Ademir Sartim

MATEMÁTICA BÁSICA

VOLUME 3

EDUFES

Série Didáticos, 5

Ademir Sartim

MATEMÁTICA BÁSICA

VOLUME 3

EDUFES

Vitória, 2021

EDUFES
EDITORA

Editora Universitária – Edufes

Filiada à Associação Brasileira
das Editoras Universitárias (Abeu)

Av. Fernando Ferrari, 514
Campus de Goiabeiras
Vitória – ES · Brasil
CEP 29075-910

+55 (27) 4009-7852
edufes@ufes.br
www.edufes.ufes.br

Preparação e revisão de texto
Jussara Rodrigues

Capa e projeto gráfico
Nik Neves e Marina Camargo

Diagramação
Ana Elisa Poubel

Revisão final
Fernanda Scopel

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

Sartim, Ademir.
S249m Matemática básica [recurso eletrônico] : volume 3 / Ademir Sartim. - Dados eletrônicos. – Vitória, ES : EDUFES, 2021.
208 p. : il. – (Didáticos ; 5)

Inclui bibliografia.
ISBN: 978-65-88077-45-0
Também publicado em formato impresso.
Modo de acesso: http://repositorio.ufes.br/handle/10/774

1. Matemática – Estudo e ensino. I. Título. II. Série.

CDU: 51

Elaborado por Maria Giovana Soares – CRB-6 ES-000605/O

Esta obra foi composta com as famílias
tipográficas Roboto Slab e Times New Roman.

Para Maria Madalena.

APRESENTAÇÃO

Este livro originou-se da disciplina Matemática Básica, ministrada pelo autor no curso de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo (Ufes), a partir de 1994. Ele contém uma fundamentação geométrica informal dos principais conceitos da matemática básica: números e funções.

Não é intenção apresentar a axiomatização dos números, muito menos abstrações do conceito de função, mas, sim, expor um modo didático de ver a matemática com um rigor maior que o da forma como ela é apresentada nos textos do ensino médio.

Acredito que, com essa fundamentação, podemos fazer uma ponte entre a matemática do ensino médio e a do superior, tornando mais suave o impacto que os estudantes sentem ao iniciarem a graduação.

Portanto, estas notas têm como um dos objetivos fazer o elo entre o ensino médio e o ensino superior, por meio da fundamentação dos conceitos e propriedades básicas dos números e das principais funções elementares, necessários para a compreensão do cálculo. Além disso, a matemática básica estudada através da conceituação será útil também em toda atividade intelectual que tem a matemática como modelo.

Em resumo, este livro apresenta o essencial de matemática para uma boa compreensão do cálculo diferencial e integral de funções de uma variável.

AO ESTUDANTE

O conteúdo de ***Matemática básica*** foi escrito para um curso de noventa horas--aula, sendo distribuídas trinta horas para cada volume. Para a compreensão dos assuntos abordados, não é necessário que o estudante tenha conhecimento da matemática do ensino médio, pois esta obra é autossuficiente. No entanto, pela quantidade de temas abordados, é um curso mais rápido do que normalmente é feito na educação básica.

Os temas aqui expostos são apenas as partes da matemática do ensino médio extremamente necessárias para uma boa compreensão do cálculo diferencial e integral de funções de uma variável real. Porém este livro não é uma simples revisão rápida de assuntos do ensino médio, mas, sim, uma exposição mais criteriosa dos temas tratados, acrescentada das justificativas necessárias para a verdadeira compreensão da matemática.

O volume 1 trata dos conjuntos numéricos, com o objetivo de apresentar o conjunto dos números reais de um ponto de vista geométrico. Na sequência, temos o estudo das funções reais, suas propriedades, gráficos e suas inversas.

O volume 2 tem como objeto as funções trigonométricas. Iniciamos com a trigonometria no triângulo e na circunferência. Apresentamos as equações trigonométricas principais e, finalmente, as funções trigonométricas e suas inversas.

O volume 3 apresenta os números complexos, operações e propriedades, sempre com foco nas suas representações geométricas. Continua com uma introdução ao estudo dos polinômios definidos no conjunto dos números complexos e encerra com as equações algébricas.

Os exercícios propostos ao fim das seções são suficientes para a fixação do conteúdo. Para manter o texto enxuto, não há muitos exercícios de repetição de técnicas de resolução. O estudante que necessitar de mais exercícios repetitivos deve consultar as Referências no final de cada volume.

Ainda para aumentar o elenco de exercícios e problemas de dificuldade mediana, foram acrescentadas, no final de cada volume, as questões das provas da disciplina Matemática Básica I, ministrada pelo autor no curso de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, em anos anteriores. Também estão, ao fim, as respostas e sugestões dos exercícios propostos.

Recomendamos ao estudante que se esforce ao máximo para resolver as questões escolhidas antes de consultar a resposta/sugestão, porque um exercício ou problema resolvido por conta própria tem um valor extraordinário para o desenvolvimento do raciocínio individual. Vale mais resolver sozinho um único exercício/problema que olhar centenas deles prontos.

SUMÁRIO

PARTE I - Números complexos

PARTE II - Polinômios

PARTE III - Equações algébricas

I

NÚMEROS COMPLEXOS

1

HISTÓRICO

Os *números naturais* surgiram basicamente da necessidade de contagem, mas tornaram-se insuficientes para executar operações elementares como a subtração. Foi preciso então ampliar o conjunto dos números naturais de modo a ser possível calcular as diferenças entre quaisquer dois números naturais.

Assim foram constituídos os *números inteiros*. Da mesma forma, nem sempre é possível realizar a divisão de dois números inteiros e obter ainda um número inteiro. Então também o conjunto dos números inteiros foi ampliado, estendendo-se com todas as possíveis razões (divisões) de inteiros e formando o conjunto dos *números racionais*.

Historicamente sabemos que as frações surgiram muito antes de se pensar em número negativo. As frações provavelmente são conhecidas pela humanidade desde o início da evolução da contagem, das medições, partilhas de bens, etc.

Vimos também que, para medir segmentos de reta (lados, diagonais, arestas de figuras geométricas), os números racionais não foram suficientes. A incomensurabilidade de segmentos de reta, já conhecida pelos gregos aproximadamente quinhentos anos antes de Cristo, prenunciava a necessidade de ampliação do conceito de números para além daqueles expressos por razões de inteiros. Assim surgiam as medidas de certos segmentos que hoje chamamos de *números irracionais* e que junto com as frações formam o conjunto dos *números reais*. É bem verdade que a formalização dos números reais com suas propriedades foi feita por matemáticos do século XIX e a nomenclatura "conjunto" para expressar esses números é coisa do século XX.

Problemas que envolvem a necessidade de encontrar um número que multiplicado por ele mesmo dê como resultado um outro número pré-fixado são muito antigos. Os babilônios (1700 a.C.) já possuíam técnicas para resolver problemas matemáticos para os quais hoje em dia usamos a equação do 2° grau. As técnicas aplicadas eram do tipo "completação do quadrado" e eram usadas na forma de receitas. Para cada problema, criava-se uma receita particular de solução. Não há registro de que tenham dado qualquer justificativa lógica do raciocínio empregado para que ele pudesse ser generalizado (construção de uma fórmula geral).

Portanto, extração de raízes devia ser algo corriqueiro para os sábios "matemáticos" daquela época. No entanto, raiz quadrada de números negativos era algo que para eles não existia. Os problemas concretos em cujas tentativas de solução apareciam "raízes quadradas de números negativos" eram interpretados como indicativo de problema insolúvel, problema malformulado ou problema com enunciado de realidades não existentes.

Aliás, durante milênios estas justificativas de insolubilidade dos problemas permaneceram ativas quando no cálculo de soluções aparecia subtração de um valor maior de um menor e sua raiz quadrada.

No século XII, o matemático Bhaskara (1114-1185) escreveu "não há raiz quadrada de um número negativo, pois ele não é um quadrado".

A necessidade de se estabelecer sentido numa possível raiz quadrada de negativo apareceu no século XVI em problemas cujas soluções envolviam equações de 3° grau. Raphael Bombelli (1526-1572), depois de conhecer a fórmula de resolução de uma equação do 3° grau (fórmula de Cardano--Tartaglia), escreveu em seu livro *L'algebra* a equação $x^3 = 15x + 4$. As soluções dessa equação pela fórmula citada acima conduzem a uma raiz quadrada de número negativo, a saber $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$. Bombelli, mesmo admitindo como seus antecessores que essa expressão era um "sofisma", percebeu que $x = 4$ era uma solução da equação. Logo o problema não podia ser considerado insolúvel.

A partir de então Bombelli começou a estudar formas de operar com expressões nas quais apareciam raiz quadrada de números negativos e estabeleceu operações com expressões da forma $a + \sqrt{-b}$, sendo a e b números reais, das quais deduziu que $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$ e $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}$. Portanto $x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$. Assim Bombelli deu início a um novo conceito que extrapolava o que se entendia por número até então. Estava nascendo a formatação dos números chamados hoje de *números complexos*. No entanto, durante mais de dois séculos depois, muitos matemáticos não admitiam que as expressões $a + \sqrt{-b}$ pudessem ser consideradas números, mesmo porque não se conhecia um lugar geométrico para a interpretação dessas expressões. Mesmo assim, muitos cálculos e operações com essas expressões foram desenvolvidos e utilizados por matemáticos famosos, como Albert Girard, René Descartes, Jean D'Alembert e Leonhard Euler, na resolução de diversos problemas.

Os matemáticos Wessel (1745-1818) e Argand (1768-1822) contribuíram com alguma interpretação geométrica dessas expressões, mas coube a Carl Friedrich Gauss (1777-1855) sua representação geométrica e a formalização final das suas operações e propriedades. Com isso, tais expressões passaram de fato a constituir um conjunto numérico denominado por Gauss de números complexos.

Esses números, que inicialmente apareceram como soluções de equações algébricas, sempre podiam ser expressos na forma $a + b\sqrt{-1}$, com $a,\ b \in \mathbb{R}$. Em 1831, Gauss propôs que a cada número da forma $a + b\sqrt{-1}$, com $a,\ b \in \mathbb{R}$, fosse associado o par ordenado de números reais $(a,\ b)$, e vice-versa. Assim, cada número complexo poderia ser representado como um ponto do plano cartesiano.

Uma formalização completa dos números complexos como pares ordenados de números reais foi desenvolvida por William R. Hamilton (1805-1865) e apresentada à Academia Irlandesa em 1833. Pelos próximos dez anos, Hamilton tentou generalizar essa formalização para n-uplas de números reais e, em 1843, ele anunciou sua nova descoberta algébrica com quádruplas de números reais e denominou-a de *quaternions*. Assim nascia um novo sistema de números, hoje chamados de quatérnios, como uma extensão do sistema de números complexos.

2

O CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

2.1 A unidade imaginária

A equação $x^2 + 1 = 0$ não possui solução no conjunto dos números reais, pois não existe um número real que elevado ao quadrado dê -1. No entanto, admitindo que essa equação possui uma solução em algum conjunto, seja i essa solução. A solução i é chamada de *unidade imaginária*. Portanto, $i^2 + 1 = 0$, ou seja, $i^2 = -1$. Logo $i \notin \mathbb{R}$. Observe que $-i$ também é solução da equação, pois $(-i)^2 = i^2 = -1$. Assim dizemos que i é "raiz quadrada" de -1, e $-i$ também é "raiz quadrada" de -1, mas essa "raiz quadrada" tem algumas diferenças daquela definida no conjunto dos números reais.

2.2 Potências de i

Desse modo, definimos $i^0 = 1$; $i^1 = i$; $i^2 = -1$. As outras potências, $i^n,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$, serão obtidas da definição acima, desde que consideremos para i as propriedades operatórias válidas no conjunto dos números reais.

Então,

$$i^3 = i^2 \cdot i^1 = -i$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$
$$i^5 = i^4 \cdot i^1 = i$$

$$i^6 = i^5 \cdot i^1 = i^2 = -1$$
$$i^7 = i^6 \cdot i^1 = -1 \cdot i = -i$$
$$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$$

e assim sucessivamente.

Observe que, como resultado das potências $i^n,\ n \in \mathbb{N}$, somente se pode obter 1, i, -1 e $-i$, pois, na divisão de n por 4, temos $n = 4q + r$, em que q é o quociente e r é o resto da divisão, logo $0 \leq r < 4$. Assim,

$$i^n = i^{4q+r} = i^{4q} \cdot i^r = (i^4)^q \cdot i^r = 1^q \cdot i^r = i^r,$$

sendo $r = 0, 1, 2$ ou 3.

Conclusão: $i^n = i^r$, em que r é o resto da divisão de n por 4.

Exemplos:

1) $i^{62} = i^2 = -1$

2) $i^{2007} = i^3 = -i$

3) $i^{-38} = \frac{1}{i^{38}} = \frac{1}{i^2} = -1$

4) $i^{8n+5} = (i^8)^n \cdot i^5 = i^5 = i$

5) Resolver a equação $t^2 - 4t + 5 = 0$ usando a definição da unidade imaginária i.

Resolução: como $t^2 - 4t + 5 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 4 + 1 = 0 \Leftrightarrow (t-2)^2 + 1 = 0$, estamos diante da equação $x^2 + 1 = 0$, em que $x = t - 2$. As soluções dessa equação são $x = i$ ou $x = -i$, que resulta em $t - 2 = i$ ou $t - 2 = -i$, isto é, $t = 2 + i$ ou $t = 2 - i$. O conjunto solução é $\{2 - i,\ 2 + i\}$.

2.2.1 Exercícios

1) Quais os possíveis valores para a soma $i^n + i^{-n},\ \forall n \in \mathbb{N}$?

2) Calcule:

a) $(1 + i)^2$

b) $(1 - i)^2$

c) $(1 - i)^{11}$

d) $(1 + i)^{12}$

e) $(1 - i)^{12}$

3) Resolva a equação $z^2 - z + 1 = 0$, usando a definição de unidade imaginária.

4) Encontre $n \in \mathbb{N}$, tal que $(1+i)^n \cdot (1-i)^n = 16^{n-3}$.

5) Admitindo a notação $\sqrt{-1} = i$, mostre que $(2+\sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$ e conclua então que $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 4$

2.3 Forma algébrica de um número complexo

Definimos o conjunto $\mathbb{C}$ dos *números complexos* como sendo o conjunto de todas as expressões da forma $a + bi$ com $a,\ b \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$

Notação: $\mathbb{C} = \{a + bi;\ a,\ b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$

Diz-se que um número complexo z expresso por $z = a + bi$ com $a,\ b \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$ está escrito na sua *forma algébrica*.

O número real a denomina-se *parte real de z,* e o número real b denomina-se *parte imaginária de* z.

Notação: $Re(z) = a$ e $Im(z) = b$

Exemplos:

1) $z = 2 - 5i \Rightarrow Re(z) = 2$ e $Im(z) = -5$

2) $z = 3 \Rightarrow Re(z) = 3$ e $Im(z) = 0$

3) $z = \sqrt{2}i \Rightarrow Re(z) = 0$ e $Im(z) = \sqrt{2}$

4) $z = i \Rightarrow Re(z) = 0$ e $Im(z) = 1$

Dessa forma, todo número real é um número complexo com parte imaginária nula. Assim um número complexo z tal que $Im(z) = 0$ é um *número real.* Um número complexo z, tal que $Im(z) \neq 0$ é chamado de *número imaginário*. São números imaginários: $1 - 3i$; i ; $\sqrt{3}\ i$; $2 + 3i$. Um número complexo z é chamado *imaginário puro* se $Re(z) = 0$ e $Im(z) \neq 0$. São números imaginários puros: $2i$; $-\frac{1}{7}i$; $-\sqrt[3]{5}i$; πi.

2.4 Igualdade, adição e multiplicação de números complexos

Da maneira como foi definido o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, temos que todo número real é um número complexo, ou seja, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Assim sendo, para definir operações em $\mathbb{C}$, desejamos que elas sejam uma extensão das operações conhecidas em $\mathbb{R}$. Extensão no sentido de que a definição de uma nova operação em $\mathbb{C}$, quando restrita aos números reais, coincida com uma operação já conhecida em $\mathbb{R}$. É também de suma importância que essas operações mantenham as propriedades associativas, comutativas, distributiva da multiplicação em relação à adição, existência de elementos neutros, simétrico e inverso multiplicativo.

2.4.1 Igualdade

Dizemos que dois números complexos z_1 e z_2 são iguais se eles têm a mesma parte real e a mesma parte imaginária: se $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$, com $a_1,\ a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, então

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$ e $b_1 = b_2$.

Notação: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$ e $b_1 = b_2$

Observe que um número complexo $z = a + bi$ é nulo quando $a = b = 0$.

2.4.2 Adição

Sejam dois números complexos $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$.

Definimos a soma $z_1 + z_2 = [Re(z_1) + Re(z_2)] + [Im(z_1) + Im(z_2)]i$

Notação: $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

Decorre da definição acima que, se $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$, então $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$, ou seja, o conjunto $\mathbb{C}$ é fechado em relação à adição.

2.4.3 O simétrico (ou oposto)

O *simétrico* (ou oposto) de um número complexo z é o número complexo w, tal que $z + w = 0$. Assim, se $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, então $w = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$, tal que $(a + bi) + (x + yi) =$ $= 0 + 0i$. Logo, $(a + x) + (b + y)i = 0 + 0i$. Portanto, $a + x = 0$ e $b + y = 0$ de que se conclui que $x = -a$ e $y = -b$.

Conclusão: o simétrico (ou oposto) de $z = a + bi$ é $-z = (-a) + (-b)i$, também denotado $-z = -a - bi$

2.4.4 Subtração

A subtração de dois números complexos z_1 e z_2 é a adição de z_1 com o oposto de z_2. Essa definição é análoga à subtração de números reais.

Se $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$,

temos que $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = a_1 + b_1 i + (-a_2) + (-b_2)i = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$. Portanto $z_1 - z_2 = [Re(z_1) - Re(z_2)] + [Im(z_1) - Im(z_2)]i$

Exemplo:

Se $z_1 = 2 - 3i$ e $z_2 = 1 + 2i$, temos $z_1 - z_2 = (2 - 1) + (-3 + 2)i = 1 - 5i$

2.4.5 Multiplicação

Dados dois números complexos $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$, definimos a multiplicação de z_1 e z_2 por $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$

Observe que a multiplicação acima definida nada mais é do que a aplicação da propriedade distributiva da multiplicação com relação à adição de números reais com a condição de que $i^2 = -1$. Portanto, essa multiplicação também pode ser obtida como produto de binômios de números reais desde que seja obedecida a condição $i^2 = -1$.

Exemplos:

1) Sendo $z_1 = 2 + 3i$ e $z_2 = 5 - 2i$, temos $z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i)(5 - 2i) = 16 + 11i$

2) Se $z_1 = i$ e $z_2 = 1 - i$, temos $z_1 \cdot z_2 = i(1 - i) = 1 + i$

3) Determinar os possíveis valores reais de a para que $(a + i)^2$ seja um número real.

Resolução: seja $z = (a + i)^2 = (a + i)(a + i) = (a^2 - 1) + 2ai$. Para que z seja um número real, devemos ter $Im(z) = 0$. Como $Im(z) = 2a$, temos $2a = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

Portanto, $(a + i)^2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a = 0$.

4) Determinar o conjunto dos números complexos w, tais que $w^2 = i$.

Resolução:

Seja $w \in \mathbb{C}$. Logo, $w = x + yi$ com $x, y \in \mathbb{R}$.

$$w^2 = i \Leftrightarrow (x + yi)^2 = i \Leftrightarrow (x^2 - y^2) + 2xyi = 0 + 1i$$

Usando a definição de igualdade de números complexos, temos que $x^2 - y^2 = 0$ e $2xy = 1$. Portanto, para encontrar os números reais x e y, basta resolvermos o sistema de equações em $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy \quad\quad = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = |y| \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

Assim,

$$x = \sqrt{2}/2 \text{ e } y = \sqrt{2}/2 \text{ ou } x = -\sqrt{2}/2 \text{ e } y = -\sqrt{2}/2$$

Portanto,

$$w = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad \text{ou} \quad w = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

5) Resolver a equação em $\mathbb{C}$: $z^2 - 2z + 1 - i = 0$

Resolução:

$z^2 - 2z + 1 - i = 0 \Leftrightarrow (z - 1)^2 = i$

Chamemos $w = z - 1$. Assim, $(z - 1)^2 = i \Leftrightarrow w^2 = i$

Fazendo $w = x + yi$, temos

$$w^2 = i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 1 \end{cases} \Rightarrow w = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \text{ ou } w = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

Portanto, sendo $z = 1 + w$, temos o conjunto solução da equação dada:

$$S = \left\{\frac{2 + \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \frac{2 - \sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right\}$$

Proposição

Sejam $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$. *Então temos* $z_1 \cdot z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 0$ *ou* $z_2 = 0$.

Demonstração:

Se $z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$, temos que $z_1 \cdot z_2 = 0 \cdot z_2 = 0$ ou $z_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot 0 = 0$.

Reciprocamente, sendo $z_1 \cdot z_2 = 0$, suponhamos que $z_1 \neq 0$ e vamos provar que obrigatoriamente $z_2 = 0$.

Sejam $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$, com $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2 \in \mathbb{R}$. Como $z_1 \neq 0$, temos que a_1 e b_1 não são simultaneamente nulos.

$$z_1 \cdot z_2 = 0 \Leftrightarrow (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = 0 \Leftrightarrow (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i = 0$$

Pela igualdade dos números complexos temos

$$\begin{cases} a_1 a_2 - b_1 b_2 = 0 \\ a_1 b_2 + a_2 b_1 = 0 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por b_1 e a segunda por $(-a_1)$, temos o sistema equivalente

$$\begin{cases} a_1 a_2 b_1 - (b_1)^2 b_2 \quad = 0 \\ -(a_1)^2 b_2 - a_1 a_2 b_1 = 0 \end{cases}$$

Somando membro a membro, temos $-(b_1)^2 b_2 - (a_1)^2 b_2 = 0$. Logo, $-b_2(a_1^2 + b_1^2) = 0$ (produto de números reais). Como a_1 e b_1 não são simultaneamente nulos, $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ e, portanto, $b_2 = 0$.

Voltando à primeira equação com $b_2 = 0$, temos $a_2 b_1 = 0$. Há então duas possibilidades: $a_2 = 0$ ou $b_1 = 0$. Se $a_2 = 0$, a demonstração encerra-se, pois $z_2 = 0 + 0i = 0$. Se $b_1 = 0$, temos $a_1 \neq 0$ e, voltando à primeira equação, temos $a_1 a_2 = 0$, o que implica $a_2 = 0$ e encerra a demonstração, pois obtemos $z_2 = 0 + 0i = 0$.

Observação:

Nem todo produto definido em qualquer conjunto possui a propriedade enunciada na proposição acima. Por exemplo, o produto definido no conjunto das matrizes quadradas 2x2 não possui a propriedade acima.

Sejam $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A e B não são matrizes nulas, no entanto $A \cdot B = 0$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.4.6 Exercícios

1) Seja $z \in \mathbb{C}$. Definimos o *inverso multiplicativo* de z como sendo o número $w \in \mathbb{C}$, tal que $z \cdot w = 1$. Se w é o inverso multiplicativo de $z = a + bi$, prove que $w = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$

Observação: Denotamos o inverso multiplicativo de z por z^{-1}.

2) Determine todos os números reais a tais que $(a + i)^3$ seja um número real.

3) Resolva as equações:

a) $z^2 = i$

b) $z^2 = -1$

c) $z^2 = zi$

d) $z^2 - 2iz - (1 + i) = 0$

e) $z^2 - 3\text{z} + 3 + i = 0$

2.4.7 Divisão

Sejam $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ com $z_2 \neq 0$. Dividir z_1 por z_2 é encontrar $z_3 \in \mathbb{C}$, tal que $z_1 = z_2 \cdot z_3$

Notação: $z_1/z_2 = z_3 \Leftrightarrow z_1 = z_2 \cdot z_3$

Exemplo:

Dividir $z_1 = 2 + 3i$ por $z_2 = 1 + i$

Procura-se $z_3 = x + yi \in \mathbb{C}$, tal que $z_1 = z_2 \cdot z_3$, ou seja, $2 + 3i = (1 + i)(x + yi)$.

$$2 + 3i = (x - y) + (x + y)i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{5}{2}, \quad y = \frac{1}{2}$$

Portanto, $z_3 = 5/2 + (1/2)i$ e temos

$$\frac{2 + 3i}{1 + i} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} i$$

2.4.8 Existência do inverso multiplicativo

Para qualquer $z = a + bi \in \mathbb{C},\ z \neq 0$ existe $w \in \mathbb{C}$, chamado de *inverso multiplicativo* de z, tal que $z.w = 1$

Notação: $w = z^{-1}$

De fato, se $z = a + bi$ e $w = x + yi$, temos que:

$$zw = 1 \Leftrightarrow (a + bi)(x + yi) = 1 \Leftrightarrow (ax - by) + (ay + bx)i = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} ax - by = 1 \\ ay + bx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \text{e} \quad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

Portanto,

$$w = z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$$

Observe que, sendo $z \neq 0$, temos $a^2 + b^2 \neq 0$

Portanto, podemos dizer que dividir um número complexo z por um número complexo w é multiplicar z pelo inverso multiplicativo de w. Isto é, $z/w = z \cdot w^{-1}$

Conclusão: Em $\mathbb{C}$ basta que tenhamos definido a igualdade e as operações de adição e multiplicação que as propriedades associativa, comutativa, distributiva e a existência dos elementos neutro, simétrico e inverso são verificadas. Consequentemente serão válidas a subtração e a divisão.

O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos com as operações adição e multiplicação acima definidas recebe a denominação de *corpo*. Esta denominação será estudada nas disciplinas de álgebra.

Usando as propriedades da multiplicação de números complexos, vamos fazer outra demonstração da proposição da seção 2.4.5.

"Sejam $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$. Então $z_1 .\ z_2 = 0$ se e somente se $z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$."

Demonstração

Se $z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$ temos $z_1 .\ z_2 = 0 \,.\, z_2 = 0$ ou $z_1 .\ z_2 = z_1 \,.\, 0 = 0$

Reciprocamente, sendo $z_1 .\ z_2 = 0$, suponhamos que $z_1 \neq 0$ e vamos mostrar que obrigatoriamente $z_2 = 0$.

Sendo $z_1 \neq 0$, ele possui inverso multiplicativo ${z_1}^{-1}$ tal que $z_1 \,.\, {z_1}^{-1} = 1$.

Assim $z_2 = z_2 \,.\, 1 = z_2 \,.\, (z_1 \,.\, {z_1}^{-1}) = (z_2\, z_1)\, {z_1}^{-1} = (z_1 \,.\, z_2)\, {z_1}^{-1} = 0 \,.\, {z_1}^{-1} = 0$.

2.5 Conjugado de um número complexo

O *conjugado* do número complexo $z = a + bi$, com $a,\ b \in \mathbb{R}$, é o número complexo $\overline{z} = a - bi$

Exemplos:

1) $z = 2 + 3i$, temos $\overline{z} = 2 - 3i$
2) $z = 1 - i$, temos $\overline{z} = 1 + i$
3) $z = 7$, temos $\overline{z} = 7$
4) $z = i$, temos $\overline{z} = -i$

Propriedades do conjugado:

Sejam $z, w \in \mathbb{C}$.

1ª) $z + \overline{z} \in \mathbb{R}$

2ª) $z.\overline{z} \in \mathbb{R}_+$

3ª) $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

4ª) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

5ª) $\overline{z.w} = \overline{z}.\overline{w}$

6ª) $\overline{z^n} = (\overline{z})^n,\ n \in \mathbb{N}$

Justificativas das propriedades:

Seja $z = a + bi$, com $a,\ b \in \mathbb{R}$. Logo $\overline{z} = a - bi$

1ª) $z + \overline{z} = a + bi + a - bi = 2a \in \mathbb{R}$

2ª) $z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}_+$

3ª) $z = \overline{z} \Leftrightarrow a + bi = a - bi \Leftrightarrow b = -b \Leftrightarrow b = 0$. Logo $z = a \in \mathbb{R}$.

As justificativas da 4ª e da 5ª propriedade ficam como exercícios.

6ª) $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z. \ldots . z}_{\text{nvezes}}$. Logo, $\overline{z^n} = \overline{z \cdot z \ldots z} = \overline{z} \cdot \underbrace{\overline{z \cdot z..z \ldots z}}_{\text{n}-1\text{ vezes}} = \ldots = \overline{z} \cdot \overline{z} \ldots \overline{z} = (\overline{z})^n$

Observação: Se $w \neq 0$ então o seu inverso multiplicativo $w^{-1} = \frac{1}{\mathrm{w}}$. Portanto podemos escrever $w^{-1} = \frac{\overline{\mathrm{w}}}{\mathrm{w}\,\overline{\mathrm{w}}}$.

A divisão usando o conjugado

O conjugado pode ser empregado no cálculo da divisão de dois números complexos. Sejam dados $z,\ w \in \mathbb{C}$ com $w \neq 0$. Sabemos que $w \cdot \overline{w} \in \mathbb{R}$. Logo, $\frac{z}{w} = z\,.\,w^{-1} = z\,.\,\frac{\overline{w}}{w\,\overline{w}} = \frac{z\,\overline{w}}{w\,\overline{w}}$.

Portanto, para encontrar $\frac{z}{w}$ basta efetuar multiplicações de números complexos conhecidos, a saber z, w e $\overline{w}$.

Exemplos:

1) Sejam $z = 2 + 3i$ e $w = 1 + i$. Logo,

$$\frac{z}{w} = \frac{2+3i}{1+i} = \frac{(2+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(2+3i)(1-i)}{1^2+1^2} = \frac{5+i}{2} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}i$$

2) Calculemos o valor de $1/i$.

$$\frac{1}{i} = \frac{1.(-i)}{i.(-i)} = \frac{-i}{1} = -i$$

Assim temos $i^{-1} = -i$.

3) Efetuando a divisão $(1+i)/(1-i)$:

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{1^2+1^2} = i$$

4) Para que valores de $n \in \mathbb{N}$ a igualdade $(1+i)^n = (1-i)^n$ se verifica?

Como $(1-i) \neq 0$, temos $(1+i)^n = (1-i)^n \Leftrightarrow \frac{(1+i)^n}{(1-i)^n} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = 1 \Leftrightarrow i^n = 1$

Assim, a igualdade dada equivale a $i^n = 1$ e, portanto, n deve ser múltiplo de 4.

3

REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Para representar o conjunto dos números complexos, utilizamos o plano cartesiano. Para cada número complexo $z = a + bi$, sendo $a,\ b \in \mathbb{R}$, associamos o ponto P do plano com abscissa a e ordenada b. Reciprocamente, a cada ponto $P\ (a,\ b)$ do plano associamos o número complexo $z = a + bi$.

Assim temos uma correspondência biunívoca entre o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos e o plano cartesiano, agora também denominado de plano complexo, plano de Gauss ou plano de Argand-Gauss. Portanto, cada número complexo $z \in \mathbb{C}$ pode ser representado no plano complexo pelo ponto $P\ (Re(z),\ Im(z))$.

Observação: o ponto $P\ (Re(z),\ Im(z))$ do plano complexo é chamado *afixo* do número complexo z.

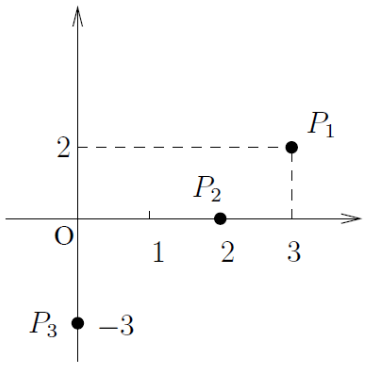
Exemplos:

a) O afixo do número complexo $z = 3 + 2i$ é o ponto $P_1\ (3, 2)$.

b) O afixo do número complexo $z = 2$ é o ponto $P_2\ (2, 0)$.

c) O afixo do número complexo $z = -3i$ é o ponto $P_3\ (0,\ -3)$.

d) O afixo do número complexo nulo $z = 0$ é a origem $O\ (0, 0)$.

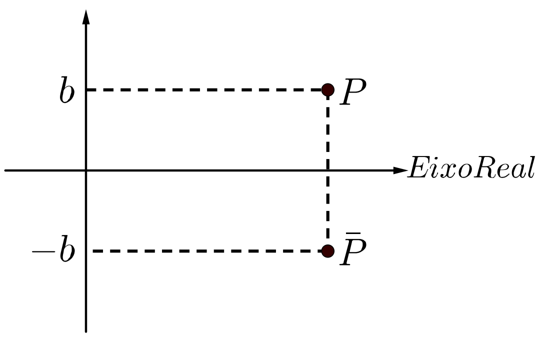


Observemos que:

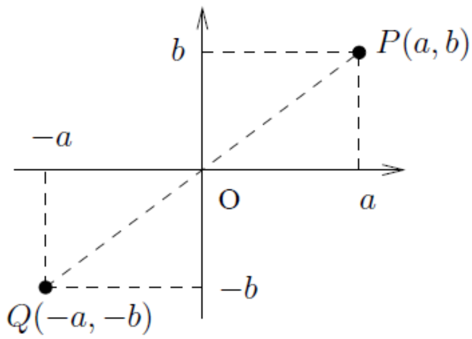
1) Os números complexos $z = a,\ a \in \mathbb{R}$, têm como afixos os pontos $(a,\ 0)$, que estão situados sobre o eixo Ox. Dessa forma vemos que o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é representado no plano complexo por uma reta chamada reta real ou *eixo real*.

2) Os números complexos $z = bi$ têm como afixos os pontos $(0,\ b)$ que estão situados sobre o eixo Oy. Este eixo é chamado de *eixo imaginário*.

3) O número complexo $z = a + bi$ e seu conjugado $\overline{z} = a - bi$ têm afixos $P\,(a,\ b)$ e $\overline{P}\,(a,\ -b)$, simétricos em relação ao eixo real.



4) O afixo do complexo $z = a + bi$ e do seu oposto $-z = -a - bi$ são simétricos em relação à origem do plano cartesiano.



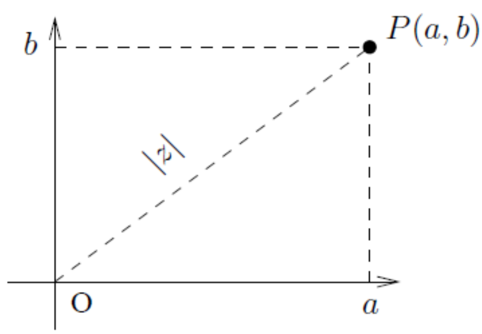
Atenção: para simplificar a linguagem, muitas vezes denotaremos o afixo de z pela própria letra z, no plano complexo.

3.1 Módulo de um número complexo

Dado um número complexo $z = a + bi$, com $a,\ b \in \mathbb{R}$, definimos o *módulo* de z como sendo $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Notação: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ou $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$

Geometricamente temos que o módulo de z é a distância do seu afixo P até a origem O, isto é, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \overline{OP} = d\,(O, P)$



Observamos ainda que:

1) $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ é sempre um número real não negativo.

2) Se $z \in \mathbb{R}$, o módulo de z coincide com o valor absoluto real, ou seja, se $z = a \in \mathbb{R}$, temos que $|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = |a|$ (valor absoluto de a).

3) $|z| = |\overline{z}|$, $\forall z \in \mathbb{C}$

4) O módulo da diferença entre dois números complexos é igual à distância entre seus afixos.

De fato: se $z = x_1 + y_1 i$ e $w = x_2 + y_2 i$, então

$$|z - w| = |(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \text{d}\,(P, Q),$$

em que $P\ (x_1,\ y_1)$ é o afixo de z, e $Q\ (x_2,\ y_2)$ é o afixo de w.

5) A desigualdade $|z| > |w|$ significa que o afixo de *z* está mais distante da origem *O* do que o afixo de *w*.

Propriedades:

1ª) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$

2ª) $|z| \geq |Re(z)| \geq Re(z)$

3ª) $|z| \geq |Im(z)| \geq Im(z)$

4ª) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

5ª) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \quad (w \neq 0)$

6ª) $|z + w| \leq |z| + |w|$

Justificativas: seja $z = a + bi$, com $a,\ b \in \mathbb{R}$. Logo $\overline{z} = a - bi$

1ª) Sendo $z = a + bi$, temos $z \cdot \overline{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$

2ª) $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{a^2} = |a| \geq a$. Como $a = Re(z)$, temos $|z| \geq |Re(z)| \geq Re(z)$

4ª) $|z \cdot w|^2 = (zw) \cdot (\overline{zw}) = (zw) \cdot (\overline{z}\,\overline{w}) = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2 = (|z| \cdot |w|)^2$.

Como $|z \cdot w| \geq 0$ e $(|z| \cdot |w|) \geq 0$, temos $\sqrt{|zw|^2} = \sqrt{(|z||w|)^2} \Leftrightarrow |z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

6ª) $|z + w|^2 = (z + w)(\overline{z + w}) = (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) = z\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{w} + \overline{z}w =$

$$= z\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} = |z|^2 + |w|^2 + 2Re(z\overline{w}) \leq$$

$$\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\overline{w}| = |z|^2 + |w|^2 + 2|z||\overline{w}| =$$

$$= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2$$

Assim temos $|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$ e, usando a raiz quadrada real de números reais positivos, obtemos $\sqrt{|z + w|^2} \leq \sqrt{(|z| + |w|)^2} \Rightarrow |z + w| \leq |z| + |w|$

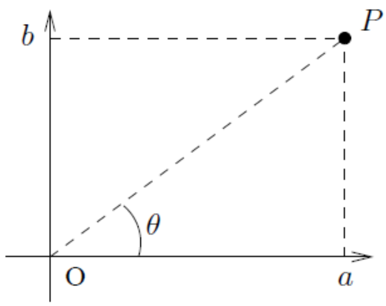
3.2 Forma trigonométrica de um número complexo

Um número complexo $z = a + bi$, em que $a,\ b \in \mathbb{R}$, é representado no plano cartesiano pelo ponto P de coordenadas $(a,\ b)$. Se $z \neq 0$, o ponto P é distinto da origem O. Nesse caso, chamamos de θ a medida do ângulo formado pelo semieixo positivo Ox e pela semirreta OP, com origem em O. Assim temos $a = \overline{OP}\cos\theta$ e $b = \overline{OP}\ sen\ \theta$.

Como $\overline{OP} = |z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, podemos escrever $z = \rho\cos\theta + \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\ i$ e, de modo usual, $z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$

O número θ denomina-se *argumento* do número complexo z.

Notação: $\theta = arg(z)$.



Observe que, se substituímos θ por $\theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, na expressão $z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, o número complexo z não se altera devido à periodicidade das funções seno e cosseno.

Para representar qualquer $z \in \mathbb{C}$ $(z \neq 0)$ na forma acima, basta tomar $0 \leq \theta < 2\pi$.

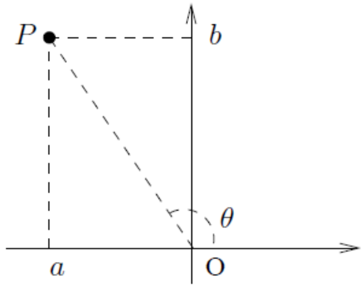
Quando $arg(z) = \theta \in [0{,}2\pi)$, dizemos que θ é o *argumento principal* de z.

Portanto a expressão $z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ em que $\rho = |z|$ e $\theta = arg(z)$ é chamada *forma trigonométrica* ou *forma polar* do número complexo z.

Observação: O número complexo nulo não é representado na forma trigonométrica por possuir argumento indeterminado.

Exemplos:

1) Seja $z = a + bi$ um número complexo não nulo, sua representação no plano complexo é:

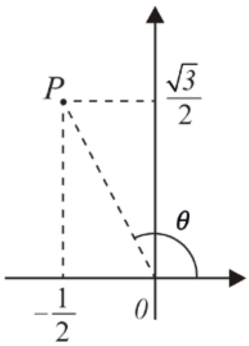


$P\ (a,\ b)$ é o afixo de z.

$\overline{OP} = |z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$

θ é o argumento principal de z, logo θ é determinado por $\cos\theta = a/\rho$ e $\operatorname{sen}\theta = b/\rho$.

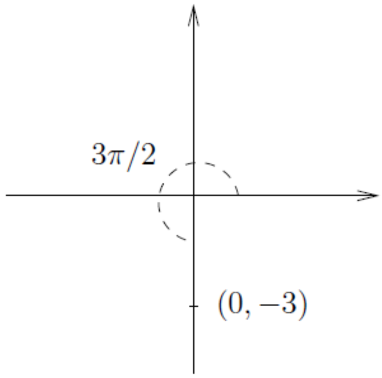
a) Se $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, temos $P\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ que é o afixo de z.



$$|z| = P = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{1} = 1$$

O argumento de z é dado por $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ e $sen\ \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Portanto o argumento principal é $\theta = \frac{2\pi}{3} rad$ ou 120º. Assim, a forma trigonométrica de z é $z = 1.\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\ sen\frac{2\pi}{3}\right)$ ou $z = \cos 120^{\circ} + i\ sen\ 120^{\circ}$.

b) Se $z = -3i$, então sua forma trigonométrica é $z = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\frac{3\pi}{2}\right)$

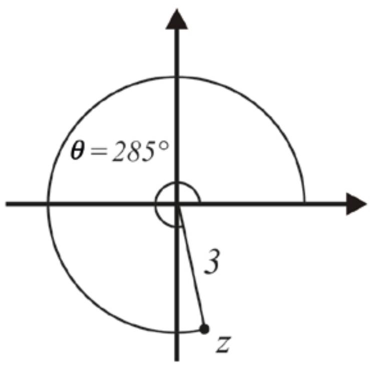


c) Dado $z = 3\,(\cos 75° - i\,\mathrm{sen}\,75°)$, vamos escrever z na forma trigonométrica com $0 \le arg(z) < 2\pi$.

A forma trigonométrica será $z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ com $\rho > 0$ e $0 \le \theta < 2\pi$ ou $0 \le \theta < 360°$.

$z = 3\,(\cos 75° - i\,\mathrm{sen}\,75°) = 3[\cos(-75°) + i\,\mathrm{sen}(-75°)] = 3[\cos(285°) + i\,\mathrm{sen}(285°)]$

Portanto, $z = 3[\cos(285°) + i\,\mathrm{sen}(285°)]$.

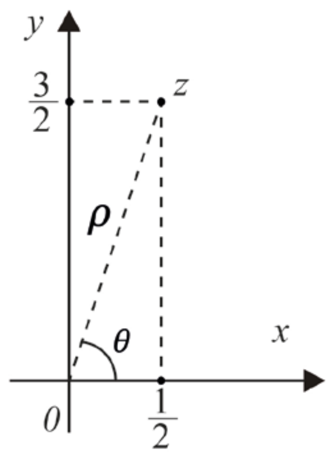


2) Escrever na forma algébrica e na forma trigonométrica o número complexo $z = \frac{1}{1-i} - \frac{1}{i}$.

$$z = \frac{1}{1-i} - \frac{1}{i} = \frac{-1+2i}{1+i} = \frac{(-1+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1+3i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

Forma algébrica: $z = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$

Representando z geometricamente, temos:



$$\rho = |z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ e } \cos\theta = \frac{1/2}{\sqrt{10}/2} = \frac{1}{\sqrt{10}}, \operatorname{sen}\theta = \frac{3/2}{\sqrt{10}/2} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Como $0 < \theta < \pi/2$, temos $\operatorname{tg}\theta = 3$, logo $\theta = arg(z) = arctg3$

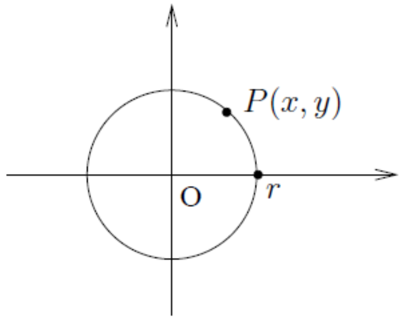
Forma trigonométrica: $z = \frac{\sqrt{10}}{2}[\cos(arctg3) + i\operatorname{sen}(arctg3)]$

3) A representação geométrica dos números complexos z, tais que $|z| = r$ (r um número real positivo fixo), é uma circunferência de centro na origem e raio r.

De fato: Seja $z = x + yi$ com $x, y \in \mathbb{R}$. O ponto $P\ (x,\ y)$ é seu afixo no plano complexo.

A condição $|z| = r$ é equivalente à $\sqrt{x^2 + y^2} = r$

Assim, $P\ (x,\ y)$ cumpre a condição $x^2 + y^2 = r^2$, o que significa que P está sobre a circunferência de centro na origem e raio r.



Também se pode representar geometricamente o módulo de z como sendo a distância do afixo P até a origem O.

Portanto, o conjunto $C = \{z \in \mathbb{C}; |z| = r\}$ representado no plano são os pontos P que distam da origem à medida r. Assim, C é a circunferência de centro na origem e raio r.

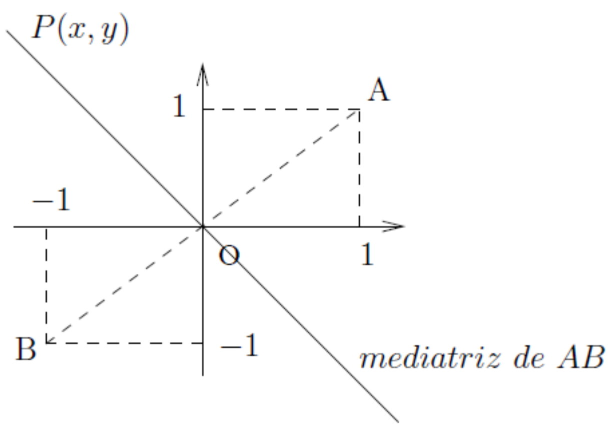
4) Determinemos o lugar geométrico dos afixos dos números complexos z, tais que $|z - 1 - i| = |z + 1 + i|$

Solução geométrica:

$|z - 1 - i| = |z - (1 + i)| = \text{d}\ (P,\ A)$, em que $P = (x,\ y)$ e $A\ (1,\ 1)$

$|z + 1 + i| = |z - (-1 - i)| = \text{d}\ (P,\ B)$, em que $P = (x,\ y)$ e $B\ (-1,\ -1)$

O conjunto dos pontos $P\ (x,\ y)$, tais que $\text{d}\ (P,\ A) = \text{d}\ (P,\ B)$, é a reta mediatriz do segmento AB.



Solução algébrica:

Seja $z = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$.

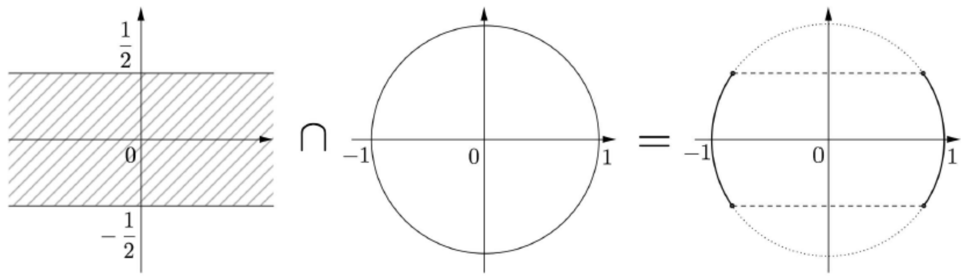
$$|z - 1 - i| = |z + 1 + i| \Rightarrow |(x - 1) + (y - 1)i| = |(x + 1) + (y + 1)i| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{(x + 1)^2 + (y + 1)^2} \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 =$$
$$= (x + 1)^2 + (y + 1)^2 \Rightarrow y = -x$$

Portanto o lugar geométrico procurado é o conjunto de pontos $(x,\ y)$ do plano cartesiano, tais que $y = -x$.

5) Determine o lugar geométrico dos pontos P que são afixos dos números complexos z, tais que $-\frac{1}{2} \leq Im(z) \leq \frac{1}{2}$ e $|z| = 1$

Se $z = x + yi$, com $x,\ y \in \mathbb{R}$, temos $-1/2 \leq Im(z) \leq 1/2$ e $|z| = 1$ se e somente se $-1/2 \leq y \leq 1/2$ e $x^2 + y^2 = 1$

Geometricamente temos:



3.2.1 Exercícios

1) Mostre que $|z - w| \geq |z| - |w|, \forall z, w \in \mathbb{C}$

2) Use as propriedades de módulo para dar outra prova das proposições:

a) sejam $z,\ w \in \mathbb{C}$, então $zw = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $w = 0$

b) se $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ e $z = a + bi$, então $z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$

3) Determine os valores de $a \in \mathbb{R}$ tais que $Re\left(\frac{a-i}{a+i}\right) < 0$

4) Determine $z,\ w \in \mathbb{C}$ tais que $|z| = |w| = 1$ e $z + w = 1$

5) Represente no plano complexo os afixos dos números complexos z tais que $|z - i| \leq 1$

6) Represente no plano complexo o conjunto:

a) $A = \{z \in \mathbb{C};\ (z-i)\overline{(z-i)} = 1\}$

b) $B = \{z \in \mathbb{C};\ |z-1| = |z-i|\}$

c) $C = \{z \in \mathbb{C};\ Im(z^2) > 0\}$

d) $D = \{z \in \mathbb{C};\ Re(1/z) > 1/2\}$

7) Determine o módulo e o argumento do número complexo $z = -2(\cos 50^\circ - i \operatorname{sen} 50^\circ)$

8) Resolva em $\mathbb{C}$ as equações:

a) $z^2 = \overline{z}$

b) $z^3 = 2\overline{z}$

9) Mostre que $[(a-z)(a-\overline{z})]^n \in \mathbb{R}_+$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{C}$

10) Determine o lugar geométrico no plano dos afixos dos números complexos z, tais que $1 \leq |z - (1+i)| \leq \sqrt{2}$

11) Determine o lugar geométrico no plano dos afixos dos números $z \in \mathbb{C}$, tais que:

a) $|z-1| = |z+1|$

b) $|z+1| = 3|z-1|$

12) Determine os complexos z de módulo máximo que satisfazem a condição:

a) $|z + 2 - 2i| = 1$

b) $|z - 1 - 3i| = 1$

13) Determine o número complexo z de menor argumento e o de maior argumento principal tais que $|z-\sqrt{5}i| \leq 1$

14) Qual é o lugar geométrico dos afixos dos números complexos z, tais que $|z+1| \geq |z|$?

15) Se $z \in \mathbb{C}$ e $\lambda = |i+z|^2 + |i-z|^2$, mostre que $\lambda = 2(1+|z|^2)$

16) Determine o lugar geométrico dos afixos de z tais que $Im(z^2) = 2$

17) Mostre que o lugar geométrico dos afixos de z tais que $z^2 + (\bar{z}\,)^2 = 2$ é a hipérbole de equação $x^2 - y^2 = 1$.

3.3 Multiplicação e divisão na forma trigonométrica

A forma trigonométrica é extremamente útil para efetuar operações com números complexos.

3.3.1 Multiplicação

Sejam z_1 e z_2 dois números complexos dados na forma trigonométrica
$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)$,
em que $\rho_1 = |z_1|$, $\rho_2 = |z_2|$, $\theta_1 = arg(z_1)$ e $\theta_2 = arg(z_2)$,
logo $z_1.z_2 = \rho_1\rho_2[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \mathrm{sen}\,\theta_1\sin\theta_2 + i(\mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + \mathrm{sen}\,\theta_2\cos\theta_1)]$

Usando as fórmulas do seno e cosseno da soma de arcos, obtemos

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2[cos(\theta_1+\theta_2) + i\ sen(\theta_1+\theta_2)]$$

Portanto, na multiplicação de dois números complexos, seus módulos são multiplicados e seus argumentos somados. Assim $|z_1z_2| = |z_1||z_2| = \rho_1\rho_2$ e $arg(z_1z_2) = arg(z_1) + arg(z_2) = \theta_1 + \theta_2$

Exemplo:

$$z_1 = 2(cos\ 30° + isen\ 30°) \text{ e } z_2 = 3(cos\ 60° + isen\ 60°)$$

$$z_1 . z_2 = 2.3[cos\ (30° + 60°) + isen(30° + 60°)] = 6[cos\ 90° + isen\ 90°] = 6i$$

3.3.2 Divisão

Sejam $z_1 = \rho_1(cos\ \theta_1 + i\ sen\ \theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(cos\ \theta_2 + isen\theta_2)$, com $z_2 \neq 0$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1[cos\ \theta_1 + isen\ \theta_1]}{\rho_2[cos\ \theta_2 + isen\ \theta_2]} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{(cos\ \theta_1 + isen\ \theta_1)(cos\ \theta_2 - isen\ \theta_2)}{(cos\ \theta_2 + isen\ \theta_2)(cos\ \theta_2 - isen\ \theta_2)} =$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{(cos\ \theta_1\ cos\ \theta_2 + sen\ \theta_1\ sen\ \theta_2) + i(sen\ \theta_1\ cos\ \theta_2 - sen\theta_2\ cos\ \theta_1)}{sen^2\theta_2 + cos^2\theta_2}$$

Logo,

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[cos(\theta_1 - \theta_2) + isen(\theta_1 - \theta_2)]}$$

Portanto, na divisão de dois números complexos, seus módulos são divididos e seus argumentos subtraídos.

Exemplo:

$z_1 = 6(\cos 35° + isen\ 35°)$ e $z_2 = 2(\cos 20° + isen\ 20°)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6}{2}[\cos(35° - 20°) + isen(35° - 20°)] = 3(\cos 15° + isen\ 15°)$$

O inverso do número complexo não nulo $z = \rho(cos\ \theta + i\ sen\ \theta)$ é

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{\rho[cos\ \theta + isen\ \theta]} = \frac{1}{\rho}\frac{(cos\ 0 + isen\ 0)}{(cos\ \theta + isen\ \theta)} = \frac{1}{\rho}[cos\ (0 - \theta) + isen(0 - \theta)]$$

Logo,

$$\boxed{z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{\rho}[cos(-\theta) + isen(-\theta)].}$$

Observe que, se θ é o argumento principal de z, então o argumento principal de z^{-1} é $(-\theta + 2\pi)$

Exemplo:

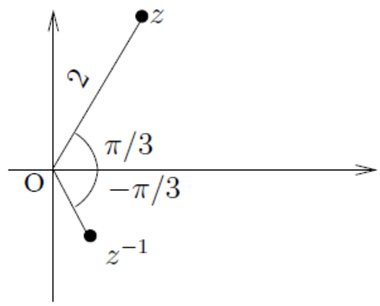
Sendo $z = 2\left(cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3}\right)$, determine o módulo e o argumento principal de z^{-1}.

$$z^{-1} = \frac{1}{2}\left(cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + isen\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(cos\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) + isen\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$$

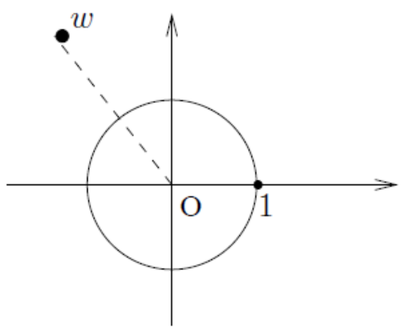
Assim, $|z^{-1}| = 1/2$, e o argumento principal de z^{-1} é $\alpha = 5\pi/3$.

Geometricamente,



Exercício:

Marque na figura abaixo o afixo do número complexo $1/w$.



3.4 Potenciação e radiciação na forma trigonométrica

3.4.1 A potenciação (fórmula de Moivre)

Seja $z = \rho(\cos\theta + isen\ \theta)$ um número complexo na forma trigonométrica e $n \in \mathbb{N}$.

Usando a propriedade associativa da multiplicação e a fórmula da multiplicação de dois números complexos, temos que:

$$z^n = \underbrace{z.z.\ldots.z}_{\text{n fatores}} = (z.z)(z\ldots z) = (z.z).z.(z\ldots z) = \ldots = \underbrace{(z.z\ldots z).z}_{\text{n fatores}}$$

Assim, $z^n = (z \cdot z\ldots z) = (\rho\ldots\rho)[cos(\theta+\theta+\ldots+\theta) + isen(\theta+\theta+\ldots+\theta)]$

Portanto, $\boxed{z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + isen(n\theta)].}$

A igualdade acima é conhecida como *fórmula de Moivre*, em homenagem ao matemático Abraham de Moivre (1667-1754).

Se $m \in \mathbb{Z}_-$, temos que $m = -n$ com $n \in \mathbb{Z}_+ (= \mathbb{N})$. Logo,

$$z^m = z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{\rho^n[cos(n\theta) + isen(n\theta)]} = \frac{1[cos\ 0 + isen\ 0]}{\rho^n[cos(n\theta) + isen(n\theta)]} =$$

$$= \frac{1}{\rho^n} cos(0 - n\theta) + isen(0 - n\theta)] = \rho^{-n}[cos(-n\theta) + isen(-n\theta)] =$$

$$= \rho^m[cos(m\theta) + isen(m\theta)]$$

Portanto, $z^m = \rho^m[\cos(m\theta) + isen(m\theta)], \forall m \in \mathbb{Z}_-$

Conclusão:

$$\boxed{z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + isen(n\theta)],\ \forall n \in \mathbb{Z}}$$

Observe que quando $|z| = 1$ temos $z = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$ e portanto

$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta$.

Exemplos:

1) Calculemos a potência $\left(\sqrt{3}+i\right)^8$

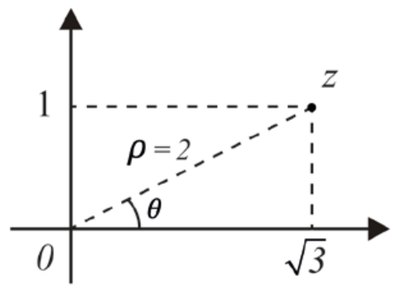
Na forma algébrica deveríamos multiplicar $\sqrt{3}+i$ por ele mesmo oito vezes ou usaríamos o desenvolvimento do binômio de Newton pelo qual obteríamos nove parcelas a serem somadas.

No entanto, utilizando a forma trigonométrica, reduziremos muito os nossos cálculos.

Chame $z = \sqrt{3}+i$. Logo,

$$\rho = |z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$$

$$\begin{cases} cos\,\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ sen\,\theta = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{6} rad$$



Portanto, $z = 2\left(cos\frac{\pi}{6} + isen\frac{\pi}{6}\right)$ e usando a fórmula de Moivre, temos

$$z^8 = \rho^8(cos\,8\frac{\pi}{6} + isen\,8\frac{\pi}{6}) = 2^8(cos\,\frac{4\pi}{3} + isen\,\frac{4\pi}{3}) =$$

$$= 2^8\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -128 - 128\sqrt{3}\,i$$

Temos então que $\left(\sqrt{3}+i\right)^8 = -128 - 128\sqrt{3}\,i$

2) Determine o menor valor de $n \in \mathbb{N}$ para que $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ seja um número real positivo.

Chamando $z = \sqrt{3} + i$, vamos escrevê-lo na forma trigonométrica:

$\rho = |z| = 2$ e $\theta = \frac{\pi}{6}$ rad . Logo, z = 2 ($cos\ \frac{\pi}{6} + isen\ \frac{\pi}{6}$)

Usando a fórmula de Moivre,

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^n = z^n = \rho^n(cos\, n\, \theta + isen\, n\, \theta) = 2^n(cos\, n\frac{\pi}{6} + isen\, n\frac{\pi}{6})$$

Mas z^n é um número real positivo se $Re(z^n) > 0$ e $Im(z^n) = 0$, isto é, $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ é um número real positivo se $sen\, n\frac{\pi}{6} = 0$ e $cos\, n\frac{\pi}{6} > 0$.

Determinemos os valores de n tais que

$$\begin{cases} sen\, n\dfrac{\pi}{6} \ = 0 \\ cos\, n\dfrac{\pi}{6} \ > 0 \end{cases}$$

$$sen\, n\frac{\pi}{6} = 0 \Rightarrow n\frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = 6k, k \in \mathbb{Z}$$

Sendo $n \in \mathbb{N}$, temos $n = 6,\ 12,\ 18, \ldots$, mas ainda temos a condição $cos\, n\frac{\pi}{6} > 0$.

Como $cos\ 6\frac{\pi}{6} = -1 < 0$ e $cos\ 12\frac{\pi}{6} = 1 > 0$, então $n = 12$ é o menor valor natural para que $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ seja um número real positivo.

Assim $\left(\sqrt{3}+i\right)^{12}$ = 2^{12} $\in \mathbb{R}_+^*$

3) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, a expressão $cos\, \alpha + isen\, \alpha$ representa um número complexo z. Calculemos o quadrado de z de duas maneiras:

a) Aplicando a propriedade distributiva:

$$\begin{aligned} z^2 &= (cos\ \alpha + isen\ \alpha)^2 = (cos\ \alpha + isen\ \alpha)(cos\ \alpha + isen\ \alpha) \\ &= (cos^2\alpha - sen^2\alpha) + i(2sen\alpha . cos\alpha) \end{aligned}$$

b) Usando a fórmula de Moivre:

$$z^2 = (cos\ \alpha + isen\ \alpha)^2 = cos\ 2\alpha + isen\ 2\alpha$$

Portanto,

$$(cos^2\alpha - sen^2\alpha) + i(2.sen\ \alpha.cos\ \alpha) = cos\ 2\alpha + isen\ 2\alpha$$

e, pela definição de igualdade de números complexos, temos

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - sen^2\alpha} \quad \text{e} \quad \boxed{sen 2\alpha = 2sen\ \alpha\ .\ \cos\alpha}$$

As duas igualdades acima obtidas são conhecidas como fórmulas do seno e do cosseno do arco duplo.

Exercício:

Com um procedimento análogo ao do exemplo 3, mostre que

1) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\ \cos\alpha$ e $sen\ 3\alpha = 3\ sen\ \alpha - 4\text{sen}^3\alpha\ ,\ \ \forall\alpha\in\mathbb{R}$

2) $\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\ \cos^2\alpha + 1\ ,\ \ \forall\alpha\in\mathbb{R}$ e

$\dfrac{sen4\alpha}{sen\ \alpha} = 8\cos^3\alpha - 4\cos\alpha$ para $\alpha \neq k\pi;\ \ k\in\mathbb{Z}$

3.4.2 A radiciação

Sejam $z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$. Chamamos de *raiz enésima de z* a qualquer $w \in \mathbb{C}$, tal que $w^n = z$.

Na forma trigonométrica, $z = \rho(cos\ \theta + isen\ \theta)$.

Queremos determinar $w = r(cos\ \phi + isen\ \phi)$, tal que $[r(cos\ \phi + isen\ \phi]^n = \rho(cos\ \theta + isen\ \theta)$

Usando a fórmula de Moivre, temos $[r(\cos\ \phi + isen\ \phi]^n = r^n(cos\ n\phi + isen\ n\phi)$.

Pela igualdade de números complexos, obtêm-se simultaneamente

$$\begin{cases} r^n = \rho \\ cos\ n\phi = cos\ \theta \\ sen\ n\phi = sen\ \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \qquad \text{(raiz enésima real)} \\ cos\ n\phi = cos\ \theta \\ sen\ n\phi = sen\ \theta \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} cos\ n\phi - cos\ \theta\ = 0 \\ sen\ n\phi - sen\ \theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2sen\left(\frac{n\phi+\theta}{2}\right) sen\left(\frac{n\phi-\theta}{2}\right) = 0 \\ 2cos\left(\frac{n\phi+\theta}{2}\right) sen\left(\frac{n\phi-\theta}{2}\right) = 0 \end{cases}.$$

Como o seno e o cosseno nunca são nulos para um mesmo arco, temos que $sen\left(\frac{n\phi-\theta}{2}\right) = 0$ e, portanto, $\frac{n\phi-\theta}{2} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, o que resulta em $\phi = \frac{\theta+2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}$

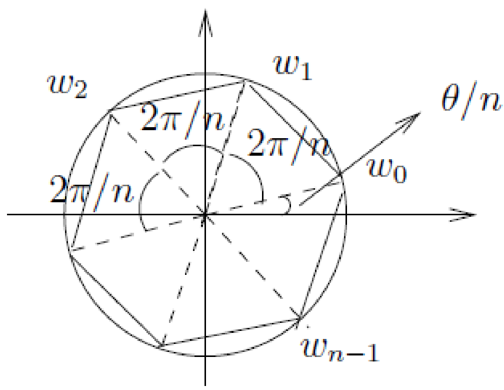
Observe que $r = \sqrt[n]{\rho}$ é único, mas temos uma infinidade de argumentos $\phi_k = \frac{\theta+2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}$, para as raízes w. No entanto, para argumentos principais teremos apenas n deles, a saber $\phi_0,\ \phi_1,\ \dots,\ \phi_{n-1}$. Os demais ϕ_k são côngruos a estes argumentos principais.

Por exemplo, $\phi_n = \frac{\theta+2n\pi}{n}$ é côngruo a $\phi_0 = \frac{\theta}{n}$; $\phi_{n+1} = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n} + 2\pi$ é côngruo a $\phi_1 = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}$, e assim por diante.

Conclusão:

Cada $z \in \mathbb{C}$, $z = \rho(cos\,\theta + isen\,\theta)$ possui n raízes enésimas $w = \sqrt[n]{\rho}(cos\,\phi_k + isen\,\phi_k)$, em que $\phi_k = \frac{\theta+2k\pi}{n}$ com $k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n-1$.

Todas as raízes w possuem o mesmo módulo, e, portanto, os seus afixos estão sobre uma circunferência de centro na origem e raio $r = \sqrt[n]{\rho}$, uniformemente espaçados sobre ela. Isto é, esses afixos são vértices de um polígono regular de n lados inscrito nessa circunferência. O motivo dessa regularidade do polígono é que os argumentos ϕ_k, $k = 0,\ 1,\ \dots,\ n-1$, formam uma P.A. (Progressão Aritmética) de razão $2\pi/n$.



Exercício:

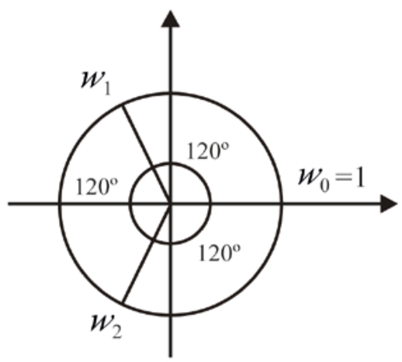
Sejam $z = \rho(cos\,\theta + isen\,\theta)$ e $w_k = \sqrt[n]{\rho}(cos\,\phi_k + isen\,\phi_k)$, em que $\phi_k = \frac{\theta+2k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$. Verifique que $w_{m+n} = w_m \quad \forall m \in \mathbb{Z}$.

Exemplos:

1) Vamos determinar as raízes cúbicas de $z = 1$.

$z = 1 = 1(cos\,0 + isen\,0)$. Assim, $\rho = 1$ e $\theta = 0$. Logo, $r = \sqrt[3]{1} = 1$ e $\phi_k = \frac{0}{3} + k\frac{2\pi}{3}$, com $k = 0, 1, 2$. Os argumentos ϕ_k $(k \neq 0,\ 1,\ 2)$ são côngruos a estes três $\phi_0 = 0$, $\phi_1 = \frac{2\pi}{3}$ e $\phi_2 = \frac{4\pi}{3}$, e, portanto, as raízes w_k $(k \neq 0,\ 1,\ 2)$ repetirão w_0, w_1 e w_2.

As raízes cúbicas de 1 são:



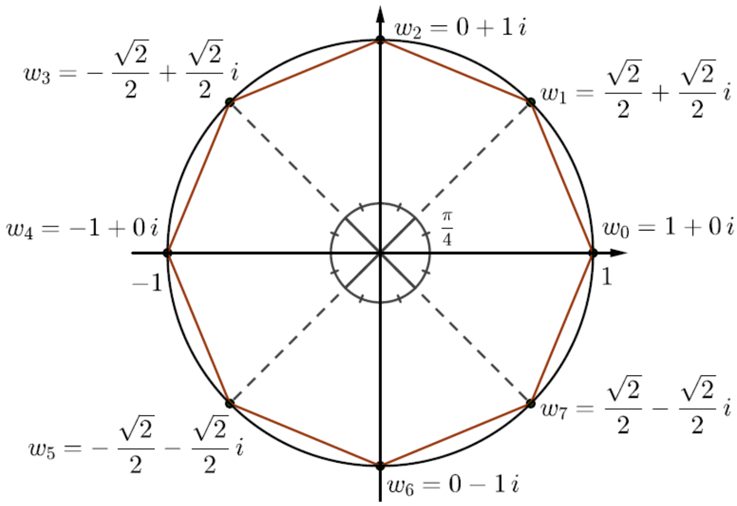
$$w_0 = \sqrt[3]{1}(cos\,0 + isen\,0) = 1$$

$$w_1 = \sqrt[3]{1}\left(cos\,\frac{2\pi}{3} + isen\,\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$w_2 = \sqrt[3]{1}\left(cos\,\frac{4\pi}{3} + isen\,\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

2) Agora, determinemos geometricamente as raízes oitavas de $z = 1$.

Como $\rho = |z| = 1$ e $\theta = 0$ radianos, temos que $|w_k| = r = \sqrt[8]{1} = 1$ e $\phi_k = k\frac{\pi}{4}$. Portanto, as oito raízes w de z estão sobre a circunferência de centro na origem e raio 1, dividindo-a em oito partes iguais.



Observações:

1) Se $z = 1$, as raízes n-ésimas de z são chamadas *raízes n-ésimas da unidade*.

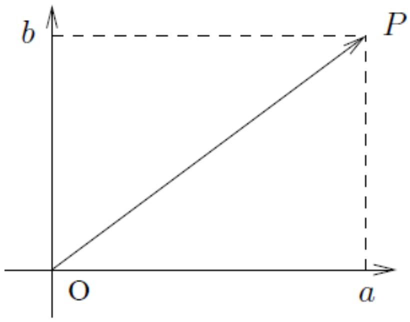
2) As raízes n-ésimas da unidade são:

$w_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\ \text{sen}\frac{2k\pi}{n}$ $\quad$ (k = 0, 1, 2, ..., n − 1) .

Usando a fórmula de Moivre, vemos que as n raízes n-ésimas da unidade podem ser escritas assim $1, w, w^2, w^3, \dots, w^{n-1}$ em que $w = \cos\frac{2\pi}{n} + i\ \text{sen}\frac{2\pi}{n}$.

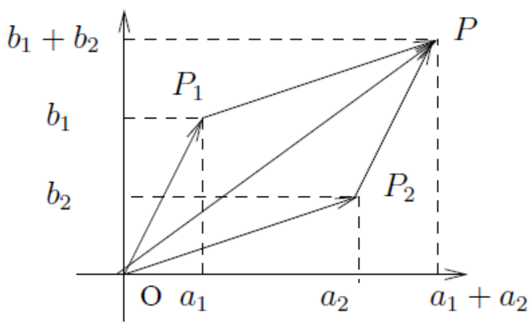
3.5 Representação vetorial de um número complexo

Um número complexo $z = a + bi$ é representado no plano pelo ponto P de coordenadas $(a,\ b)$. Portanto, ele pode ser considerado um vetor $\overrightarrow{OP}$ de origem O do sistema cartesiano e extremidade $P\ (a,\ b)$.



3.5.1 Interpretação para a soma

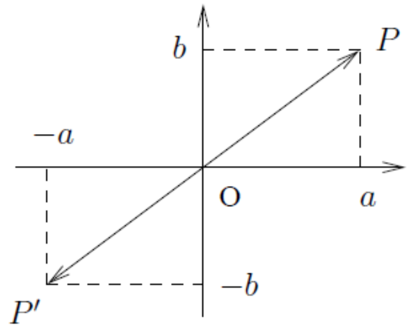
Sejam $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$ números complexos representados no plano pelos vetores $\overrightarrow{OP_1}$ e $\overrightarrow{OP_2}$, respectivamente. O número complexo $z = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$ é representado pelo vetor $\overrightarrow{OP}$, que chamamos de *vetor soma* dos vetores $\overrightarrow{OP_1}$ e $\overrightarrow{OP_2}$.



O vetor $\overrightarrow{OP}$ é a diagonal do paralelogramo OP_1PP_2 da figura. Portanto o vetor $\overrightarrow{OP}$ pode ser obtido geometricamente pela *regra do paralelogramo*.

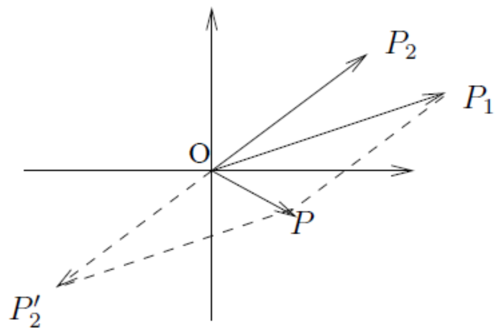
3.5.2 Interpretação para o oposto

Se $z = a + bi$, o seu oposto é $-z = -a - bi$. Logo, temos o vetor $\overrightarrow{OP'}$ oposto a $\overrightarrow{OP}$, em que $P\ (a,\ b)$ e $P'\ (-a,\ -b)$ são os afixos de z e $-z$, respectivamente.



3.5.3 Interpretação para a diferença

Sendo $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$ representados no plano pelos vetores $\overrightarrow{OP_1}$ e $\overrightarrow{OP_2}$, então $z = z_1 - z_2 = z_1 + \ (-z_2) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$ é representado pelo vetor $\overrightarrow{OP}$ que é o vetor soma de $\overrightarrow{OP_1}$ com o oposto de $\overrightarrow{OP_2}$. Dizemos então que $\overrightarrow{OP}$ é o *vetor diferença* de $\overrightarrow{OP_1}$ e $\overrightarrow{OP_2}$.



$\overrightarrow{OP'_2}$ é o oposto de $\overrightarrow{OP_2}$. O vetor $\overrightarrow{OP}$ foi obtido somando-se $\overrightarrow{OP_1}$ ao oposto de $\overrightarrow{OP_2}$. Observe que d $(P_1,\ P_2) = |z_1 - z_2| = |z|$.

A partir da interpretação da soma e da diferença dada acima, vê-se a validade da desigualdade triangular: $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

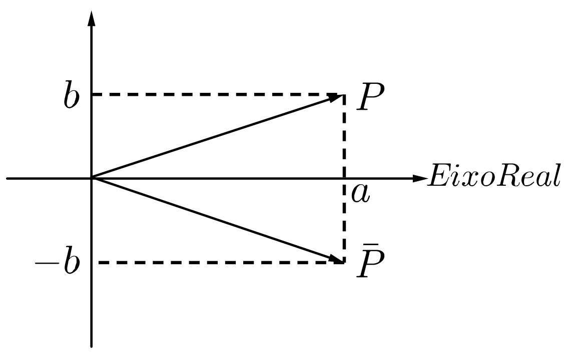
De fato: se os vetores que representam z_1 e z_2 não têm a mesma direção, para somá-los, formamos um triângulo de lados medindo $|z_1|$, $|z_2|$ e $|z_1 + z_2|$, e, como em qualquer triângulo, a medida de cada lado é menor que a soma e maior que a diferença da medida dos outros dois lados, temos então a desigualdade $||z_1| - |z_2|| < |z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$

Se os vetores que representam z_1 e z_2 têm a mesma direção e o mesmo sentido, temos $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ e, se eles têm mesma direção e sentidos opostos, temos $|z_1 + z_2| = ||z_1| - |z_2||$

Como exercício, faça as figuras representando os casos estudados na justificativa acima.

3.5.4 Interpretação para o conjugado

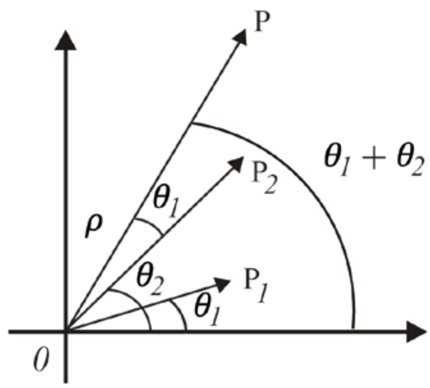
Seja $z = a + bi$. Logo $\overline{z} = a - bi$.



$\overrightarrow{O\overline{P}}$ é simétrico a $\overrightarrow{OP}$ em relação ao eixo real.

3.5.5 Interpretação para o produto

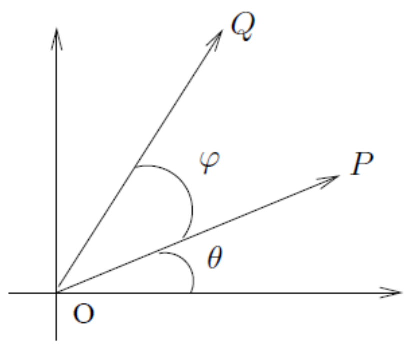
Sejam $z_1 = \rho_1(cos\,\theta_1 + isen\,\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(cos\,\theta_2 + isen\,\theta_2)$ representados pelos vetores $\overrightarrow{OP_1}$ e $\overrightarrow{OP_2}$ respectivamente. Seja $z = z_1 z_2 = \rho_1\rho_2[cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2)]$. Portanto o vetor $\overrightarrow{OP}$ que representa o número complexo z é obtido por rotação no sentido anti-horário, de um dos vetores pelo ângulo do outro vetor, mas com módulo $\rho = \rho_1\rho_2$.



Observação: rotação de um vetor.

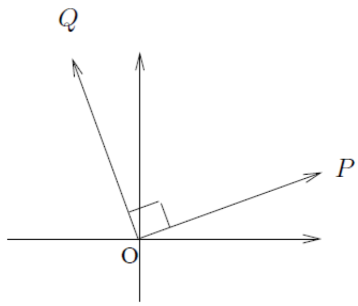
Sejam $z = \rho(cos\,\theta + isen\,\theta)$ um número complexo qualquer representado pelo vetor $\overrightarrow{OP}$ e $w = (cos\,\phi + isen\,\phi)$ um número complexo de módulo unitário.

O produto $zw = \rho[cos(\theta + \phi) + isen(\theta + \phi)]$ é representado no plano pelo vetor $\overrightarrow{OQ}$ obtido pela rotação de um ângulo ϕ do vetor $\overrightarrow{OP}$.

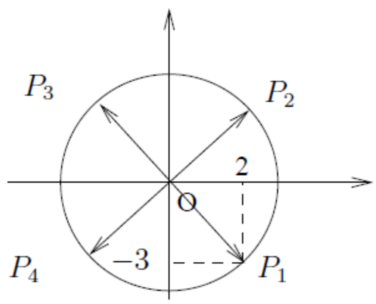


Exemplos:

1) Se $\phi = \frac{\pi}{2} rad$, temos $w = cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2} = i$. Seja $z \neq 0$ um número complexo representado pelo vetor $\overrightarrow{OP}$. O vetor $\overrightarrow{OQ}$ que representa o número complexo zi é obtido pela rotação de 90^o no sentido anti-horário do vetor $\overrightarrow{OP}$.



2) Quatro números complexos têm seus afixos em quatro pontos que dividem em partes iguais uma circunferência de centro na origem. Se um dos números é $z_1 = 2 - 3i$, determine os outros.



Resolução: sabendo que $\overrightarrow{OP_2}$, $\overrightarrow{OP_3}$ e $\overrightarrow{OP_4}$ são obtidos de $\overrightarrow{OP_1}$ por rotações, respectivamente, de $\frac{\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$, temos: $z_2 = z_1 \cdot i$

$$z_3 = z_1 \cdot i \cdot i$$

$$z_4 = z_1 \cdot i \cdot i \cdot i$$

Portanto $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 3 + 2i$, $z_3 = -2 + 3i$ e $z_4 = -3 - 2i$

Exercício:

Os afixos de doze números complexos dividem em partes iguais a circunferência unitária (centro na origem e raio 1). Determine esses números sabendo que um dos afixos tem coordenadas $(1,\ 0)$.

3.6 Números complexos e a função de Euler

O lugar geométrico dos afixos P dos números complexos z, tais que $|z| = 1$, é a circunferência de raio 1 com centro na origem do plano cartesiano. Denotamos essa circunferência por $S^1 = \{z \in \mathbb{C};\ \ |z| = 1\}$.

A função de Euler, definida na terceira parte do volume 2 (Funções trigonométricas - Capítulo 16), pode ser expressa como $E: \mathbb{R} \to S^1 \subset \mathbb{C}$ dada por $E(x) = cos\ x + i\ \ sen\ x$. Assim, essa função é vista como uma função complexa de variável real que possui a seguinte propriedade:

$E(x + y) = E(x) \cdot E(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

De fato:

$$\begin{aligned} E(x+y) &= cos(x+y) + i\ \ sen(x+y) \\ &= (cos\ x.cos\ y - sen\ x \cdot sen\ y) + i(cos\ x \cdot sen\ y + cos\ y \cdot sen\ x) \\ &= (cos\ x + isen\ x)(cos\ y + isen\ y) \\ &= E(x) \cdot E(y) \end{aligned}$$

Sendo esta uma das propriedades caracterizadoras e propriedade fundamental das funções exponenciais, Euler concluiu e escreveu: $E(x) = cos\ x + isen\ x = e^{ix}$

Generalizando a ideia para variável complexa, escreve-se

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(cos\ y + isen\ y),$$

definindo assim a função exponencial complexa $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por $f(z) = e^z$.

Exemplos:

Usando a fórmula de Euler $e^{ix} = cos\ x + isen\ x$, vemos que:

1) $e^{2\pi i} = 1$ e $e^{\pi i} = -1$

2) $e^{2k\pi i} = 1$ e $e^{\frac{\pi i}{2}} = i$

3) $cos\ x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ e $sen\ x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

4) $e^{\frac{-\pi}{2}} = i^i$ (1)

(1) Valor principal de i^i .

4

FUNÇÃO COMPLEXA DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA

Seja D um subconjunto de $\mathbb{C}$. Uma função complexa $f : D \to \mathbb{C}$ definida em D é uma correspondência que associa a cada número complexo $z \in D$ a um único número complexo $w \in \mathbb{C}$. O complexo *w* é chamado de valor de *f* em *z* e denotado por $w = f(z)$.

4.1 Exemplos de funções complexas

1) Seja $D = \mathbb{C} - \{0\} = \mathbb{C}^*$ e $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ definido por $f(z) = \dfrac{1}{z}$.

Logo $w = f(z) = \dfrac{1}{z}$. Se $z = x + yi$ e $w = u + vi$ com $z \neq 0$, então podemos escrever $w = \dfrac{1}{z}$.

Assim $u + vi = \dfrac{x}{x^2 + y^2} - \dfrac{y}{x^2 + y^2} i$.

Portanto $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ e $v = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}$ são funções reais de duas variáveis reais *x* e *y* (observe que sendo $z \neq 0$ temos $x^2 + y^2 \neq 0$).

2) A função complexa $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ definida por $g(z)=\left| z \right|^2$ é também chamada de função real de variável complexa, pois $g(z)\in\mathbb{R}$, $\forall z\in\mathbb{C}$. Note que $g(x+yi)=x^2+y^2\in\mathbb{R}_+$. Assim vemos que o conjunto das imagens de *f* está contido em $\mathbb{R}_+$

3) Seja $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ definida por $f(z)=z^2$.

Se $z=x+yi$, então $w=f(z)=(x+yi)^2=(x^2-y^2)+2xyi$.

Nesse caso $Re(w)=u=x^2-y^2$ e $\text{Im}(w)=v=2xy$.

Para todo $w\in\mathbb{C}^*$, existem z_1, $z_2\in\mathbb{C}$ tais que $f(z_1)=f(z_2)=w$. Os complexos z_1 e z_2 são as raízes quadradas complexas de *w*. Como a raiz quadrada complexa do zero é ele próprio, concluímos que *f* é sobrejetora, mas não é injetora.

4) Motivados pela definição da Função de Euler (seção 3.6), $E:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ dada por $E(y)=\cos y+i\,\text{sen}\, y$ escrita na forma exponencial $E(y)=\cos y+i\,\text{sen}\, y=e^{iy}$, definimos a função exponencial complexa $Exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ por $Exp(z)=e^z$.

Se $z=x+yi$, logo $Exp(x+yi)=e^{x+yi}=e^x.\ e^{yi}=e^x.\ E(y)$ em que *E* é a Função de Euler.

Portanto $Exp(x+yi)=e^x(\cos y+i\,\text{sen}\, y)=e^x\cos y+i\ e^x\,\text{sen}\, y=u+iv=w$.

Assim, sendo $z\in\mathbb{C}$ temos $Exp(z)=w\in\mathbb{C}$.

Observações acerca da exponencial complexa

a) $\left|Exp(z)\right|=e^{Re(z)}$

b) $Exp(z)\neq 0$, $\forall\ z\in\mathbb{C}$, pois se $z=x+yi$, então $Exp(z)=Exp(x+yi)=e^x(\cos y+i\ sen\ y)$. Como $e^x\neq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, temos $Exp(z)=0\Leftrightarrow\cos y+i\ sen\ y=0$, mas $sen\ y$ e $\cos y$ nunca se anulam simultaneamente para um mesmo valor $y\in\mathbb{R}$. Portanto $Exp(z)\neq 0$, $\forall\ z\in\mathbb{C}$.

c) $Exp(z+w)=Exp(z)\ .\ Exp(w)$

De fato: Sejam $z=x+yi$ e $w=u+vi$

$$Exp(z+w)=Exp[(x+u)+(y+v)i]=e^{x+u}.\ E(y+v)=e^{x}.\ e^{u}.\ E(y).\ E(v)=$$

$$=e^{x}E(y).\ e^{u}E(v)=e^{x}(\cos y+i\ sen\ y).\ e^{u}(\cos v+i\ sen\ v)=Exp(z)\ .\ Exp(w)$$

d) $\forall\ n\in\mathbb{N}$, $[Exp(z)]^{n}=Exp(nz)$, pois usando a fórmula de Moivre temos

$$[Exp(z)]^{n}=[e^{x}(\cos y+i\ sen\ y)]^{n}=e^{nx}.(\cos y+i\ sen\ y)^{n}=e^{nx}(\cos ny+i\ sen\ ny)=Exp(nz)$$

e) A exponencial complexa não é injetora.

Por exemplo $Exp(0)=Exp(0+0i)=e^{0}(\cos 0+i\ sen 0)=1$ e

$$Exp(2\pi i)=Exp(0+2\pi i)=e^{0}(\cos 2\pi+i\ sen 2\pi)=1.$$

Logo $Exp(z+2\pi i)=Exp(z).Exp(2\pi i)=Exp(z).1=Exp(z)$

Portanto $Exp(z+2\pi i)=Exp(z),\ \forall\ z\in\mathbb{C}$. Isto mostra que a função exponencial complexa é periódica.

f) $Exp(\overline{z})=\overline{Exp(z)}$, pois sendo $z=x+yi$ temos $\overline{z}=x-yi$ e

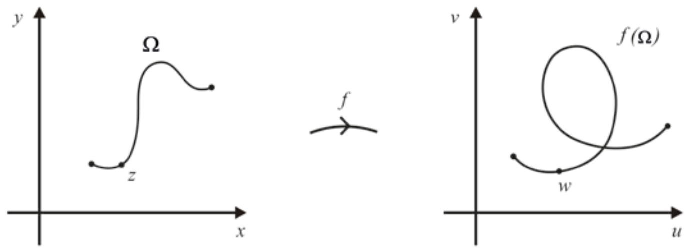
$$Exp(\overline{z})=Exp(x-yi)=Exp[x+(-y)i]=e^{x}[\cos(-y)+i\ sen\ (-y)]=e^{x}[\cos y-i\ sen\ y]=$$

$$=\overline{e^{x}(\cos y+i\ sen\ y)}=\overline{Exp(z)}$$

4.2 Função complexa vista como transformação de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$

Seja $f:\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C}$ uma função complexa. O seu gráfico $Gr(f)=\{(z,f(z))\,/\,z\in\mathbb{C}\}$ é um subconjunto do produto cartesiano $\mathbb{C}$ x $\mathbb{C}=\mathbb{C}^{2}$.

Sendo $\mathbb{C}$ identificado geometricamente como $\mathbb{R}^{2}$, então $\mathbb{C}^{2}$ é identificado com $\mathbb{R}^{2}$ x $\mathbb{R}^{2}=\mathbb{R}^{4}$, que é um espaço quadridimensional. Portanto não conseguimos mais esboçar e visualizar geometricamente o $Gr(f)$ por ser uma figura num contexto de dimensão 4. No entanto, uma maneira de visualizar algumas interpretações geométricas para uma função complexa de variável complexa é olhá-la como uma transformação de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$ e esboçar geometricamente/graficamente os conjuntos imagens $f(\Omega)$ de subconjuntos $\Omega\subset\mathbb{C}$.



Se $z = x + yi$, então $w = f(z) = u + iv$. Assim $u = u(x, y) = Re\ (f(z))$ e $v = v(x, y) = \text{Im}(f(z))$ são funções reais de duas variáveis reais.

Exemplos

1) Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = z^2$

Seja Ω_1 o círculo $S^1 = \{z \in \mathbb{C}\ /\ |z| = 1\} = \{z \in \mathbb{C}\ /\ z = (\cos\theta + i\ sen\ \theta) / 0 \le \theta < 2\pi\}$,

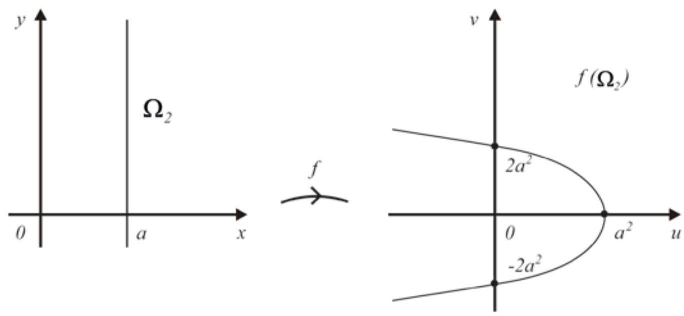
então temos $f(\Omega_1) = \{w \in \mathbb{C} / w = f(z) = (\cos\theta + i\ sen\ \theta)^2 \text{ com } 0 \le \theta < 2\pi\} =$

$= \{w = \cos 2\theta + i\ sen\ 2\theta \text{ com } 0 \le \theta < 2\pi\}$. Assim vemos que $f(\Omega_1)$ é o círculo com centro na origem e raio 1, mas agora percorrido duas vezes, isto é, $f(\Omega_1)$ é o círculo com duas voltas.

Seja Ω_2 uma reta perpendicular de equação $x = a$ (a é uma constante real), então $\Omega_2 = \{a + yi / y \in \mathbb{R}$ e a é uma constante real$\}$.

$f(\Omega_2) = \{w = (a + yi)^2 / y \in \mathbb{R}\} = \{w = (a^2 - y^2) + 2ayi / y \in \mathbb{R}\} =$

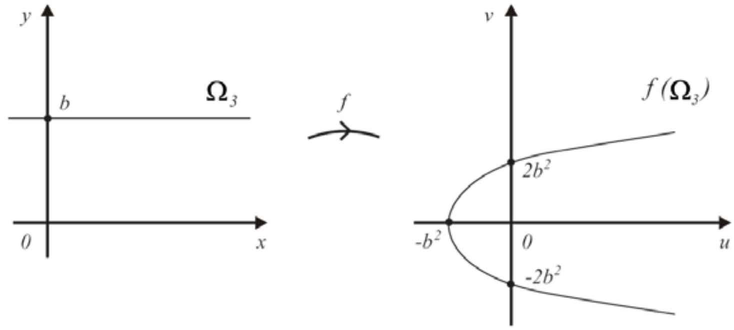
$= \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / u = a^2 - y^2 \text{ e } v = 2ay,\ \forall y \in \mathbb{R}\} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / u = a^2 - \frac{1}{4a^2}v^2\}$ é uma parábola.



Seja Ω_3 a reta horizontal $y = b$ (b constante real), então $\Omega_3 = \{z = x + bi \,/\, x \in \mathbb{R}$ e b constante real$\}$

$f(\Omega_3) = \{w \in \mathbb{C} \,/\, w = (x+bi)^2, \forall x \in \mathbb{R}\} = \{w = (x^2 - b^2) + 2bxi \,/\, x \in \mathbb{R}\} =$

$= \{(u,v) \,/\, u = x^2 - b^2$ e $v = 2bx\} = \{(u,v) \,/\, u = \dfrac{1}{4b^2}v^2 - b^2\}$ é a parábola esboçada a seguir



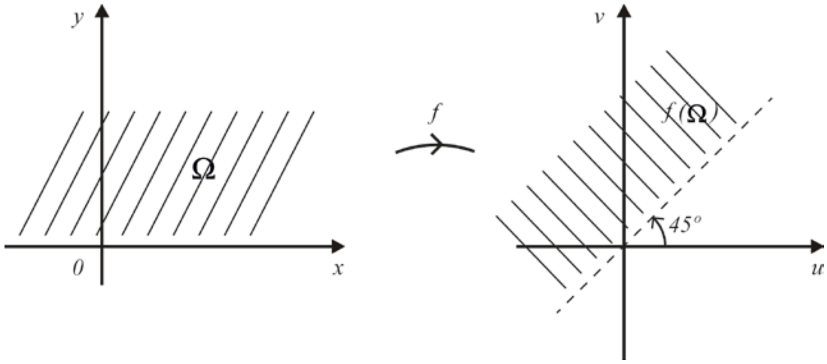
2) Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = (1+i)z$

Seja o semiplano complexo $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \;/\; \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

A função f transforma Ω em $f(\Omega) = \{w \in \mathbb{C} \;/\; w = (1+i)z$ com $z \in \Omega\}$.

Como $1 + i = \sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\ sen\ \dfrac{\pi}{4})$, então $w = \sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\ sen\ \dfrac{\pi}{4})z$ é uma rotação de 45º no sentido anti-horário dos vetores $z \in \Omega$, com módulo multiplicado por $\sqrt{2}$.

Geometricamente, $f(\Omega)$ é uma rotação de 45º no sentido anti-horário de Ω.

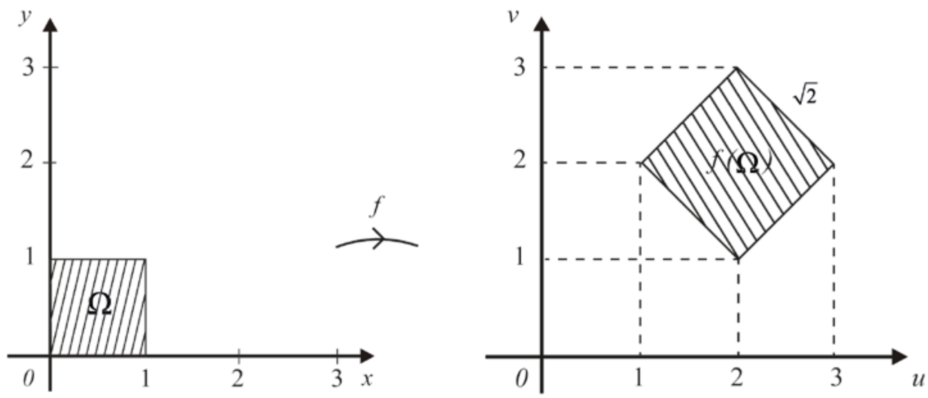


Considerando as interpretações geométricas do produto e da soma de números complexos, estudadas na seção 3.5, vemos que a transformação dada pela função complexa da forma $w = f(z) = \alpha z + \beta$, com α e β constantes complexas, pode ser obtida geometricamente por uma rotação do ângulo $arg(\alpha)$ e uma expansão ou contração do fator $|\alpha|$, seguida de uma translação dada pelo vetor β em cada ponto P, afixo do número complexo $z \in \mathbb{C}$. Assim essa função transforma uma região Ω do plano *xy* numa região $f(\Omega)$ do plano *uv*, semelhante a ela.

3) Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $w = f(z) = (1+i)z + 2 + i$.

$\alpha = 1 + i \Rightarrow arg(\alpha) = \dfrac{\pi}{4}$ e $|\alpha| = \sqrt{2}$.

Seja o quadrado $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \ / \ 0 \le Re(z) \le 1 \text{ e } 0 \le \text{Im}(z) \le 1\}$.



4) Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = e^z$, então

a) As retas $x = a$ (*a* const. real) verticais ao eixo real do plano complexo são transformadas em círculos com centro na origem e raio $r = e^a$.

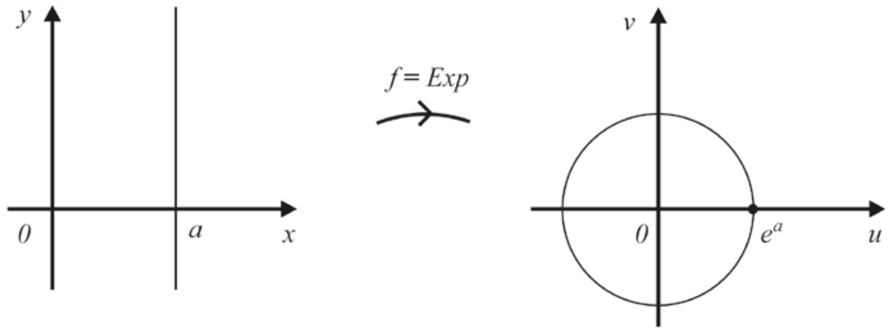
b) As retas $y = b$ (*b* constante real) verticais ao eixo imaginário do plano complexo são transformadas em semirretas do plano complexo.

De fato:

a) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \, / \, z = a + yi, \forall y \in \mathbb{R}\}$ é uma reta vertical ao eixo real.

Se $z \in \Omega$, então $f(z) = e^z = e^a . \ e^{yi} = e^a(\cos y + i \ sen \ y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$.

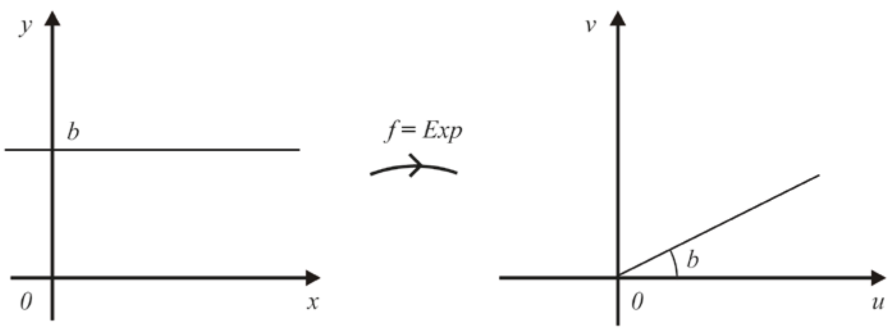
Logo, fazendo variar y em $\mathbb{R}$, temos que $f(\Omega)$ é um círculo com centro na origem e raio $r = e^a$ com infinitas voltas, pois f é periódica e portanto $f(z + 2k\pi i) = f(z), \forall z \in \mathbb{C}$ e $k \in \mathbb{Z}$.



Observe que, se $z = a + yi$ percorre a reta Ω no sentido positivo $(y > 0)$, então $f(z)$ percorre o círculo no sentido positivo (anti-horário). E, se z percorre a reta no sentido negativo $(y < 0)$, então $f(z)$ percorre o círculo no sentido negativo (horário).

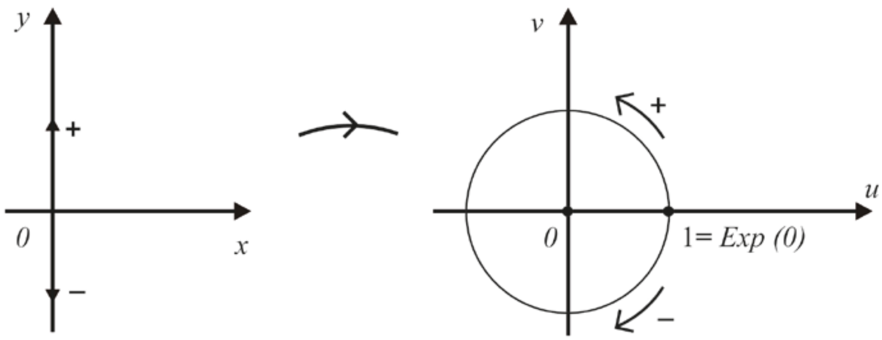
b) $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} / z = x + bi, \forall x \in \mathbb{R}\}$ é uma reta vertical ao eixo imaginário.

Se $z \in \Gamma$, então $f(z) = e^z = e^x(\cos b + i \ sen \ b)$. Logo $w = f(z)$ tem módulo $r = e^x$ variável e argumento fixo constante $\varphi = b$. Assim, variando x em $\mathbb{R}$, $f(z)$ constitui uma semirreta.



(a semirreta não contém a origem O)

Observação: Como vimos, no item a) do exemplo 4, a função exponencial complexa $Exp(z)=e^z$ transforma o eixo y (reta vertical $x=0$), que é uma cópia da reta real, no círculo S^1 de raio 1 e centro na origem. Isto é, a $Exp(z)$, quando restrita à reta real, coincide com a Função de Euler, que intuitivamente enrola a reta real no círculo S^1.



$$Exp(iy) \equiv E(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

4.3 Exercícios complementares

1) Existem números complexos $z,\ w$ tais que $|z| = |w| = |z+w| = 1$?

2) Determine os números complexos que estão sobre a reta $y = 2x + 1$, com módulo igual a $\sqrt{2}$

3) Prove que $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$. Interprete geometricamente o resultado.

4) Sejam $z,\ w \in \mathbb{C}$. Use a forma trigonométrica para dar uma outra demonstração de que $|z+w| \leq |z| + |w|$

5) Calcule o valor de $i + i^2 + \cdots + i^{30}$

6) Represente no plano complexo o afixo de um número complexo z e o afixo do seu inverso $\frac{1}{z}$

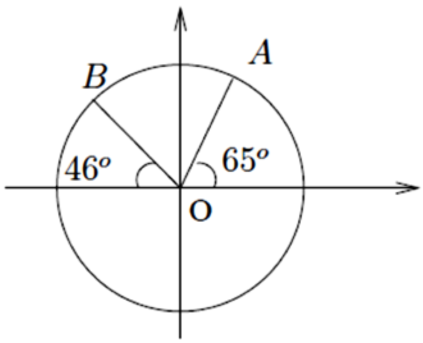
7) Resolva a equação $(1+z)^5 = (1-z)^5$

8) Sendo $O,\ P,\ Q$ afixos dos números complexos $z_0 = 0 + 0i,\ z_1 = 2 + 3i$ e $z_2 = -5 - i$, respectivamente, determine o ângulo $P\hat{O}Q$

9) Sejam P_1 e P_2 respectivamente os afixos de z_1 e z_2. Se $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$, então mostre que o ângulo $P_1\hat{O}P_2$ é reto.

10) Se w é uma raiz enésima da unidade, calcule o valor de $1 + 2w + 3w^2 + \ldots + nw^{n-1}$

11) Os pontos A e B sobre a circunferência unitária da figura abaixo são os afixos dos números complexos z e w respectivamente. Escreva na forma algébrica o número complexo $\frac{\sqrt{2}z^{11}}{w^5}$



12) Sendo $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, mostre que, se $z = [(1 + cos\ 2x) + isen\ 2x]^n$, então

$$Re(z) = 2^n cos^n x \cdot cos\ nx$$

13) Sejam $z,\ w \in \mathbb{C}$ tais que $z = 1 + \sqrt{3}i$ e $z\overline{w} = 1$. Calcule $arg(zw)$ no intervalo $[0,\ 2\pi]$

14) Mostre que o produto e o quociente de duas raízes n-ésimas da unidade são também raízes n-ésimas da unidade.

15) Esboce a imagem da região $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \,/\, \mathrm{Re}(z) > 0 \text{ e } 0 < \mathrm{Im}(z) < 1\}$ pela transformação $w = f(z) = iz + 1$.

16) Sejam $\Omega=\{z\in\mathbb{C}\,/\,1\le \operatorname{Re}(z)\le 2 \ \text{ e } \ 1\le \operatorname{Im}(z)\le 2\}$ e $f(z)=-iz+1+2i$. Esboce o lugar geométrico dos afixos de $f(\Omega)$.

17) Seja a função complexa $w=f(z)=z^2$.

a) Se Ω é todo o 1º quadrante do plano xy, então mostre que $f(\Omega)$ é todo o semiplano superior de uv.

b) Se Ω é o setor circular $\{z\in\mathbb{C}\,/\,z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta) \text{ com } \rho<1 \text{ e } 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\}$, determine o lugar geométrico de $f(\Omega)$.

c) Se Ω é o eixo real, esboce no plano complexo os afixos de $f(\Omega)$.

d) Seja a diagonal $\Delta=\{z\in\mathbb{C}\,/\,\operatorname{Re}(z)=\operatorname{Im}(z)\}$, esboce Δ e $f(\Delta)$.

e) Seja a hipérbole equilátera $\Omega=\{z\in\mathbb{C}\,/\,\operatorname{Re}(z).\operatorname{Im}(z)=1\}$. Esboce em planos complexos separados o conjunto Ω e o conjunto $f(\Omega)$.

18) Seja a transformação $f:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}$ dada por $f(z)=\dfrac{1}{z}$. Mostre que:

a) f transforma retas verticais $(x=a\in\mathbb{R}^*)$ em círculos com centros no eixo real que passam pela origem.

b) f transforma retas horizontais $(y=b\in\mathbb{R}^*)$ em círculos com centros no eixo imaginário que passam pela origem.

19) Se $z=2\,e^{\frac{\pi i}{4}}$, calcule $\left|\,e^{iz}\,\right|$

20) Resolva em $\mathbb{C}$ as equações:

a) $Exp(4z+1)=1$ b) $Exp(z)=-1$ c) $Exp(z)=-2$

II

POLINÔMIOS

Polinômios

Os polinômios constituem uma das partes mais antigas da álgebra com grande diversidade de aplicações. No entanto seus estudos e análises guardam até hoje "enigmas e mistérios". Tanto é fato que o matemático Ivan Shestakov, da Universidade de São Paulo (USP), ao lado de Ualbai Umirbaev, ganhou em fevereiro de 2007 um importantíssimo prêmio da American Mathematical Society (AMS) por seus artigos publicados sobre a conjectura de Nagata, que tratam de automorfismos domésticos e automorfismos selvagens de anéis de polinômios em três variáveis.

Esse prêmio, chamado E. H. Moore Research Article Prize, é concedido pela AMS a cada três anos a um artigo de pesquisa que tenha feito grandes contribuições científicas para a matemática no período dos últimos seis anos anteriores a sua concessão.

Definição: Uma função $P:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ é chamada função *polinomial* ou *polinômio* se existem números complexos $a_0, a_1, ..., a_n$, tal que $P(z)=a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1 z + a_0,\ \forall z\in\mathbb{C}$

Os números complexos $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são denominados *coeficientes* do polinômio $P(z)$. Os monômios $a_n z^n,\ a_{n-1}z^{n-1}, ..., a_1 z$ e a_0 são *os termos* do polinômio.

Observe na definição acima que $n\in\mathbb{Z}_+$, logo funções do tipo $f(z)=z^2+z+z^{1/2}+1,\quad g(z)=\dfrac{1}{z}$ e $h(z)=2\,z^3-\sqrt{z^3}+z+7$, não são polinômios.

Exemplos de polinômios:

a) $P_1(z)=2\,z^3-iz^2+7z+2+i$

b) $P_2(z)=z^6+z^2+1$

c) $P_3(z)=\sqrt{2}$

5

Zero ou raiz de um polinômio

Um número complexo α é um *zero ou raiz* do polinômio P se e somente se $P(\alpha)=0$

Definição: Uma função polinomial ou polinômio P é *identicamente nulo* se $P(\alpha)=0$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$

Notação: $P(z) \equiv 0$

A função polinomial ou polinômio identicamente nulo será simplificadamente chamado *polinômio nulo*.

Proposição

Um polinômio $P(z)=a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ *é nulo (identicamente nulo) se e somente se* $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_1 = a_0 = 0$

Demonstração: Se $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_1 = a_0 = 0$, então

$$P(\alpha)=a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1 \alpha + a_0 = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{C},$$

portanto P é identicamente nulo, isto é, $P(z) \equiv 0$. Reciprocamente, se $P(z) \equiv 0$, temos que $P(\alpha)=0, \ \forall \alpha \in \mathbb{C}$

Tomemos $n+1$ números complexos distintos $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ e α_n. Portanto temos o sistema linear

$$\begin{cases} 0 = P(\alpha_0) = a_n\alpha_0^n + a_{n-1}\alpha_0^{n-1} + \ldots + a_1\alpha_0 + a_0 \\ 0 = P(\alpha_1) = a_n\alpha_1^n + a_{n-1}\alpha_1^{n-1} + \ldots + a_1\alpha_1 + a_0 \\ 0 = P(\alpha_2) = a_n\alpha_2^n + a_{n-1}\alpha_2^{n-1} + \ldots + a_1\alpha_2 + a_0 \\ \quad\vdots \\ 0 = P(\alpha_n) = a_n\alpha_n^n + a_{n-1}\alpha_n^{n-1} + \ldots + a_1\alpha_n + a_0 \end{cases}$$

Equivalentemente temos o sistema linear homogêneo $(n+1)\text{x}(n+1)$ cujas incógnitas são $a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n$

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_0 & \ldots & \alpha_0^{n-1}\alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_1^{n-1}\alpha_1^n \\ 1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_2^{n-1}\alpha_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \alpha_n & \ldots & \alpha_n^{n-1}\alpha_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como o determinante da matriz $(n+1)\text{x}(n+1)$ acima é diferente de zero (justificar), conclui-se que o sistema é possível e determinado, admitindo apenas a solução trivial:

$a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1} = a_n = 0$

6

Igualdade de polinômios

Dois polinômios P e Q são denominados iguais ou idênticos se $P(\alpha)=Q(\alpha)\ \ \forall\alpha\in\mathbb{C}$.

Notação: $P(z)\equiv Q(z)\Leftrightarrow\ P(\alpha)=Q(\alpha),\quad\forall\alpha\in\mathbb{C}$

Proposição

Os polinômios $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1z+a_0$ *e* $Q(z)=b_nz^n+b_{n-1}z^{n-1}+...+b_1z+b_0$ *são iguais ou idênticos se e somente se* $a_0=b_0,\ a_1=b_1,...,\ a_{n-1}=b_{n-1}$ *e* $a_n=b_n$

Demonstração:

Se $a_0=b_0,\ a_1=b_1,...,\ a_{n-1}=b_{n-1}$ e $a_n=b_n$, então para cada $\alpha\in\mathbb{C}$ temos $a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+...+a_1\alpha+a_0=\mathrm{b}_n\alpha^n+b_{n-1}\alpha^{n-1}+...+b_1\alpha+b_0$, isto é, $P(\alpha)=Q(\alpha)$ para cada $\alpha\in\mathbb{C}$. Portanto $P(z)\equiv Q(z)$

Reciprocamente, se $P(z)\equiv Q(z)$, então $P(\alpha)=Q(\alpha)\ \ \forall\alpha\in\mathbb{C}$, logo $a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+...+a_1\alpha+a_0=\mathrm{b}_n\alpha^n+b_{n-1}\alpha^{n-1}+...+b_1\alpha+b_0$, o que implica que $(a_n-b_n)\alpha^n+(a_{n-1}-b_{n-1})\alpha^{n-1}+...+(a_1-b_1)\alpha+(a_0-b_0)=0$

Assim o polinômio $C(z)=(a_n-b_n)z^n+(a_{n-1}-b_{n-1})z^{n-1}+...+(a_1-b_1)z+(a_0-b_0)$ é tal que $C(\alpha)=0,\ \forall\alpha\in\mathbb{C}$. Portanto o polinômio C é identicamente nulo, isto é, $C(z)\equiv 0$, e, pela proposição anterior, temos que seus coeficientes têm que ser nulos. Logo $a_n-b_n=a_{n-1}-b_{n-1}=...=a_1-b_1=a_0-b_0=0$, de que se conclui que $a_0=b_0,\ a_1=b_1,...,\ a_{n-1}=b_{n-1}$ e $a_n=b_n$

Exemplos:

1) Determine a,b e c para que o polinômio $P(z)=(a-1)z^2+bz+c$ seja igual (idêntico) ao polinômio $Q(z)=2az^2+2bz-c$

$P(z)\equiv Q(z)\Leftrightarrow a-1=2a,\ \ b=2b$ e $c=-c$, logo temos $c=0,\ \ b=0$ e $a=-1$

2) Para que o polinômio $A(z)=(a-1)z^4+z^3+(b+2)z^2-cz+d$ seja igual ou idêntico ao polinômio $B(z)=z^3+(a+c)z^2+(d-2)z+c-1$, devemos ter:

$$a-1=0,\ \ b+2=a+c,\ \ d-2=-c \quad \text{e} \quad d=c-1,$$

de que se conclui que $a=1,\ \ b=\dfrac{1}{2},\ \ c=\dfrac{3}{2}$ e $d=\dfrac{1}{2}$

6.1 Exercícios

1) Seja $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $p(x)=ax^2+bx+c\ \ (a\neq 0)$ uma função quadrática. Seja $p(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$ a forma fatorada da função p (ver seção 7.4 do volume 1). Use a igualdade de polinômios para mostrar que $\alpha+\beta=\dfrac{-b}{a}$ e $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$.

2) Determine os valores de a e b de modo que os polinômios $P(z)=az^2+bz-1$ e $Q(z)=z^2+az+b$ satisfaçam a condição $P(z+1)=Q(z-1)$.

3) Determine p e q tais que $\dfrac{1}{z^2-3z+2}=\dfrac{p}{z-1}+\dfrac{q}{z-2}$

7

Grau de um polinômio

Se $P(z)$ não é identicamente nulo, então o grau de $P(z)$ é o maior expoente de z entre os termos com coeficiente diferente de zero.

Não definimos grau para o polinômio identicamente nulo.

Se $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ com $a_n \neq 0$, então o grau de $P(z)$ é *n*.

Notação: $\partial(P) = n$.

Observe que o polinômio constante $P(z) = a_0$ possui grau zero.

Exercício:

Existem polinômios P de grau 3 tais que $P(z) = P(-z), \ \forall z \in \mathbb{C}$?

8

Operações com polinômios

8.1 Adição

Sejam P e Q dois polinômios,

$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ e $Q(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_1 z + b_0$

Pode ocorrer que $n > m$ ou $m > n$ ou $m = n$.

Digamos que $n > m$, então escrevemos $b_j = 0$ para $m < j \leq n$

Assim $Q(z) = 0z^n + 0z^{n-1} + \ldots + b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_1 z + b_0$ e definimos o polinômio soma $(P+Q)$ por:

$$(P+Q)(z) = P(z) + Q(z) = (a_n + 0) z^n + (a_{n-1} + 0) z^{n-1} + \ldots + (a_m + b_m) z^m + (a_{m-1} + b_{m-1}) z^{m-1} + \ldots$$
$$+ (a_1 + b_1) z + (a_0 + b_0)$$

Analogamente temos a subtração e o polinômio diferença,

$$(P-Q)(z) = P(z) - Q(z) = (a_n - 0) z^n + (a_{n-1} - 0) z^{n-1} + \ldots + (a_m - b_m) z^m + (a_{m-1} - b_{m-1}) z^{m-1} + \ldots$$
$$+ (a_1 - b_1) z + (a_0 - b_0)$$

Exemplo:

Sejam $P(z)=5z^4+3z^3-1z^2-2z+1$ e $Q(z)=z^2-3z+7$

Reescrevemos

$Q(z)=0z^4+0z^3+z^2-3z+7$:

$(P+Q)(z)=P(z)+Q(z)=(5+0)z^4+(3+0)z^3+(-1+1)z^2+(-2+(-3))z+(1+7)=$
$=5z^4+3z^3-5z+8$

A diferença

$P(z)-Q(z)=(5-0)z^4+(3-0)z^3+(-1-1)z^2+(-2-(-3))z+(1-7)=5z^4+3z^3-2z^2+z-6$

Denotamos o polinômio soma e o polinômio diferença por $(P+Q)(z)=P(z)+Q(z)$ e $(P-Q)(z)=P(z)-Q(z)$

8.2 Multiplicação

Seja $c\in\mathbb{C}$ um número complexo e $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1z+a_0$ um polinômio. Definimos o produto $(cP)(z)=cP(z)=ca_nz^n+ca_{n-1}z^{n-1}+...+ca_1z+ca_0$

Seja o polinômio $Q(z)=b_mz^m+b_{m-1}z^{m-1}+...+b_1z+b_0$

Definimos o produto $(P\cdot Q)(z)$ como sendo o polinômio obtido pela aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição de números complexos.

Assim $(P\cdot Q)(z)=P(z)\cdot Q(z)=a_nb_mz^{n+m}+(a_nb_{m-1}+a_{n-1}b_m)z^{n+m-1}+...+(a_1b_0+a_0b_1)z+a_0b_0$

Observemos que o grau de $P\pm Q$ é menor do que ou igual ao maior grau entre os graus de P e de Q.

No caso do produto de P e Q $(P\not\equiv 0$ e $Q\not\equiv 0)$, temos que o grau é a soma dos graus de P e de Q.

Notações:

$\partial(P \pm Q) \leq$ máx $\{\partial(P),\ \partial(Q)\}$

$\partial(P.Q) = \partial(P) + \partial(Q)$, se P e Q são não nulos.

8.3 Divisão

Definição: Sejam dois polinômios $A(z)$ e $B(z)$ com $B(z) \not\equiv 0$. Dividir $A(z)$ por $B(z)$ equivale a encontrar dois polinômios $Q(z)$ e $R(z)$, tais que $A(z) = B(z) \cdot Q(z) + R(z)$ com $\partial(R) < \partial(B)$ ou $R(z) \equiv 0$

Observações:

a) Os polinômios $Q(z)$ e $R(z)$ são chamados respectivamente *quociente* e *resto*.

b) Quando $R(z) \equiv 0$, dizemos que a divisão é *exata* e que, portanto, $A(z)$ é *divisível* por $B(z)$ ou que $B(z)$ divide $A(z)$

c) Na divisão de $A(z)$ por $B(z)$ quando $\partial A < \partial B$, por definição temos $A(z) = B(z) \cdot Q(z) + R(z)$ com $\partial R < \partial B$ ou $R \equiv 0$. Como $\partial(B \cdot Q) = \partial B + \partial Q$, concluímos que $Q(z) \equiv 0$ e, portanto, $R(z) \equiv A(z)$

d) Na definição de divisão dada acima, é único o par de polinômios quociente $Q(z)$ e resto $R(z)$ obtidos.

De fato:

Suponha que existam dois polinômios quociente $Q_1(z)$ e $Q_2(z)$ e dois polinômios resto $R_1(z)$ e $R_2(z)$ na divisão de $A(z)$ por $B(z)$.

Assim

$A(z)=B(z)\cdot Q_1(z)+R_1(z)$ com $\partial(R_1)<\partial(B)$ e $A(z)=B(z)\cdot Q_2(z)+R_2(z)$ com $\partial(R_2)<\partial(B)$.

Logo $B(z)\cdot Q_1(z)+R_1(z)=B(z)\cdot Q_2(z)+R_2(z)$ equivale a

$$B(z)\cdot\left[Q_1(z)-Q_2(z)\right]=R_2(z)-R_1(z) \qquad (*)$$

Se $R_1(z)\equiv R_2(z)$, temos que $B(z)\cdot\left[Q_1(z)-Q_2(z)\right]\equiv 0$ e, como $B(z)\not\equiv 0$, temos $Q_1(z)\equiv Q_2(z)$. Da mesma forma, se $Q_1(z)\equiv Q_2(z)$, temos $R_1(z)\equiv R_2(z)$

Se $R_1(z)\not\equiv R_2(z)$ e $Q_1(z)\not\equiv Q_2(z)$ em (*), temos que

$$\partial\left(B(z)\cdot\left[Q_1(z)-Q_2(z)\right]\right)=\partial\left(R_2(z)-R_1(z)\right)$$

Sabemos que $\partial\left(B\cdot\left[Q_1-Q_2\right]\right)=\partial(B)+\partial(Q_1-Q_2)$ e $\partial(R_2-R_1)\leq$ máx $\left\{\partial(R_1);\ \partial(R_2)\right\}<\partial(B)$. Portanto obtemos $\partial(B)+\partial(Q_1-Q_2)<\partial(B)$. O que é uma contradição. Logo não podemos ter $Q_1(z)\not\equiv Q_2(z)$ ou $R_1(z)\not\equiv R_2(z)$

8.3.1 Divisão pelo método de Descartes

Este método também é conhecido como método dos coeficientes a determinar.

Na divisão do polinômio $A(z)$ pelo polinômio $B(z)$, $\left(B(z)\not\equiv 0\right)$, temos $A(z)=B(z)\cdot Q(z)+R(z)$ com $\partial(R)<\partial(B)$ ou $R(z)\equiv 0$, logo $\partial(Q)=\partial(A)-\partial(B)$.

Assim conhecendo as possibilidades para os graus de $Q(z)$ e $R(z)$, constroem-se esses polinômios deixando como incógnitas seus coeficientes e resolve-se a equação $A(z)=B(z).Q(z)+R(z)$ tendo como incógnitas os coeficientes de $Q(z)$ e $R(z)$.

Exemplos:

1) Vamos dividir o polinômio $A(z)=2z^3+z^2-5z-1$ por $B(z)=z^2-2$

$\partial(A)=3$ e $\partial(B)=2$, logo $\partial(Q)=\partial(A)-\partial(B)=1$ e $\partial(R)<2$ ou $R(z)\equiv 0$

Portanto $Q(z)=az+b$ e $R(z)=cz+d$. Pela definição de divisão, devemos ter $A(z)=B(z)\cdot Q(z)+R(z)$

Logo, $2z^3+z^2-5z-1=(z^2-2)(az+b)+cz+d$

Assim, $2z^3+z^2-5z-1=az^3+bz^2+(c-2a)z-2b+d$, e, pela definição de igualdade de polinômios, temos

$$\begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c-2a=-5 \\ -2b+d=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ \mathrm{c}=-1 \\ \mathrm{d}=1 \end{cases}$$

Portanto $Q(z)=2z+1$ e $R(z)=-z+1$

2) Dividiremos o polinômio $A(z)=2z^3+z^2-z+1$ pelo polinômio $B(z)=z^3-z^2+3z+2$

Devemos encontrar polinômios $Q(z)$ e $R(z)$ tais que $A(z)=B(z)\cdot Q(z)+R(z)$ com $\partial(R)<\partial(B)$.

Assim temos $\partial(Q)=\partial(A)-\partial(B)=3-3=0$ e $\partial(R)<3$ ou $R(z)\equiv 0$

Portanto o quociente Q é da forma $Q(z)=q$ (constante) e o resto R da forma $R(z)=az^2+bz+c$

$$2z^3+z^2-z+1=(z^3-z^2+3z+2)\cdot q+az^2+bz+c$$

$$2z^3+z^2-z+1=qz^3+(a-q)z^2+(3q+b)z+2q+c$$

Usando a igualdade de polinômios, temos

$$\begin{cases} q=2 \\ a-q=1 \\ 3q+b=-1 \\ 2q+c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q=2 \\ a=3 \\ b=-7 \\ c=-3 \end{cases}$$

Assim $Q(z)=2$ e $R(z)=3z^2-7z-3$

3) Dividir o polinômio $A(z)=2z+1$ por $B(z)=4z^3-3z^2+1$. Para que $A(z)=B(z)\cdot Q(z)+R(z)$ com $\partial R<3$ ou $R(z)\equiv 0$, devemos ter $Q(z)\equiv 0$ e $R(z)\equiv A(z)$, caso contrário, teríamos $\partial(B\cdot Q)=\partial B+\partial Q=3+\partial Q>\partial A$ (contradição).

Exercício:

Determine o quociente e o resto da divisão de $A(z)$ por $B(z)$, usando o método de Descartes.

a) $A(z)=3z^4-2z^3+7z+2$ e $B(z)=3z^3-2z^2+4z-1$

b) $A(z)=z^3-z^2-z+1$ e $B(z)=z+1$

Outro método para dividir dois polinômios é o chamado método da chave, conhecido desde o ensino fundamental, que consiste em uma imitação do método de divisão de Euclides para números inteiros positivos.

Exemplo:

Sejam $A(z)=2z^3+z^2-5z-1$ e $B(z)=z^2-2$

$$
\begin{array}{rl}
\cancel{2z^3}+z^2-5z-1 & \underline{|\,z^2-2} \\
-\cancel{2z^3}\qquad\;\;+4z & 2z+1 \\
\hline
\cancel{z^2}-z-1 & \\
-\cancel{z^2}\quad\;\;+2 & \\
\hline
-z+1 &
\end{array}
$$

Logo $Q(z)=2z+1$ e $R(z)=-z+1$

8.3.2 Divisão por $B(z) = z - \alpha$

O caso particular de divisão por $B(z) = z - \alpha$, além de sua importância teórica, é muito útil na resolução de equações algébricas, que serão estudadas na terceira parte deste livro.

Usando o método de Descartes, que consiste em aplicar a definição de divisão e usar a igualdade de polinômios, temos que: dividir o polinômio $A(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ por $B(z) = z - \alpha$ é obter o quociente $Q(z)$ de grau $n-1$ e o resto $R(z)$ com $\partial R < \partial B = 1$ ou $R(z) \equiv 0$.

Assim $R(z) = r$ (número complexo constante) e

$$Q(z) = q_{n-1} z^{n-1} + q_{n-2} z^{n-2} + \ldots + q_1 z + q_0$$

$A(z) = \left(q_{n-1} z^{n-1} + q_{n-2} z^{n-2} + \ldots + q_1 z + q_0\right)(z - \alpha) + r$ e, efetuando a multiplicação, temos:

$$A(z) = q_{n-1} z^n + q_{n-2} z^{n-1} + \ldots + q_1 z^2 + q_0 z - \alpha q_{n-1} z^{n-1} - \alpha q_{n-2} z^{n-2} - \ldots - \alpha q_1 z - \alpha q_0 + r$$

$$A(z) = q_{n-1} z^n + \left(q_{n-2} - \alpha q_{n-1}\right) z^{n-1} + \left(q_{n-3} - \alpha q_{n-2}\right) z^{n-2} + \ldots + \left(q_1 - \alpha q_2\right) z^2 + \left(q_0 - \alpha q_1\right) z + \\ + \left(r - \alpha q_0\right)$$

Usando a proposição do Capítulo 6, que trata da igualdade entre dois polinômios, temos

$$\begin{cases} a_n = q_{n-1} \\ a_{n-1} = q_{n-2} - \alpha q_{n-1} \\ a_{n-2} = q_{n-3} - \alpha q_{n-2} \\ \quad \vdots \\ a_2 = q_1 - \alpha q_2 \\ a_1 = q_0 - \alpha q_1 \\ a_0 = r - \alpha q_0 \end{cases} \quad \text{que equivale a} \quad \begin{cases} q_{n-1} = a_n \\ q_{n-2} = \alpha q_{n-1} + a_{n-1} \\ q_{n-3} = \alpha q_{n-2} + a_{n-2} \\ \quad \vdots \\ q_1 = \alpha q_2 + a_2 \\ q_0 = \alpha q_1 + a_1 \\ r = \alpha q_0 + a_0 \end{cases} \qquad (*\ *)$$

Dessa forma obtemos todos os coeficientes de $Q(z)$ e o resto $r = R(z)$.

Uma maneira prática e rápida para se obterem os coeficientes de $Q(z)$ descritos em $(*\ *)$ é colocá-los na disposição abaixo, que constitui o método chamado *dispositivo prático de Briot-Ruffini*.

$$
\begin{array}{l|l}
a_n \quad \overbrace{a_{n-1} \quad a_{n-2} \ \dots \ a_2 \quad a_1 \quad a_0}^{+} & \alpha \\
\hline
\underbrace{q_{n-1} \quad q_{n-2} \quad q_{n-3} \ \dots \ q_1 \quad q_0 \quad r}_{\text{x}} &
\end{array}
$$

$q_{n-1} = a_n$

$q_{n-2} = q_{n-1} \cdot \alpha + a_{n-1}$,

e assim por diante.

Exemplo:

1) Dividir $A(z) = 2z^5 - z^4 - 3z^3 + 2z^2 - 5z + 1$ por $B(z) = z - 2$

$$
\begin{array}{cccccc|c}
2 & -1 & -3 & 2 & -5 & 1 & 2 \\
\hline
2 & 3 & 3 & 8 & 11 & 23 &
\end{array}
$$

Logo o polinômio quociente é $Q(z) = 2z^4 + 3z^3 + 3z^2 + 8z + 11$ e $R(z) = 23$.

2) Dividir, usando o dispositivo de Briot-Ruffini, o polinômio $A(z) = z^3 - 3iz^2 - z - i$ por $B(z) = z - i$

$$
\begin{array}{cccc|c}
1 & -3i & -1 & -i & i \\
\hline
1 & -2i & 1 & 0 &
\end{array}
$$

Portanto $Q(z) = z^2 - 2iz + 1$ e $R(z) = 0$. Assim $z^3 - 3iz^2 - z - i = (z - i)(z^2 - 2iz + 1)$.

3) Dividir $A(z) = z^5 - 1$ por $B(z) = z - 1$.

$$
\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 &
\end{array}
$$

Portanto $z^5 - 1 = (z - 1) \cdot (z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$

9

Teorema de D'Alembert

O resto da divisão de um polinômio $A(z)$ *por* $B(z)=z-\alpha$ *é* $A(\alpha)$.

Demonstração:

Por definição, temos $A(z)=B(z)\cdot Q(z)+R(z)$ com $\partial R<1$ ou $R(z)\equiv 0$. Logo $A(z)=(z-\alpha)\cdot Q(z)+r$, em que r é um número complexo constante que pode ser nulo, evidentemente.

Portanto $A(\alpha)=(\alpha-\alpha)\cdot Q(\alpha)+r$, de que se conclui que $A(\alpha)=r$. Este teorema também é às vezes chamado de teorema do resto.

Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) recém-nascido foi abandonado nos degraus da igreja de Saint Jean Baptiste le Rond – antigo batistério de Notre Dame – em Paris, na noite de 16 de novembro de 1717. Encontrado na madrugada por um comissário de polícia, foi batizado com o nome de Jean Baptiste le Rond por causa do lugar onde foi achado. Foi entregue aos cuidados da humilde família de um vidraceiro, por quem foi criado. Seu pai legítimo, antes de sua morte em 1726, deixou-lhe uma quantia suficiente para sua educação. Após estudar direito, medicina e ciências na Universidade de Paris, com o sobrenome Daremberg, mudou seu nome para o definitivo Jean le Rond d'Alembert e decidiu dedicar sua vida à matemática. Mais importante que seus títulos acadêmicos foram seus trabalhos matemáticos, os quais começou a fazer e enviar à Academia de Ciências de Paris. Num desses artigos transformou as bases sobre as quais se assentava o recém-criado cálculo e, com a ideia de limite, interpretou as "fluxões" de Newton e passou a calcular a derivada de uma forma mais próxima a que ela é conhecida hoje nos livros de Cálculo. Em 1739 entregou a *Memória sobre o cálculo integral*, que resultou no seu ingresso como membro da Academia, em 1741, com apenas 24 anos. Em 1754 passou a presidi-la e foi nessa qualidade talvez o cientista mais influente da França.

Devido a sua ampla formação, d'Alembert escreveu a maioria dos artigos científicos e matemáticos da célebre *Encyclopèdie*, além do admirável *Discours préliminaire*.

Talvez por sua influência científica, por seu relacionamento com os filósofos e cientistas e pela grande amizade com Voltaire, foi d'Alembert um dos que abriram o caminho à Revolução Francesa.

D'Alembert foi contemporâneo de Euler e de Lagrange, com os quais trocou vasta correspondência científica. Enquanto Euler se ocupava da pesquisa matemática em Berlim, d'Alembert estava na pesquisa em Paris. Publicou trabalhos em álgebra, cálculo e aplicações, equações diferenciais ordinárias e parciais, funções de variáveis complexas, mecânica e dinâmica. Ele também é muito conhecido pelo que se chama hoje "princípio de d'Alembert", publicado em seu *Traité de dynamique* em 1743 e ainda lembrado por uma equação diferencial que também leva seu nome.

D'Alembert e Euler morreram no mesmo ano, 1783.

"A álgebra é generosa: frequentemente ela dá mais do que se lhe pediu."
Jean le Rond d'Alembert
(RPM, 1982, 2015)

9.1 Consequência do teorema de D'Alembert

Um polinômio $A(z)$ *é divisível por* $B(z)=z-\alpha$ *se e somente se* $A(\alpha)=0$.

Neste caso α é raiz do polinômio $A(z)$.

Exemplos:

1) Determine o resto da divisão de $A(z)=2z^4-z^2+z+i$ por $B(z)=z+i$

O resto é um polinômio constante $R(z)=A(-i)=2(-i)^4-(-i)^2-i+i=3$

2) Mostre que $A(z)=z^n-1$ é divisível por $B(z)=z-1$.

Sendo $A(1)=(1)^n-1=0$, logo o resto da divisão de $A(z)$ por $B(z)$ é zero.

Portanto $A(z)=z^n-1$ é divisível por $B(z)=z-1$.

Podemos escrever $z^n-1=(z-1)\cdot Q(z)$ em que $Q(z)$ é um polinômio de grau $n-1$.

Efetuando a divisão, encontraremos o quociente $Q(z)$.

Usando o dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

1	0	0	...	0	1	1
1	1	1	...	1	0	

Assim $Q(z)=z^{n-1}+z^{n-2}+...+z+1$.

Portanto $z^n-1=(z-1)\cdot\left(z^{n-1}+z^{n-2}+...+z+1\right)$

9.1.1 Exercícios

1) Mostre que o polinômio $A(z)=z^n-\alpha^n$ é divisível por $B(z)=z-\alpha$ e determine o quociente dessa divisão.

2) Determine o resto da divisão de $A(z)=z^n+\alpha^n$ por $B(z)=z+\alpha$.

3) Mostre que, se a soma dos coeficientes de um polinômio $A(z)$ é nula, então $\alpha=1$ é uma raiz de $A(z)$.

4) Verifique que $A(z)=5z^n-6z^{n-2}+1$ $(n\in\mathbb{N})$ é divisível por $B(z)=z-1$.

5) Se $m, n \in \mathbb{N}$ com $n > m$ sendo n par e m ímpar, então mostre que o polinômio $A(z) = z^n + 2\alpha^m z^{n-m} + \alpha^n$ é divisível por $B(z) = z + \alpha$.

6) Calcule a soma dos coeficientes do polinômio $P(z) = \left[3z^3 - z^2 - 2z - 1\right]^{20}$

9.2 Divisão por $B(z) = \alpha z + \beta$

O resto da divisão de um polinômio $A(z)$ por $B(z) = \alpha z + \beta$ $(\alpha \neq 0)$ é igual a $A\left(-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)$.

Com efeito: Dividindo $A(z)$ por $B(z) = \alpha z + \beta$ $(\alpha \neq 0)$ obtemos $A(z) = B(z) \cdot Q(z) + R(z)$ e, como $\partial R < \partial B = 1$, temos $R(z) = r$ (complexo constante).

$$A(z) = (\alpha z + \beta) \cdot Q(z) + r$$

$$A(z) = \alpha\left(z + \frac{\beta}{\alpha}\right) \cdot Q(z) + r \text{ e } A\left(-\beta/\alpha\right) = r$$

Consequência: $A(z) = \alpha\left(z + \dfrac{\beta}{\alpha}\right) \cdot Q(z) + r = \left(z + \dfrac{\beta}{\alpha}\right) \cdot \underbrace{\alpha \cdot Q(z)}_{q(z)} + r$

Assim vemos que o quociente $Q(z)$ da divisão de $A(z)$ por $\alpha z + \beta$ é igual ao quociente $q(z)$ da divisão de $A(z)$ por $z + \dfrac{\beta}{\alpha}$, dividido pelo número complexo α. Isto é, $Q(z) = \dfrac{q(z)}{\alpha}$

Exemplo:

Obtenha o quociente e o resto da divisão de $A(z) = 2z^3 + 4z^2 + 8z + 16$ por $B(z) = 2z + 1$

Como $B(z) = 2\left(z + 1/2\right)$, temos $A(z) = 2\left(z + 1/2\right) \cdot Q(z) + r$

Assim $A\left(-1/2\right) = r \;\Rightarrow\; 2\left(-1/2\right)^3 + 4 \cdot \left(-1/2\right)^2 + 8 \cdot \left(-1/2\right) + 16 = r \;\Rightarrow\; r = \dfrac{51}{4}$

Usando Briot-Ruffini na divisão de $A(z)$ por $z-\dfrac{\beta}{\alpha}$, temos:

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 8 & 16 & \dfrac{-1}{2} \\ \hline 2 & 3 & 13/2 & \dfrac{51}{4} & \end{array}$$

$$q(z)=2z^2+3z+\frac{13}{2} \quad \text{e} \quad r=\frac{51}{4}$$

Logo $Q(z)=\dfrac{q(z)}{2}=z^2+\dfrac{3}{2}z+\dfrac{13}{4}$

Exercícios:

Calcule o quociente e o resto da divisão de $A(z)$ por $B(z)$

a) $A(z)=z^4+1$ e $B(z)=2z-4$

b) $A(z)=6z^5-z^4-13z^3-2z+1$ e $B(z)=2z+3$

9.3 Divisão por $B(z)=(z-\alpha)(z-\beta)$

Proposição

Seja $A(z)$ *um polinômio e* $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ *com* $\alpha\neq\beta$.

$A(z)$ *é divisível por* $B(z)=(z-\alpha)(z-\beta)$ *se e somente se* $A(\alpha)=0$ *e* $A(\beta)=0$.

Demonstração: Se $A(z)$ é divisível por $B(z)$, temos que o resto da divisão é nulo, logo $A(z)=(z-\alpha)(z-\beta)\cdot Q(z)$

Portanto $A(\alpha)=(\alpha-\alpha)(\alpha-\beta)\cdot Q(\alpha)=0$ e $A(\beta)=(\beta-\alpha)(\beta-\beta)\cdot Q(\beta)=0$

Reciprocamente, se $A(\alpha)=0$ e $A(\beta)=0$ com $\alpha \neq \beta$, temos na divisão de $A(z)$ por $B(z)$ que $A(z)=B(z)\cdot Q(z)+R(z)$ com $\partial R<\partial B=2$ ou $R(z)\equiv 0$.

Logo $A(z)=(z-\alpha)\cdot(z-\beta)\cdot Q(z)+az+b$ com $a,b\in\mathbb{C}$

Como por hipótese $A(\alpha)=0$ e $A(\beta)=0$, temos o sistema:

$$\begin{cases} 0=A(\alpha)=a\alpha+b \\ 0=A(\beta)=a\beta+b \end{cases}, \qquad \text{de que se obtém} \qquad \begin{cases} a\alpha+b=0 \\ a\beta+b=0 \end{cases},$$

e, subtraindo, temos $a(\alpha-\beta)=0$ e, sendo $\alpha \neq \beta$ por hipótese, temos $a=0$ e $b=0$.

Portanto $R(z)\equiv 0$, de que se conclui que $A(z)$ é divisível por $B(z)=(z-\alpha)\cdot(z-\beta)$

Esta proposição pode ser enunciada assim: uma condição necessária e suficiente para que um polinômio $A(z)$ seja divisível por $B(z)=(z-\alpha)\cdot(z-\beta)$ com $\alpha\neq\beta$ é que A seja divisível por $z-\alpha$ e por $z-\beta$ separadamente.

Observação: A condição $\alpha\neq\beta$ é de fato necessária para a recíproca da proposição. Por exemplo, considere o polinômio $A(z)=z^3+z^2-z-1$. Seja $\alpha=\beta=1$, logo $A(\alpha)=A(\beta)=A(1)=0$, no entanto $A(z)$ não é divisível por $B(z)=(z-1)\cdot(z-1)=z^2-2z+1$. Basta ver que o resto não é nulo.

9.3.1 Exercícios

1) Mostrar que $A(z)$ é divisível por $B(z)$, sendo:

a) $A(z)=2z^3+11z^2+17z+6$ e $B(z)=z^2+5z+6$

b) $A(z)=z^4+z^3-z^2+z-2$ e $B(z)=z^2+z-2$

2) Um polinômio $A(z)$, dividido por $z-1$, apresenta resto 3; dividido por $z-3$ apresenta resto 1. Determine o resto da divisão de $A(z)$ por $B(z)=z^2-4z+3$

3) Um polinômio $A(z)$, dividido por $z-2i$, dá resto $4i$; dividido por $z+i$ dá resto i. Determine o resto da divisão de $A(z)$ por $B(z)=z^2-iz+2$

4) Dividindo um polinômio $A(z)$ por $(z-1)^2$, obtém-se um resto que, dividido por $z-1$, dá resto 1. Calcule $A(1)$.

5) Um polinômio $P(z)=z^3+az^2+bz+c$ satisfaz as condições:

$P(1)=5$ e $P(-z)+P(z)\equiv 0$. Calcule $P(-1)$ e $P(2)$.

6) (ITA - 99) Encontre um polinômio $P(x)$ de grau 3 que possua -2 como raiz e tal que $P(x)=P(x+2)-x^2-2$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

7) (ITA - 98) Considere um polinômio $P(x)$ com coeficientes reais e grau 4. O polinômio $P(x)$, quando dividido por $x-2$, nos dá quociente $Q(x)$ e resto igual a 26. Quando dividido por x^2+x-1 dá quociente $C(x)$ e resto $8x-5$. Sabendo que $Q(0)=13$ e $Q(1)=26$, determine o polinômio $C(x)$.

8) Seja $P(x)$ um polinômio com coeficientes reais. Se $P(x)+xP(1-x)=x^2+2x+4 \;\; \forall x\in\mathbb{R}$, então encontre o polinômio P.

III

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

10

Histórico

Os povos da Babilônia (2000 a. C.) já resolviam problemas com incógnitas. Nos dias atuais, para resolver esses problemas, nós usamos como modelo matemático as equações do 1° e do 2° grau. No entanto a linguagem matemática daquela época não utilizava letras para representar números, como é usual no nosso cotidiano.

A palavra *álgebra* originou-se do árabe *al-jabr*, palavra esta usada no título do livro *Hisab al-jabr w'al-muqabalah*, escrito no ano 825 pelo matemático árabe al-Khowarizmi. Uma tradução dada por John K. Baumgart em *História da álgebra* para o título do livro de al-Khowarizmi é "Ciência da restauração e redução" ou matematicamente "Ciência da transposição e cancelamento". O livro praticava a ideia de transposição de termos para o outro membro de uma equação (*al-jabr*) e cancelamento de termos iguais em membros opostos de uma equação (*al-muqabalah*). Nas obras de al-Khowarizmi, as equações do 1° grau e do 2° grau foram amplamente estudadas inclusive com métodos de resolução. Esses métodos constituíam-se de operações com seus coeficientes. A fórmula de Bhaskara (1114-1185) é um exemplo de método que utiliza operações com os coeficientes para dar as soluções de uma equação do 2° grau (ver seção 7.3 do Volume 1).

Para as equações de grau 3, 4 e superiores não se conheciam fórmulas, não por desinteresse, mas sim por não lograrem sucesso nos esforços até o século XV, quando os algebristas italianos Scipione del Ferro e Tartaglia descobriram e Cardano divulgou a famosa fórmula de resolução da equação do 3° grau. Hoje essa fórmula é conhecida como "fórmula de Cardano" ou "fórmula de Cardano-Tartaglia" ou ainda "fórmula de Cardano-Tartaglia-Del Ferro".

A fórmula de resolução da equação do 3° grau apareceu na obra *Ars Magna*, de Girolamo Cardano, publicada em 1545, cuja autoria era creditada a Tartaglia (Nicoló Fontana, 1499-1557), de quem Cardano a obteve, sob juramento de manter segredo de seu conteúdo. Segredo este quebrado por Cardano com a publicação da obra. Também em *Ars Magna* havia um profundo estudo culminando numa fórmula de resolução de equações do 4° grau, desenvolvido por seu discípulo Ludovico Ferrari (1522-1565), que se baseou na fórmula de resolução das cúbicas de Tartaglia.

Muito se tentou, a partir daí, obter fórmulas que fornecessem as soluções das equações de graus maiores do que 4.

Em 1798, em sua tese de doutoramento, o alemão Carl Friedrich Gauss demonstrou que "toda equação algébrica de grau $n,(n \geq 1)$ admite pelo menos uma raiz complexa". A prova desse teorema estimulou mais ainda os matemáticos à procura por fórmulas de resoluções de equações de grau superior, com operações sobre seus coeficientes. Em 1824 o norueguês Niels Abel, com apenas 19 anos, apresentou uma demonstração da impossibilidade de resolver equações gerais de grau 5 com fórmulas obtidas de operações algébricas – adição, subtração, multiplicação, divisão e radiciação – com seus coeficientes, também chamadas de fórmulas por radicais, mas coube ao francês Évariste Galois (1811-1832)[2], em 1832, a prova definitiva de que não é possível obter fórmulas por radicais para a solução de equações gerais de grau maior do que 4.

A inexistência de fórmulas algébricas de resolução para equações de grau superior a 4 não significa que tais equações não têm raízes, tampouco que não possamos encontrá-las. A seguir estudaremos teoremas que garantem a existência de raízes e situações particulares em que as raízes podem ser facilmente encontradas.

Chama-se *equação algébrica* ou *equação polinomial* a toda equação que pode ser expressa na forma $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$, em que $a_0, a_1 \ldots, a_{n-1}, a_n$ são números complexos constantes chamados de coeficientes e $n \in \mathbb{N}$. Se $a_n \neq 0$, dizemos que n é o grau da equação.

Notação: uma equação algébrica ou polinomial pode ser expressa na forma de polinômio e será denotada por $P(z) = 0$, em que $P(z)$ é uma função polinômio.

[2] Galois nasceu em 1811 e morreu num duelo em 1832.

11

O teorema fundamental da álgebra

Toda equação algébrica de grau $n \geq 1$ *possui pelo menos uma raiz complexa.*

Esse teorema foi demonstrado em 1798 pelo grandioso matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), em sua tese de doutoramento.

Embora existam várias demonstrações diferentes desse teorema, não traremos nenhuma delas aqui, pois elas não podem ser completamente compreendidas apenas com argumentos constantes destas notas. O próprio Gauss fez quatro demonstrações distintas desse teorema. Normalmente, para os estudantes, a primeira demonstração plausível – cujo resultado aparece como corolário de outro teorema – está nos textos da disciplina Funções de Variáveis Complexas, que é estudada por volta do quinto período do curso de Matemática.

12

Teorema da decomposição

Todo polinômio $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1z+a_0$, *de grau* $n\geq 1$, *pode ser decomposto em* n *fatores do 1° grau. Isto é:* $P(z)=a_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)...(z-\alpha_n)$, *em que* $\alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\ \alpha_n$ *são as raízes complexas de* $P(z)$.

Demonstração: sendo $P(z)=0$ uma equação algébrica de grau $n\geq 1$, pelo teorema fundamental da álgebra (T. F. A) concluímos que ela possui uma raiz complexa, que denominamos α_1. Sendo α_1 uma raiz desse polinômio, temos $P(\alpha_1)=0$ e, pelo teorema de D'Alembert, concluímos que $P(z)$ é divisível por $z-\alpha_1$. Logo $P(z)=(z-\alpha_1)\cdot Q_1(z)$, sendo $Q_1(z)$ um polinômio de grau $n-1$ com coeficiente dominante a_n. Se $n=1$, temos $n-1=0$, logo $Q_1(z)$ é constante e $a_n=a_1$. Assim $P(z)=a_1(z-\alpha_1)$ e o teorema fica demonstrado.

Se $n\geq 2$, então $n-1\geq 1$, e, aplicando o T.F.A à equação $Q_1(z)=0$, obtemos uma raiz complexa α_2 de $Q_1(z)$. Isto é: $Q_1(\alpha_2)=0$. Aplicando o teorema de D'Alembert, vemos que $Q_1(z)$ é divisível por $z-\alpha_2$, e, portanto, $Q_1(z)=(z-\alpha_2)\cdot Q_2(z)$, sendo $Q_2(z)$ polinômio de grau $n-2$. Assim $P(z)=(z-\alpha_1)\cdot Q_1(z)=(z-\alpha_1)\cdot(z-\alpha_2)\cdot Q_2(z)$.

Se $n=2$, temos $Q_2(z)$ de grau zero, logo $Q_2(z)=a_n=a_2$, assim $P(z)=a_2(z-\alpha_1)\cdot(z-\alpha_2)$ e o teorema fica demonstrado.

Se $n\geq 3$, então $n-2\geq 1$, e, pelo T. F. A, $Q_2(z)=0$ admite uma raiz α_3 e $Q_2(\alpha_3)=0$. Novamente usando teorema de D'Alembert, $Q_2(z)=(z-\alpha_3)\cdot Q_3(z)$ com grau de $Q_3(z)$ igual a $n-3$. Assim $P(z)=(z-\alpha_1)\cdot(z-\alpha_2)\cdot(z-\alpha_3)\cdot Q_3(z)$ com $\partial Q_3=n-3$.

Prosseguindo assim, depois de n aplicações do T. F. A e do teorema de D'Alembert, obtém-se $P(z)=(z-\alpha_1)\cdot(z-\alpha_2)\cdot(z-\alpha_3)...(z-\alpha_n)\cdot Q_n(z)$ com $\partial Q_n=n-n=0$. Logo $Q_n(z)$ é uma constante e, efetuando o produto e igualando ao polinômio original, vemos que $Q_n(z)=a_n$, concluindo então que $P(z)=a_n(z-\alpha_1)\cdot(z-\alpha_2)\cdot(z-\alpha_3)...(z-\alpha_n)$

Observações:

1) As raízes α_1, α_2, $\alpha_3,...,\alpha_n$ podem ser repetidas.

2) Pode-se provar que a decomposição do teorema acima é única, a menos da ordem dos fatores.

3) Com a existência de uma decomposição em n fatores e a unicidade dessa decomposição, conclui-se que todo polinômio de grau $n\geq 1$ possui n raízes, mas não necessariamente distintas. Se uma raiz α se repete em exatamente k fatores, dizemos que α é raiz de multiplicidade k

Exemplos:

1) O polinômio $P(z)=-2z^2-4z+6$ possui as raízes $\alpha_1=1$ e $\alpha_2=-3$, logo

$P(z)=-2(z-1)(z+3)$

2) O polinômio $P(z)=z^2+(2-i)z-2i$ possui as raízes $\alpha_1=i$ e $\alpha_2=-2$, logo pode ser escrito na forma $P(z)=(z-i)(z+2)$

3) Dado o polinômio $P(z)=z^3-z^2+z-1$, vamos decompô-lo em fatores do 1° grau.

Observando que $P(1)=1-1+1-1=0$ (soma dos coeficientes igual a zero), temos que $P(z)$ é divisível por $z-1$, logo

1	-1	1	-1	1
1	0	1	0	

e, portanto, $P(z)=(z-1)(z^2+1)$. O polinômio $B(z)=z^2+1$ possui as raízes $\alpha=i$ e $\beta=-i$, assim $B(z)=(z-i)(z+i)$, e, portanto, $P(z)=(z-1)(z-i)(z+i)$ está decomposto em fatores do 1° grau.

12.1 Exercícios

1) Decomponha em fatores do 1° grau o polinômio $P(z)$

a) $P(z)=7(z^2-3)^4$

b) $P(z)=-z^3+6z^2-11z+6$

c) $P(z)=z^5-z^4-13z^3+13z^2+36z-36$

2) Mostre que as funções $f(x)=sen\ x$ e $g(x)=\cos x$ não são funções polinomiais de grau n finito.

13

Multiplicidade de uma raiz

Decompondo o polinômio $P(z)=z^5-(2+i)z^4+(1+2i)z^3-iz^2$

$P(z)=1\cdot(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)(z-\alpha_4)(z-\alpha_5)$ em que $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4$ e α_5 são as raízes. $P(z)=z^2\left[z^3-(2+i)z^2+(1+2i)z-i\right]$

$Q(z)=z^3-(2+i)z^2+(1+2i)z-i$ tem a soma dos coeficientes igual a zero, logo $Q(1)=0$, e, portanto, $Q(z)$ é divisível por $z-1$.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -(2+i) & 1+2i & -i & 1 \\ \hline 1 & -1-i & i & 0 & \end{array}$$

$Q(z)=(z-1)\left[z^2-(1+i)z+i\right]$

$B(z)=z^2-(1+i)z+i$ tem a soma dos coeficientes igual a zero, logo $B(1)=0$ e $B(z)$ também é divisível por $z-1$.

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -1-i & i & 1 \\ \hline 1 & -i & 0 & \end{array}$$

Portanto $B(z)=(z-1)(z-i)$

Conclusão: $P(z)=z^2\cdot(z-1)(z-1)(z-i)=z^2\cdot(z-1)^2(z-i)$

Assim dizemos que:

- 0 é raiz de multiplicidade 2 (raiz dupla);
- 1 é raiz de multiplicidade 2 (raiz dupla);
- i é raiz de multiplicidade 1 (raiz simples).

Definição: α é uma raiz de multiplicidade m $(m\in\mathbb{N})$ de uma equação algébrica $P(z)=0$ se $P(z)=(z-\alpha)^m\cdot Q(z)$ com $Q(\alpha)\neq 0$.

Observe que, se α é raiz de multiplicidade m, então a equação tem exatamente m raízes iguais a α.

13.1 Exercícios

1) Encontre as raízes da equação $z^5-7z^4+19z^3-25z^2+16z-4=0$ e indique as suas multiplicidades.

2) Dê as equações algébricas do 5° grau que admitem 5 como raiz dupla e o zero como raiz tripla.

3) Construir uma equação algébrica que possua 1 como raiz simples e i e $-i$ como raízes duplas.

14

Relações entre coeficientes e raízes (relações de Girard)

Equação do 1° grau

Seja $a_1 z + a_0 = 0 \quad (a_1 \neq 0)$ a equação algébrica do 1° grau. Sua única raiz é dada por $\alpha = \dfrac{-a_0}{a_1}$

Equação do 2° grau

Seja $a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \quad (a_2 \neq 0)$ a equação algébrica do 2° grau.

Se α_1 e α_2 são suas raízes, pelo teorema da decomposição temos $a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \equiv a_2 (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)$

Desenvolvendo, chega-se a $a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \equiv a_2 z^2 - a_2 (\alpha_1 + \alpha_2) z + a_2 \alpha_1 \alpha_2$

Pela proposição da igualdade de dois polinômios, obtemos as seguintes relações entre os coeficientes $a_0,\ a_1,\ a_2$ e as raízes α_1 e α_2:

$$a_1 = -a_2 (\alpha_1 + \alpha_2) \quad \text{e} \quad a_0 = a_2 (\alpha_1 \alpha_2)$$

De que se conclui que $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = \dfrac{-a_1}{a_2} \\ \alpha_1\alpha_2 = \dfrac{a_0}{a_2} \end{cases}$

Equação do 3° grau

Considere a equação algébrica do 3° grau $a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0 = 0 \quad (a_3 \neq 0)$. Se α_1, α_2 e α_3 são as suas raízes, então, pelo teorema da decomposição, obtemos $a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0 \equiv a_3(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)$ e, desenvolvendo os produtos, temos $a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0 \equiv a_3z^3 - a_3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)z^2 + a_3(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)z - a_3\alpha_1\alpha_2\alpha_3$

Usando da caracterização da igualdade de polinômios obtemos as relações:

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = -a_3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) \\ a_1 = a_3(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3) \\ a_0 = -a_3\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = \dfrac{-a_2}{a_3} \\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3 = \dfrac{a_1}{a_3} \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \dfrac{-a_0}{a_3} \end{cases}$$

Equação de grau *n*

Generalizando, para a equação algébrica de grau $n \ (n \geq 1)$ $a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1z + a_0 = 0 \ (a_n \neq 0)$ com raízes $\alpha_1, \ \alpha_2, ..., \ \alpha_n$, obtemos as seguintes relações entre os coeficientes e as raízes da equação:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + ... + \alpha_n = \dfrac{-a_{n-1}}{a_n} \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + ...\alpha_{n-1}\alpha_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + ... + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = \dfrac{-a_{n-3}}{a_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_n = \dfrac{(-1)^n a_0}{a_n} \end{cases}$$

Observação 1: as relações entre coeficientes e raízes acima obtidas são conhecidas como *relações de Girard*, em homenagem ao matemático Albert Girard, que as anunciou com clareza em 1629.

Observação 2: utilizando apenas as relações de Girard numa equação algébrica, não é possível encontrar suas raízes. Ao resolver o sistema de equações dado pelas relações de Girard, recai-se numa equação algébrica equivalente à equação dada inicialmente. No entanto as relações entre coeficientes e raízes acrescidas de outras informações poderão sim explicitar as raízes da equação.

Exemplos:

1) Dada a equação do 2° grau $6x^2 - 5x + 1 = 0$, as relações de Girard são

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = \dfrac{5}{6} \\ \alpha_1\alpha_2 = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$ em que α_1, α_2 são as raízes procuradas.

Resolvendo o sistema, temos $\alpha_1 = \frac{5}{6} - \alpha_2$ e, substituindo, obtém-se

$\left(\frac{5}{6} - \alpha_2\right)\alpha_2 = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{5}{6}\alpha_2 - \alpha_2^2 = \frac{1}{6} \Leftrightarrow 6\alpha_2^2 - 5\alpha_2 + 1 = 0$, que é a mesma equação dada inicialmente, ou mais precisamente, equivalente a ela.

2) Resolver a equação $z^3 + iz^2 - 4z - 4i = 0$ sabendo que duas de suas raízes são opostas.

Suponha que α_1, α_2 e α_3 são as raízes com $\alpha_1 = -\alpha_2$. Pelas relações de Girard temos:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \dfrac{-i}{1} \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = \dfrac{-4}{1} \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \dfrac{4i}{1} \end{cases}$$

Sabendo que $\alpha_1 = -\alpha_2$, temos o sistema acima reduzido a

$$\begin{cases} -\alpha_2 + \alpha_2 + \alpha_3 = -i \\ -\alpha_2^2 = -4 \\ -\alpha_2^2\alpha_3 = 4i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_3 = -i \\ \alpha_2^2 = 4 \\ -4\alpha_3 = 4i \end{cases}$$, portanto $\alpha_2 = 2$ ou $\alpha_2 = -2 \Rightarrow \alpha_1 = -2 \quad ou \quad \alpha_1 = 2$

Concluindo que as raízes são $2, -2$ e $-i$. Logo $S = \{-2,\ 2, -i\}$

14.1 Exercícios

1) Resolva a equação $z^3 - 7z^2 + 16z - 12 = 0$ sabendo que ela possui uma raiz de multiplicidade 2.

2) Se α_1, α_2 e α_3 são as raízes da equação $\sqrt{2}z^3 - iz^2 + 3z - 2 = 0$, calcule o valor de $\dfrac{1}{\alpha_1} + \dfrac{1}{\alpha_2} + \dfrac{1}{\alpha_3}$.

3) Encontre a relação entre m e n para que duas raízes da equação $z^3 + mz + n = 0$ sejam inversas.

15

Teorema das raízes complexas

Se $\alpha = a + bi \quad (b \neq 0)$ *é raiz de uma equação algébrica com coeficientes reais, então o conjugado* $\overline{\alpha} = a - bi$ *também é raiz dessa equação.*

Demonstração: Considere a equação algébrica $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$ com $a_n \neq 0$ e $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1},\ a_n \in \mathbb{R}$. Assim, se $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, então, sendo α raiz da equação, temos que $P(\alpha) = 0$.

Vamos provar que $P(\overline{\alpha})$ também será nulo. Como $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1},\ a_n$ são reais, logo $\overline{a_k} = a_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$, e, usando as propriedades do conjugado de um número complexo, temos: $P(\overline{\alpha}) = a_n (\overline{\alpha})^n + a_{n-1} (\overline{\alpha})^{n-1} + \ldots + a_1 \overline{\alpha} + a_0 = \overline{a_n}\,\overline{\alpha^n} + \overline{a_{n-1}}\,\overline{\alpha^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1}\,\overline{\alpha} + \overline{a_0} =$

$$= \overline{a_n \alpha_n} + \overline{a_{n-1} \alpha^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1 \alpha} + \overline{a_0} = \overline{a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \ldots + a_1 \alpha + a_0} = \overline{P(\alpha)} = \overline{0} = 0$$

Corolário

Se $\alpha = a + bi \quad (b \neq 0)$ *é raiz de multiplicidade m de uma equação algébrica com coeficientes reais, então o conjugado* $\overline{\alpha} = a - bi$ *também é raiz de multiplicidade m.*

Demonstração: Seja $P(z) = 0$ a equação algébrica com coeficientes reais.

Se $\alpha = a + bi$ e $\overline{\alpha} = a - bi$ são raízes, então $P(z)$ é divisível por $\left[z - (a + bi)\right]$ e por $\left[z - (a - bi)\right]$, logo é divisível pelo produto deles. Assim $P(z) = \left[z - (a + bi)\right]\left[z - (a - bi)\right] \cdot Q(z)$, logo $P(z) = \left[z^2 - 2az + a^2 + b^2\right] \cdot Q(z)$. Veja que $z^2 - 2az + a^2 + b^2$ e $P(z)$ têm coeficientes reais. Portanto $Q(z)$ também terá coeficientes reais. Então, se $\alpha = a + bi$ é raiz de $Q(z)$, logo $\overline{\alpha} = a - bi$ também é raiz. Se α não é raiz de $Q(z)$, então $\overline{\alpha}$ não poderá ser, de que se conclui que o número de vezes que α ocorrerá como raiz é o mesmo número de vezes em que $\overline{\alpha}$ ocorrerá como raiz.

Consequências:

1. *Numa equação algébrica com coeficientes reais, o número de raízes imaginárias é sempre par.*
2. *Uma equação algébrica com coeficientes reais e grau ímpar possui pelo menos uma raiz real.*

Observação 1: O teorema não é válido se algum coeficiente da equação algébrica não for real.

Como exemplo, veja que: a equação do 1° grau $z + i = 0$ possui uma única solução, a saber, $\alpha = -i$; a equação $z^2 - iz = 0$ possui raízes $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = i$.

Observe que os conjugados das raízes imaginárias, não são raízes.

Observação 2: Vale uma forma recíproca do teorema: Se toda raiz α da equação algébrica $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$ é tal que o conjugado $\overline{\alpha}$ também é raiz dessa equação, então os coeficientes da equação são reais.

Para se obter uma prova dessa recíproca, basta decompor o polinômio $P(z)$ e observar que as expressões $(z - \alpha)(z - \overline{\alpha})$ possuem coeficientes reais.

15.1 Exercícios

1) Qual o menor grau possível de uma equação algébrica com coeficientes reais que admite as raízes i, $1+i$ e $3-i$?

2) Qual o menor grau possível de uma equação algébrica com coeficientes complexos que admite as raízes 1, i, $1+i$ e $2-3i$?

3) Determine o menor grau de uma equação algébrica com coeficientes reais que admite 5 como raiz simples, $2+i$ como raiz tripla e $1-i$ como raiz simples.

4) Resolver a equação $z^4 - 4z^3 + z^2 + 16z - 20 = 0$ sabendo que uma de suas raízes é $2+i$

5) Determine os números reais a e b de modo que a equação $z^3 - 5z^2 + az + b = 0$ possua a raiz $1+i$

6) Resolver a equação $z^4 + 3z^2 + 2 = 0$

7) Seja $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0$ uma equação algébrica. Se para toda raiz α o conjugado $\overline{\alpha}$ também é raiz dessa equação, então mostre que $a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbb{R}$

16

Teorema das raízes racionais

Seja $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0$ *uma equação algébrica com coeficientes inteiros e* $a_n \neq 0$. *Se* $\alpha = \frac{p}{q}$ *é uma raiz racional dessa equação, com* p *e* q *inteiros primos entre si, então* p *é divisor de* a_0 *e* q *é divisor de* a_n.

Demonstração: Se $\alpha = \frac{p}{q}$ é raiz da equação, logo $a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + ... + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0$ e, multiplicando a igualdade por q^n, temos: $\boxed{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + ... + a_1 p \cdot q^{n-1} + a_0 q^n = 0}$ (*)

Colocando p em evidência na equação (*), temos:

$$p\left(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} \cdot q + ... + a_1 q^{n-1}\right) = -a_0 q^n$$

e, como $p,\ q,\ a_j \in \mathbb{Z}$ $\left(j = 0,1,...,n\right)$, vê-se que $\left(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + ... + a_1 q^{n-1}\right) \in \mathbb{Z}$, logo p é um divisor de $a_0 q^n$ com p e q primos entre si. Portanto p não pode ser divisor de q^n, de que se conclui que p é um divisor de a_0.

Voltando à equação (*) e com raciocínio análogo, temos $q\left(a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}\right) = -a_n p^n$ e, sendo $\left(a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}\right) \in \mathbb{Z}$, vemos que q é um divisor de $a_n p^n$ com p e q primos entre si, logo q não é divisor de p^n, o que garante que q é divisor de a_n.

Corolário

Se $p \in \mathbb{Z}$ *é raiz da equação algébrica* $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0$ *com coeficientes inteiros e* $a_n \neq 0$*, então* p *é um divisor de* a_0.

Observação 1: Para valer o teorema, é preciso que todos os coeficientes sejam números inteiros. Por exemplo, na equação $z^2 - \frac{10}{3}z + 1 = 0$, as raízes são 3 e $\frac{1}{3}$, mas 3 não é divisor do coeficiente 1.

Observação 2: O teorema não garante a existência de raízes racionais. A equação $z^2 + z + 1 = 0$ não possui sequer raiz real.

Observação 3: O teorema das raízes racionais é útil para indicar as possíveis raízes racionais, se houver.

Exemplos:

1) Determinando as raízes racionais da equação $5z^3 - 3z^2 + 5z - 3 = 0$. Como todos os coeficientes da equação são números inteiros, usando o teorema das raízes racionais, temos que as possíveis raízes racionais são da forma $\frac{p}{q}$, em que p é divisor de -3 e q é divisor de 5. Os divisores de -3 são $1, -1, 3, -3$, e os divisores de 5 são $1, -1, 5, -5$. Assim as possíveis raízes racionais são $1,\ -1,\ 1/5,\ -1/5,\ 3,\ -3,\ 3/5,\ -3/5$.

Verifiquemos quais desses números de fato são raízes.

Sendo $P(z) = 5z^3 - 3z^2 + 5z - 3$, temos:

$P(1) = 4 \neq 0$, logo 1 não é raiz da equação;

$P(-1) = -16 \neq 0$, logo -1 não é raiz da equação;

$P\left(1/5\right) = \frac{-52}{25} \neq 0$, logo $\frac{1}{5}$ não é raiz;

$P\left(-1/5\right) = \frac{-104}{25} \neq 0$, logo $\frac{-1}{5}$ não é raiz;

$P(3) = 120 \neq 0$, logo 3 não é raiz;

$P(-3) = -180 \neq 0$, logo -3 não é raiz;

$P\left(3/5\right) = 0$, logo $\frac{3}{5}$ é raiz da equação;

$P\left(-3/5\right) = \frac{-204}{25} \neq 0$, logo $\frac{-3}{5}$ não é raiz.

Portanto a única raiz racional da equação é $\frac{3}{5}$.

2) A equação $z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2 = 0$ não possui raízes racionais. O que garante a afirmação acima é o teorema das raízes racionais, pois, como todos os coeficientes da equação são inteiros e o coeficiente dominante é 1, as possíveis raízes racionais são: $1, -1, 2$ e -2. No entanto, sendo $P(z) = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2$, temos $P(1) \neq 0$, $P(-1) \neq 0$, $P(2) \neq 0$ e $P(-2) \neq 0$, de que se conclui que nenhuma dessas possibilidades ocorre. Portanto a equação $P(z) = 0$ não possui raiz racional.

3) Determinando as raízes da equação $z^3 + z^2 - 4z + 6 = 0$. Como todos os coeficientes da equação são números inteiros, examinemos as possíveis raízes racionais $\alpha = \frac{p}{q}$, sendo p divisor de 6 e q divisor de 1. Logo, se houver raiz racional, ela será um número inteiro divisor de 6. Os divisores de 6 são $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6$ e -6. Sendo $P(z) = z^3 + z^2 - 4z + 6$, temos que:

$$P(1) \neq 0,\ P(-1) \neq 0,\ P(2) \neq 0,\ P(-2) \neq 0,\ P(3) \neq 0,\ P(-3) = 0,\ P(6) \neq 0 \text{ e } P(-6) \neq 0,$$

logo $\alpha_1 = -3$ é a única raiz racional da equação. Portanto as outras duas raízes serão ambas irracionais ou ambas imaginárias conjugadas. Sendo $P(-3) = 0$, vemos que $P(z)$ é divisível por $z + 3$ e, usando o método de Briot Ruffini, temos:

1	1	–4	6	–3
1	–2	2	0	

Assim $P(z)=(z+3)\cdot(z^2-2z+2)$. Encontraremos os zeros do trinômio z^2-2z+2.

$$z=\frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}\ \left\langle\begin{matrix}1+i\\1-i\end{matrix}\right.$$

$$P(z)=(z+3)\left[z-(1+i)\right]\left[z-(1-i)\right]$$

As soluções da equação $P(z)=0$ são $\alpha_1=-3;\ \alpha_2=1+i$ e $\alpha_3=1-i$ $S=\{-3;\ 1-i;\ 1+i\}$.

16.1 Exercícios

1) Resolva as equações.

a) $z^3-10z^2+11z+70=0$

b) $z^3-2z^2-z+2=0$

c) $3z^4-5z^3-7z^2+3z+2=0$

2) Prove que a equação $2z^3-z^2+2=0$ possui pelo menos uma raiz irracional.

3) Resolva a equação $z^5+z^4-5z^3-5z^2+4z+4=0$

4) Prove que $sen\ 10^{\circ}$ é um número irracional.

17

Teorema das raízes reais (teorema de Bolzano)

Seja $P(z)=0$ *uma equação algébrica com coeficientes reais e sejam* $a,\ b\in\mathbb{R}$, *sendo* $a<b$. *Se* $P(a)\cdot P(b)<0$, *então a equação* $P(z)=0$ *tem pelo menos uma raiz real no intervalo* $(a,\ b)$.

Uma forma mais geral desse teorema para uma *função real contínua* é assunto estudado no cálculo diferencial, sendo, portanto, as funções polinômios reais um caso particular.

Faremos aqui uma prova exclusiva para polinômios com coeficientes reais.

Observação: Se $x\in\mathbb{R},\ \ z\in\mathbb{C}$ e $n\in\mathbb{N}$, então $\left[(x-z)(x-\overline{z})\right]^n\geq 0$

Nas condições acima, se z é não real, então $\left[(x-z)(x-\overline{z})\right]^n>0$

De fato: Sendo $x\in\mathbb{R}$ e $z=a+bi$, temos:

$$(x-z)(x-\overline{z})=\left(x-(a+bi)\right)\left(x-(a-bi)\right)=x^2-2ax+a^2+b^2=(x-a)^2+b^2,$$

que é positivo ou nulo $\forall x,\ a,\ b\in\mathbb{R}$, e será estritamente positivo se $b\neq 0$, ou seja, se z não for real. Portanto $\left[(x-z)(x-\overline{z})\right]^n$ mantém o mesmo sinal de $(x-z)(x-\overline{z})$.

Provando o teorema de Bolzano

Suponha que $P(z)=0$ não possua raízes reais, mas, como o T.F.A. garante a existência de raízes complexas, temos que todas as raízes são imaginárias e, sendo reais os coeficientes da equação, implica que essas raízes aparecem aos pares de números imaginários conjugados $\alpha_1,\ \overline{\alpha_1},\ \alpha_2,\ \overline{\alpha_2},\ldots,\ \alpha_k,\ \overline{\alpha_k}$

Assim $P(z)=a_n(z-\alpha_1)\left(z-\overline{\alpha_1}\right)\ldots\ (z-\alpha_k)\left(z-\overline{\alpha_k}\right)$. Como $a,\ b\in\mathbb{R}$, temos, pela observação anterior, que $\lambda=(a-\alpha_1)\left(a-\overline{\alpha_1}\right)\ldots(a-\alpha_k)\left(a-\overline{\alpha_k}\right)>0$ e $\delta=(b-\alpha_1)\left(b-\overline{\alpha_1}\right)\ldots(b-\alpha_k)\left(b-\overline{\alpha_k}\right)>0$. Assim $P(a)\cdot P(b)=a_n^2.\lambda.\delta>0$, o que contraria a hipótese do teorema, de que se conclui que a equação admite raiz real.

Sejam $r_1,\ r_2,\ldots r_s$ as raízes reais e $\alpha_1,\ \overline{\alpha_1},\ \ldots,\ \alpha_t,\ \overline{\alpha_t}$ as raízes imaginárias.

Assim $P(z)=a_n(z-r_1)(z-r_2)\ldots\ (z-r_s)(z-\alpha_1)\left(z-\overline{\alpha_1}\right)\ldots(z-\alpha_t)\left(z-\overline{\alpha_t}\right)$. Chamamos $G(z)=(z-r_1)(z-r_2)\ldots\ (z-r_s)$ e $H(z)=(z-\alpha_1)\left(z-\overline{\alpha_1}\right)\ldots(z-\alpha_t)\left(z-\overline{\alpha_t}\right)$, logo $P(z)=a_n.G(z).H(z)$. Pela observação, temos $H(a)>0$ e $H(b)>0$. Assim $P(a)\cdot P(b)=a_n^2\cdot G(a)\cdot G(b)\cdot H(a)\cdot H(b)$ e, como por hipótese $P(a)\cdot P(b)<0$, temos que $G(a)\cdot G(b)<0$, isto é:

$$\underbrace{(a-r_1)(b-r_1)}_{\lambda_1}\cdot\underbrace{(a-r_2)(b-r_2)}_{\lambda_2}\ldots\underbrace{(a-r_s)(b-r_s)}_{\lambda_s}<0\ \Rightarrow\ \lambda_1\cdot\lambda_2\cdots\lambda_s<0,$$

então pelo menos um $\lambda_j<0$, assim $\lambda_j=\left(a-r_j\right)\left(b-r_j\right)<0$

Por outro lado, sendo $a,\ b$ e $r_j\in\mathbb{R}$ com $a<b$, temos as possibilidades:

1) $r_j<a<b\ \Rightarrow\ a-r_j>0$ e $b-r_j>0\ \Rightarrow\ \lambda_j>0$

2) $a<r_j<b\ \Rightarrow\ a-r_j<0$ e $b-r_j>0\ \Rightarrow\ \lambda_j<0$

3) $a<b<r_j\ \Rightarrow\ a-r_j<0$ e $b-r_j<0\ \Rightarrow\ \lambda_j>0$

Portanto a única possibilidade satisfeita é $a < r_j < b$.

De que se conclui que existe pelo menos uma raiz real no intervalo (a,b).

Consequência: Com as hipóteses do teorema de Bolzano, conclui-se também que o número de raízes no intervalo (a,b) é ímpar.

Justificativa: Basta olhar na demonstração que $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_s < 0$ implica que um número ímpar de λ_j são negativos e, como para cada $\lambda_j < 0$ temos $r_j \in (a,b)$, encontramos um número ímpar de $r_j \in (a,b)$.

Exemplo 1:

Mostre que a equação $x^3 + x + 1 = 0$ possui uma raiz irracional no intervalo $(-1,\ 0)$.

Solução: como os coeficientes da equação são números inteiros, o teorema das raízes racionais diz que as possibilidades para essas raízes são o 1 e o -1, mas, como se observa, nenhum deles é raiz. Portanto a equação não admite raiz racional.

Seja $P(x) = x^3 + x + 1$. Como $P(-1) \cdot P(0) = -1 < 0$, o teorema de Bolzano garante que a equação $P(x) = 0$ possui uma raiz real $x_0 \in (-1,\ 0)$ e, como não há raízes racionais, então x_0 é uma raiz irracional no intervalo $(-1,\ 0)$.

Exemplo 2:

A equação $x^5 - 7x^2 + 3 = 0$ possui raiz real positiva.

De fato: Seja $P(x) = x^5 - 7x^2 + 3$. Como $P(0) = 3$ e $P(1) = -3$, logo $P(0).\ P(1) < 0$ e o Teorema de Bolzano garante que a equação possui uma raiz real x_0 com $0 < x_0 < 1$.

Exemplo 3:

Como aplicação do Teorema de Bolzano e do Teorema das Raízes Racionais, podemos concluir que a equação $z^3 - 3z + 1 = 0$ possui três raízes irracionais.

De fato: Fazendo $P(z)=z^3-3z+1=0$, vemos que $P(-2)<0$; $P(0)>0$; $P(1)<0$ e $P(2)=3>0$, assim pelo Teorema de Bolzano o polinômio $P(z)$ possui os zeros reais r_1, r_2 e r_3 respectivamente nos intervalos $(-2,0)$, $(0,\ 1)$ e $(1,\ 2)$. Como $P(z)$ é de grau 3, estes são os únicos zeros. Aplicando o teorema das raízes racionais, vemos que a equação não possui raízes racionais. Assim concluimos que a equação dada possui exatamente três raízes irracionais.

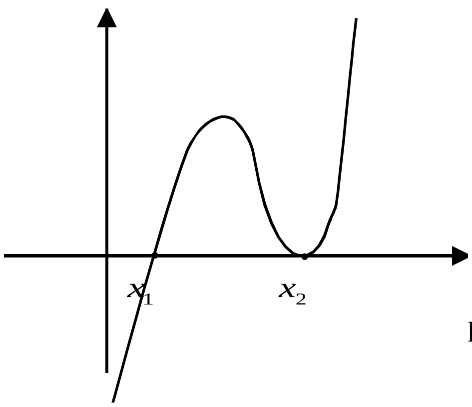
Observação:

Se a equação algébrica $P(x)=0$ tem todos os coeficientes reais, então podemos considerar o polinômio $P(x)$ como função real $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida em todo o conjunto dos números reais. Assim é possível visualizar geometricamente o seu gráfico no plano cartesiano.

Nesse caso, se x_2 é uma raiz real de multiplicidade **par** e x_1 raiz real de multiplicidade **ímpar**, então $P(x)$ não muda de sinal para valores de *x* numa vizinhança de x_2, mas muda de sinal para valores de *x* numa vizinhança de x_1.

Chamamos vizinhança de uma raiz real α, e denotamos por $V(\alpha)$ a um pequeno intervalo aberto que contém α e não contém outra raiz distinta de α.

Exemplo



$P(x)=a\ (x-x_1)\cdot(x-x_2)^2$.

Para todo $x\in V(x_2)$, temos $(x-x_2)^2\geq 0$

Logo, $P(x)$ não muda de sinal na $V(x_2)$.

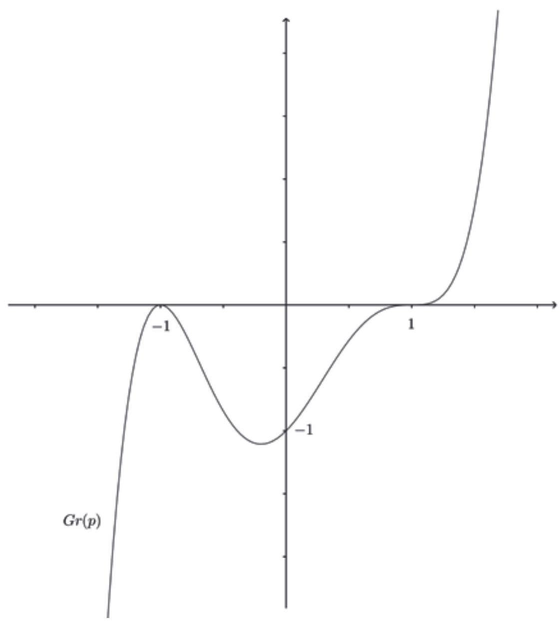
Mas para $x\in V(x_1)$, $P(x)$ muda de sinal pois se $x<x_1\Rightarrow x-x_1<0$ e se $x>x_1\Rightarrow x-x_1>0$.

Exemplo 4:

$$p(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$$

Pelo teorema das raízes racionais aplicado na equação algébrica $p(x) = 0$, vemos que 1 e -1 são raízes e, fazendo a divisão por $q(x) = (x-1)(x+1)$, vemos que as raízes são de multiplicidades. Isto é, 1 é raiz tripla e -1 é raiz dupla. Assim $p(x) = (x-1)^3 (x+1)^2$.

Portanto $p(x)$ muda de sinal na vizinhança $V(1)$ e não muda em $V(-1)$, pois $p(1{,}1) > 0$ e $p(0{,}9) < 0$, mas $p(-1{,}1) < 0$ e $p(-0{,}9) < 0$.



18

Resolução algébrica de algumas equações

18.1 Equações na forma fatorada

Uma equação algébrica na forma fatorada $(z-\alpha_1)\cdot(z-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(z-\alpha_n)=0$ tem solução imediata, pois, no conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, um produto é nulo se e somente se um dos fatores se anula (veja a proposição da seção 2.4.5).

Neste caso as raízes são $\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,\ \alpha_n$

Exemplos:

1) A equação $3(x-1)^2(x-2)^3(x-\sqrt{2})=0$ possui 1 como raiz dupla, 2 como raiz tripla e $\sqrt{2}$ como raiz simples.

2) A equação $z^4+2z^2+1=0$ pode ser facilmente fatorada assim $z^4+2z^2+1=z^4+z^2+z^2+1=z^2(z^2+1)+(z^2+1)=(z^2+1).(z^2+1)$

Logo $z^4+2z^2+1=0 \Leftrightarrow (z^2+1).(z^2+1)=0 \Leftrightarrow (z+i)^2.(z-i)^2=0$

Portanto i e $-i$ são raízes duplas da equação dada.

18.2 Equações na forma $az^n + b = 0$

$az^n + b = 0 \qquad (a, b \in \mathbb{C}, \ \ n \in \mathbb{N} \ \ \text{e} \ \ a \neq 0)$

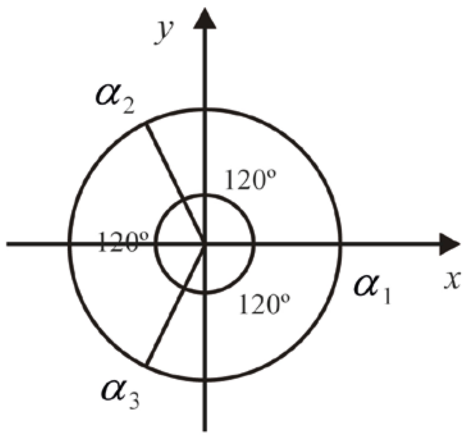
$az^n + b = 0 \iff z^n = -\dfrac{b}{a}$ e, portanto, as n soluções são as n raízes enésimas complexas do número complexo $-\dfrac{b}{a}$.

Exemplo:

1) Resolvendo a equação $z^3 - 1 = 0$

$z^3 - 1 = 0 \iff z^3 = 1$, logo as soluções são as raízes cúbicas complexas de 1, a saber:

$\alpha_1 = 1; \ \ \alpha_2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ e $\alpha_3 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \qquad S = \left\{1; \ -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i; \ -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$



2) Resolver a equação $2z^4 - 1 + \sqrt{3}i = 0$.

Observe que a equação dada é equivalente à equação $z^4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, cujas soluções são todas as raízes quartas complexas do número $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

3) Resolver a equação $z^4 - (1+i)z^2 + i = 0$.

Chame $z^2 = y$, logo $y^2 - (1+i)y + i = 0$ nos dá como soluções $y_1 = 1$ e $y_2 = i$ Assim $z^2 = 1$ ou $z^2 = i$.

$z^2 = 1$ possui raízes $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = -1$.

$z^2 = i$ possui raízes $\beta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ e $\beta_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

Portanto as raízes da equação algébrica $z^4 - (1+i)z^2 + i = 0$ são $1;\ -1;\ \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ e $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

18.3 Equações transformadas

Transformar uma equação algébrica $P(z) = 0$ é obter outra equação algébrica $Q(w) = 0$ tal que as raízes da *equação primitiva* $P(z) = 0$ e as raízes da *equação transformada* $Q(w) = 0$ estejam relacionadas por uma lei $w = f(z)$, chamada *lei de transformação*.

Exemplo 1:

Para obter a transformada da equação $4z^2 - 28z + 45 = 0$ pela lei de transformação $w = \frac{2z-1}{4}$, fazemos $w = \frac{2z-1}{4} \Leftrightarrow z = \frac{4w+1}{2}$, e a equação transformada é

$4\left(\dfrac{4w+1}{2}\right)^2 - 28\left(\dfrac{4w+1}{2}\right) + 45 = 0$, a qual resulta em $w^2 - 3w + 2 = 0$. As raízes da equação transformada são $w_1 = 1$ e $w_2 = 2$. Logo as raízes da primitiva são

$$z_1 = \frac{4w_1 + 1}{2} = \frac{5}{2} \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{4w_2 + 1}{2} = \frac{9}{2}$$

Exemplo 2:

Dada a equação $8z^3 + 12z^2 - 18z - 27 = 0$, vamos obter sua transformada pela lei $w = z + \dfrac{1}{2}$.

Sendo $w = z + \dfrac{1}{2}$, temos $z = w - \dfrac{1}{2}$ e, substituindo na equação primitiva, temos a transformada

$$8\left(w - \frac{1}{2}\right)^3 + 12\left(w - \frac{1}{2}\right)^2 - 18\left(w - \frac{1}{2}\right) - 27 = 0 \Leftrightarrow 8w^3 - 24w - 16 = 0 \Leftrightarrow w^3 - 3w - 2 = 0 .$$

Assim, a transformada de $8z^3 + 12z^2 - 18z - 27 = 0$ é $w^3 - 3w - 2 = 0$.

Observe que a equação transformada, embora tenha ainda grau 3, não possui o termo do 2° grau.

18.4 Equações do 3° grau (fórmula de Cardano)

Dada a equação algébrica do 3° grau completa $az^3 + bz^2 + cz + d = 0 \quad (a \neq 0)$, podemos transformá-la numa equação do 3° grau que não possui o termo do 2° grau, mediante a lei de transformação $w = z + k$, em que k é uma constante.

De fato, substituindo $z = w - k$ na equação primitiva, temos:

$$a(w-k)^3 + b(w-k)^2 + c(w-k) + d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad aw^3 + (b - 3ak)w^2 + (c + 3ak^2 - 2bk)w +$$
$$+ d - ck + bk^2 - ak^3 = 0$$

Para que essa equação transformada não possua o termo do 2° grau, basta que $b - 3ak = 0$. Isto é, $\boxed{k = \frac{b}{3a}}$. Portanto chegamos em:

$$aw^3 + \left(\frac{3ac - b^2}{3a}\right)w + \frac{2b^3 + 9abc}{27a^2} + d = 0 \Leftrightarrow w^3 + \left(\frac{3ac - b^2}{3a^2}\right)w + \frac{2b^3 + 27a^2d - 9abc}{27a^3} = 0$$

Assim a equação reduzida da primitiva $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ tem a forma $w^3 + pw + q = 0$

Logo as três raízes α da equação primitiva serão obtidas das três raízes β da equação reduzida (transformada) mediante a lei $w = z + \frac{b}{3a}$, o que significa $\boxed{\alpha = \beta - \frac{b}{3a}}$

Para resolver a equação $w^3 + pw + q = 0$, escrevemos $w = u + v$ e então temos $(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$, que equivale a:

$$u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + p(u+v) + q = 0 \Leftrightarrow u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + p(u+v) + q = 0 \Leftrightarrow$$
$$u^3 + v^3 + q + (3uv + p)(u+v) = 0$$

Se encontrarmos u e v, tais que $u^3 + v^3 + q = 0$ e $3uv + p = 0$, então $\beta = u + v$ será raiz da equação $w^3 + pw + q = 0$.

Determinemos u e v tal que $\begin{cases} u^3 + v^3 + q = 0 \\ 3uv + p = 0 \end{cases}$

Resolvendo o sistema acima:

$$3uv + p = 0 \iff v = -\frac{p}{3u}$$

Substituindo, temos

$$u^3 + \left(\frac{-p}{3u}\right)^3 + q = 0 \iff u^3 - \frac{p^3}{27u^3} + q = 0 \iff 27u^6 - p^3 + 27qu^3 = 0 \iff$$

$$\iff u^6 + qu^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0 \iff \left(u^3\right)^2 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

Assim temos uma equação do 2° grau na variável u^3. Usando a fórmula de Bhaskara, vemos que

$$u^3 = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4 \cdot p^3}{27}}}{2} = \frac{-q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Voltando na equação $u^3 + v^3 + q = 0$, temos:

a) se $u^3 = \frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$, então $v^3 = \frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$

b) se $u^3 = \frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$, então $v^3 = \frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$

Portanto $\beta = u + v = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ é conhecida como fórmula de Cardano ou fórmula de Cardano-Tartaglia-Del Ferro[3].

Observe que cada raiz cúbica na fórmula fornece três valores, mas, analogamente como no cálculo da equação do 2° grau na redução acima, elas se repetem duas a duas. Finalmente a fórmula de Cardano fornece três raízes.

[3] Recomendamos a leitura do artigo "A equação do terceiro grau", do professor Elon Lages Lima (1987).

18.4.1 Alguns exemplos clássicos

1) Seja a equação $z^3 + 3z - 4 = 0$. Pela fórmula de Cardano-Tartaglia-Del Ferro, temos:

$$z = \sqrt[3]{-\left(\frac{-4}{2}\right) + \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{3^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\left(\frac{-4}{2}\right) - \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{3^3}{27}}} = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

Considerando as raízes cúbicas reais, temos que $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ é uma raiz real da equação $z^3 + 3z - 4 = 0$. Por outro lado, observamos que 1 é também raiz da equação e, portanto, decompondo o polinômio $P(z) = z^3 + 3z - 4$, temos:

1	0	3	–4	1
1	1	4	0	

$$P(z) = z^3 + 3z - 4 = (z-1)\left(z^2 + z + 4\right)$$

$$z^3 + 3z - 4 = 0 \iff (z-1)\left(z^2 + z + 4\right) = 0 \iff z = 1 \text{ ou } z^2 + z + 4 = 0,$$

logo $z_1 = 1$; $z_2 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i$ e $z_3 = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}i$ são todas as raízes da equação. De que se conclui que $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1$

Outro modo de ver que $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ é raiz da equação $x^3+3x-4=0$ sem usar a fórmula de Cardano-Tartaglia-Del Ferro é assim:

Chame $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ (número real).

Como a função cúbica real é bijetora, temos

$$x^3=\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)^3 \Leftrightarrow x^3=2+\cancel{\sqrt{5}}+2-\cancel{\sqrt{5}}+3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)^2.\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+$$

$$+3\cdot\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\cdot\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)^2 \Leftrightarrow x^3=4+3\cdot\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\cdot\left(\underbrace{\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}}_{x}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3=4+3\cdot\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\cdot x \Leftrightarrow x^3=4+3\cdot(-1)x \Leftrightarrow x^3+3x-4=0$$

Portanto $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ é uma solução real da equação $x^3+3x-4=0$

2) A equação histórica $z^3=15z+4$ foi escrita por Raphael Bombelli no livro L´Álgebra de 1572.

Facilmente se vê que 4 é uma raiz da equação $z^3-15z-4=0$, e, dividindo o polinômio por $z-4$, escrevemos $z^3-15z-4=(z-4)(z^2+4z+1)$. Resolvendo a equação quadrática $z^2+4z+1=0$, obtemos as raízes $-2+\sqrt{3}$ e $-2-\sqrt{3}$. Portanto as três raízes da equação $z^3=15z+4$ são todas números reais, a saber $\alpha_1=4$, $\alpha_2=-2+\sqrt{3}$ e $\alpha_3=-2-\sqrt{3}$.

Agora usando a Fórmula de Cardano - Tartaglia - Del' Ferro na equação $z^3-15z-4=0$, obtemos as soluções $\alpha=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$. Logo, temos que a soma das raízes cúbicas complexas da fórmula fornece, nesse caso, as três soluções α_1, α_2 e α_3. Portanto concluímos que $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ é sempre um número real.

3) Resolvendo a equação algébrica $27z^3+54z^2-18z-136=0$. Como a equação é do 3º grau com coeficientes reais, o teorema das raízes complexas garante que pelo menos uma das raízes é real. Sendo os coeficientes números inteiros, poderíamos usar o teorema das raízes racionais para ver se a raiz é um número racional.

No entanto precisaríamos testar na equação as possíveis raízes racionais que seriam formadas pelas razões entre os divisores de 136 pelos divisores de 27. Isto nos exigiria bastantes cálculos, porque o número de possibilidades de raízes a serem testadas é expressivo.

Optemos então por fazer uma transformação na equação dada para eliminar o termo do 2º grau, obtendo assim uma outra equação mais simplificada, possibilitando também o uso da fórmula conhecida.

A Lei de Transformação, nesse caso, é $w=z+\frac{2}{3}$, o que equivale a $z=w-\frac{2}{3}$ e, substituindo na equação primitiva temos

$$27\left(w-\frac{2}{3}\right)^3+54\left(w-\frac{2}{3}\right)^2-18\left(w-\frac{2}{3}\right)-136=0 \Leftrightarrow w^3-2w-4=0.$$

Agora na equação $w^3-2w-4=0$ podemos usar a fórmula de $\text{Cardano - Tartaglia - Del' Ferro}$ ou usar o teorema das raízes racionais e com uma rápida inspeção verificamos que 2 é uma raiz. Assim $w^3-2w-4=(w-2)(w^2+2w+2)=0$ possui as raízes 2, $-1+i$ e $-1-i$.

Voltando à Lei de Transformação $z=w-\frac{2}{3}$, temos $S=\left\{\frac{4}{3},\ \frac{-5}{3}+i,\ \frac{-5}{3}-i\right\}$ o conjunto solução da equação $27z^3+54z^2-18z-136=0$.

Se aplicarmos a fórmula na equação $w^3-2w-4=0$, obtemos como raiz, $w=\sqrt[3]{2+\frac{10\sqrt{3}}{9}}+\sqrt[3]{2-\frac{10\sqrt{3}}{9}}$. As três raízes do conjunto solução são obtidas de $z=\sqrt[3]{2+\frac{10\sqrt{3}}{9}}+\sqrt[3]{2-\frac{10\sqrt{3}}{9}}-\frac{2}{3}$, considerando no cálculo as raízes cúbicas complexas indicadas acima.

4) Resolver a equação $w^3 - 3w - 1 = 0$

Neste caso a equação não tem raiz racional, logo sua raiz real é irracional.

Usando a Fórmula de Cardano-Tartaglia-Del' Ferro, temos $w = u + v$ com

$$u = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad \text{e} \quad v = \frac{-p}{3u} \quad (*^4) \quad \text{em que} \quad p = -3 \text{ e } q = -1 .$$

Logo $w = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i} + \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i}}$.

Na forma trigonométrica $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = \cos\frac{\pi}{3} + i \ sen\frac{\pi}{3}$.

Logo as raízes cúbicas de $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ são $u = \sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{3} + i \ sen\frac{\pi}{3}}$, ou seja:

$$u_k = \cos\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3} + i \sin\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3}; \ k = 0,1,2 .$$

$$u_0 = \cos\frac{\pi}{9} + i \ sen\frac{\pi}{9} \Rightarrow v_0 = \frac{1}{u_0} = \cos\left(-\frac{\pi}{9}\right) + i \ sen\left(-\frac{\pi}{9}\right) = \cos\frac{\pi}{9} - i \ sen\frac{\pi}{9}$$

$$u_1 = \cos\frac{7\pi}{9} + i \ sen\frac{7\pi}{9} \Rightarrow v_1 = \frac{1}{u_1} = \cos\left(-\frac{7\pi}{9}\right) + i \ sen\left(-\frac{7\pi}{9}\right) = \cos\frac{7\pi}{9} - i \ sen\frac{7\pi}{9}$$

$$u_2 = \cos\frac{13\pi}{9} + i \ sen\frac{13\pi}{9} \Rightarrow v_2 = \frac{1}{u_2} = \cos\left(-\frac{13\pi}{9}\right) + i \ sen\left(-\frac{13\pi}{9}\right) = \cos\frac{13\pi}{9} - i \ sen\frac{13\pi}{9}$$

$(*^4)$ $\quad \frac{-p}{3u} = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$

Portanto temos as raízes $w_0 = u_0 + v_0 = 2\cos\frac{\pi}{9}$, $w_1 = u_1 + v_1 = 2\cos\frac{7\pi}{9}$ e

$w_2 = u_2 + v_2 = 2\cos\frac{13\pi}{9}$.

$S = \{2\cos 20^{o}, 2\cos 140^{o}, 2\cos 260^{o}\}$

Concluímos assim que $\cos 20^{o}$, $\cos 140^{o}$ e $\cos 260^{o}$ são números reais irracionais.

A raíz $w_0 = 2\cos 20°$ é a solução do clássico problema: "Encontrar o valor da aresta a do cubo, cujo volume v excede de 1 unidade o volume v' de um paralelepípedo de altura a e área da base igual a 3."

Modelando o problema temos: $v = v'+1 \Leftrightarrow a^3 = 3a + 1 \Leftrightarrow a^3 - 3a - 1 = 0$. De acordo com a resolução da equação, apresentada no exemplo 4, temos que a solução positiva $a = 2\cos 20°$ é o valor da aresta procurada.

19

Exercícios complementares

1) Represente no plano complexo cada um dos seguintes conjuntos:

a) $\{z \in \mathbb{C};\ -\pi < arg\, z < \pi \text{ e } |z| > 2\}$

b) $\{z \in \mathbb{C};\ Im\left(z^2\right) > 0\}$

c) $\left\{z \in \mathbb{C};\ Re\left(\frac{1}{z}\right) < \frac{1}{2}\right\}$

d) $\{z \in \mathbb{C};\ |z-4| > |z|\}$

e) $\left\{z \in \mathbb{C};\ 1 \leq \left|\frac{z-i}{i}\right| \leq 2\right\}$

2) Seja $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ (com m e n primos entre si). Encontre uma fórmula para $(cos\,\theta + isen\theta)^{\frac{m}{n}}$

3) Use a fórmula de Moivre para mostrar que

a) $cos\,5\theta = 16cos^5\theta - 20cos^3\theta + 5cos\,\theta$ e $sen5\theta = 16sen^5\theta - 20sen^3\theta + 5sen\theta$

b) Use o item a) para concluir que $sen\,6°$ e $cos\,12°$ são números irracionais.

4) Se w é uma raiz n-ésima imaginária qualquer da unidade, então mostre que $1 + w + w^2 + \ldots + w^{n-1} = 0$

5) (*RPM, n. 67*) Seja a raiz quinta da unidade $w = cos\frac{2\pi}{5} + isen\frac{2\pi}{5}$. Mostre que, para todo n inteiro, $1 + w^n + w^{2n} + w^{3n} + w^{4n} = \begin{cases} 5, & \text{se } n \text{ é múltiplo de 5} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

6) Encontre a área do polígono regular cujos vértices são os afixos dos números complexos z, tais que $z^{12} = 1$.

7) Mostre que 72^o é o menor ângulo positivo que satisfaz o sistema

$$\begin{cases} 1 + cos\ x + cos\ 2x + cos\ 3x + cos\ 4x = 0 \\ sen\ x + sen\ 2x + sen\ 3x + sen\ 4x = 0 \end{cases}$$

8) Calcule a área do polígono convexo cujos vértices são os afixos das raízes imaginárias da equação algébrica $z^{23} + z^{22} + z^{21} + ... + z^2 + z + 1 = 0$

9) Seja o semicírculo $S^1_+ = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1 \quad \text{e} \quad Im(z) \geq 0\}$. Mostre que a função complexa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \overline{z}$ transforma S^1_+ no semicírculo inferior $S^1_- = \{w \in \mathbb{C} / |w| = 1 \quad \text{e} \quad Im(w) \leq 0\}$.

10) Seja $f(z) = Exp(z)$ e $\Omega = \{z \in \mathbb{C} / 0 \leq Re(z) \leq 1 \text{ e } 0 \leq Im(z) \leq \pi\}$. Esboce Ω e $f(\Omega)$.

11) Resolva as equações e inequações em $\mathbb{C}$.

a) $Exp\ (i\ \overline{z}) = \overline{Exp\ (iz)}$

b) $Exp\ (4z) = i$

c) $|Exp\ (-z\ )| < 1$

12) Ache as raízes da equação $z^4 + 4 = 0$ e fatore $P(z) = z^4 + 4$ em fatores quadráticos com coeficientes reais.

13) (*LIMA, 1996*) Determine um polinômio $P(z)$ do 3° grau para o qual $P(z+1)-P(z)=z^2,\ \forall\ z\in\mathbb{C}$. Use-o para obter uma expressão para a soma $1^2+2^2+\ldots+n^2$

14) Determine um polinômio P de grau mínimo, com coeficientes reais, tal que

a) $P(1+i)=0$ e $P(2)=1$

b) $P(1+2i)=0$ e $P(i)=1$

15) Seja $P(z)$ um polinômio com coeficientes reais. Se $2i$ é um zero de $P(z)$ e $P(1)=5$, então encontre o resto da divisão de $P(z)$ por $B(z)=z^3-z^2+4z-4$.

16) Resolva em $\mathbb{C}$ a equação $z^4-z^2+1=0$.

17) Se 1 é raiz dupla da equação $x^4-2x^3+2x^2+mx+n$ com $m, n\in\mathbb{R}$, então encontre m e n.

18) Se m e n são duas raízes inteiras positivas distintas da equação algébrica $z^4+az^3+bz^2+cz+2=0$ com $a,\ b,\ c\in\mathbb{Z}$, e i é outra raiz dessa equação, então encontre os valores de $a,\ b$ e c.

19) Construa um polinômio $P(x)$ com coeficientes inteiros, tal que $x_0=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ seja uma raiz da equação algébrica $P(x)=0$.

20) (*ITA*) Seja $P(x)$ um polinômio de grau 5, tal que $P(1)=P(2)=P(3)=P(4)=P(5)=1$ e $P(6)=0$, calcule $P(0)$.

21) (*UNICAMP*)

a) Qual o valor de λ na equação $z^3-5z^2+8z-\lambda=0$ de modo que $\alpha=3$ seja uma raiz dessa equação.

b) Para esse valor de λ, ache as três raízes α_1,α_2 e α_3 dessa equação.

c) Ache o volume do sólido obtido quando a região triangular cujos vértices são os afixos de α_1, α_2 e α_3 gira em torno da reta de equação $x = 1$

22) (*IEZZI, 1977*) Mostre que toda equação algébrica do tipo $x^n + a^2x + b = 0$ com n ímpar e $a, b \in \mathbb{R}^*$ admite uma raiz real de sinal contrário ao de b.

23) Mostre que a equação $x^3 + x + 1 = 0$ não tem raiz racional e possui uma única raiz real.

24) Prove que, se n é par, então a equação $z^n + z^{n-1} + ... + z + 1 = 0$ não possui raiz real.

25) (*LIMA, 1996*) Resolva as equações:

a) $(z+1)^n = z^n$

b) $(z+1)^n + (z-1)^n = 0$

26) (*LIMA, 1996*) Mostre que a equação $x^3 - 3x + 1 = 0$ possui três raízes reais. Verifique, porém, que o cálculo dessas raízes utilizando a fórmula de resolução para a equação do 3° grau necessariamente envolve números complexos.

27) (*RPM, n. 23*) Seja $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ um polinômio com coeficientes inteiros. Se a equação $P(x) = 0$ tem três raízes inteiras distintas, então mostre que a equação $P(x) - 1 = 0$ não admite raiz inteira.

28) Mostre que $\sqrt[3]{2 + \frac{10}{3\sqrt{3}}} + \sqrt[3]{2 - \frac{10}{3\sqrt{3}}} = 2$.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Parte I - Números complexos

Capítulo 2

Seção 2.2.1 - Exercícios

1. $\{-2, 0, 2\}$

2. a) $2i$ **b)** $-2i$ **c)** $-32(1+i)$ **d)** -64

e) -64

3. *Sugestão:* completar quadrado

$$S=\left\{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

4. $n=4$

Seção 2.4.6 - Exercícios

2. $S=\left\{-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

3. a) $S=\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ \ \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right\}$

b) $S=\{i,\ -i\}$

c) $S=\{0,\ i\}$

d) completar o quadrado e usar o item a)

$$S=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2+\sqrt{2}}{2}i,\ \ -\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)i\right\}$$

e) $S=\{1+i,\ 2-i\}$

Capítulo 3

Seção 3.2.1 - Exercícios

1. *Sugestão:* escreva $z=w+(z-w)$

3. $-1<a<1$

4. $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $w=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

5. disco de centro C (0, 1) e raio 1

6. a) circunferência de centro C (0, 1) e raio 1

b) reta diagonal 1º e 3º quadrantes

c) 1º e 3º quadrantes

d) disco aberto de centro C (0, 1) e raio 1

7. $\rho=2$ e $\theta=130°$

8. a) $S=\left\{0,\ 1,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

b) $S=\left\{0,\ \sqrt{2},\ -\sqrt{2},\ \sqrt{2}i,\ -\sqrt{2}i\right\}$

10. coroa circular com centro $C(1,1)$

11. a) eixo y

b) Cincunf. com centro C $\left(\frac{5}{4},\ 0\right)$ e raio $\frac{3}{4}$.

12. a) $-\frac{4+\sqrt{2}}{2}+\frac{4+\sqrt{2}}{2}i$

b) $\left(1+\frac{1}{\sqrt{10}}\right)+3\left(1+\frac{1}{\sqrt{10}}\right)i$

13. $\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{4}{\sqrt{5}}i$ e $-\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{4}{\sqrt{5}}i$

14. $\left\{(x,y)\,/\,x\geq -\frac{1}{2}\right\}$

16. hipérbole equilátera

Capítulo 4

Seção 4.3 - Exercícios complementares

1. $\forall z,\ w\in\mathbb{C}$ com $|z|=|w|=1$ e

$$\arg(z)-\arg(w)=\frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3}$$

2. $\left\{\frac{1}{5}+\frac{7}{5}i,\ -1-i\right\}$

5. $-1+i$

7. $z=\frac{w^k-1}{w^k+1}$; $w=\cos\frac{2\pi}{5}+i\ sen\frac{2\pi}{5}$ e

$k=0, 1, 2, 3$ e 4

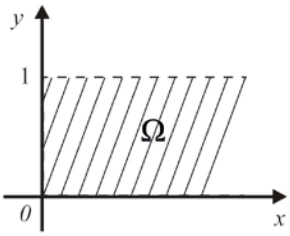
8. $135°$

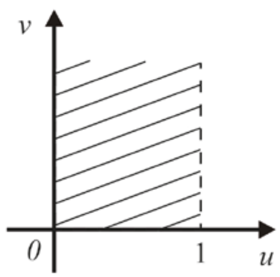
10. $\begin{cases} \dfrac{n(n+1)}{2} & \text{se } w=1 \\ -\dfrac{n}{1-w} & \text{se } w\neq 1 \end{cases}$

11. $1+i$

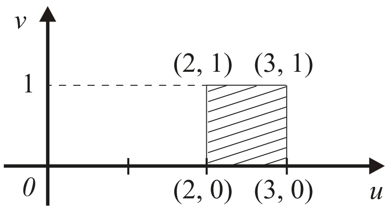
13. $\dfrac{2\pi}{3}$

15. $f(\Omega)=\{w\in\mathbb{C}\,/\,0<Re(w)<1 \text{ e } Im(w)>0\}$.

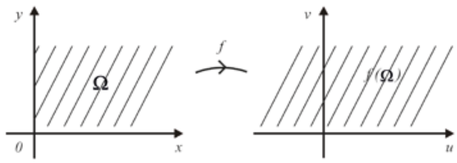




16.



17. a)



b) $f(\Omega)=\{w\in\mathbb{C}\,/\,w=r\ (\cos\varphi+i\sin\varphi)$ com

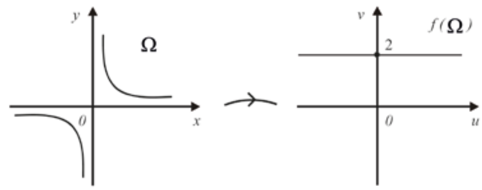
$r<1$ e $0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}\}$

c) $f(\Omega)=\{w\in\mathbb{C}\,/\,Im(w)=0 \text{ e } Re(w)\geq 0\}$

(semi eixo real positivo)

d) $f(\Delta)=\{w\,/\,\mathrm{Re}(w)=0 \text{ e } Im\geq 0\}$

e) $f(\Omega)=\{w\in\mathbb{C}\,/\,Im(w)=2\}$



19. $e^{-\sqrt{2}}$

20. a) $S=\left\{-\dfrac{1}{4}+k\dfrac{\pi}{2}i\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

b) $S=\left\{(2k+1)\pi i\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

c) $S=\left\{ln2+(2k+1)\pi i\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

Parte II - Polinômios

Capítulo 6

Seção 6.1 - Exercícios

2. $a=1$ e $b=-3$

3. $p=-1$ e $q=1$

Capítulo 9

Seção 9.1.1 - Exercícios

1. $Q(z)=z^{n-1}+\alpha z^{n-2}+\alpha^2 z^{n-3}+\ldots+\alpha^{n-2}z+\alpha^{n-1}$

2. Dica: considere n par e n ímpar.

6. 1

Seção 9.3.1 - Exercícios

2. $R(z)=4-z$

3. $R(z)=z+2i$

4. 1

5. -5 e 16

6. $P(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{4}{3}x+6$

7. $C(x)=2x^2-5$

8. $P(x)=4-x$

Parte III -

Equações algébricas

Capítulo 12

Seção 12.1

1. a) $P(z)=7\left(z+\sqrt{3}\right)^4\left(z-\sqrt{3}\right)^4$

b) $P(z)=-(z-1)(z-2)(z-3)$

c) $P(z)=(z-1)(z-2)(z+2)(z-3)(z+3)$

2. *Dica*: nº de zeros da função.

Capítulo 13

Seção 13.1 - Exercícios

1. $S=\{1,\ 2\}$

2. $a\left(z^5-10z^4+25z^3\right)=0$

3. $a\left(z^5-z^4+2z^3-2z^2+z-1\right)=0$

Capítulo 14

Seção 14.1 - Exercícios

1. $S=\{2,\ 2,\ 3\}$

2. $\frac{3}{2}$

3. $m=1-n^2$

Capítulo 15

Seção 15.1 - Exercícios

1. 6

2. 4

3. 9

4. $S=\{-2,\ 2,\ 2+i,\ 2-i\}$

5. $a=8$ e $b=-6$

6. $S=\left\{i,\ -i,\ \sqrt{2}i,\ -\sqrt{2}i\right\}$

Capítulo 16

Seção 16.1 - Exercícios

1. a) $S=\{-2,\ 5,\ 7\}$

b) $S=\{-1,\ 1,\ 2\}$

c) $S=\left\{-1,\ \frac{2}{3},\ 1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}\right\}$

3. $S=\{-2,-1,\ 1,\ 2\}$

4. Dica: use o exercício proposto no final da Seção 3.4.1

Capítulo 19 - Exercícios complementares

1. a) exterior do disco centro 0 e raio 2, exceto semieixo

b) 1º e 3º quadrantes, exceto os eixos

c) exterior do disco de centro $C(1,0)$ e raio 1

d) semiplano $\{(x,y)\,/\,x<2\}$

e) Coroa circular com centro C (0, 1), $r_1=1$ e $r_2=2$

2. $\left(\cos\theta + isen\theta\right)^{\frac{m}{n}} =$

$$= \cos\left[\frac{m}{n}(\theta + 2k\pi)\right] + isen\left[\frac{m}{n}(\theta + 2k\pi)\right];$$

$k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$

4. *Dica*: $z^n - 1 = (z-1)\left(1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1}\right)$

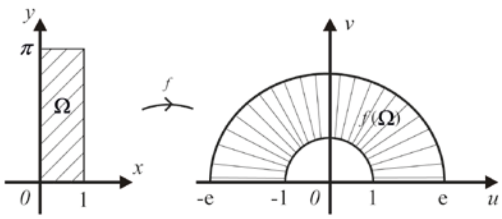
6. 3

7. *Dica*: o sistema é equivalente à equação

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

8. $\dfrac{1 + 5\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)}{2}$

10.



11. a) $S = \left\{z = k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$`

b) $S = \left\{z \in \mathbb{C} / z = \left(\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}\right)i;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{z \in \mathbb{C} / z = x + yi \text{ com } x > 0\right\}$

12. $P(z) = \left(z^2 + 2z + 2\right)\left(z^2 - 2z + 2\right)$

13. $P(z) = \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z$

$P(2) - P(1) = 1^2$

$P(3) - P(2) = 2^2$

_ _ _ _ _ _ _ _ _

$P(n+1) - P(n) = n^2$

some membro a membro

14. a) $P(z) = \dfrac{z^2}{2} - z + 1$

b) $P(z) = \dfrac{z^3}{10} + \dfrac{z}{10} + 1$

15. $R(z) = z^2 + 4$

16.

$$S = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,\ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i,\ \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,\ \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right\}$$

17. $m = -2$ e $n = 1$

18. $a = c = -3$ e $b = 3$

19. $P(x) = x^4 - 10x^2 + 1$ é uma possível resposta

20. 2

21. a) $\lambda = 6$, **b)** $S = \{3,\ 1+i,\ 1-i\}$ **c)** $\dfrac{8\pi}{3}$

25. a) $z_k = \dfrac{1}{w_k - 1}$ em que w_k são raízes n-ésima da unidade, diferentes de 1

b) $z_k = \dfrac{\alpha_k + 1}{\alpha_k - 1}$ em que α_k são as raízes n-ésimas de -1.

27. *Dica*: faça por contradição. Escreva $P(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$ em que r_1, r_2 e r_3 são raízes inteiras distintas. Suponha que r é uma raiz inteira de $P(x) = 1$ e veja aí uma contradição.

28. *Dica:* use fórmula de Cardano-Tartaglia-Del'Ferro.

COLEÇÃO DAS TERCEIRAS E QUARTAS PROVAS DO PROCESSO SELETIVO ESTENDIDO PARA O CURSO DE MATEMÁTICA DA UFES DE 1998 A 2012

1. Terceiras provas de Matemática Básica I

1998

1) Se $z = \dfrac{2-i}{i}$, determine $\overline{z}$.

2) Resolva a equação $iz + 2\overline{z} + 1 - i = 0$ em que $z = x + yi \in \mathbb{C}$

3) Calcule o valor de $i + i^2 + i^3 + i^4 + ... + i^{135}$

4) Represente no plano complexo o conjunto $A = \left\{ z \in \mathbb{C} \,/\, (z-i)\left(\overline{z-i}\right) = 4 \right\}$

5) Determine o menor número natural $n \neq 0$ tal que $\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)^n$ seja um número real negativo.

6) Determine m e n tais que o polinômio $P(z) = z^3 + mz^2 + nz - 2$ seja divisível por $B(z) = (z+1)(z-3)$

7) Resolva a equação algébrica $z^3 - 2z^2 - 3z + 6 = 0$

8) Decomponha em fatores do 1° grau o polinômio $P(z) = z^4 + z^3 - z^2 + z - 2$

9) Os polinômios $P(z) = pz^2 + qz - 4$ e $Q(z) = z^2 + pz + q$ são tais que $P(z+1) = Q(2z)$ $\forall z \in \mathbb{C}$. Determine p e q.

1999

1) Determine $a \in \mathbb{R}$ para que $\dfrac{a+i}{1+ai}$ seja real.

2) Um polinômio $P(z)$ quando dividido por $B(z)=(z-1)(z+2)$ dá resto $2z-1$. Determine o resto da divisão de $P(z)$ por $z+2$.

3) Quatro números complexos têm seus afixos em quatro pontos que dividem em partes iguais uma circunferência de centro na origem. Sabendo que um dos números é $1+3i$, determine os outros.

4) Represente no plano de Gauss o conjunto $A=\left\{z \in \mathbb{C} / 1 \leq |z| \leq 2 \text{ e } \dfrac{\pi}{2} \leq arg(z) \leq \pi\right\}$

5) Resolva a equação $z^4-4z^3+6z^2-4z+5=0$

6) A equação $z^3-5z^2+8z+a=0$ $(a \in \mathbb{R})$ possui $\alpha=1+i$ como raiz. Determine as outras raízes da equação.

7) Resolva a equação $z^2=\overline{2+z}$

8) Seja $w \neq 1$ uma raiz da equação $z^3-1=0$. Calcule o valor de $(1-w+w^2)(1+w-w^2)$

9) Se $z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, calcule o valor de $1+z+z^2+...+z^{47}$

10) $P(z)$ é um polinômio de coeficientes reais e $P(i)=2+3i$. Determine $P(-i)$

2000

1) Determine os valores reais de a para os quais $(a+i)^4$ é um número real.

2) Resolva as equações:

a) $z^3 - 6z^2 + 13z - 10 = 0$

b) $z^8 - 64z^2 = 0$

3) Represente no plano complexo os conjuntos:

a) $A = \left\{ z \in \mathbb{C};\ |z+3-3i| \ \leq\ 1 \ \text{ e } \ \frac{3\pi}{4} \ \leq\ \arg(z) \ \leq\ \pi \right\}$

b) $B = \left\{ z \in \mathbb{C};\ z^3 = 8i \right\}$

4) Para quais valores do número natural n, $\dfrac{\left(\sqrt{3}+i\right)^n}{3i}$ é um número real?

5) Determine os valores de m e n, tais que o polinômio $2z^3 + 4z^2 + mz + n$ seja divisível por $z^2 + z - 2$

6) Sabendo-se que i é uma raiz dupla da equação $z^5 + 3z^4 + 2z^3 + 6z^2 + z + 3 = 0$, encontre todas as outras raízes.

7) Um polinômio $P(z)$ quando dividido por $z^2 + 1$ deixa resto $3z + 5$. Determine o resto da divisão de $P(z)$ por $z - i$

8) Determine o lugar geométrico dos pontos z do plano complexo tais que $z + \dfrac{1}{z}$ seja um número real.

2001

1) Para que valores de $n,\ n \in \mathbb{N}$, o número complexo $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$ é real?

2) Dado o polinômio $P(z) = z^2 + (1+i)^2$, escreva na forma algébrica:

a) $P\left(\frac{2}{1-i}\right)$

b) os zeros do polinômio $P(z)$

3) Represente no plano complexo os afixos dos números complexos z tais que $-1 \le Re(z) \le 1$ e $-1 \le Im(z) \le 1$.

4) Se $z \in \mathbb{C}$ com $|z| = 1$, então mostre que $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta\ \forall n \in \mathbb{N}$ em que $\theta =$ argumento de z

5) Determine um polinômio P de grau mínimo, com coeficientes reais, tal que $P(1-i) = 0$ e $P(2) = 6$

6) Resolva a equação $z^4 - 5z^3 + 7z^2 - 5z + 6 = 0$

7) Responda verdadeiro (**V**) ou falso (**F**), justificando.

a) Para todo $z \in \mathbb{C}$, temos $Im(z) \le |z|$

b) Se α, β e γ são as raízes da equação algébrica $z^3 + 3z^2 - z + 1 = 0$, então $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 11$.

c) Se um polinômio $P(z)$ é divisível por $B(z) = z - \alpha$, então ele tem que ser divisível por $C(z) = (z-\alpha)^2$

d) O lugar geométrico dos afixos dos $z \in \mathbb{C}$ tais que $z\,\overline{z} = k$ em que $k \in \mathbb{R}_+^*$ é uma parábola.

2002

1) Sendo $a \in \mathbb{R}$, determine $\left| \dfrac{1-ai}{1+ai} \right|$

2) Determine o lugar geométrico dos afixos dos números complexos z, tais que $z\overline{z} + z + \overline{z} = 0$, e represente geometricamente no plano de Gauss.

3) Se $z + \dfrac{1}{z} = 1$, calcule $|\, z \,|$

4) Se α é uma raiz da equação $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1} z + a_n = 0$ em que $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$, então prove que o conjugado $\overline{\alpha}$ também é raiz dessa equação.

5) Um polinômio $P(z)$ dividido por $A(z) = z+1$ dá resto -1, por $B(z) = z-1$ dá resto 1 e por $C(z) = z+2$ dá resto 1. Qual o resto da divisão de $P(z)$ por $D(z) = (z-1)(z+1)(z+2)$?

6) Resolver a equação $2z^4 + 3z^3 + 3z - 2 = 0$

7) Responda verdadeiro (**V**) ou falso (**F**), justificando a resposta.

a) A soma dos coeficientes do polinômio $P(z) = (z-1)^4 (z-2)^3 (z+4)^2$ é zero.

b) Se $\alpha = 1+i$ e $\beta = 5-i$ são zeros do polinômio complexo $P(z)$, então o grau de $P(z)$ é maior ou igual a 4.

c) Toda equação algébrica de grau $n (n \geq 1)$ possui pelo menos uma raiz imaginária.

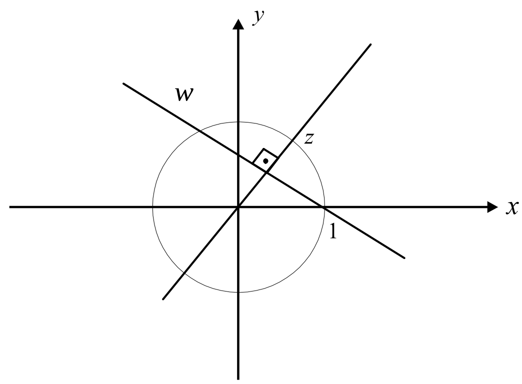
d) Se $z \in \mathbb{C}$, então $Im(z) \ \leq \ |\, z \,|$

2003

1) A equação algébrica $z^2 - az + (1-i) = 0$ admite $1+i$ como raiz. Determine α e a outra raiz da equação.

2) Qual é o lugar geométrico dos afixos dos números complexos z tais que $|1-z| = |3+z|$?

3) Na figura, z e $w \in \mathbb{C}$. Mostre que $w = z^2$

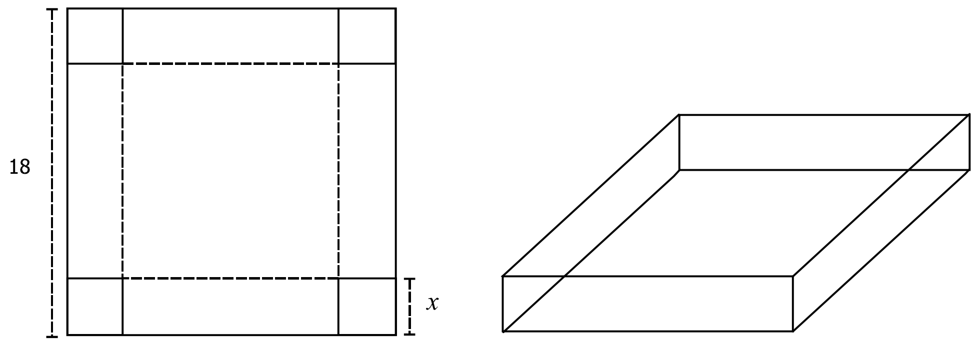


4) Determine o resto da divisão do polinômio $A(z) = z^{100}$ por $B(z) = z^2 - z$

5) Calcule a área do triângulo cujos vértices são os afixos das raízes da equação algébrica $z^3 + z^2 + z = 0$

6) Dado o polinômio $P(z) = z^{47} + z^{46} + ... + z^2 + z + 1$, calcule o valor numérico do polinômio para $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

7) Tome uma folha quadrada de cartolina com 18 cm de lado. Recorte quadradinhos de lado 4 cm nos cantos da folha, conforme figura. Em seguida, dobre os lados para cima para formar uma caixa sem tampa, com volume igual a 400 cm^3. Existe algum outro valor para o lado do quadradinho, a ser recortado em cada canto, de modo que o volume da caixa resultante também seja 400 cm^3?



8) Responda verdadeiro (**V**) ou falso (**F**), justificando.

a) Se $P(z)$ é um polinômio de grau 2 cujos zeros são 1 e 2, então o polinômio $A(z)=\left[P(z)\right]^2$ admite quatro raízes distintas.

b) Se os números 1 e $1+i$ são raízes de um polinômio $P(z)$ de coeficientes reais cujo termo independente é nulo, então o grau de $P(z)$ é no mínimo 4.

c) A equação $x^5-3x^4-2x^2+4x-2=0$ não possui raízes reais negativas.

d) Seja $P(z)$ um polinômio com coeficientes irracionais e $\alpha \in \mathbb{C}$. Se $P(\alpha)=0$, então $P(\overline{\alpha})=0$.

2004

1) Um polinômio $P(z)$ é divisível por $z-1$ e, quando dividido por $B(z)=z^2-2$, fornece quociente $Q(z)=z^2+1$ e resto $R(z)$. Sabendo que $R(-1)=3$, determine o polinômio $P(z)$.

2) Calcule a soma de todos os números complexos $z=x+yi$ que têm módulo $\frac{\sqrt{7}}{2}$ e afixos satisfazendo a equação $x^2+4y^2=4$

3) O afixo do número complexo $z=\sqrt{3}+i$ é vértice de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência com centro na origem do plano cartesiano. Determine os outros vértices e o perímetro desse triângulo.

4) Resolva as equações em $\mathbb{C}$

a) $z^2+\overline{z}=z$

b) $z^4-2z^3+2z^2-2z+1=0$

5) Responda verdadeiro (**V**) ou falso (**F**), justificando.

a) $\left|\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n\right|=1, \quad \forall\ n\in\mathbb{N}$

b) A soma de todas as raízes da equação algébrica $z^{100}-1=0$ é zero.

c) $\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ é uma raiz da equação algébrica $1+z+z^2+z^3+\ldots+z^{59}=0$

d) Se o polinômio $P(z)=z^3-kz^2+kz-1$ é divisível por $B(z)=(z-1)^2$, então $k=1$.

2005

1)

a) Determine, no plano complexo, os afixos dos números z, tais que $z\,\overline{z}+z+\overline{z}=0$.

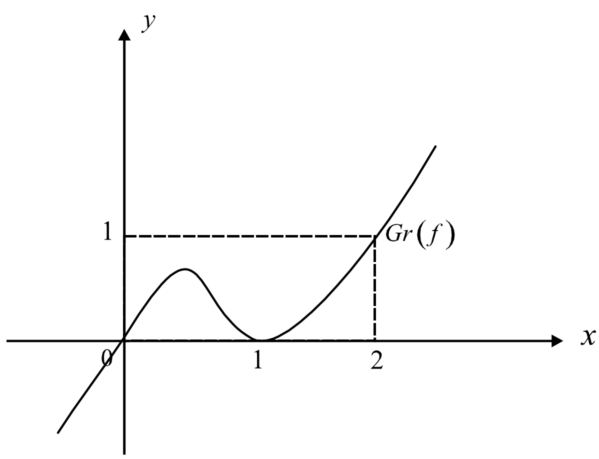
b) Determine o valor de $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| = |1-\alpha| = \left|\dfrac{1}{\alpha}\right|$

2)

a) Resolva a equação $(z-2)^3 = 4-z$

b) Dê uma equação algébrica com coeficientes reais em que $\alpha = 1+\sqrt{2}$ e $\beta = 1-2i$ sejam raízes.

3) Sendo $f(x)$ um polinômio real com gráfico representado na figura abaixo e $g(x) = x^2-3x+2$, determine o resto da divisão de $f(x)$ por $g(x)$



4) Seja $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$, tal que $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} = 1$. Determine o valor de $\alpha^7 + \dfrac{1}{\alpha^7}$

5) Responda verdadeiro (**V**) ou falso (**F**), justificando.

a) Sendo $x \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$, então $\left[(x-z)(x-\overline{z})\right]^n \in \mathbb{R}_+$

b) Se $\alpha = 2$ é raiz dupla e β é raiz simples da equação $z^3 + az^2 + bz + c = 0$, então podemos dizer que $\beta = -(a+b+c)$

c) Toda equação algébrica com coeficientes inteiros possui pelo menos uma raiz racional.

d) Se $\alpha = a + bi$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$ é uma raiz da equação $z^n - 1 = 0$, então o menor valor possível para n é 3.

2006

1) Resolva as equações em $\mathbb{C}$.

a) $z^4 + 1 = 0$

b) $\overline{z} = z^2$

2) Se $\alpha = 1 + i$ e $\beta = 1 - i$, mostre que $\alpha^{52}\ \beta^{-51} = \beta$

3) Sendo $\alpha = cos\dfrac{\pi}{3} + isen\dfrac{\pi}{3}$, calcule $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5$

4) Os afixos dos números complexos z, tais que $z\,\overline{z} = 9$ e $\left(\overline{z}\right)^2 = z^2$, são os vértices de um quadrilátero. Determine o perímetro deste quadrilátero.

5) Se a equação $z^3 + kz^2 + 3z + 1 = 0$ possui raiz de multiplicidade 3, mostre que $k = 3$

6) Mostre que a equação algébrica $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 = 0$ possui uma única raiz real.

7) Determine b e c de modo que o polinômio $P\left(x\right) = x^4 + x^2 + bx + c$ seja divisível por $x - 2$ e, quando dividido por $x + 2$, deixe resto 4.

2007

1) Sendo o número 2 raiz dupla da equação $az^3 + bz + 1 = 0$, determine a e b.

2) Para que valores de $n \in \mathbb{N}$ tem-se $(1+i)^n = (1-i)^n$

3) Resolver as equações algébricas:

a) $z^6 - 3z^5 + 6z^3 - 3z^2 - 3z + 2 = 0$

b) $2z^4 - 5z^3 + 4z^2 - 5z + 2 = 0$

4) Descreva algebricamente e represente no plano os afixos dos números complexos z, tais que $|z - 2i| \geq |z|$.

5) O polinômio $P(z)$ é divisível por $z+2$ e, quando dividido por z^2+4, dá resto $r(z) = z+1$. Determine o resto da divisão do polinômio $P(z)$ por $B(z) = (z+2)(z^2+4)$

6) Responda verdadeiro (**V**) ou falso (**F**) e justifique.

a) A equação $z = \overline{z}$ possui apenas a solução nula.

b) A equação algébrica, na variável z, $(z-\alpha)(z-\overline{\alpha}) = 0$, possui coeficientes reais para todo $\alpha \in \mathbb{C}$.

c) Uma equação algébrica com coeficientes inteiros possui pelo menos uma raiz racional.

d) Toda equação algébrica com coeficientes reais e grau par possui pelo menos duas raízes imaginárias conjugadas.

2008

1) Calcule α,β e $\mathbb{C}$ tais que $\alpha+\beta i=i$ e $\beta+\alpha i=-1+2i$.

2) Determine o lugar geométrico dos afixos dos $z\in\mathbb{C}$ tais que $\left(z+\frac{1}{z}\right)\in\mathbb{R}$

3) Resolva as equações:

a) $z=z^5$

b) $z^7-2z^6+z^5-z^4+2z^3-z^2=0$

4) Determine a área do triângulo cujos vértices são os afixos das raízes da equação $z^3+z^2+z=0$.

5) O polinômio $A(z)=z^3+z^2+z+1$ dividido por $B(z)$ tem quociente $Q(z)=z+1$ e resto $R(z)=z+1$. Obtenha o polinômio $B(z)$.

6) Mostre que $A(z)=\left(z^n-1\right)\left(z^{n+1}-1\right)$ é divisível por $B(z)=z^2-1$

7) Seja P o afixo de $z\in\mathbb{C}$. Qual a variação do $arg(z)$ quando P percorre a circunferência dada por $(x-4)^2+y^2=4$ no sentido anti-horário?

8) Responda verdadeiro (**V**) ou falso (**F**), justificando.

a) $\left|\sqrt[4]{15+\sqrt{31}\,i}\right|=2$.

b) Se $P(z)$ é um polinômio com $\partial P\geq 1$, então existe um polinômio $Q(z)$ tal que $P(z).Q(z)=1$.

c) Para que a equação algébrica $z^3-(\lambda+4)z^2+(4\lambda+4)z-4\lambda=0$ tenha $x=2$ como raiz dupla, devemos ter $\lambda\neq 2$.

d) Seja $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1z+a_0$ polinômio com coeficientes reais. Então existem n números reais $\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n$ tal que $P(z)=a_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)...(z-\alpha_n)$

2009

1) Prove que:

a) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ e $Im(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$

b) $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$, $\forall\, z \in \mathbb{C}^*$

2)

a) Determine as raízes cúbicas de i

b) Sendo $x \in \mathbb{R}$, resolva a equação $4 \cdot \left(\dfrac{1-xi}{1+xi}\right)^2 = \left(\dfrac{1+i}{1-i} - \dfrac{1-i}{1+i}\right)^2$

3)

a) Um polinômio $P(z)$ é divisível por $A(z) = z+1$, e quando dividido por $B(z) = z^2+1$ dá quociente $Q(z) = z^2 - 4$ e resto $R(z)$. Se $R(2) = 9$, escreva o polinômio $P(z)$.

b) Se o resto da divisão de um polinômio $P(z)$ por $B(z) = z^2 - 3z + 2$ é $R(z) = z+1$, então calcule o resto da divisão de $P(z)$ por $z-2$

4) Resolva as equações algébricas em $\mathbb{C}$:

a) $2z^4 - 3z^3 - 7z^2 - 8z + 6 = 0$

b) $(z+1)^4 = z^4$

5) Responda verdadeiro (**V**) ou falso (**F**), justificando.

a) Toda equação algébrica de grau ímpar com coeficientes inteiros possui pelo menos uma raiz racional.

b) Se o polinômio $A(z)$ é divisível pelo polinômio $B(z)$, então $A(z)$ também é divisível pelo produto $P(z) = [B(z)]^2$

c) Sejam α e β duas raízes da equação $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, então $\dfrac{\alpha}{\beta}$ é também raiz dessa equação.

d) Se $\alpha = \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{-1}$, então $\overline{\alpha} = i$

2010

1) Determine $z \in \mathbb{C}$ tal que $iz + 3\overline{z} + \left(z + \overline{z}\right)^2 = i$

2) Se $\alpha = 1 + i$, calcule o valor de $1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^9$

3) Determine o lugar geométrico dos afixos dos números complexos z tais que $|z + i| = |1 - z|$

4) Entre os números complexos z, tais que $|z + 1 - i| = 2$, determine o que tem o maior módulo.

5) Seja o polinômio real $p(x) = x(x-2)\left(x^2 - 1\right)$. Esboce o gráfico da função $f(x) = p(x-2)$

6) Se o número complexo i é uma raiz da equação algébrica $z^5 - az^3 + az^2 - 1 = 0$, com $a \in \mathbb{R}$, então encontre as demais raízes dessa equação.

7) Resolva as equações algébricas em $\mathbb{C}$:

a) $z^4 + 10z^2 + 9 = 0$

b) $z^9 = z$

c) $z^5 - 5z^4 + 10z^3 - 10z^2 + 4z = 0$

d) $z^5 - z^4 + z^3 - z^2 + z - 1 = 0$

2011

1) Resolva as equações em $\mathbb{C}$:

a) $z^2 + |z|^2 + iz - 1 = 0$

b) $2z^4 - 3z^3 - 3z^2 + 6z - 2 = 0$

2) Se $\alpha = 1$ é uma raiz dupla da equação $z^4 - 2z^3 + 2z^2 + mz + n = 0$, determine:

a) os valores de *m* e de *n*;

b) as outras raízes da equação.

3)

a) Determine o lugar geométrico dos afixos dos números complexos z, tais que $|z+1| = |z-1|$

b) Representante no plano complexo os afixos dos números complexos z, tais que $|z-i| > |z-1|$

4)

a) Mostre que o polinômio $P(z) = 7z^8 - 8z^7 + 1$ é divisível por $B(z) = (z-1)^2$

b) Decomponha o polinômio $A(z) = z^4 + 2z^2 + 1$ em fatores do 1° grau.

5) Seja $P(z) = z^n + z^{n-1} + ... + z + 1$, em que *n* é um número natural par.

a) Calcule $P(1)$ e $P(-1)$.

b) Prove que a equação algébrica $P(z) = 0$ não possui raiz real.

2012

1) Determine o menor número natural *n* para que $\left(-\sqrt{3}+i\right)^n$ seja um número real.

2) Represente no plano complexo os afixos dos números complexos z tais que $Re\left(\frac{1}{z}\right) \geq \frac{1}{2}$ e $0 \leq arg\left(z\right) \leq \frac{\pi}{4}$

3) Seja o polinômio $P\left(z\right) = z^5 - 5az \ + b$

a) Determine a e b para que $P\left(z\right)$ seja divisível por $B\left(z\right) = \left(z-1\right)^2$

b) Determine o quociente dessa divisão.

4) Resolva as equações em $\mathbb{C}$:

a) $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

b) $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$

5) Se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma função complexa dada por $f\left(z\right) = z + 2$ e $A = \left\{z \in \mathbb{C};\ 0 \leq Re\left(z\right) \leq 1 \ \text{e} \ 0 \leq Im\left(z\right) \leq 1\right\}$, então represente no plano complexo:

a) o conjunto *A*;

b) o conjunto $f\left(A\right)$ formado pelas imagens $f\left(z\right)$ em que $z \in A$.

6) Responda verdadeiro (**V**) ou falso (**F**), justificando.

a) Se $z \in \mathbb{C}^*$, então $\frac{1}{z} = \frac{z}{|\,z\,|} - \frac{z}{|\,z\,|}i$

b) Se *n* é um número natural par, então $i + i^2 + ... + i^n \ = 0$

c) Toda equação algébrica de grau $n \in \mathbb{N}\left(n > 1\right)$ possui pelo menos uma raiz imaginária.

d) $\alpha = 1003$ é uma raiz da equação algébrica $z^3 - 1002z^2 - 1001z - 2006 = 0$

2. Quartas provas de Matemática Básica I

1998

1) Determine $x \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{x} > -100$

2) Esboce o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x+4} - 1$ e determine os pontos de interseção do gráfico com os eixos coordenados.

3) Resolva a equação trigonométrica $sen\, x \cos^3 x - sen^3 x \cos x = 0$

4) Dê a imagem, o período e esboce o gráfico da função $f(x) = 1 - |\, sen 2x\,|$

5) Um hexágono regular, inscrito numa circunferência de centro na origem, tem como um de seus vértices o afixo de $z = 2i$. Quais números complexos têm afixos nos outros vértices do hexágono?

6) Dado o polinômio $P(z) = z^3 + 2z^2 + az + b$, determinar a e b de modo que $M(z) = P(z) + 1$ seja divisível por $z+1$ e $N(z) = P(z) - 1$ seja divisível por $z-1$

7) Resolver a equação $(x-2)^3 = 4 - x$

Observação: Todo argumento usado na solução de uma questão deve ser escrito como parte integrante da solução.

1999

1) Esboce o gráfico de $y = \left| \dfrac{1}{(x+1)^2} - 1 \right|$ e dê as interseções com os eixos coordenados.

2) Resolver as equações e inequações abaixo:

a) $\dfrac{x^2 + x + 1}{4 - x^2} \geq 0$

b) $sen^2 x - cos^2 x = cos\, x$ em $\mathbb{R}$

c) $4 cos^2 x < 3$ no intervalo $[\ 0, 2\pi\ ]$

3) Esboce o gráfico da função $y = \sqrt{1 - sen^2 x} + cos\, x$ no intervalo $[\ 0, 2\pi\ ]$

4)

a) Determine os números complexos z com $|\ z\ | = 2$ que satisfazem a igualdade

$|\ z - i\ | = \sqrt{2}\ |\ i - 1\ |$

b) Interprete geometricamente o item (a).

5) Dividindo um polinômio $P(z)$ por $(z-1)^3$, obtém-se um resto que, dividido por $z-1$, dá resto 5. Determine o resto da divisão de $P(z)$ por $z-1$

6) Resolver a equação $2z^4 - 9z^3 + 16z^2 - 14z + 4 = 0$

7) Prove que o perímetro de um polígono regular de n lados, inscrito em um círculo unitário, é dado por $2n\ sen\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$

2000

1) Dada a função $y = 2sen(\pi x)$, determine:

a) o período e os zeros desta função;

b) um esboço do seu gráfico.

2) Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação e as inequações abaixo:

a) $tg\ x = sen\ 2x$

b) $cos\,2x < 1 + sen\ x$

c) $x^2 + 4|\,x\,| < 5$

3) Esboce o gráfico da função $y = |\,x\,| + |\,x-2\,|$ em que $x \in \mathbb{R}$ e indique o conjunto imagem.

4) Deseja-se construir uma pista de atletismo com 400 metros de comprimento acoplando-se duas semicircunferências a um retângulo que deverá ser um campo de futebol. Quais as dimensões do retângulo de maior área que assim poderá ser construído?

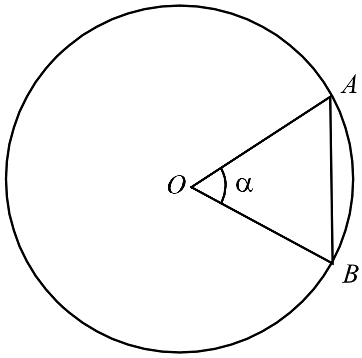
5) Responda justificando.

a) O valor de m para que a função $f(x) = x^2 - 2x + 2m$ tenha como imagem o conjunto $\mathbb{R}_+$ é $m = 1$?

b) Quais números naturais n anulam a soma $i + i^2 + ... + i^n$?

c) Existe alguma equação algébrica do 3° grau com coeficientes em $\mathbb{C}$ que não possua raiz real?

d) Está correta a solução do exercício descrita abaixo?



Exercício:

Na figura temos uma circunferência de centro O e raio OA com $\overline{OA} = \overline{OB} = 2$ e $\overline{AB} = 3$. Calcule $sen\ \alpha$.

Solução:

Aplicando o teorema dos senos no triângulo AOB,

temos $\dfrac{\overline{AB}}{sen\ \alpha} = 2r$,

logo $\dfrac{3}{sen\ \alpha} = 2 \text{ x } 2 \Rightarrow \dfrac{3}{sen\ \alpha} = 4 \Rightarrow 4\ sen\ \alpha = 3 \Rightarrow sen\ \alpha = \dfrac{3}{4}$

6) Dado o polinômio complexo $P(z) = z^2 + (1+i)^2$, determine os zeros de $P(z)$ e escreva-os na forma $a+bi$, com a e b reais.

2001

1) Dada a função $f\left(x\right)=\left|\dfrac{1}{x-1}-1\right|$, determine:

a) domínio, imagem e zeros da função;

b) um esboço do gráfico.

2) Dada a função $g\left(x\right)=1-\left|\ cos\,2x\ \right|$, determine

a) zeros da função;

b) esboço do gráfico.

3) Resolver em $\mathbb{R}$:

a) $\dfrac{2}{x^2-1}+\dfrac{1}{x+1}=-1$

b) $\dfrac{x^2+x+1}{4-x^2}\ \geq\ 0$

c) $\dfrac{1}{4}\ \leq\ sen\ x\,cos\,x\ <\ \dfrac{1}{2}$

d) $cos\,2x+cos\,x+1=0$

4) Determine o valor de k para que $sen\,\theta$ e $cos\,\theta$, $\left(\theta\in\mathbb{R}\right)$ sejam as raízes da equação algébrica

$2x^2-kx-1=0$

5) Se $z\in\mathbb{C}$, mostre que $\dfrac{z+i\,\overline{z}}{1+i}$ é um número real.

6) Resolver a equação em $\mathbb{C}$: $2x^3 + x^2 + x - 1 = 0$

7) Um grupo de estudantes pretendia fretar um ônibus para participar de um congresso em Brasília. Inicialmente não havia número exato de estudantes que participariam da excursão, então se combinou com uma empresa de ônibus a seguinte regra de preços: "Para um ônibus de 40 lugares a empresa cobraria de cada passageiro R$ 50,00 mais R$ 5,00 por cada lugar vazio". Qual número de passageiros daria rentabilidade máxima para a empresa de ônibus? Qual é essa rentabilidade?

2002

1) Dadas as funções $f(x)=\left|1+\dfrac{1}{x-1}\right|$ e $g(x)=|\ x+1\ |$

a) encontre os zeros da função $f(x)$

b) esboce o gráfico de $f(x)$ e de $g(x)$ num mesmo sistema cartesiano

c) encontre os pontos de interseção dos gráficos das duas funções.

2) Resolva a inequação em $\mathbb{R}$.

$$\frac{x(x+2)}{x^2-1}\geq 0$$

3) Esboce o gráfico da função $f(x)=sen(\pi x).cos(\pi x)$

4) Resolver a equação em $\mathbb{R}$ $\quad sen^6x+sen^4x+sen^2x=3$

5) Determine a e b para que o polinômio $P(z)=z^3+az^2+bz-2$ seja divisível por $B(z)=(z+1)(z-3)$

6) Esboce o lugar geométrico dos afixos dos números complexos z tal que $Im\left(z^2\right)=1$

7) Para que valores de n, inteiro positivo, $(1+i)^n$ é um número real?

2003

1) Dada a função $f(x)=1-\dfrac{1}{|x|}$, determine o domínio, a imagem, os zeros e faça um esboço do gráfico de f

2) Esboce o gráfico da função real $g(x)=2sen(\pi x)$

3) Resolva as equações e inequações em $\mathbb{R}$

a) $-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{2} \geq \dfrac{-1}{x}$

b) $4cos^2 x < 3$ no intervalo $[\ 0,2\pi\ ]$

c) $\big|\,|x| -1\big| \leq 1$

d) $2|x| +1=|x|$

4) Determine os zeros do polinômio complexo $P(z)=z^2+(1+i)^2$ e escreva-os na forma algébrica.

5) Encontre o valor do número real a para que $\dfrac{1+2i}{2+ai}-ai^{30}$ seja um número real.

6) Sejam $z\in\mathbb{C}$ com $|z|=1$, $arg(z)=\theta$ e $n\in\mathbb{N}$. Mostre que $z^n+\dfrac{1}{z^n}=2cos(n\theta)$

7) Resolva a equação algébrica em $\mathbb{C}$

$$z^4-2z^3+3z^2-2z+2=0$$

2004

1) Dada a função $f(x) = \left| x \middle| x \right| + 1 \big|$, determine:

a) o domínio, a imagem e os zeros da função f

b) um esboço do gráfico de f

2) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função definida por $f(t) = cos\,t + i\ sen\ t$.

Prove que $f(x)\,f(y) = f(x+y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$

3) Resolva a equação $1 + 2sen\,x + 4sen^2 x + 8sen^3 x = 0$ em $\mathbb{R}$.

4) Represente geometricamente no plano complexo os conjuntos A, B e $A \cap B$, sendo

$$A = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, z\,\overline{z} = 4 \} \ \text{ e } \ B = \left\{ z \in \mathbb{C} \,/\, \left(\overline{z}\right)^2 = z^2 \right\}$$

5) Responda verdadeiro (**V**) ou falso (**F**), justificando sua resposta.

a) A equação algébrica $z^4 - 5z - 6 = 0$ possui quatro raízes reais.

b) O intervalo $[-1,\ 1]$ é o conjunto solução da inequação $\dfrac{x^2 + x + 1}{4 - x^2} \geq 0$

c) Existe polinômio do 3° grau definido no conjunto dos números complexos que não possui zero real.

d) O valor de $sen\left(arccos \dfrac{2}{3} \right)$ é $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

2005

1) Seja a função real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x\,|\,x\,| - x - 2$

a) esboce o gráfico de f

b) estabeleça um domínio no qual f possua inversa e dê uma expressão para a inversa de f restrita a esse domínio.

2) Dada $g(x) = |\,tg(\pi x)\,| - 1$, determine:

a) domínio, imagem e zeros de g

b) um esboço do gráfico g

3) Resolva as equações e inequações em $\mathbb{R}$

a) $\dfrac{1}{x-1} < \dfrac{2}{x-2}$

b) $2sen^2 x + 7sen\ x + 3 \leq 0$

c) $sen^3 x - sen^2 x + sen\ x - 1 = 0$

d) $cos\,2x + 2sen^2 x + 2 = 0$

4)

a) Quais são os números naturais n que tornam $\left(\sqrt{2} - \sqrt{2}\ i\right)^n$ um número real positivo?

b) Determine o lugar geométrico dos afixos dos complexos z tais que z^2 é imaginário puro.

5)

a) Prove que o polinômio $P(z) = nz^{n+1} - (n+1)z^n + 1$ é divisível por $B(z) = (z-1)^2$

b) Mostre que a equação algébrica $z^3 - 3z + 1 = 0$ possui três raízes irracionais e distintas.

2006

1) Dada a função $f(x)=\left|\ 2sen(4x)\ \right|-1$, determine:

a) domínio, imagem e zeros de f

b) um esboço do gráfico de f , por etapas.

2) Resolva em $\mathbb{R}$ as equações:

a) $(1+x)(1-|\ x\ |)\ \geq\ 0$

b) $sen^3 x+cos^4 x=1$

c) $x^2+\dfrac{1}{x^2}+x+\dfrac{1}{x}=4$

3) Resolva o sistema $\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{4} \\ sen\ x=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$, para x e y no intervalo $(0,\ 2\pi)$

4) Seja $P(x)=x^6-1$ um polinômio real. Esboce o gráfico da função $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=P(x-2)$

5) Dado $z=\dfrac{a-i}{a+i}$, encontre todos os valores reais de a para que se tenha $Re(z)\ <\ 0$.

6) Responda verdadeiro (**V**) ou falso (**F**), justificando sua resposta.

a) Existe um número racional α tal que α^2 é irracional.

b) Se $a,b\in\mathbb{R}$ e $a<b$, então $a^2<b^2$

c) Toda equação algébrica com coeficientes inteiros possui pelo menos uma raiz racional.

d) Sejam z e w dois números complexos não nulos, cujos afixos estão sobre a reta de equação $y=kx$ (k constante não nula). Então podemos dizer que $\dfrac{z}{w}\in\mathbb{R}$

2007

1) Resolva as equações e inequações em $\mathbb{R}$

a) $\frac{1}{x-2} \leq \frac{2}{x-1}$

b) $sen^6 x + sen^4 x + sen^2 x = 3$

2) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$. Determine

a) uma expressão, os zeros e o gráfico de $g(x) = 1 - f(x-1)$

b) prove que g é decrescente e dê a lei da inversa g^{-1}

3) Dada $f(x) = 1 + sen(\pi x)$, determine:

a) domínio, imagem, zeros e período de f

b) o gráfico de f

4) Represente no plano complexo os afixos dos números complexos z tais que $Im(z^2) = 2$

5) Obtenha o quociente e o resto da divisão de $A(z) = z^n - \alpha^n$ por $B(z) = z - \alpha$ (α número complexo constante).

6) Um triângulo equilátero, inscrito numa circunferência de centro na origem, tem como um de seus vértices o afixo do número complexo $\sqrt{3} + i$. Determine:

a) os números complexos cujos afixos são os outros dois vértices do triângulo;

b) a área do triângulo.

2008

1) Resolva a equação e a inequação:

a) $\dfrac{x}{x-1} > \dfrac{x+2}{x}$

b) $2cos^3 x - cos^2 x - 8cos\,x + 4 = 0$

2) Dada $g(x) = 1 - 2\ sen\ 2x$, esboce o gráfico de g apresentando as etapas do desenvolvimento.

3) Dada a função $f(x) = arctg(x-1)$, determine:

a) domínio, zeros e conjunto imagem;

b) um esboço do gráfico.

4) Represente no plano complexo os afixos dos números complexos z tais que $Im\left[(z-1)^2\right] = 2$

5) Seja $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \quad (a_n \neq 0)$ um polinômio com coeficientes inteiros. Se a_0 é ímpar, então mostre que nenhum número inteiro par pode ser raiz desse polinômio.

6) Mostre que a equação algébrica $x^4 + x - 3 = 0$ possui pelo menos duas raízes reais.

2009

1) Dada a função real $f(x)=\left|(x-2)^3+1\right|$, determine:

a) domínio, zeros e imagem;

b) um esboço do gráfico.

2) Resolva as equações.

a) $\left|\left||x-1|-1\right|-1\right|=0$ em $\mathbb{R}$

b) $cot\,g\ x-sen\ 2x=0$ em $\mathbb{R}$

c) $arcsen\sqrt{x}+ar\,c\,cos\,\sqrt{x}=\dfrac{\pi}{2}$ em $\mathbb{R}$

d) $x^5-x^3+2x^2-2=0$ em $\mathbb{C}$

3) Seja $P(x)=\left(ax^2-2bx+c+1\right)^5$ um polinômio. Se 0 e -1 são raízes de $P(x)$ e a soma dos coeficientes do polinômio $P(x)$ é 32, calcule os valores de *a*, *b* e *c*.

4) Represente no plano complexo o lugar geométrico dos afixos dos números complexos *z*, tais que $|z-i|\geq|z-1|$.

5) Calcule o módulo do número complexo $w=\dfrac{1}{1+itgx}$, para $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$

2010

1) Se $f(x)=\left|\left|x^2-1\right|-1\right|$, determine:

a) domínio, imagem e zeros de f

b) um esboço do gráfico de f

2) Se $g(x)=|sec\,x|-1$, determine:

a) domínio, imagem e zeros de g

b) um esboço do gráfico de g

3) Resolva em $\mathbb{R}$

a) $2\,cos\,2x-cos\,x=3$

b) $(x-1)\left(8x-9-2x^2\right)\leq 0$

4) Resolva em $\mathbb{C}$

a) $(x-2)^3=4-x$

b) $x^4-2x^3+3x^2-2x+2=0$

5) Responda verdadeiro (**V**) ou falso (**F**), justificando

a) Se *a* e *b* são números irracionais, então *a*+*b* é irracional.

b) Seja $D=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;\ k\in Z\right\}$. Se $a,b\notin D$ e $a<b$, então $tg\ a<tg\ b$

c) Seja $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1z+a_0$ um polinômio com coeficientes reais. Sejam $\alpha\in\mathbb{C}$ e $\overline{\alpha}$ o seu conjugado. Se $P(\alpha)=\beta$, então $P(\overline{\alpha})=\overline{\beta}$.

d) Se $b\neq 0$, então a equação algébrica $x^3+ax+b=0$ não possui raiz de multiplicidade 3.

2011

1) Resolva.

a) $\dfrac{x^2+2x}{x^2-1} \leq 0$ b) $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$

2) Se $f(x) = \left|\sqrt{2}\, sen(\pi x)\right| - 1$, determine os zeros e um esboço do gráfico de f

3) Seja $f(x) = \sqrt{x}$. Se $g(x) = 1 + f(x-2)$, determine:

a) a expressão, o domínio e o gráfico de g

b) a expressão, o domínio e o gráfico da inversa g^{-1}

4) Dado o sistema de equações $\begin{cases} |\, z \,| = 2 \\ |\, z - i \,| = 1 \end{cases}$

a) determine as soluções complexas do sistema;

b) dê uma interpretação geométrica desse sistema no plano complexo.

5) Responda verdadeiro (**V**) ou falso (**F**), justificando a resposta.

a) Se p é um número inteiro ímpar, então p^3 é ímpar.

b) Se $r \in \mathbb{Q}$, então $(r+1)^2 \in \mathbb{Q}$

c) O maior valor que a função $f(x) = senx + \cos x$ pode assumir é 2.

d) Toda equação algébrica com coeficientes reais e grau n par possui pelo menos duas raízes reais.

2012

1) Resolva as equações.

a) $\frac{1}{2x-1} < \frac{1}{x-1}$ b) $sen^4 x + cos^4 x = \frac{1}{2}$

2) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \left|(x-1)^3 - 1\right|$. Determine:

a) $z(f)$; interseção do $Gr(f)$ com os eixos coordenadas e $Im(f)$

b) o gráfico de f

3) Se $g(x) = |2senx + 1|$, determine:

a) $z(g)$ e $Im(g)$

b) o gráfico de g

4)

a) Represente no plano cartesiano o conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}\text{x}\mathbb{R} \;/\; x^2 = 1\}$

b) Represente no plano complexo os afixos dos números $z \in \mathbb{C}$ tais que $Im(z^2) \geq 0$

5) Responda verdadeiro (**V**) ou falso (**F**), justificando.

a) Se $f(x) = sen|x|$, então o conjunto $Im(f) = [0,1]$

b) Se $(1 + tg^2 x)cos\, x = 2$, então $cos\, 2x = -\frac{1}{2}$

c) Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Se α é um número imaginário e $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$, então β é um número imaginário.

d) Seja $P(z) = 1 + z + z^2 + ... + z^n$, $n \in \mathbb{N}$. Se $P(i) = 0$, então $P(-i) = 0$

3. Respostas das questões das terceiras provas

1998

1) $\overline{z} = -1 + 2i$

2) $z = -1 - i$

3) -1

4) circunferência com centro $C(0,1)$ e raio 2

5) $n = 4$

6) $m = -\dfrac{4}{3}$ e $n = -\dfrac{13}{3}$

7) $S = \left\{2,\ \sqrt{3},\ -\sqrt{3}\right\}$

8) $P(z) = (z-1)(z+2)(z+i)(z-i)$

9) $p = 4$ e $q = 0$

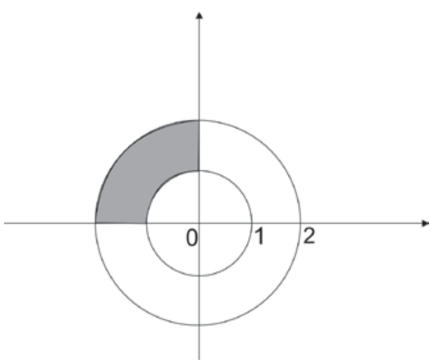
1999

1) 1 ou -1

2) -5

3) $z_2 = -3 + i$, $z_3 = -1 - 3i$ e $z_4 = 3 - i$

4)



5) $S = \{i,\ -i,\ 2+i,\ 2-i\}$

6) $S = \{3,\ 1+i,\ 1-i\}$

7) $S = \{-1,\ 2\}$

8) 4

9) zero

10) $2-3i$

2000

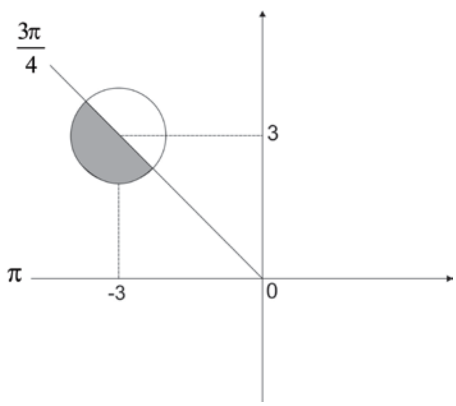
1) $0, -1$ e 1

2) a) $S = \{2,\ 2+i,\ 2-i\}$

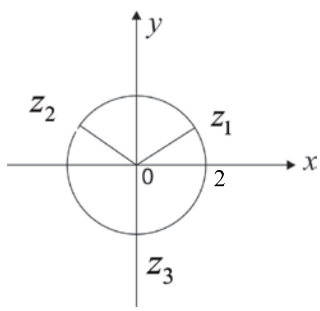
b) $S = \left\{0,\ 2,\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -2\right\}$

3)

a)



b)



4) $n = 3+6k$ com $k \in \mathbb{N}$

5) $m = -2$ e $n = -4$

6) $S = \left\{i_{(2)},\ -i_{(2)},\ -3\right\}$

7) $5+3i$

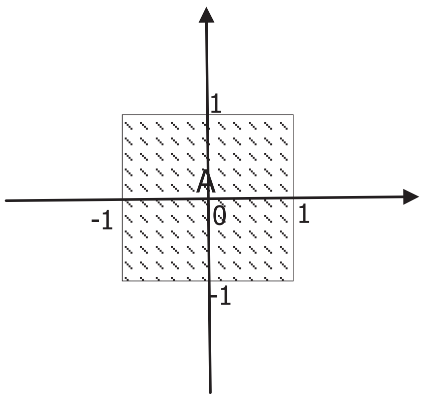
8) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 = 1 \text{ ou } y = 0 \text{ e } x \in \mathbb{R}^*\right\}$

2001

1) n número natural par

2) a) $4i$ b) $S = \{1-i,\ -1+i\}$

3)



5) $P(z) = 3z^2 - 6z + 6$

6) $S = \{2,\ 3,\ i, -i\}$

7) a) V b) V c) F d) F (*justificar*)

2002

1) 1

2) circunferência com centro $C(-1,0)$ e raio 1

3) $|z| = 1$

5) $R(z) = z^2 + z - 1$

6) $S = \left\{-2,\ \frac{1}{2},\ i, -i\right\}$

7) a) V b) F c) F d) V

2003

1) $\alpha = 1$, raízes $1+i$ e $-i$

2) reta de equação $x = -1$

4) $R(z) = z$

5) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

6) zero

7) $x = 7 - 2\sqrt{6}$

8) a) F b) V c) V d) V (*justificar*)

2004

1) $P(z) = z^4 - z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}$

2) zero

3) $z_1 = \sqrt{3} + i,\ z_2 = -\sqrt{3} + i,\ z_3 = -2i$ e $p = 6\sqrt{3}$

4. a) $S = \{0,\ 1+i,\ 1-i\}$

b) $S = \{1,\ i, -i\}$

5) a) V b) V c) V d) F (*justificar*)

2005

1) a) circunferência de raio 1 e centro $C(-1,0)$

b) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

2) a) $S=\left\{3,\ \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i,\ \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i\right\}$

b) $z^3-\left(3+\sqrt{2}\right)z^2+\left(7+2\sqrt{2}\right)z-5\left(1+\sqrt{2}\right)=0$

3) $R(x)=x-1$

4) 1

5) a) V b) V c) F d) V (*justificar*)

2006

1) a) $S=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ \frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ \frac{-\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right\}$

b) $S=\left\{0,\ 1,\ \frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

3) zero

4) $12\sqrt{2}$

7) $b=-1,\quad c=-18$

2007

1) a) $a=\frac{1}{16},\ b=\frac{-3}{4}$

2) $n=4k$ com $k\in\mathbb{N}$

3) a) $S=\{-1,\ 1,\ 2\}$

b) $S=\left\{\frac{1}{2},\ 2,\ i,\ -i\right\}$

4) $S=\{(x,y)\,/\,y\le 1\}$

5) $R(z)=\frac{1}{8}z^2+z+\frac{3}{2}$

6) a) F b) V c) F d) F (*justificar*)

2008

1) a) $\alpha = 1 + i$ e $\beta = i$

2) circunferência unitária reunida com o eixo real excluída a origem

3) a) $S = \{0,\ 1,\ -1,\ i,\ -i\}$

b) $S = \left\{0,\ 1,\ \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

4) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

5) $B(z) = z^2$

7) $Arg(z) \in \left[0,\ \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right)$

8) a) V b) F c) V d) F (*justificar*)

2009

2) a) $S = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,\ \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,\ -i\right\}$

b) $S = \{-1,\ 1\}$

3) a) $P(z) = z^4 - 3z^2 + z + 3$

b) 3

4) a) $\{1/2,\ 3,\ -1+i,\ -1-i\}$

b) $\{-1/2,\ -1/2 + 1/2\, i,\ -1/2 - 1/2\, i\}$

5) a) F b) F c) V d) V (*justificar*)

2010

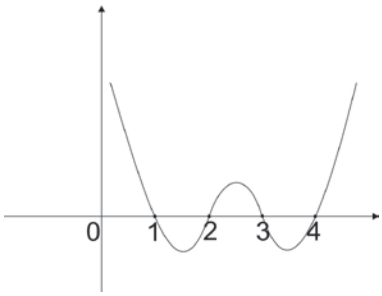
1) $S=\left\{-1/2-1/2\,i,\ -1/6-7/18\,i\right\}$

2) $32+i$

3) A reta de equação $y=-x$

4) $z=\left(-1-\sqrt{2}\right)+\left(1+\sqrt{2}\right)i$

5)



6) $S=\left\{1,\ i,\ -i,\ \frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

7) a) $S=\{i,\ -i,\ 3i,\ -3i\}$

b) $S=\left\{0,\ 1,\ -1,\ i,\ -i,\ \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ \frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ \frac{-\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right\}$

c) $S=\{0,\ 1,\ 2,\ 1+i,\ 1-i\}$

d) $S=\left\{1,\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

2011

1) a) $S=\left\{-i,\ \frac{-1}{2}-\frac{1}{2}i,\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right\}$

b) $S=\left\{1,\ 1/2,\ \sqrt{2},\ -\sqrt{2}\right\}$

2) a) $m=-2,\ n=1$

b) $S=\{1,\ i,\ -i\}$

3) a) eixo imaginário

b) semiplano $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y<x\}$

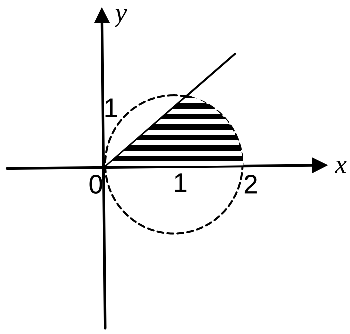
4) b) $A(z)=(z-i)(z-i)(z+i)(z+i)$

5) a) $P(1)=n+1$ e $P(-1)=1$

2012

1) $n=6$

2)

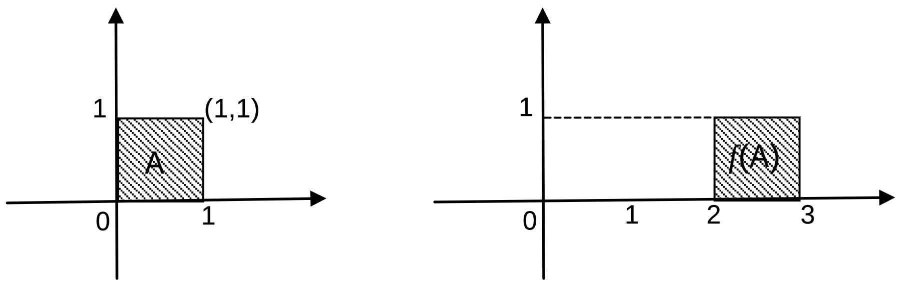


3) a) $a=1,\ b=4$ b) $Q(z)=z^3+2z^2+3z+4$

4) a) $S=\left\{-1,\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \ \frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \ \frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

b) $S=\left\{1,\ -2,\ \frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \ \frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \ 1+\sqrt{3}i,\ \ 1-\sqrt{3}i\right\}$

5)



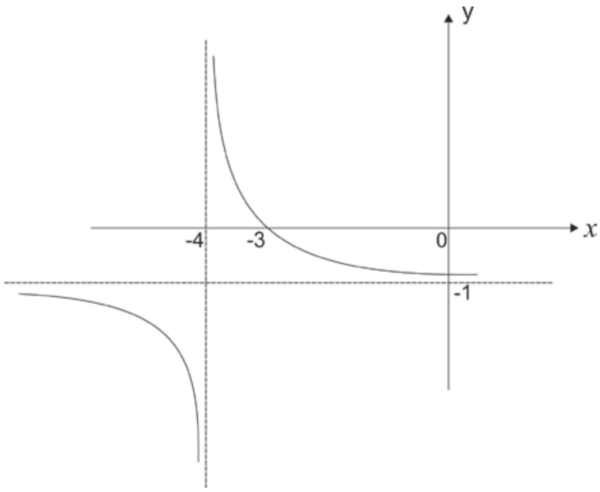
6) a) F b) F c) F d) V (*justificar*)

4. Respostas das questões das quartas provas

1998

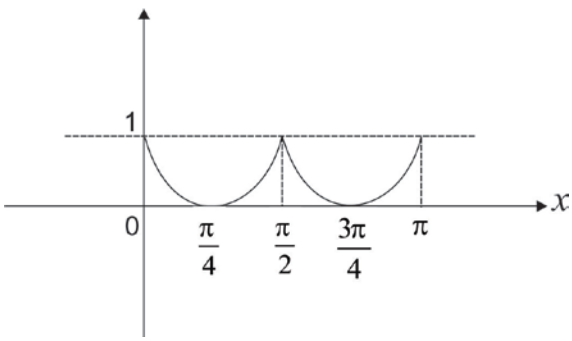
1) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x < \dfrac{-1}{100} \ \text{ ou } \ x > 0 \right\}$

2)



3) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x = \dfrac{k\pi}{4};\ x \in \mathbb{Z} \right\}$

4)



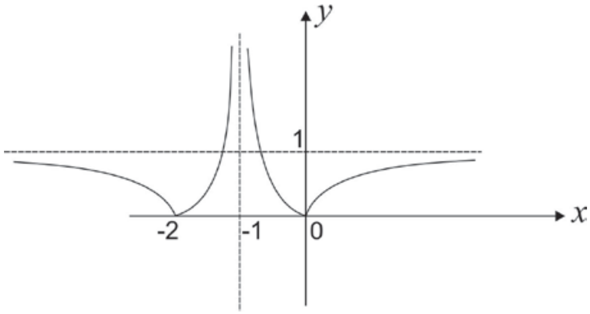
5) $\left\{ 2i,\ -\sqrt{3}+i,\ -\sqrt{3}-i,\ -2i,\ \sqrt{3}-i,\ \sqrt{3}+i \right\}$

6) $a = 0$ e $b = -2$

7) $S = \left\{ 3,\ \dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{7}}{2}i,\ \dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{7}}{2}i \right\}$

1999

1)

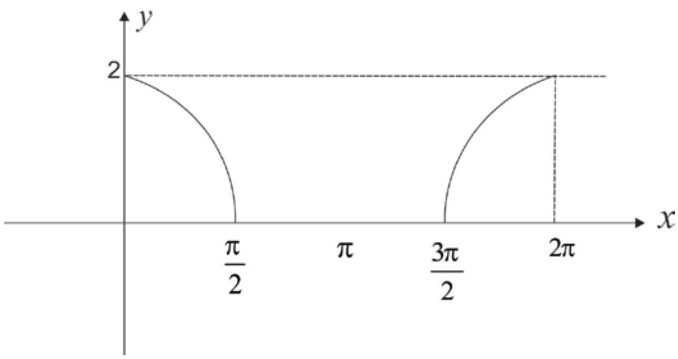


2) a) $S =]-2, 2[$

b) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x = (2k+1)\dfrac{\pi}{3};\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

c) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, \dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{5\pi}{6} \ \text{ ou } \ \dfrac{7\pi}{6} < x < \dfrac{11\pi}{6} \right\}$

3)



4) a) $z_1 = \dfrac{\sqrt{15}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ e $z_2 = -\dfrac{\sqrt{15}}{2} + \dfrac{1}{2}i$

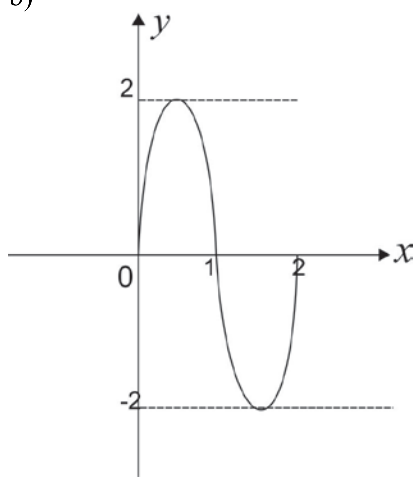
b) afixo de z_1 e de z_2 são as interseções de duas circunferências

5) resto $r = 5$.

6) $S = \left\{ 2,\ {}^{1}\!/_{2},\ 1+i,\ 1-i \right\}$

1) a) $p = 2$
$z(f) = \mathbb{Z}$

b)

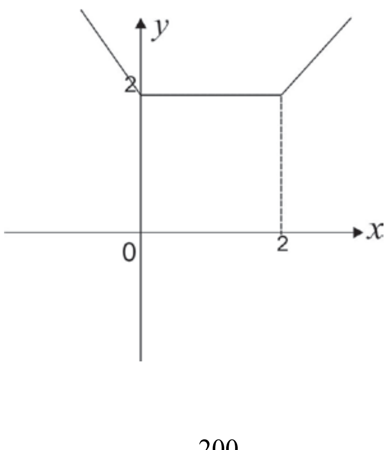


2) a) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

b) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, 2k\pi < x < (2k+1)\pi \text{ ou } \frac{7\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{11\pi}{6} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

c) $S = \left]-1, 1\right[$

3)



4) $100\text{m} \times \frac{200}{\pi}\text{m}$

5) a) não (*justificar*)

b) múltiplos de 4

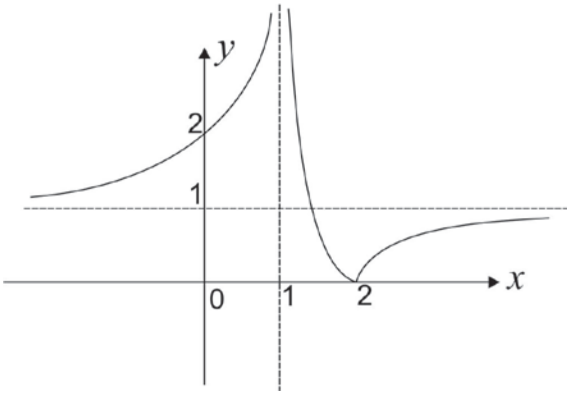
c) existe; $z^3 - i = 0$

d) não (*justificar*)

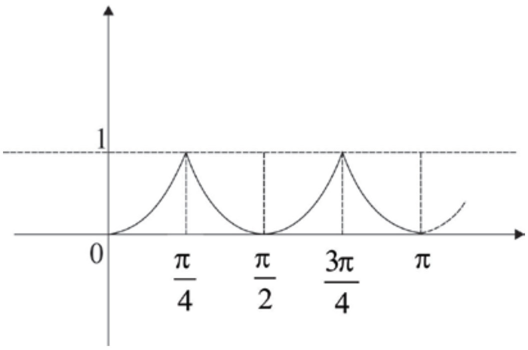
6) $z_1 = 1 - i$ e $z_2 = -1 + i$

2001

1)



2)



3) a) $S = \{0\}$

b) $S =]-2, 2[$

c) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, \frac{\pi}{12} + k\pi \le x < \frac{5\pi}{12} + k\pi \text{ e } x \ne \frac{\pi}{4} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

d) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

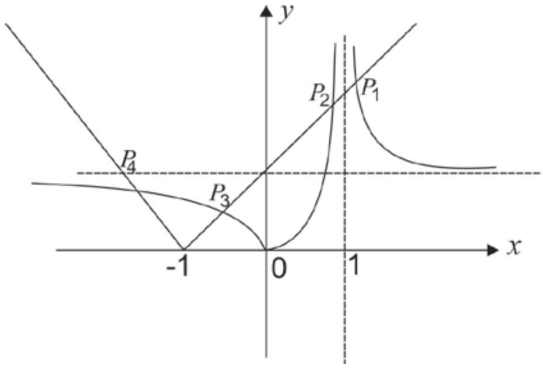
4) $k = 0$

6) $S = \left\{ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}$

7) 25 e R$ 3.125,00

2002

1)

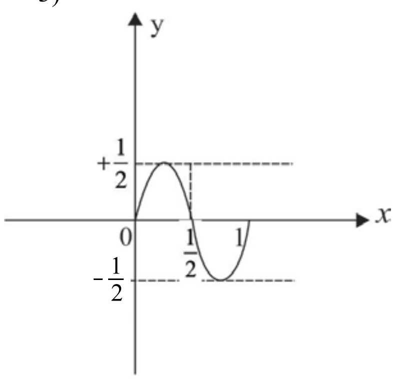


$P_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right),\ P_3\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$

$P_2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right),\ P_4\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\ \left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|\right)$

2) $S = (-\infty, -2\,] \cup (-1, 0] \cup (1, +\infty)$

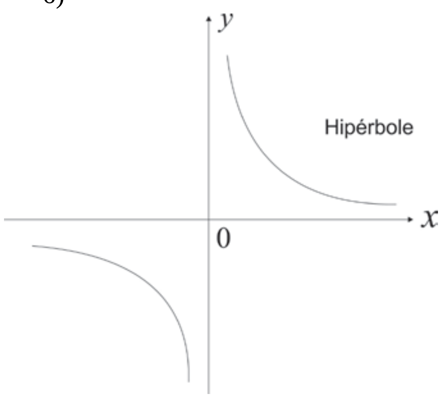
3)



4) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x = \frac{\pi}{2} + k\pi;\ \ k \in \mathbb{Z} \right\}$

5) $a = \frac{-4}{3}$ e $b = \frac{-13}{3}$

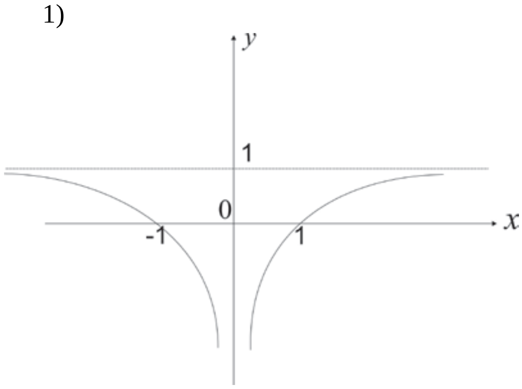
6)



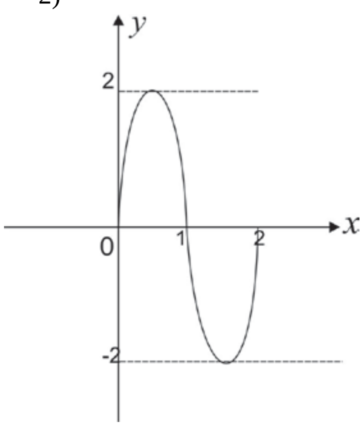
7) múltiplos de 4.

2003

1)



2)



3) a) $S=(-\infty,0)\cup[2,+\infty)$

b) $S=\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{7\pi}{6},\ \frac{11\pi}{6}\right)$

c) $S=[-2,2]$

d) $S=\varnothing$

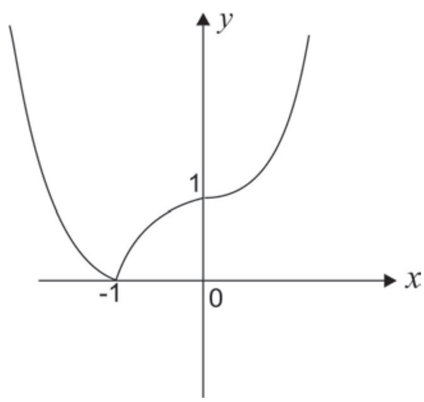
4) $S=\{1-i,\ \ -1+i\}$

5) $a=4$

7) $S=\{i,\ -i,\ 1+i,\ 1-i\}$

2004

1)



3) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi\ \text{ ou }\ x=\frac{11\pi}{6}+2k\pi;\ \ x\in\mathbb{Z}\right\}$

4) *A*: circunferência de centro $C(0,0)$ e raio $r=2$

B: eixos coordenadas

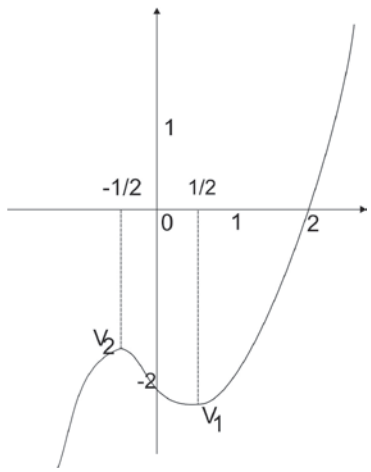
$A\cap B=\{(2,0),\ (-2,0),\ (0,2),\ (0,-2)\}$

5) a) F b) F c) V d) V (*justificar*)

2005

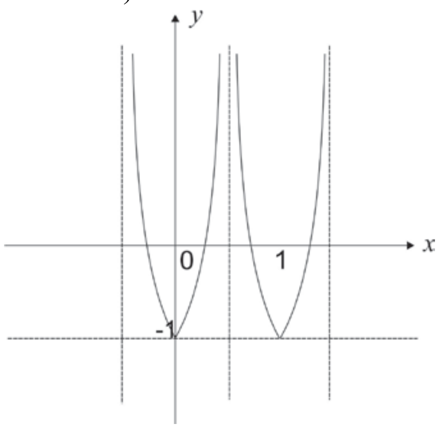
1) $D = \left[\ {}^{1}\!/_{2}, +\infty\right)$ é um possível domínio e

$$f^{-1}(y) = \frac{1+\sqrt{4y+9}}{2}$$



2) a) $Dom(g) = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq \frac{1}{2} + k;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ e $z(g) = \left\{\frac{1}{4} + \frac{k}{2};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

b)



3) a) $S = (0,1) \cup (2,+\infty)$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{11\pi}{6} + 2k\pi;\ \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S = \varnothing$

4. a) múltiplos de 8. b) retas de equação $y = x$ e $y = -x$, exceto a origem $O(0,0)$

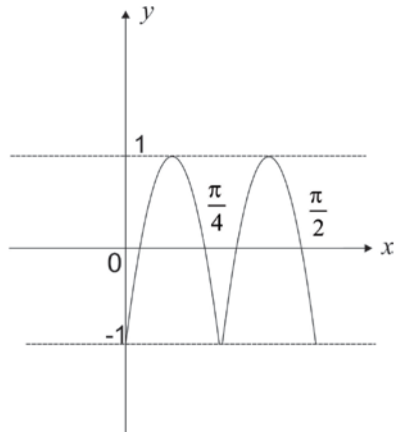
2006

1) a) $Dom(f)=\mathbb{R}$

$Im(f)=[-1,1]$

$z(f)=\left\{\frac{\pi}{24}+k\frac{\pi}{4};\ \ \frac{5\pi}{24}+k\frac{\pi}{4}\right\}$

b)



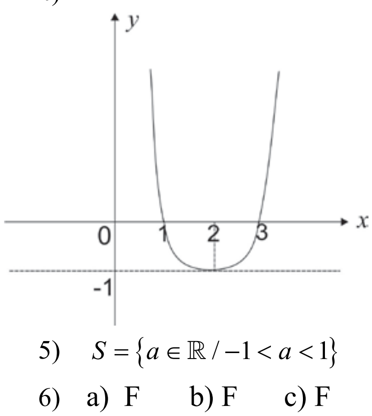
2) a) $S=(-\infty,1]$

b) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x=k\pi \text{ ou } x=\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ \ k\in\mathbb{Z}\right\}$

c) $S=\left\{1,\ \frac{-3+\sqrt{5}}{2},\ \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right\}$

3) $S=\varnothing$

4)



5) $S=\{a\in\mathbb{R}\,/\,-1<a<1\}$

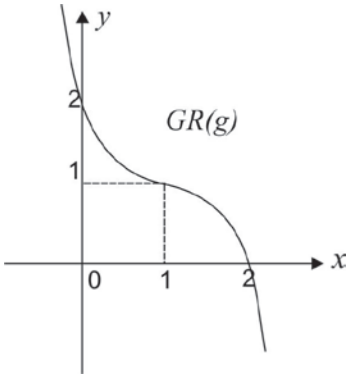
6) a) F b) F c) F d) V (*justificar*)

2007

1) a) $S=(1,2)\cup[3,+\infty)$

b) $S=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) a) $g(x)=2-3x+3x^2-x^3$



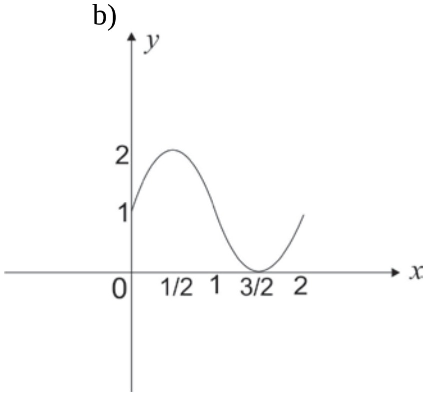
b) $g^{-1}(y)=1+\sqrt[3]{1-y}$

3) a) $Dom(f)=\mathbb{R}$

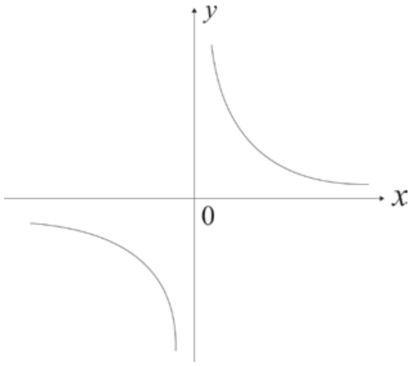
$z(f)=\left\{\frac{1}{2}+(2k+1);\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

$p=2$

b)



4)



5) $Q(z) = z^{n-1} + \alpha z^{n-2} + \alpha^2 z^{n-3} + \ldots + \alpha^{n-2} z + \alpha^{n-1}$

$R(z) \equiv 0$

6) a) $\sqrt{3}+i,\ -\sqrt{3}+i,\ 2i$

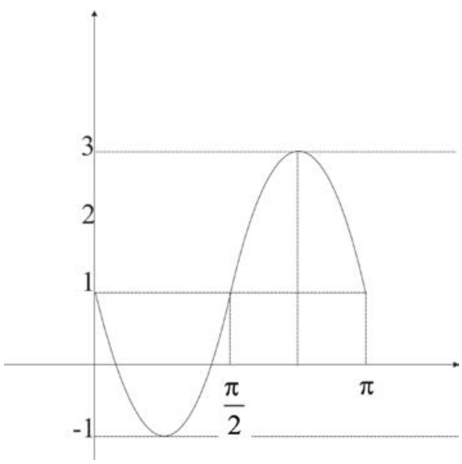
b) $3\sqrt{3}$

2008

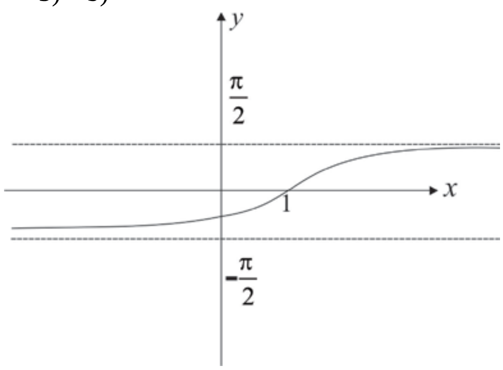
1) a) $S = (-\infty, 0) \cup (1, 2)$

b) $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \ /\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

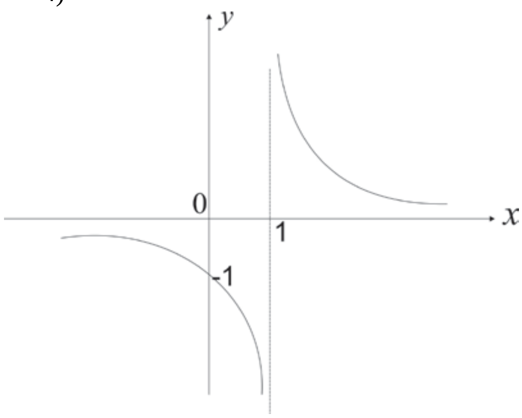
2)



3) b)



4)

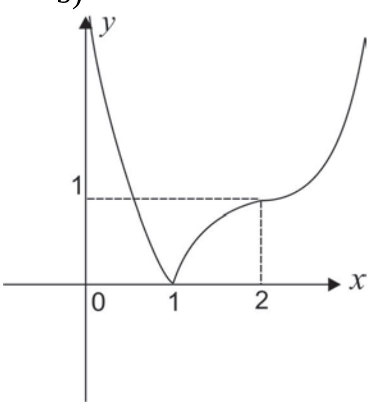


2009

1) a) $z(f)=\{1\}$

$\mathrm{Im}(f)=[0,+\infty)$

b)



2) a) $S=\{-1,\ 1,\ 3\}$

b) $S=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \ \frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2};\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

c) $S=[0,1]$

d) $S=\left\{-1,\ 1,\ -\sqrt[3]{2},\ \frac{\sqrt[3]{2}}{2}+\sqrt[3]{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \ \frac{\sqrt[3]{2}}{2}-\sqrt[3]{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

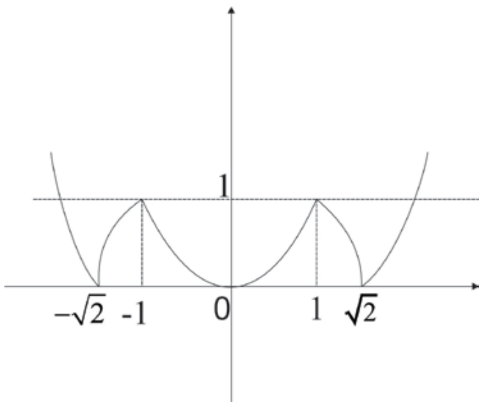
3) $a=1,\ \ b=-\frac{1}{2}$ e $c=-1$

4) a) Semiplano $\{(x,y)\ /\ y\le x\}$

b) $|\ w\ |=|\ \cos x\ |$

2010

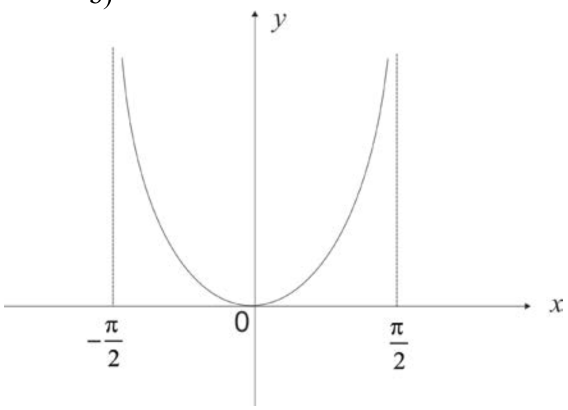
1) b)



2) a) $Dom(g)=\left\{x\ne\frac{\pi}{2}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

$z(g)=\{k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\}$

b)



3) a) $S=\{(2k+1)\pi;\ \ k\in\mathbb{Z}\}$

b) $S=[1,+\infty)$

4) a) $S=\left\{3,\ \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i,\ \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i\right\}$

b) $S=\{i,\ -i,\ 1+i,\ 1-i\}$

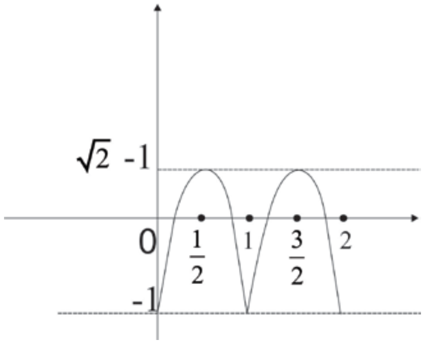
5) a) F b) F c) V d) V (*justificar*)

2011

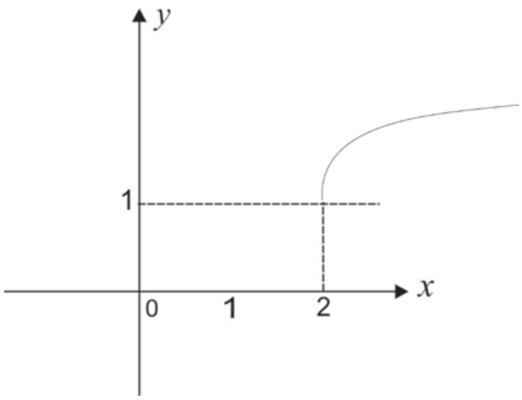
1) a) $S=[-2,-1)\cup[0,1)$

b) $S=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ \frac{4\pi}{3}+2k\pi\right\}$

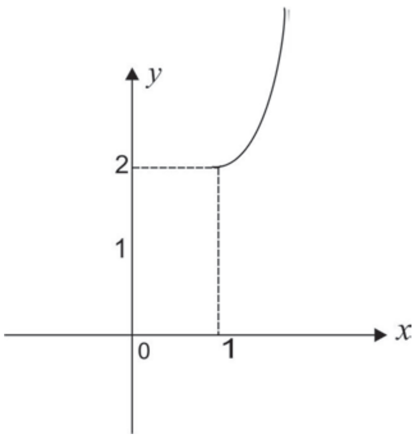
2) $z(f)=\left\{\frac{1}{4}+\frac{k}{2};\ k\in\mathbb{Z}\right\}$



3) a) $g(x)=1+\sqrt{x-2}$

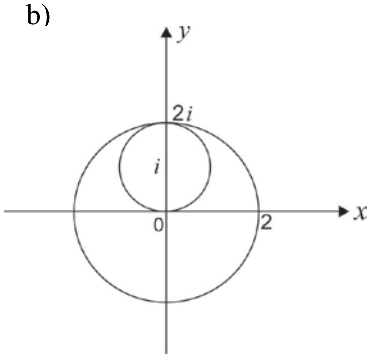


b) $g^{-1}(x)=2+(x-1)^2$



4) a) $S=\{2i\}$

b)



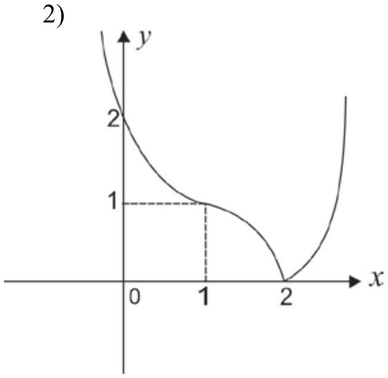
5) a) V b) V c) F d) F (*justificar*)

2012

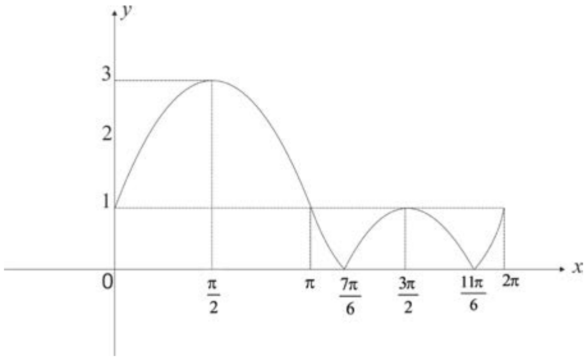
1) a) $S = \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$

b) $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

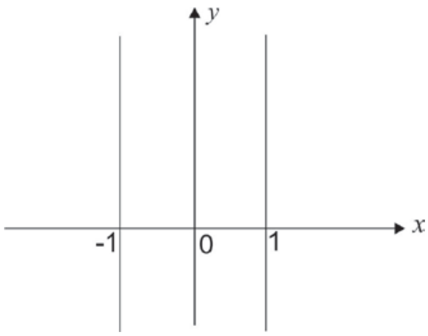
2)



3)



4) a) duas retas verticais.



b) 1° e 3° quadrantes, incluídos os eixos coordenadas

5) a) F b) V c) V d) V (*justificar*)

Referências

BOYER, Carl B. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

CHURCHILL, Ruel V. **Variáveis complexas e suas aplicações**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil; Edusp, 1975.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. **O que é matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

FERNANDES, Ângela Maria V. et al. **Fundamentos de álgebra**. Belo Horizonte: UFMG, 2005.

GARBI, Gilberto Geraldo. **O romance das equações algébricas**. São Paulo: Makron, 1997.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar**. São Paulo: Atual, 1977. v. 6.

LIMA, Elon Lages. A equação do terceiro grau. **Matemática Universitária**, n. 5, p. 9-23, jun. 1987.

LIMA, Elon Lages et al. **A matemática do ensino médio**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996. v. 1, 3.

MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 1985-2017.

MILIES, César Polcino. A emergência dos números complexos. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 24, p. 5-15, 1993.

RPM. REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 1982-2017.

TROTTA, Fernando. **Matemática por assunto**. São Paulo: Scipione, 1988. v. 8.

EDUFES