 \times 4 = 72$ alunos. ■

Exercício 3.63 — ENEM 2020 - Segunda aplicação. Foi feita uma pesquisa sobre a escolaridade dos funcionários de uma empresa. Verificou-se que $\frac{1}{4}$ dos homens que ali trabalham têm o ensino médio completo, enquanto $\frac{2}{3}$ das mulheres que trabalham na empresa têm o ensino médio completo. Constatou-se, também, que entre todos os que têm o ensino médio completo, metade são homens. A fração que representa o número de funcionários homens em relação ao total de funcionários dessa empresa é

(a) $\frac{1}{8}$. (b) $\frac{3}{11}$. (c) $\frac{11}{24}$. (d) $\frac{2}{3}$. (e) $\frac{8}{11}$.

Solução. Metade, ou seja, $\frac{1}{2}$, dos que têm ensino médio corresponde a $\frac{1}{4}$ dos homens. A outra metade dos que têm ensino médio corresponde a $\frac{2}{3}$ das mulheres. Concluímos que

$$\frac{2}{3} \text{ das mulheres} = \frac{1}{4} \text{ dos homens},$$

ou seja,

$$\frac{1}{3} \text{ das mulheres} = \frac{1}{4} : 2 = \frac{1}{8} \text{ dos homens}.$$

Logo, o número total de mulheres é igual a

$$3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \text{ dos homens}.$$

Portanto, o número total de funcionários é igual a

$$\text{homens} + \text{mulheres} = \text{homens} + \frac{3}{8} \text{ dos homens} = \frac{11}{8} \text{ dos homens}.$$

Assim, o número de homens corresponde a $\frac{8}{11}$ do número total de funcionários, o que corresponde à letra (e). ■

Exercício 3.64 — ENEM 2010. Grandes times nacionais e internacionais utilizam dados estatísticos para a definição do time que sairá jogando numa partida. Por exemplo, nos últimos treinos, dos chutes a gol feito pelo jogador I, ele converteu 45 chutes em gol. Enquanto isso, o jogador II acertou 50 gols. Quem deve ser selecionado para estar no time no próximo jogo, já que os dois jogam na mesma posição? A decisão parece simples, porém deve-se levar em conta quantos chutes a gol cada um teve oportunidade de executar. Se o jogador I chutou 60 bolas a gol e o jogador II chutou 75, quem deveria ser escolhido?

(a) O jogador I, porque acertou 3/4 dos chutes, enquanto o jogador II acertou 2/3 dos chutes.
(b) O jogador I, porque acertou 4/3 dos chutes, enquanto que o jogador II acertou 2/3
(c) O jogador I, porque acertou 3/4 dos chutes, enquanto o jogador II acertou 3/4 dos chutes.
(d) O jogador I, porque acertou 12/25 dos chutes, enquanto o jogador II acertou 2/3 dos chutes.
(e) O jogador I, porque acertou 9/25 dos chutes, enquanto o jogador II acertou 2/5 dos chutes.

Solução. O jogador I acertou 45 dos 60 chutes, ou seja, sua *razão* de acertos é $\frac{45}{60}$ ou

$$\frac{45:15}{60:15}=\frac{3}{4},$$

enquanto o jogador II acertou 50 dos 75 chutes, ou seja, sua *razão* de acertos é $\frac{50}{75}$ ou

$$\frac{50:25}{75:25}=\frac{2}{3}.$$

Uma vez que

$$\frac{2}{3}<\frac{3}{4},$$

concluímos que o jogador I deve ser escolhido por ter acertado $3/4$ dos seus chutes ao passo que o jogador II acertou $2/3$ dos seus chutes. Portanto, a alternativa (a) é correta. ■

Exercício 3.65 — ENEM 2014. Um clube de futebol abriu inscrições para novos jogadores. Inscreveram-se 48 candidatos. Para realizar uma boa seleção, deverão ser escolhidos os que cumpram algumas exigências: os jogadores deverão ter mais de 14 anos, estatura igual ou superior à mínima exigida e bom preparo físico. Entre os candidatos, $7/8$ têm mais de 14 anos e foram pré-selecionados. Dos pré-selecionados, $1/2$ têm estatura igual ou superior a mínima exigida e, destes, $2/3$ têm bom preparo físico.

A quantidade de candidatos selecionados pelo clube de futebol foi

(a) 12. (b) 14. (c) 16. (d) 32. (e) 42.

Exercício 3.66 — OBMEP 2019. Janaína tem três canecas, uma pequena, uma média e uma grande. Com a caneca pequena cheia, ela enche $3/5$ da caneca média. Com a caneca média cheia, ela enche $5/8$ da caneca grande. Janaína enche as canecas pequena e média e despeja tudo na caneca grande. O que vai acontecer com a caneca grande?

(a) Ela ficará preenchida em $7/8$ de sua capacidade.
(b) Ela ficará preenchida em $8/13$ de sua capacidade.
(c) Ela ficará preenchida em $5/8$ de sua capacidade.
(d) Ela ficará totalmente cheia, sem transbordar.
(e) Ela vai transbordar.

Solução. Pelo enunciado, a capacidade da caneca pequena equivale a $\frac{3}{5}$ da capacidade da caneca média e esta, por sua vez, equivale a $\frac{5}{8}$ da capacidade da caneca grande. Assim, 1 caneca pequena teria capacidade igual a de

$$\frac{3}{5}\times 1 \text{ caneca média} = \frac{3}{5}\times\frac{5}{8}\times 1 \text{ caneca grande}$$
$$= \frac{3}{5}\times 5\times\frac{1}{8} \text{ caneca grande} = 3\times\frac{1}{8} \text{ caneca grande} = \frac{3}{8} \text{ caneca grande.}$$

Portanto, 1 caneca pequena e 1 caneca média, juntas, têm capacidade equivalente a de

$$\frac{3}{8}+\frac{5}{8}=\frac{8}{8}=1 \text{ caneca grande.}$$

Portanto, (d) é a alternativa correta. ■

Exercício 3.67 — CMPA - adaptada. As girafas são animais que se alimentam muito bem. Quando adultas, podem passar até 20 horas por dia se alimentando. Os machos adultos consomem, por dia, cerca de 80 quilogramas de comida, sendo que $\frac{1}{4}$ dessa comida é composto de material seco (folhas secas, galhos, cascas de árvores) e o restante de material fresco (folhagens). Já as fêmeas adultas consomem, diariamente, aproximadamente 75 quilogramas de comida, sendo que $\frac{1}{5}$ dessa comida é composto de material seco e o restante de material fresco. Considerando a alimentação diária de 2 girafas adultas, sendo um macho e uma fêmea, é correto afirmar que

(a) $\frac{4}{31}$ dessa alimentação são compostos de material seco.

(b) $\frac{7}{31}$ dessa alimentação são compostos de material seco.

(c) $\frac{24}{31}$ dessa alimentação são compostos de material seco.

(d) $\frac{12}{31}$ dessa alimentação são compostos de material fresco.

(e) $\frac{16}{31}$ dessa alimentação são compostoa de material fresco.

Solução. A girafa macho adulto come cerca de $\frac{1}{4}\times 80 = 20$ quilogramas de material seco e, portanto, $80-20=60$ quilogramas de material fresco. Já a girafa fêmea adulta come cerca de $\frac{1}{5}\times 75 = 15$ quilogramas e, assim, $75-15=60$ quilogramas de material fresco.

As duas girafas, macho e fêmea adultas, consomem, juntas, cerca de $80 + 75 = 155$ quilogramas, dos quais $20 + 15 = 35$ quilogramas são de material seco. Assim, concluímos que

$$\frac{35}{155} = \frac{7}{31}$$

é a fração que o material seco representa de tudo que as duas girafas comem. Logo, a alternativa correta é a de letra (b). ■

Exercício 3.68 — ENEM 2016. Cinco marcas de pão integral apresentam as seguintes concentrações de fibras (massa de fibra por massa de pão):

- Marca A: 2 g de fibras a cada 50 g de pão;
- Marca B: 5 g de fibras a cada 40 g de pão;
- Marca C: 5 g de fibras a cada 100 g de pão;
- Marca D: 6 g de fibras a cada 90 g de pão;
- Marca E: 7 g de fibras a cada 70 g de pão.

Recomenda-se a ingestão do pão que possui a maior concentração de fibras.

Disponível em: `www.blog.saude.gov.br`. Acesso em: 25 fev. 2013.

A marca a ser escolhida é

(a) A (b) B (c) C (d) D (e) E

Solução. *Concentração* de fibras significa a fração a quantidade de fibras em gramas **por** quantidade de pão em gramas, isto é, a **fração** ou **razão**

$$\frac{\text{quantidades de gramas de fibras}}{\text{quantidade de gramas de pão}}.$$

Para as marcas A, B, C, D e E, respectivamente, essas concentrações são iguais a

$$\frac{2}{50} \quad \frac{5}{40} \quad \frac{5}{100} \quad \frac{6}{90} \quad \frac{7}{70}$$

Note que $\frac{5}{100} < \frac{5}{40}$, pois temos mesmos numeradores e denominador menor na maior fração. Logo, a resposta não pode ser a marca C. Obsrve também que

$$\frac{6}{90} = \frac{6:3}{90:3} = \frac{2}{30} > \frac{2}{50}.$$

Portanto, a marca A também não é a de maior concentração de fibras. Agora, as frações das marcas B e E são equivalentes, respectivamente, a

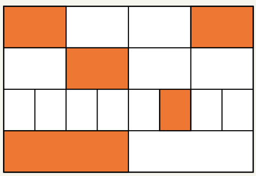
$$\frac{5:5}{40:5} = \frac{1}{8} \quad \text{e} \quad \frac{7:7}{70:7} = \frac{1}{10}.$$

Como $\frac{1}{10} < \frac{1}{8}$, concluímos que a marca E não é a resposta. Resta, assim, compararmos as concentrações de fibras das marcas B e D, ou seja, as frações $\frac{1}{8}$ e $\frac{2}{30}$, respectivamente. Temos

$$\frac{2}{30} = \frac{1}{15} < \frac{1}{8}.$$

Logo, concluímos que a marca B é a que tem maior concentração de fibras. ■

Exercício 3.69 Uma bandeira está dividida em 4 faixas horizontais de igual largura e cada faixa está dividida em duas, quatro ou oito partes iguais, conforme indicado na figura abaixo. Qual é a fração correspondente à área pintada de amarelo?



Exercício 3.70 — ENEM 2015. A expressão "Fórmula de Young" é utilizada para calcular a dose infantil de um medicamento, dada a dose do adulto:

$$\text{dose de criança} = \left(\frac{\text{dose da criança (em anos)}}{\text{idade da criança (em anos)} + 12}\right) \cdot \text{dose do adulto}.$$

Uma enfermeira deve administrar um medicamento X a uma criança inconsciente, cuja dosagem de adulto é de 60 mg. A enfermeira não consegue descobrir onde está registrada a idade da criança no prontuário, mas identifica que, algumas horas antes, foi administrada a ela uma dose de 14 mg do medicamento Y, cuja dosagem de adulto é 42 mg. Sabe-se que a dose da medicação Y administrada à criança estava correta.

Então, a enfermeira deverá ministrar uma dosagem do medicamento X, em miligramas, igual a

(a) 15. (b) 20. (c) 30. (d) 36. (e) 40.

Sequência 4

Exercício 3.71 — Canguru 2020 - Prova S. Se C cachorros pesam Q quilogramas e E elefantes pesam o mesmo que M cachorros, quantos quilogramas pesa um elefante?

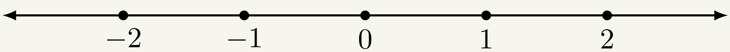
(a) $CQEM$. (b) $\frac{CQ}{EM}$. (c) $\frac{QE}{CM}$. (d) $\frac{QM}{CE}$. (e) $\frac{CM}{QE}$.

Solução. Se C cachorros pesam Q quilogramas, 1 cachorro pesa $\frac{Q}{C}$ quilogramas e M cachorros pesam $M \times \frac{Q}{C}$ quilogramas. Como este é o peso de E elefantes, um elefante pesa

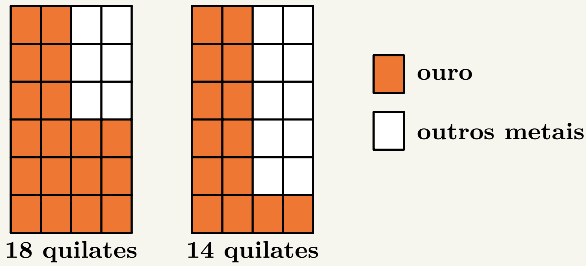
$$\frac{1}{E} \times M \times \frac{Q}{C} = \frac{Q \times M}{C \times E},$$

o que corresponde à alternativa (d). ■

Exercício 3.72 Localize (aproximadamente) os pontos $P = -\frac{7}{3}$, $Q = \frac{5}{4}$, $R = -\frac{6}{5}$ e $S = \frac{5}{2}$ na reta numérica desenhada abaixo.



Exercício 3.73 — CMPA - adaptada. Nas joalherias, é possível encontrar joias feitas de ouro de diferentes quilates. No Brasil, são mais comuns as de 18 quilates; nos Estados Unidos, são comuns também as de 14 quilates.



Baseado nas informações contidas na figura acima, considere as afirmativas:

I. As joias de 18 quilates têm $\frac{3}{4}$ de ouro.
II. Comparando joias de mesma massa, as de 14 quilates têm $\frac{7}{9}$ da quantidade de ouro das joias de 18 quilates.
III. Em 600 g de joias de 14 quilates, existem 250 g de outros metais.

Qual alternativa indica a(s) afirmativa(s) correta(s)?

(a) Apenas I e II.
(b) Apenas III.
(c) Apenas I e III.
(d) I, II e III.
(e) Apenas I.

Exercício 3.74 — CMF 2020. Qual o valor da expressão abaixo?

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{17}}}?$$

(a) $\frac{53}{35}$ (b) $\frac{35}{53}$ (c) $\frac{53}{17}$ (d) $\frac{17}{53}$ (e) $\frac{17}{35}$

Exercício 3.75 Encontre uma fração, equivalente a $\frac{7}{8}$, tal que a soma do numerador com o denominador é igual a 120.

Solução. A fração $\frac{7}{8}$ é *irredutível*. Portanto, qualquer fração equivalente a esta tem a seguinte forma

$$\frac{7\times k}{8\times k},$$

onde k é um número natural, diferente de 0. Portanto, a soma do numerador e do denominador é dada por $7k+8k$. Logo, precisamos encontrar k tal que

$$15k = 120.$$

Portanto, $k=8$. Assim, a fração que buscávamos é $\frac{7\times 8}{8\times 8} = \frac{56}{64}$. ■

Exercício 3.76 Sejam m, n números naturais com $0 < m < n$. Mostre que

$$\frac{m}{n} < \frac{m+1}{n+1}.$$

É verdadeiro que, neste caso,

$$\frac{m}{n} < \frac{m+p}{n+p}$$

seja qual for o número natural p, diferente de zero?

Exercício 3.77 — OCM 1990. Qual das frações é maior $\frac{2753}{2235}$ ou $\frac{2743}{2225}$? Justifique (sem efetuar divisões).

Exercício 3.78 Sejam m, n números naturais diferentes de zero com $m < n$. Qual das seguintes afirmações é **falsa**?

(a) $\frac{m}{n}$ está entre 0 e 1 na reta numérica.
(b) 1 está entre $\frac{m}{n}$ e $\frac{n}{m}$ na reta numérica.
(c) $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} = 1$.
(d) $\frac{n}{m}$ está à direita de 1 na reta numérica.

(e) $\frac{n}{m} \times \frac{m}{n} = 1$.

Exercício 3.79 — CMF - adaptado. A 2ª fase de uma maratona de Matemática de uma escola será realizada no próximo sábado. Os alunos classificados para essa fase são aqueles que, na primeira fase, acertaram no mínimo 16 das 20 questões da prova. Observe os resultados obtidos por alguns alunos na 1ª fase:

(I) Augusto não respondeu $\frac{1}{10}$ das questões da prova e errou o dobro do número de questões que não respondeu.
(II) Daniela acertou $\frac{3}{5}$ das questões da prova.
(III) Francisco acertou metade das questões de 1 a 10. No restante da prova, seu desempenho foi melhor: ele acertou $\frac{4}{5}$ das questões de 11 a 20.
(IV) Jorge errou $\frac{3}{20}$ das questões da prova.
(V) Carolina acertou 4 questões a mais do que Augusto.

Pode-se afirmar que os únicos alunos classificados para a 2ª fase da maratona foram:

(a) Augusto e Francisco.
(b) Daniela e Jorge.
(c) Jorge e Carolina.
(d) Augusto e Daniela.
(e) Francisco e Carolina.

Exercício 3.80 — CMF. Um fabricante de perfumes resolveu fazer uma pesquisa para verificar a preferência do público feminino sobre os perfumes por ele comercializados. Cada mulher entrevistada poderia escolher apenas um perfume. O resultado da pesquisa encontra-se na tabela a seguir:

Perfume	20 a 29 anos	30 a 39 anos	40 a 49 anos
Cheiro Bom	30	12	36
Aroma Suave	27	16	24
Fragrância Forte	15	52	28

Com base nos resultados obtidos, é correto afirmar que:

(a) $\frac{1}{8}$ das mulheres entrevistadas preferem o perfume Cheiro Bom.
(b) $\frac{1}{3}$ das mulheres entrevistadas têm de 30 a 39 anos.
(c) $\frac{5}{8}$ das mulheres de 30 a 39 anos preferem o perfume Fragrância Forte.
(d) $\frac{1}{4}$ das mulheres de 40 a 49 anos preferem o perfume Aroma Suave.
(e) $\frac{2}{3}$ das mulheres entrevistadas têm de 20 a 29 anos.

Exercício 3.81 Uma lata cheia de tinta pesa 13 kg. Se retirarmos metade da tinta contida na lata, ela passará a pesar 8 kg. Qual é o peso da lata vazia?

(a) 5 quilogramas.
(b) 10 quilogramas.
(c) 2 quilogramas.
(d) 3 quilogramas.
(e) 21 quilogramas.

Exercício 3.82 — CMF. Ao ser perguntado por suas duas filhas em que ano havia nascido, o professor Crocker respondeu-lhes com o seguinte problema: o numerador da fração irredutível equivalente à fração $\frac{12066}{222}$ representa o ano em que completei 43 anos. Assim, podemos afirmar que o professor Crocker nasceu:

(a) antes de 1965.
(b) entre 1965 e 1970.

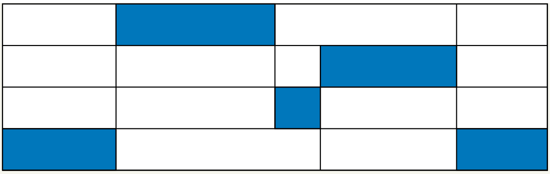
(c) entre 1970 e 1974.
(d) entre 1974 e 1980.
(e) após 1980.

Exercício 3.83 — CMF. Na Copa do Mundo de 2010, Augusto comprou um álbum de figurinhas dos jogadores das seleções que participaram do torneio. O valor do álbum, sem nenhuma figurinha, foi R$ 5,00. O álbum tinha 600 figurinhas, sendo que $\frac{2}{3}$ delas ele adquiriu gastando R$ 120,00. Como estava ficando difícil completar o álbum, ele resolveu solicitar as figurinhas restantes diretamente da editora que publicou o álbum. A editora enviou pelos Correios todas as figurinhas solicitadas sem nenhuma repetição. Elas foram enviadas em pacotes com cinco unidades e, por cada pacote, foram cobrados R$ 1,75. Desse modo, o total que foi gasto por Augusto, desde a compra do álbum até completá-lo, foi de:

(a) R$ 175,00.
(b) R$ 180,00.
(c) R$ 185,00.
(d) R$ 190,00.
(e) R$ 195,00.

Exercício 3.84 — Banco OBMEP. Encontre uma fração irredutível tal que o produto de seu numerador por seu denominador seja $2\times3\times4\times5\times\ldots\times10$. Quantas dessas frações irredutíveis existem?

Exercício 3.85 — Banco OBMEP - adaptada. A figura mostra um retângulo maior dividido em 18 retângulos menores (de diferentes tamanhos), todos com a mesma largura. Que fração do retângulo maior representa a parte pintada de azul?



Exercício 3.86 — Banco OBMEP - adaptada. Uma fração é irredutível quando o numerador e o denominador não possuem fatores primos em comum, ou seja, quando eles são primos entre si. Por exemplo, $\frac{6}{7}$ é a forma irredutível da fração $\frac{12}{14}$.

(a) Encontre a forma irredutível da fração $\frac{111111}{14}$.

(b) Encontre a forma irredutível da fração $\frac{111111111}{18}$.

(c) Encontre a forma irredutível da fração $\frac{111\ldots111}{15}$, onde o algarismo 1 se repete 2019 vezes no numerador.

Exercício 3.87 — Banco OBMEP 2019 - adaptada. Dois números naturais m e n, diferentes de zero, são tais que

$$\frac{2010}{2011} < \frac{m}{n} < \frac{2011}{2012}.$$

Encontre o menor valor possível para a soma $m + n$.

Exercício 3.88 — OBMEP 2019 - Nível 2. Os números a e b são inteiros positivos tais que

$$\frac{a}{11} + \frac{b}{3} = \frac{31}{33}.$$

Qual o valor de $a + b$?

(a) 5 (b) 7 (c) 14 (d) 20 (e) 31

Exercício 3.89 — Canguru 2020 - Prova S. Qual é o valor de

$$\frac{1010^2 + 2020^2 + 3030^2}{2020}$$

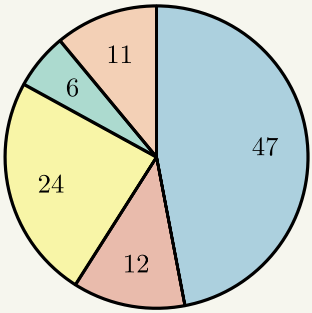
(a) 2020. (b) 3030. (c) 4040. (d) 6060. (e) 7070.

Solução. Observe que $2020 = 2\times1010$ e $3030 = 3\times1010$. Assim

$$\frac{1010^2 + (2\times1010)^2 + (3\times1010)^2}{2\times1010} = \frac{1010 + 4\times1.010 + 9\times1.010}{2}$$
$$= 7\times1010 = 7070.$$

■

Exercício 3.90 — Canguru 2020 - Prova S. O gráfico em pizza ao lado refere-se ao transporte de alunos para uma universidade. O número dos alunos que vão de carro é aproximadamente o dobro dos que usam o transporte público e o número dos que vão a pé é quase igual ao número dos que vão de bicicleta. O resto dos alunos vai de patinete. Qual é porcentagem dos alunos que vão de patinete?



(a) 6% (b) 11% (c) 12% (d) 24% (e) 47%