

Suites numériques

1 DÉFINITIONS ET PREMIERS EXEMPLES

Définition 1

On appelle **suite numérique** une application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout entier n , on note $u_n := u(n)$ l'image de l'entier naturel n par l'application u .

On note souvent $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou (u_n) la suite u . u_n est appelé le **terme général** de la suite u . L'ensemble des suites numériques réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

⚠ ATTENTION u_n est un nombre réel ! Ce n'est pas une suite.

Exemple 1

- ① $u : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ l'application qui à tout entier naturel non nul n fait correspondre le réel $u_n = \frac{1}{n}$.
- ② $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application qui à tout entier naturel n fait correspondre le réel $u_n = (-1)^n$.
- ③ $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application qui à tout entier naturel n fait correspondre le réel $u_n = \sqrt{n}$.
- ④ $u : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ l'application qui à tout entier naturel n fait correspondre le réel $u_n = \frac{1}{n^2}$.
- ⑤ $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application qui à tout entier naturel n fait correspondre le réel u_n tel que

$$u_0 = 1 = u_1, \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}), \quad u_{n+2} = u_n + u_{n+1}.$$

La suite u est appelée la suite de Fibonacci. Les premiers termes sont 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Chaque terme est la somme des deux précédents.

Définition 2 : Opérations

Soit u et v deux suites réelles. On définit

- $u + v := (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$,
- $uv := (u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- $\lambda u := (\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,
- $\frac{u}{v} := \left(\frac{u_n}{v_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$, si $v_n \neq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.1 SUITE ARITHMÉTIQUE

Définition 3

Une suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **arithmétique**, s'il existe un scalaire r dans $\mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r.$$

r est appelé la **raison** de la suite.

Proposition 1

- ① $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nr.$
- ② $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad u_n = u_k + (n - k)r.$
- ③ $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad u_{n-p} + u_{m+p} = u_n + u_m.$
- ④ $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad S_{(k,n)} = u_k + u_{k+1} + \cdots + u_n = \frac{n - k + 1}{2}(u_k + u_n).$

Autrement dit :

$$\text{Somme d'une suite arithmétique} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{Premier terme} + \text{Dernier terme}}{2}$$

Exemple 2

Soit la suite (u_n) une suite arithmétique de premier terme 3 et de raison 5.

D'après la proposition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 + 5n$.

De plus, $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \frac{5}{2} \times (3 + 23) = 65$.

1.2 SUITE GÉOMÉTRIQUE

Définition 4

Une suite numérique (u_n) est dite **géométrique**, s'il existe un scalaire **non nul** q dans $\mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = qu_n.$$

q est appelé la **raison** de la suite.

Proposition 2

- ① $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 q^n.$
- ② $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad u_n = u_k q^{n-k}.$
- ③ $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad S_{(k,n)} = u_k + u_{k+1} + \cdots + u_n = u_k \frac{1 - q^{n-k+1}}{1 - q} \quad \text{si } q \neq 1.$

Autrement dit :

$$\text{Somme d'une suite géométrique} = \text{Premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

1.3 SUITE ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUES

Définition 5

On dit que $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique lorsqu'il existe a et b des réels tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b.$$

Comment exprimer u_n en fonction de n ?

Supposons $a \neq 1$. On rappelle que si $a = 1$, alors u est arithmétique.

- ① On cherche la limite finie possible, c'est à dire, on résout l'équation $l = al + b$, soit $l := \frac{b}{1-a}$.

- ② Alors, la suite $v_n := u_n - l$, est géométrique de raison a , puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - l = au_n + b - (al + b) = a(u_n - l) = av_n.$$

En fait, on a enlevé la partie arithmétique.

- ③ On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = a^n v_0 = a^n (u_0 - l)$ et donc

$$u_n = l + a^n (u_0 - l)$$

Exemple 3

On souhaite calculer le terme général de la suite u définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \geq 0, \quad u_{n+1} = \frac{u_n - 3}{4}$.

- ① Posons $l = \frac{-3/4}{1-1/4} = -1$.
- ② Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n := u_n - l$, soit $v_{n+1} = u_{n+1} - l = \frac{u_n + 1}{4} = \frac{1}{4}v_n$.
- ③ On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + l = \left(\frac{1}{4}\right)^n - 1$.

Exemple 4

Par les mêmes méthodes, on peut calculer le terme général d'une **suite homographique** $(u_n)_n$, c'est à dire, vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d},$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, tels que $ad - bc \neq 0$ et $c \neq 0$.

Traitons un exemple. Soit la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}$.

On va se ramener à une suite géométrique, comme avec les suites récurrentes linéaires. Cherchons les limites possibles. On a $f(l) = l \iff (l-1)(l-2) = 0$, donc les points fixes de f sont 1 et 2. Posons alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n := \frac{u_n - 2}{u_n - 1}.$$

Alors $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$. On en déduit alors l'expression de v_n puis

$$u_n = \frac{2 - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

2 SUITES RÉELLES MONOTONES. SUITES BORNÉES

Définition 6 : Suite majorée, minorée, bornée, croissante, décroissante constante

Soient u une suite réelle et $U = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble image de u . On dira que la suite u est

- **majorée** s'il existe un nombre réel M tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M,$$

c'est à dire si U est majoré.

- **minorée** s'il existe un nombre réel m tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leq u_n,$$

c'est à dire si U est minoré.

- **bornée**, s'il existe un nombre réel $M > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M,$$

c'est à dire si U est borné.

- **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

- **croissante** si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1}.$$

Lorsque les inégalités sont strictes, on dit que u est strictement croissante.

- **décroissante** si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq u_{n+1}.$$

Lorsque les inégalités sont strictes, on dit que u est strictement décroissante.

- **constante** si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_{n+1}.$$

Mais quel rapport avec la croissance d'une application ?

Vous montrerez que c'est équivalent à la *croissance habituelle* d'une application, c'est à dire

$$m \leq n \iff u_m \leq u_n.$$

Vocabulaire : On utilise "à partir d'un certain rang N " pour dire que u vérifie une certaine propriété, pour tout entier naturel $n \geq N$.

Exemple 5

- $((-1)^n)$ est bornée.
- (2^n) est minorée par 0 car à valeurs positives mais pas majorée.
- $((-2)^n)$ n'est ni majorée ni minorée.
- $\left(\frac{n \sin(n)}{n^2+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
- $\left(\frac{2^n}{(n+1)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Comment montrer qu'une suite est croissante ou décroissante ?

- ① Soit (u_n) une suite réelle. La suite (u_n) est croissante si et seulement si, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
- ② Soit (u_n) une suite réelle à termes strictement positifs. La suite (u_n) est croissante si et seulement si pour tout entier naturel n , $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.

3 NOTION DE LIMITE

Définition 7 : Convergence, divergence

On dit qu'une suite numérique u est **convergente** ou **converge** s'il existe un scalaire ℓ dans $\mathbb{R}$ tel que

$$\exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

On écrit alors $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

Une suite numérique qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

Etudier la **nature** d'une suite c'est déterminer si la suite est convergente ou bien divergente.

Les formulations obtenues en remplaçant $n \geq N$ par $n > N$ ou $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ par $|u_n - \ell| < \varepsilon$ sont équivalentes.

Les suites allant vers $+$ ou $-$ l'infini

- On dit qu'une suite réelle u admet une limite égale à $+\infty$ si et seulement si, pour tout nombre réel A , l'intervalle $[A, +\infty[$ contient tous les termes u_n de la suite à partir d'un certain rang. Soit

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies u_n \geq A.$$

On écrit dans ce cas $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$.

- De même, on dit qu'une suite réelle u admet une limite égale à $-\infty$ si et seulement si, pour tout nombre réel A , l'intervalle $] -\infty, A]$ contient tous les termes u_n de la suite à partir d'un certain rang. Soit

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies u_n \leq A.$$

On écrit, dans ce cas $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$.

Exemple 6

La suite (u_n) de terme général $u_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ converge vers 0. En effet. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe un entier naturel non nul N tel que $N\varepsilon > 1$. Pour tout entier naturel $n \geq N$, on a $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$.

Exemple 7

La suite $(u_n = (-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente.

En effet, soit ℓ un nombre réel. Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left[|u_{2n} - \ell| = |1 - \ell| > \frac{1}{2} \right] \vee \left[|u_{2n+1} - \ell| = |1 + \ell| > \frac{1}{2} \right].$$

En effet

$$\left[|1 - \ell| \leq \frac{1}{2} \right] \wedge \left[|1 + \ell| \leq \frac{1}{2} \right] \implies \ell \in \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right] \cap \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right]$$

ce qui est absurde.

Proposition 3 : Unicité de la limite

Si une suite numérique u converge vers une limite ℓ dans $\mathbb{R}$, alors cette limite est unique.

Preuve. Soit (u_n) une suite qui converge vers ℓ . S'il existe ℓ' distinct de ℓ , limite de la suite (u_n) , alors pour $\varepsilon = \frac{|\ell - \ell'|}{4} > 0$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_1 \implies |u_n - \ell| \leq \frac{|\ell - \ell'|}{4} \quad \text{et} \quad \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_2 \implies |u_n - \ell'| \leq \frac{|\ell - \ell'|}{4}.$$

Soit $N = \max(N_1, N_2)$. Alors

$$(\forall n \in \mathbb{N}), n \geq N \implies 0 < |\ell - \ell'| = |\ell - u_n + u_n - \ell'| \leq |u_n - \ell| + |u_n - \ell'| \leq \frac{|\ell - \ell'|}{2},$$

ce qui est absurde. $\square$

Proposition 4

Toute suite numérique convergente est bornée.

Preuve. Soit (u_n) une suite numérique convergente de limite ℓ . Pour $\varepsilon = 1$, par exemple, il existe un entier $N \geq 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq 1.$$

C'est-à-dire que, pour tout entier $n \geq N$, on a

$$|u_n| = |u_n - \ell + \ell| \leq |u_n - \ell| + |\ell| \leq 1 + |\ell|.$$

Soit $M = \max\{|u_0|, \dots, |u_{N-1}|, 1 + |\ell|\}$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M.$$

Ce qui montre que la suite (u_n) est bornée. $\square$

4 OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

Proposition 5

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques de limites respectives $\ell, \ell' \in \bar{\mathbb{R}}$ en $+\infty$. Alors

- $(u_n + v_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell + \ell'$,
- $(u_n v_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \ell'$,
- Si $\ell \neq 0$, alors $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et $\left(\frac{1}{u_n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ell}$,
- Si $\ell = 0$ et $u_n > 0$ à partir d'un certain rang alors $\frac{1}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$,
- Si $\ell = 0$ et $u_n < 0$ à partir d'un certain rang alors $\frac{1}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$,
- $(|u_n|) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |\ell|$.

⚠ ATTENTION Les réciproques sont fausses ! La suite u de terme général $(-1)^n$ est divergente, alors que la suite $|u|$ est convergente.

Les opérations sur les limites ℓ et ℓ' sont définies dans $\bar{\mathbb{R}}$! Les formes indéterminées ne sont donc pas définies !

Preuve. On fait les démonstration pour ℓ et ℓ' dans $\mathbb{R}$. Dans l'ordre :

- Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier $N_1 \geq 0$ et un entier $N_2 \geq 0$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left[n \geq N_1 \implies |u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} \right] \quad \text{et} \quad \left[n \geq N_2 \implies |v_n - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2} \right].$$

Soit $N = \max(N_1, N_2)$. Pour tout entier $n \geq N$ on a

$$|u_n + v_n - (\ell + \ell')| = |u_n - \ell + v_n - \ell'| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| \leq \varepsilon.$$

Ceci montre que la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$.

- Pour tout entier naturel n on a

$$u_n v_n - \ell \ell' = (u_n - \ell) v_n + \ell (v_n - \ell').$$

Comme la suite (v_n) est bornée, il existe un réel K tel que

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad |v_n| \leq K.$$

Soit $M = \max(K, |\ell|)$. Il existe un entier naturel N_1 tel que, pour tout entier $n \geq N_1$, on a

$$|u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$$

Il existe un entier naturel N_2 tel que, pour tout entier $n \geq N_2$, on a

$$|v_n - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Soit $N = \max(N_1, N_2)$. Alors, pour tout entier $n \geq N$, on a

$$|u_n v_n - \ell \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2M} M + \frac{\varepsilon}{2M} M = \varepsilon.$$

Ce qui montre que la suite $(u_n v_n)$ converge vers $\ell \ell'$.

- Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$|u_n| = |u_n - \ell + \ell| \geq |\ell| - |u_n - \ell|.$$

D'autre part, comme (u_n) converge vers ℓ , il existe un entier $N_1 \geq 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N_1 \implies |u_n - \ell| \leq \frac{|\ell|}{2}.$$

Pour tout entier $n \geq N_1$ on a

$$|u_n| \geq |\ell| - \frac{|\ell|}{2} = \frac{|\ell|}{2}.$$

Ainsi, pour tout entier $n \geq N_1$, on a

$$\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} \right| = \frac{|u_n - \ell|}{|\ell| |u_n|} \leq \frac{2}{|\ell|^2} |u_n - \ell|.$$

Maintenant pour le réel $\varepsilon \frac{|\ell|^2}{2}$, il existe un entier $N_2 \geq 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N_2 \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon \frac{|\ell|^2}{2}.$$

Soit $N = \max(N_1, N_2)$. Pour tout entier $n \geq N$ on a

$$\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} \right| = \frac{|u_n - \ell|}{|\ell| |u_n|} \leq \frac{2}{|\ell|^2} |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Ce qui montre que la suite $\left(\frac{1}{u_n} \right)$ converge vers $\frac{1}{\ell}$.

- On fait seulement la preuve dans le cas positif.
- Soit $\varepsilon > 0$. la suite (u_n) est convergente de limite ℓ . Il existe un entier naturel N tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Comme, pour tout entier naturel n ,

$$\left| |u_n| - |\ell| \right| \leq |u_n - \ell|$$

alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies \left| |u_n| - |\ell| \right| < \varepsilon$$

et la suite $(|u_n|)$ converge vers $|\ell|$.

□

Caractérisation séquentielle de la limite

On rappelle que pour avoir

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right),$$

il faut que f soit **continue** !

Par exemple, $\left(\left\lfloor -\frac{1}{n} \right\rfloor\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante égale à -1 donc elle converge vers -1 et non pas vers $0 =]0]$.

Notation : On peut noter $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ à la place de

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k \text{ si elle existe et est finie !}$$

⚠ ATTENTION $1^{+\infty}$ est une forme indéterminée !

On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m = 1^m, \text{ donc } \lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m = 1, \text{ et}$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m = 0, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m = 0, \text{ mais pourtant}$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 - \frac{1}{n})} \rightarrow e^{-1}.$$

Exemple 8

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 + \frac{x}{n})}$. Or $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \ln'(1) = 1$,

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{x}{n})}{\frac{x}{n}} = 1$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = x$. Par composition, on obtient le résultat.

Exemple 9

Pour $-1 < q < 1$ et $q \neq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|n^a q^n| = \left| \frac{n^a}{(1/q)^n} \right| = \frac{n^a}{|1/q|^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

5 INÉGALITÉS ET LIMITES**5.1 CONSERVATION D'INÉGALITÉS****Proposition 6**

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles, de limites respectives $\ell, \ell' \in \bar{\mathbb{R}}$ en $+\infty$.

- Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$, alors $\ell \leq \ell'$.
- Si $\ell > \ell'$ alors $u_n > v_n$ à partir d'un certain rang.

Preuve.

- ① Posons n_0 le rang tel que, pour tout $n > n_0$, $u_n \leq v_n$.
 Alors, par des définition des convergences de u_n et de v_n , il existe $N \geq n_0$ et $N' \geq n_0$ dans $\mathbb{N}$ tels que $\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$ pour tout entier $n \geq N$ et $\ell' - \varepsilon < v_n < \ell' + \varepsilon$ pour tout entier $n \geq N'$.
 Soit $N'' = \max(N, N')$. Alors pour tout entier $n \geq N''$, on a $\ell - \varepsilon < u_n \leq v_n < \ell' + \varepsilon$.
 Il en résulte que $\ell - \ell' < 2\varepsilon$ pour tout réel $\varepsilon > 0$, d'où $\ell - \ell' \leq 0$.
 Ce qui démontre la première proposition.
- ② Posons $\varepsilon = \frac{\ell - \ell'}{2}$. Alors, par des définition des convergences de u_n et de v_n , il existe $N \geq n_0$ et $N' \geq n_0$ dans $\mathbb{N}$ tels que $\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$ pour tout entier $n \geq N$ et $\ell' - \varepsilon < v_n < \ell' + \varepsilon$ pour tout entier $n \geq N'$.
 Donc, pour tout entier $n \geq \max(N, N')$, on a $u_n > \ell - \varepsilon = \ell' + \varepsilon > v_n$, d'où le résultat.

□

Pratique

En pratique, on utilise souvent les cas où l'une des deux suites est une constante $K \in \mathbb{R}$. On obtient donc les résultats

- Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq K$, alors $\ell \leq K$.
- Si $K > \ell'$ alors $K > v_n$ à partir d'un certain rang.
- Si, à partir d'un certain rang, $K \leq v_n$, alors $K \leq \ell'$.
- Si $\ell > K$ alors $u_n > K$ à partir d'un certain rang.

5.2 EXISTENCES DE LIMITES À PARTIR D'INÉGALITÉS

Théorème 1 : Théorème d'encadrement / de minoration / de majoration

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$.

- **Théorème d'encadrement**
 Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = \ell$ et si à partir d'un certain rang $m_n \leq u_n \leq M_n$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ existe et vaut ℓ .
- **Théorème de minoration**
 Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = +\infty$ et si $u_n \geq m_n$ à partir d'un certain rang, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ existe et vaut $+\infty$.
- **Théorème de majoration**
 Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = -\infty$ et si $u_n \leq M_n$ à partir d'un certain rang, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ existe et vaut $-\infty$.

On peut montrer l'existence des limites !

Dans ces théorèmes, il n'y a pas besoin de savoir que u_n a une limite en $+\infty$. Cela permet de montrer l'existence et la limite et de la trouver !

Exemple 10

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty$ par minoration, car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! \geq n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$.

Preuve. On démontre le théorème d'encadrement. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition, il existe $N \geq n_0$ et $N' \geq n_0$ dans $\mathbb{N}$ tels que

$$n \geq N \implies \ell - \varepsilon < v_n < \ell + \varepsilon, \quad n \geq N' \implies \ell - \varepsilon < w_n < \ell + \varepsilon$$

Pour tout entier $n \geq \max(N, N')$, on a

$$\ell - \varepsilon < v_n \leq u_n \leq w_n < \ell + \varepsilon.$$

Ce qui prouve que la suite (u_n) est convergente de limite ℓ . □

Exemple 11

Majoration grossière des sommes. Quand une somme est trop compliquée à calculer, on peut majorer par le plus grand terme et/ou minorer le plus petit terme pour avoir un encadrement, parfois suffisant, de notre somme, et connaître son comportement en $+\infty$.

Par exemple, posons $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k}$. On a alors $\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + n} \leq S_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + 1}$ donc $\frac{n}{n+1} \leq S_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$. S_n tend donc vers 1, d'après le théorème d'encadrement.

Corollaire 1.1 : Produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n u_n = 0$.

Limite d'une suite géométrique

	$x > 1$	$x = 1$	$ x < 1$	$x \leq -1$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$				
$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n$	$+\infty$	1	0	Pas de limite

- Cas où $x > 1$: $x^n = (1 + (x-1))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x-1)^k = 1 + n(x-1) + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} (x-1)^k \stackrel{x>1}{\geq} n(x-1)$ pour tout $n \geq 2$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(x-1) = +\infty$ car $x > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ par minoration.
- Cas où $|x| < 1$: $\frac{1}{|x|} > 1$, donc: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{|x|}\right)^n = +\infty$ d'après le cas précédent, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x^n| = 0$ par passage à l'inverse, et enfin $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$.
- Cas où $x = -1$: déjà traité.
- Cas où $x < -1$: $x^2 > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{2n} = +\infty$ d'après le premier cas, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{2n+1} = -\infty$. Les suites extraites $(x^{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x^{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ n'ayant pas même limite, $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Corollaire 1.2 : Théorème de la limite monotone

Toute suite monotone admet une limite en $+\infty$.

Toute suite réelle croissante majorée converge.

Toute suite réelle croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Toute suite réelle décroissante minorée converge.

Toute suite réelle décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

⚠ ATTENTION Une suite croissante majorée par M converge... **Mais pas forcément M** , qui n'est qu'un majorant parmi d'autres!

Preuve. Soit (u_n) une suite croissante majorée dans $\mathbb{R}$. Alors l'ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, admet une borne supérieure ℓ . Montrons que la suite (u_n) converge vers ℓ .

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de ℓ , il existe un entier $N \geq 0$ tel que

$$\ell - \varepsilon < u_N.$$

La suite (u_n) étant croissante, pour tout entier $n \geq N$, on a

$$\ell - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq \ell \leq \ell + \varepsilon.$$

On a donc montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Ce qui montre que la suite (u_n) converge vers ℓ .

Si u est croissante non majorée, pour tout $A > 0$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > A$ et donc pour tout $n \geq N$, comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante $u_n \geq u_N > A$, ce qui est la définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. $\square$

5.3 SUITES ADJACENTES

Définition 8

Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont dites **adjacentes** si

- ① l'une est croissante,
- ② l'autre est décroissante
- ③ $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = 0$.

Proposition 7

Deux suites adjacentes sont convergentes et convergent vers la même limite.

Preuve. Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes. On suppose que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante. Alors la suite $(u_n - v_n)$ est une suite croissante. En effet

$$(u_{n+1} - v_{n+1}) - (u_n - v_n) = (u_{n+1} - u_n) + (v_n - v_{n+1}) \geq 0.$$

La suite $(u_n - v_n)$ est croissante qui converge vers 0, alors elle est majorée par sa limite 0. Par suite

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n.$$

On a ainsi, pour tout entier $n \geq 0$

$$u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_n \leq v_n \leq v_{n-1} \leq \dots \leq v_0.$$

La suite (u_n) est croissante majorée par v_0 converge. On en déduit que la suite (v_n) est aussi convergente et que les deux suites convergent vers la même limite. $\square$

Exemple 12

Tout nombre réel est la limite de deux suites rationnelles adjacentes.

Prenons $x \in \mathbb{R}$. On considère les deux suites de nombres rationnelles suivantes

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}.$$

$$\textcircled{1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0.$$

$$\textcircled{2} \quad \text{Pour tout entier naturel } n, \text{ on a}$$

$$10 \times \lfloor 10^n x \rfloor \leq 10 \times 10^n x = 10^{n+1} x < \lfloor 10^{n+1} x \rfloor + 1$$

et donc

$$10 \times \lfloor 10^n x \rfloor \leq \lfloor 10^{n+1} x \rfloor.$$

On en déduit que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1}$. La suite (u_n) est une suite croissante.

$$\textcircled{3} \quad \text{Pour tout entier naturel } n, \text{ on a}$$

$$\lfloor 10^{n+1} x \rfloor \leq 10^{n+1} x = 10 \times 10^n x < 10 \times \lfloor 10^n x \rfloor + 1$$

et donc

$$\lfloor 10^{n+1} x \rfloor + 1 \leq 10 \times \lfloor 10^n x \rfloor + 1.$$

On en déduit que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} \leq v_n$. La suite (v_n) est une suite décroissante.

Ainsi, les suites (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, donc convergentes et convergent vers la même limite. D'autre part, pour tout entier naturel n , on a

$$10^n x - 1 < \lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x \quad \text{et} \quad x - \frac{1}{10^n} < u_n \leq x.$$

Par le théorème d'encadrement, la suite (u_n) est convergente de limite égale à x .

Exemple 13

On considère les deux suites réelles (u_n) et (v_n) définies respectivement par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

On vérifie que la suite (u_n) est (strictement) croissante, que la suite $(v_n), n \geq 1$ est décroissante (strictement si $n \geq 2$) et que la suite $(v_n - u_n)$ converge vers 0. Les deux suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes. On en déduit qu'elles sont convergentes et convergent vers la même limite e avec

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leq e \leq v_n.$$

On verra plus tard que cette limite e est la valeur de la fonction exponentielle en 1, c'est à dire, $e = \exp(1)$. En particulier, pour $n = 1$, on a $u_1 = 2 \leq e \leq 3 = v_1$.

Cette limite e est un nombre irrationnel. En effet, supposons qu'il existe a et b dans $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que $e = \frac{a}{b}$. Comme les deux suites sont strictement monotones, alors $2 < e < 3$ et donc $b \geq 2$.

$$u_b < u_{b+1} \leq e \leq v_{b+1} < v_b = u_b + \frac{1}{b!}.$$

En multipliant par $b!$, on a

$$b!u_b < a(b-1)! < b!u_b + 1.$$

$b!u_b$ est un entier naturel, $a(b-1)!$ est un entier naturel. Mais ceci est absurde, puisqu'il n'existe pas d'entier strictement compris entre deux entiers consécutifs. Ainsi e est un nombre irrationnel.

6 SUITES EXTRAITES ET VALEURS D'ADHÉRENCES

Définition 9

On dit qu'une suite numérique (v_n) est une **suite extraite** d'une suite numérique (u_n) s'il existe une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, strictement croissante telle que, pour tout entier naturel n , $v_n = u_{\varphi(n)}$.

Exemple 14

Si (u_n) est une suite, alors les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont deux suites extraites de la suite (u_n) .

Pour tout entier naturel n , $\varphi(n) \geq n$.

Montrons le par récurrence. Comme φ est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a $\varphi(0) \geq 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons maintenant que $\varphi(n) \geq n$. Comme l'application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante, $\varphi(n+1) > \varphi(n) = n$. Le plus petit nombre entier strictement plus grand que n est $n+1$, donc $\varphi(n+1) \geq n+1$. La propriété est héréditaire et initialisée à 0, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 8

Si (u_n) est une suite convergente de limite ℓ , alors toute suite extraite de la suite (u_n) converge vers ℓ .

Preuve. Soit $(v_n = u_{\varphi(n)})$ une suite extraite de la suite convergente (u_n) . Soit $\varepsilon > 0$. Écrivons que la suite (u_n) converge vers ℓ .

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Puisque l'application φ est strictement croissante non majorée, il existe un entier naturel p tel que $\varphi(p) \geq N$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq p \implies \varphi(n) \geq \varphi(p) \geq N \implies |u_{\varphi(n)} - \ell| = |v_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Ce qui montre que la suite (v_n) converge vers ℓ . $\square$

Définition 10 : Valeur d'adhérence - Hors programme

Un scalaire a de $\mathbb{R}$ est une **valeur d'adhérence** d'une suite numérique (u_n) s'il existe une suite extraite de la suite (u_n) qui converge vers a .

Exemple 15

1 et -1 sont deux valeurs d'adhérence de la suite (u_n) de terme général $(-1)^n$.

Théorème 2 : Bolzano-Weierstrass

De toute suite réelle bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Preuve. Soit (u_n) une suite réelle bornée. Il existe deux nombres réels m et M tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leq u_n \leq M.$$

On considère l'ensemble

$$X = \{x \in \mathbb{R} \mid u_n \geq x \text{ pour un nombre infini d'entier}\}$$

L'ensemble X est une partie non vide, majorée de $\mathbb{R}$. X admet donc une borne supérieure λ . Soit $\varepsilon > 0$. Alors

- $\lambda + \varepsilon \notin X$ et par conséquent l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \geq \lambda + \varepsilon\}$ est fini.
- $(\exists x \in X), \quad \lambda - \varepsilon < x$.

On en déduit que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid \lambda - \varepsilon < u_n < \lambda + \varepsilon\}$ est infini.

Pour $\varepsilon = 1$, on choisit un entier naturel non nul $\varphi(1)$ tel que $\lambda - 1 < u_{\varphi(1)} < \lambda + 1$, on peut le choisir le plus petit.

Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid \lambda - \frac{1}{2} < u_n < \lambda + \frac{1}{2}\}$ est infini. On choisit un entier $\varphi(2) > \varphi(1)$ tel que

$$u_{\varphi(2)} \in \left] \lambda - \frac{1}{2}, \lambda + \frac{1}{2} \right[.$$

Pour tout entier $n \geq 2$, supposons choisi $\varphi(n-1)$. L'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid \lambda - \frac{1}{n} < u_k < \lambda + \frac{1}{n}\}$ est infini. On choisit un entier $\varphi(n) > \varphi(n-1)$ tel que

$$u_{\varphi(n)} \in \left] \lambda - \frac{1}{n}, \lambda + \frac{1}{n} \right[.$$

L'application φ est strictement croissante. La suite $(u_{\varphi(n)})$ est une suite extraite de la suite (u_n) . La suite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers λ . λ est donc une valeur d'adhérence de la suite (u_n) . $\square$

Autre formulation équivalente - Hors programme

Le théorème précédent peut être énoncé de la manière suivante :

Toute suite réelle bornée admet (au moins) une valeur d'adhérence.

Proposition 9 : Pratique mais Hors programme

Soit (u_n) une suite réelle bornée. La suite (u_n) est convergente si et seulement si (u_n) admet une seule valeur d'adhérence.

Preuve. Soit m et M deux nombres réels tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leq u_n \leq M;$$

Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, la suite (u_n) admet (au moins) une valeur d'adhérence.

- Supposons que la suite (u_n) converge vers a . Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier naturel N_1 tel que

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad n \geq N_1 \implies |u_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si b est une valeur d'adhérence de la suite (u_n) alors il existe une suite extraite $(v_n = u_{\varphi(n)})$ qui converge vers b . Pour ce réel ε , il existe un entier naturel N_2 tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad k \geq N_2 \implies |v_k - b| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $N = \max(N_1, N_2)$. Comme

$$(\forall m \in \mathbb{N}), \quad \varphi(m) \geq m$$

alors, pour tout entier naturel $k \geq N$, on a

$$|u_{\varphi(k)} - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |v_k - b| = |u_{\varphi(k)} - b| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit que

$$|b - a| = |b - u_{\varphi(k)} + u_{\varphi(k)} - a| \leq \varepsilon.$$

ε étant arbitraire, ceci prouve que $b = a$. La suite (u_n) admet une seule valeur d'adhérence.

- Supposons que la suite (u_n) possède une seule valeur d'adhérence a . Montrons que la suite (u_n) converge vers a .

Supposons le contraire.

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \exists n_k \in \mathbb{N}, \quad n_k \geq k \quad \text{et} \quad |u_{n_k} - a| \geq \varepsilon.$$

Soit $E = \{n \in \mathbb{N} \mid |u_n - a| \geq \varepsilon\}$. L'ensemble E est infini. Soit φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans E . φ existe car E est infini. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{\varphi(n)} - a| \geq \varepsilon.$$

La suite $(w_n = u_{\varphi(n)})$ est une suite réelle bornée, possède une sous-suite $(w_{\psi(n)} = u_{\varphi \circ \psi(n)})$ convergente. Soit ℓ sa limite. Il existe un entier naturel N tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies |w_{\psi(n)} - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit un entier $n \geq N$. Alors

$$|\ell - a| \geq |w_{\psi(n)} - a| - |w_{\psi(n)} - \ell| \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ceci montre que la suite (u_n) admet (au moins) deux valeurs d'adhérence (a et ℓ). Contradiction.

□

Exemple 16

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée telle que $u_n + \frac{1}{2}u_{2n} \rightarrow 1$. Montrons que $(u_n)_n$ converge vers une limite que l'on précisera.

Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, elle admet, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_n$ convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$.

Alors, $(u_{2\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $2(1 - \ell)$. Puis $(u_{4\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $2(1 - 2(1 - \ell))$. En posant $f : x \mapsto 2(1 - x)$, on prouve, par récurrence immédiate que $(u_{2^n \varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f^n(\ell)$.

Étudions cette suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $l_n = f^n(\ell)$. C'est une suite arithmético-géométrique définie par $\ell_{n+1} = 2(1 - \ell_n)$ et $\ell_0 = \ell$. On la réduit (avec la méthode habituelle) en $\ell_n = \frac{2}{3} + (-2)^n(\ell - \frac{2}{3})$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Mais cette suite doit être bornée, car ses termes sont des valeurs d'adhérence de la suite bornée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Mais la seule valeur de l pour laquelle cette suite est bornée, est $\ell = \frac{2}{3}$.

En conclusion, la suite $(u_n)_n$ admet une unique valeur d'adhérence $\frac{2}{3}$ donc converge vers $\frac{2}{3}$.

7 BORNES SUPÉRIEURES, INFÉRIEURES, LIMITES, ET DENSITÉS

On rappelle que *Caractérisation séquentielle* veut dire en français *Caractérisation en termes de suites*.

Proposition 10 : Caractérisation séquentielle de la borne supérieure et inférieure

Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $m, M \in \mathbb{R}$.

① $M = \sup A$ si et seulement si M majore A et

$$\exists a \in A^{\mathbb{N}}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = M.$$

③ $m = \inf A$ si et seulement si m minore A et

$$\exists a \in A^{\mathbb{N}}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = m.$$

② A n'est pas majorée si et seulement si

$$\exists a \in A^{\mathbb{N}}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty.$$

④ A n'est pas minorée si et seulement si

$$\exists a \in A^{\mathbb{N}}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty.$$

Preuve.

① $(\Rightarrow)$ Supposons que $M = \sup A$. Alors en particulier M majore A . De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M - \frac{1}{n} < M$ n'est pas un majorant de A donc il existe $a_n \in A$ tel que $M - \frac{1}{n} < a_n \leq M$. Par encadrement, a converge et $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} M$.

$(\Leftarrow)$ Supposons que M majore A et qu'il existe a une suite d'éléments de A telle que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} M$. Soit M' un majorant de A . Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq M'$. Par passage à la limite: $M \leq M'$. Comme M est un majorant de A plus petit que tous les majorants de A , on a $M = \sup A$.

② $(\Rightarrow)$ Supposons A non majorée. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, n n'est pas un majorant de A donc il existe $a_n \in A$ tel que $a_n > n$. Par minoration, $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

$(\Leftarrow)$ Supposons qu'il existe une suite a d'éléments de A telle que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Supposons par l'absurde A majorée par un certain $M \in \mathbb{R}$. Comme a est à valeurs dans A , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq M$, donc a est majorée. Ceci est impossible puisque $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

③ $(\Rightarrow)$ Supposons que $m = \inf A$. Alors $M = -m$ est le sup de $-A$. Donc, d'après ①

$$\exists b \in (-A)^{\mathbb{N}}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = M.$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} -b_n = -M = m$ et $-b_n \in A$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$(\Leftarrow)$ Supposons que m minore A et qu'il existe a une suite d'éléments de A telle que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} m$. Alors, $-m$ majore $-A$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -a_n = -m$. Donc $-m = \sup(-A)$ d'où $m = \inf A$.

④ Même raisonnement que ③.

□

Exemple 17

Considérons $A := \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$. Montrons que $\inf A = -1$ et $\sup A = 2$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq -1 + \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq 1 + \frac{1}{0+1} = 2 = u_0 \in A$$

donc $2 = \max A = \sup A$. De plus $u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1$. Ainsi -1 est un majorant de A et la limite d'une suite de A , ainsi $\inf A = -1$.

Exemple 18

Soit $A := \left\{ \frac{q}{2^p + q}, (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$. Déterminer $\inf A$ et $\sup A$ s'ils existent.

Proposition 11 : Caractérisation séquentielle de la densité

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) A est dense dans $\mathbb{R}$, (2) Tout réel est la limite d'une suite d'éléments de A .

Preuve.

- ($\Rightarrow$) Supposons A dense dans $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[\cap A \neq \emptyset$ donc il existe $a_n \in A$ qui vérifie $x - \frac{1}{n} \leq a_n \leq x + \frac{1}{n}$. Par encadrement on a bien $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.
- ($\Leftarrow$) Supposons que pour tout $z \in \mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de A qui converge vers z . Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$. Soit a une suite à valeurs dans A telle que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{x+y}{2}$. À partir d'un certain rang on a $a_n \in]x, y[$ donc $]x, y[\cap A$ est non-vide.

□

Exemple 19

On pose

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{p}{10^n}, (p, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}$$

l'ensemble des nombres décimaux. Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons

$$d_n(x) = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$$

l'approximation par défaut à 10^{-n} près de x . Alors $d_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$ et d est à valeurs dans $\mathbb{D}$.

Donc $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

8 SUITES COMPLEXES

On veut maintenant étendre aux suites complexes les définitions et résultats que nous avons développés pour les suites réelles. Mais tout n'est pas possible !

Définition 11 : Suite complexe

On appelle suite complexe toute fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$.

⚠ ATTENTION Pas d'inégalités dans $\mathbb{C}$, donc pas de suites complexes majorées, minorées ou monotones ! La notion de suite bornée a quant à elle toujours un sens.

Définition 12 : Suite bornée

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **bornée** s'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|u_n| \leq K.$$

⚠ ATTENTION Pour une suite complexe, on ne peut pas savoir où est l'infini. Dans $\mathbb{R}$ on a 2 manières de tendre vers l'infini, mais dans le plan complexe $\mathbb{C}$? Comment fait-on ? La notion de limite infinie n'a donc aucun sens.

Définition 13 : Voisinage dans $\mathbb{C}$ pour nous

Soit $\ell \in \mathbb{C}$. On appelle **voisinage de ℓ** dans $\mathbb{C}$, tout disque ouvert de centre ℓ , c'est-à-dire tout ensemble de la forme

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - \ell| < \varepsilon\}$$

pour un certain $\varepsilon > 0$.

La définition de limite est alors la même que dans $\mathbb{R}$!

Définition 14 : Limite d'une suite complexe

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet ℓ pour limite si tout voisinage de ℓ contient tous les u_n à partir d'un certain rang.

Autrement dit, pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de ℓ , u_n appartient à $\mathcal{V}$ à partir d'un certain rang.

Lien avec les limites dans $\mathbb{R}$

On peut remarquer que la définition revient à dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \ell| = 0$ ce qui nous ramène au cas des limites de suites réelles

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Donc le théorème d'unicité de la limite est encore valable et on peut continuer à écrire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$!

Exemple 20

Montrons que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

On **doit** montrer que le module de la différence entre $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\frac{1}{1-z}$ tend vers 0. On a

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} z^n - \frac{1}{1-z} \right| = \left| \frac{1 - z^{n+1} - 1}{1-z} \right| = \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \quad \text{ce qui prouve le résultat.}$$

Proposition 12

Soient (u_n) une suite complexe et ℓ un nombre complexe. La suite (u_n) converge vers ℓ si, et seulement si les deux suites **réelles** $(\operatorname{Re}(u))$ et $(\operatorname{Im}(u))$ convergent respectivement vers $\operatorname{Re}(\ell)$ et $\operatorname{Im}(\ell)$.

Preuve. Soit $u_n = a_n + ib_n$ et $\ell = a + ib$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| = \sqrt{|a_n - a|^2 + |b_n - b|^2}.$$

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n - a| \leq |u_n - \ell| \quad \text{et} \quad |b_n - b| \leq |u_n - \ell|.$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| \leq (|a_n - a| + |b_n - b|).$

Ce qui donne le résultat. $\square$

Exemple 21

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{n+1}{n}\right) = e \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + ie^{\frac{n+1}{n}}\right) = ie.$$

9 SUITES RÉCURRENTES

Les suites arithmétiques et géométriques sont des suites récurrentes faciles à étudier. Dans cette partie, nous allons voir comment calculer les limites de suites récurrentes plus difficiles. Les suites arithmético-géométriques peuvent être vues comme des suites récurrentes linéaires d'ordre 1. On va commencer par le cas des suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

Dans cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

9.1 SUITES RÉCURRENTES LINÉAIRES D'ORDRE 2

Définition 15 : Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est dite **récurrentes linéaires (homogène) d'ordre 2** si

$$au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$$

où $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$.

Exemple 22

Un exemple bien connu est celui de la suite de Fibonacci $\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$.

Proposition 13

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites vérifiant la même relation

$$a u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n = 0,$$

et telles que $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$. Alors $u = v$.

Preuve. Immédiat par récurrence. $\square$

Théorème 3

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites vérifiant la même relation

$$a u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n = 0.$$

Les tableaux ci dessous résument les valeurs de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\mathbb{K}$	Discriminant Δ de $aX^2 + bX + c$	Racines de $aX^2 + bX + c$	Valeur de u_n
$\mathbb{R}$	$\Delta \neq 0$	r_1 et r_2	$\lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n$
	$\Delta = 0$	r	$(\lambda n + \mu)r^n$

$\mathbb{K}$	Discriminant Δ de $aX^2 + bX + c$	Racines de $aX^2 + bX + c$	Valeur de u_n
$\mathbb{C}$	$\Delta > 0$	r_1 et r_2	$\lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n$
	$\Delta = 0$	r	$(\lambda n + \mu)r^n$
	$\Delta < 0$	$\rho e^{\pm i\theta}$	$\rho^n (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$

où $\lambda, \mu, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$.

Preuve. Commençons par le cas complexe, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On pose Soit $(u_n)_n$ une suite vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Cela ne change pas la suite du théorème, puisque $a \neq 0$ dans le théorème.

Considérons l'équation (caractéristique) $\ell^2 = a\ell + b$. Notons r_1, r_2 les racines (éventuellement égales) de l'équation caractéristique et définissons une suite $(v_n)_n$ par $v_n = u_{n+1} - r_1 u_n$. Alors

$$v_{n+1} = au_{n+1} + bu_n - r_1 u_{n+1} = r_2 (u_{n+1} - r_1 u_n) = r_2 v_n$$

car, d'après les relations coefficients-racines $a = r_1 + r_2$ et $b = -r_1 r_2$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - r_1 u_n = v_0 r_2^n.$$

Réolvons cette équation en $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- Si $r_1 \neq r_2$, alors la suite $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u'_n = \frac{v_0}{r_2 - r_1} r_2^n$$

est une solution de l'équation et $(u_n - u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison r_1 . Donc, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est combinaison linéaire de suites géométriques de raison r_1 et r_2 .

- Si $r_1 = r_2$, alors la suite $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u'_n = v_0 n r_1^{n-1}$ est une solution de l'équation et $(u_n - u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison r_1 . Donc, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est combinaison linéaire de suites $(r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(n r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, les cas $\Delta > 0$ et $\Delta = 0$ se prouvent comme dans le cas complexe. Si $\Delta < 0$, les racines de $aX^2 + bX + c$ dans $\mathbb{C}$ sont ici complexes conjuguées distinctes. Notons les

$$\rho e^{i\theta} \quad \text{et} \quad \rho e^{-i\theta}$$

pour certains $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. En utilisant le cas complexe, on obtient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la forme $(\alpha \rho^n e^{ni\theta} + \beta \rho^n e^{-ni\theta})_{n \in \mathbb{N}}$ pour certains $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Or $\text{Im}(u_0) = \text{Im}(u_1) = 0$, donc $\text{Im}(\beta) = -\text{Im}(\alpha)$ et $\text{Im}(\alpha e^{i\theta} + \beta e^{-i\theta}) = 0$. Donc

$$(\text{Im}(\alpha) + \text{Im}(\beta)) \cos \theta + (\text{Re}(\alpha) - \text{Re}(\beta)) \sin \theta = 0,$$

d'où $0 = (\text{Re}(\alpha) - \text{Re}(\beta)) \sin \theta$. Mais comme $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on a $\text{Re}(\beta) = \text{Re}(\alpha)$.

Finalement $\beta = \bar{\alpha}$. En posant $\lambda = 2\text{Re}(\alpha)$ et $\mu = -2\text{Im}(\alpha)$, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \alpha \rho^n e^{ni\theta} + \bar{\alpha} \rho^n e^{-ni\theta} = 2\rho^n \text{Re}(\alpha e^{ni\theta}) = \rho^n (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)).$$

□

Exemple 23

Reprenons la suite de Fibonacci $(F_n)_n$, définie dans l'exemple 22. Pour obtenir une formule donnant F_n en fonction de n , déterminons les racines de l'équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$. Après un rapide calcul, on trouve les racines $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (le nombre d'or) et $\bar{\Phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Ainsi, il existe A et $B \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n = A\Phi^n + B\bar{\Phi}^n.$$

En évaluant en $n = 0$ et $n = 1$, on détermine les valeurs des constantes et on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \Phi^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \bar{\Phi}^n.$$

Remarquons qu'avec cette expression, il ne semble pas évident que les valeurs F_n sont des entiers naturels (alors que c'est immédiat avec la relation de récurrence).

Constantes de départ

On remarque dans le calcul précédent que les valeurs initiales n'interviennent que dans la détermination des constantes A et B . Pour une suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 1, F_1 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,$$

on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n = \frac{\bar{\Phi} - 1}{\bar{\Phi} - \Phi} \Phi^n + \frac{\Phi - 1}{\Phi - \bar{\Phi}} \bar{\Phi}^n$$

Exemple 24

La suite $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ est l'unique suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour laquelle $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.

En effet, le polynôme caractéristique $X^2 - 2X + 1$ possède une racine réelle unique qui est 1. Il existe donc deux réels λ et μ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda n + \mu$. Donc pour $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, on obtient $u_n = n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'unicité est donnée par la Proposition 13.

Exemple 25

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$, $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$.

L'équation caractéristique est $r^2 - r + 1 = 0$, et a pour discriminant est -3 , donc ses racines sont $(1 - i\sqrt{3})/2 = e^{-i\pi/3}$ et $(1 + i\sqrt{3})/2 = e^{i\pi/3}$. La suite u admet donc comme expression, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a \cos(n\pi/3) + b \sin(n\pi/3)$. L'équation donnée par $u_0 = 1$ donne $a = 1$ et $u_1 = 2$ donne $b = \sqrt{3}$. Finalement, on trouve,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \cos(n\pi/3) + \sqrt{3} \sin(n\pi/3) = 2 \cos((n-1)\pi/3).$$

9.2 SUITES RÉCURRENTES D'ORDRE 1 $u_{n+1} = f(u_n)$

On vous a fait croire depuis quelques années qu'il suffit que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour résoudre le problème, sans regarder l'ensemble de définition de f ... Quelle folie !

Définition 16 : Partie stable par une application

Soient E un ensemble, $f : E \rightarrow E$ une application et D une partie de E . On dit que D est **stable** par f si $f(D) \subset D$.

Définitions des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Même s'il ne faut pas faire n'importe quoi, c'est simple. Il faut juste que l'on puisse appliquer f plusieurs fois à u_0 pour que la suite soit définie, puisque

$$u_n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}(u_0)$$

Pour que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit définie, on demande donc qu'il existe $D \subset A$ tel que

$$D \text{ soit stable par } f \quad \text{et} \quad u_0 \in D.$$

Dans ce cas, u est à valeur dans D et elle est unique ! Vous pouvez le montrer facilement par récurrence.

Exemple 26

Il existe une et une seule suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1 + \sqrt{u_n})$. En effet,

- L'intervalle $\mathbb{R}_+$ est stable par la fonction $x \mapsto \ln(1 + \sqrt{x})$ car pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $1 + \sqrt{x} \geq 1$, donc $\ln(1 + \sqrt{x}) \in \mathbb{R}_+$.
- $u_0 = 2 \in \mathbb{R}_+$.

Proposition 14 : Monotonie d'une suite récurrente définie par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$

Soient D une partie de $\mathbb{R}$, $u_0 \in D$ et $f : D \rightarrow D$ une fonction. On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_{n+1} = f(u_n)$.

- ① Si $f(x) \geq x$, pour tout $x \in D$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, et si $f(x) \leq x$, pour tout $x \in D$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- ② Si f est croissante, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone. Son sens de variation dépend de la position de u_0 par rapport à u_1 .
- ③ Si f est décroissante, $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraires. Leurs sens de variation dépendent de la position de u_0 et u_2 .

Exemple 27

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(1+x) \leq x$, donc u est décroissante, donc admet une limite, d'après le théorème de la limite monotone.

Enfin, $\ln(1+l) = l$ admet une unique solution $l = 0$, donc u tend vers 0 en $+\infty$.

Exemple 28

Reprenons l'exemple 26.

La fonction f est croissante, comme composée de fonctions croissantes, et $u_0 = 2 > 1 = \ln(e) > \ln(1 + \sqrt{2}) = u_1$, donc u est décroissante.

De plus, u est minorée par 0, donc convergente, d'après le théorème de la limite monotone, **mais, par forcément vers 0 !**

On doit résoudre $f(l) = l$, donc on étudie la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ sur $[0, +\infty[$.

Comme $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} - 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on obtient

x	0	$\frac{2-\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		0	
g	0	$g(\frac{2-\sqrt{3}}{2})$	$-\infty$

Comme g est strictement décroissante sur l'intervalle $[\frac{2-\sqrt{3}}{2}, +\infty[$, il existe un unique l_1 tel que $f(l_1) = l_1$.

On peut remarquer que $g(1) = \ln(2) - 1 < 0$, donc $l_1 \in]\frac{2-\sqrt{3}}{2}, 1[$.

Comme $u_0 > l_1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l_1$.

⚠ ATTENTION

- La stabilité du domaine D par f est indispensable ! Prenons

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto |x-4|. \end{aligned}$$

Cette fonction est bien croissante sur $[4, +\infty[$, mais $[4, +\infty[$ n'est pas stable par f !

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_{2n})$ vaut u_{2n+1} et non pas u_{2n+2} .

Preuve.

- Si $f(x) \geq x$ pour tout $x \in D$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- Supposons f croissante et montrons que, si $u_0 \leq u_1$, vous pouvez montrer par récurrence que f est croissante !
Même raisonnement pour $u_0 \geq u_1$.
- Supposons f décroissante avec $u_0 \leq u_2$. Alors $f \circ f$ est croissante et $u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante d'après (2). La décroissance de $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ en découle :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ par décroissance de } f, \quad u_{2n+1} = f(u_{2n}) \geq f(u_{2n+2}) = u_{2n+3}.$$

□

Proposition 15

Soit $f : D \rightarrow D$, $u_0 \in D$ et u définie $\forall n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si u converge vers $\ell \in A$ et si f est continue en ℓ alors $f(\ell) = \ell$, c'est à dire, ℓ est un point fixe de f .

⚠ ATTENTION L'hypothèse de continuité n'est pas là pour décorer.

Preuve. Supposons f continue en ℓ et $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. Alors dans l'égalité $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ on passe à la limite $n \rightarrow +\infty$ et on obtient $\ell = f(\ell)$ par continuité. $\square$

Exemple 29

On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par: $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$ et f la fonction $x \mapsto x^2 + x$.

- Comme $[1, +\infty[$ est stable par f et $u_0 \in [1, +\infty[$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et minorée par 1.
- Comme $f(x) \geq x$, pour tout $x \in [1, +\infty[$, donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante donc possède une limite ℓ d'après le théorème de la limite monotone.
- Supposons par l'absurde que $\ell \in \mathbb{R}$. Alors $f(\ell) = \ell$ puisque f est continue sur $\mathbb{R}$. Mais alors $\ell = 0$. Absurde car u est croissante et $u_0 = 1$.
Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croît vers $+\infty$.

Méthode de Héron

En général, cette méthode consiste à avoir une meilleure évaluation de la vitesse à laquelle la suite converge vers la limite. L'idée est d'encadrer la distance entre u et sa limite par des suites géométriques. Si on connaît la limite (ou si on soupçonne très fort un nombre réel d'être cette limite), on peut tenter de majorer $|u_{n+1} - l|$, par une constante de valeur absolue strictement inférieure à 1, multipliée par $|u_n - l|$.

Par exemple, si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - l| \leq \frac{1}{2}|u_n - l|$, on peut montrer par récurrence immédiate que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |u_n - l| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - l|$, donc u est convergente vers l , par théorème d'encadrement.

Exemple 30

Soient $\alpha, a \in \mathbb{R}_+^*$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{\alpha}{x_n} \right)$.

Posons $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ La fonction f est bien définie et laisse stable $\mathbb{R}_+^*$,
 $x \mapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{\alpha}{x} \right)$. donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

De plus, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{x^2} \right).$$

x	0	$\sqrt{\alpha}$	$+\infty$
$f'(x)$		0	
f	$+\infty$	$\sqrt{\alpha}$	$+\infty$

Donc f est à valeurs dans $I = [\sqrt{\alpha}, +\infty[$ et cet intervalle est stable par f . Donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans I , à partir du rang 1.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{\alpha}{x_n} \right) - x_n = \frac{\alpha - x_n^2}{2x_n} \leq 0,$$

car pour $n \geq 1$, on a $x_n \in [\sqrt{\alpha}, +\infty[$.

Ici on peut conclure de 2 façons:

Méthode 1 : Théorème de la limite monotone

D'après ce théorème, comme (x_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{\alpha}$, alors (x_n) est convergente vers une limite $l \geq \sqrt{\alpha}$.

PAR CONTINUITÉ DE f , on a $f(l) = l$, donc $l = \sqrt{\alpha}$.

Méthode 2 : dite "de Héron"

Ici, on fait mieux, sans les propriétés de f .

Pour tout $n \geq 1$,

$$0 \leq x_{n+1} - \sqrt{\alpha} = \frac{(x_n - \sqrt{\alpha})^2}{2x_n} \leq \frac{(x_n - \sqrt{\alpha})^2}{2\sqrt{\alpha}}.$$

Donc par récurrence immédiate,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq x_n - \sqrt{\alpha} \leq 2\sqrt{\alpha} \left(\frac{x_1 - \sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\alpha}} \right)^{2^{n-1}}$$

Ce qui prouve, d'après le théorème d'encadrement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sqrt{\alpha}$. , la convergence de (x_n) vers $\sqrt{\alpha}$.

Le deuxième méthode donne mieux que la première, car elle permet de d'approximer la vitesse de la convergence de la suite (x_n) vers sa limite.

Exemple 31

Étudions la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_0 > 0$, avec $f(x) = \frac{1}{x} + 1$.

$\mathbb{R}_+^*$ est bien stable par f et les points fixes de f sont $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$, et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$.

Mais f est strictement décroissante, comme somme d'une fonction strictement décroissante et d'une fonction constante.

On doit regarder alors les suites u_{2n} et u_{2n+1} .

Pour tout $x > 0$, on a $f \circ f(x) = \frac{1+2x}{1+x} = 2 - \frac{1}{x+1}$, qui est croissante (ce n'est pas la peine de la montrer car f est décroissante).

Il faut donc connaître le signe de u_0 par rapport à u_2 . On a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$(f \circ f)(x) - x = \frac{1+2x}{1+x} - x = -\frac{x^2 - x - 1}{1+x}. \quad \text{Donc} \quad \begin{cases} 0 < x < \varphi \Rightarrow (f \circ f)(x) > x, \\ x > \varphi \Rightarrow (f \circ f)(x) < x, \\ x = \varphi \Rightarrow (f \circ f)(x) = x. \end{cases}$$

On conclut que

- Si $u_0 = \varphi$, alors u est constante.
- Si $u_0 < \varphi$, alors u_{2n} est croissante et majorée par φ , et donc u_{2n+1} est décroissante et minorée par φ . Les deux sous-suite converge vers le seul point fixe de $f \circ f$, c'est à dire φ .
- Si $u_0 > \varphi$, tout est inversé, et les deux suites u_{2n} et u_{2n+1} sont toutes les deux convergentes vers φ .

On a donc montré que $\boxed{u \rightarrow \varphi}$.

Essayez avec la méthode de Héron. Il y a une vraie astuce de calcul...