

ÁLGEBRA

POLINOMIOS

$$P_{(x)} = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$P_{(x)} = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$P_{(x)} = ax^2 + bx + c$$

$$P_{(x)} = ax + b$$

$\bar{x}-14\sqrt{\text{H}\mu\epsilon\rho\tau\alpha\varsigma}$

Las Matemáticas son fáciles

twitter.com/calapenshko

Christiam Huertas

Nivel UNI



Índice

1. Conceptos previos	02	6. Polinomios especiales	19
1.1 Expresión matemática	02	6.1 Polinomio constante	19
1.2 Notación matemática	02	6.2 Polinomio homogéneo	19
1.3 Expresión algebraica	03	6.3 Polinomio ordenado	20
1.4 Término algebraico	03	6.4 Polinomio completo	21
1.5 Términos semejantes	03	6.5 Polinomios idénticos	22
		6.6 Polinomio idénticamente nulo	23
2. Valor numérico	04	7. Problemas resueltos	25
3. Polinomio	07	7.1 Universidad Nacional del Callao (UNAC)	37
3.1 Polinomio de una variable	08	7.2 Universidad Nacional de Ingeniería (UNI)	38
3.2 Polinomio lineal	09		
3.3 Polinomio cuadrático	09	8. Problemas propuestos	40
3.4 Polinomio cúbico	11		
3.5 Polinomio cuártico	12	9. Claves	44
3.6 Polinomio de grado n	12		
4. Cambio de variable	14		
5. Polinomios con más de una variable	17		
5.1 Grado de polinomios con varias variables	17		



Polinomios

Conceptos previos

Expresión matemática

Es una representación matemática de números y letras ligados (unidos) por las diferentes operaciones matemáticas.

Ejemplo 1.

- $x - 4$
- $(x - 4)^3$
- $\log_2(x - 4)^3$
- $3ax^2 - 2bx + n - 5$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Notación matemática

Es una representación simbólica de una expresión matemática que nos permite diferenciar las **variables** de las **constantes**.

Variables

Un símbolo literal que se usa para representar cualquier elemento de un conjunto dado, se llama **variable**.

Ejemplo 2.

Sea $x \in \mathbb{N}$, entonces

- $x = 1$ ✓
- $x = 3$ ✓
- $x = 7$ ✓
- $\vdots$

Vemos que x puede tomar cualquier valor natural; es decir, esta variando. Por lo tanto, x es una variable.

Constantes

El numeral que se utiliza para indicar un elemento fijo de un conjunto numérico se llama **constante**.

Ejemplo 3.

El numeral 2 representa únicamente al número dos.

Ejemplo 4.

- En la expresión matemática

$$P(x) = 2ax^3 - 5nx^2 + 3b\sqrt{x} + 7m$$

variable

la única variable es x . Nótese que las letras a , n , b y m también son constantes.

- En la expresión matemática

$$T(x,y) = 5kx^2 - 3ry^4 + \sin(xy)$$

variables

las variables son x y y . Nótese que k y r también son constantes.

- En la expresión matemática

$$R(a,b) = ma^3 - nb^3 + \log(a + b)$$

variables

las variables son a y b . Nótese que m y n también son constantes.

- En la expresión matemática

$$Q(\sqrt[3]{x-1}) = x^2 + x + 1$$

variable

la variable es $\sqrt[3]{x} - 1$, y no x como parece.

Expresión algebraica

La expresión que enlaza variables y/o constantes mediante un número finito de adiciones, sustracciones, multiplicaciones, divisiones, potenciaciones y/o radicaciones, y donde los exponentes e índices son constantes; se llama **expresión algebraica**.

Ejemplo 5.

Ejemplos de expresiones algebraicas:

- $P(x) = 3x^4 + \sqrt[5]{x} - \frac{1}{x}$
- $Q(x,y) = \frac{x^2 + \sqrt{y^3}}{x^3 + y^{-1}}$
- $R(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{2013} + x^{2014}$

Ejemplo 6.

Ejemplos de expresiones que NO son algebraicas:

- $A(x) = x^2 + x - \cos x$
- $B(x,y) = 3x - \log_5(y)$
- $C(x) = x^3 + 3^x - 1$
- $T(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$
(infinitos términos)

Término algebraico

La expresión algebraica que no admite las operaciones de adición y/o sustracción (entre sus variables), se llama **término algebraico**.

Ejemplo 7.

Ejemplos de términos algebraicos:

- $P(x,y,z) = -2x^5yz^4$
- $Q(x,y) = \frac{x^3}{\sqrt{y}}$

Ejemplo 8.

NO son términos algebraicos:

- $R(x) = x - 1$
- $S(a,b) = a^3 - b^3$
- $T(x) = x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot x^4 \cdot \dots$ (∞ factores)

Términos semejantes

Dos o más términos algebraicos son semejantes, si presentan las mismas variables y con respecto a las variables comunes, iguales exponentes.

Ejemplo 9.

- Los términos algebraicos

$$M_{(x,y)} = 3x^2y^5 \quad \wedge \quad N_{(x,y)} = -2x^2y^5$$

son semejantes.

- Los términos algebraicos

$$R_{(x,y)} = -5x^3y^7 \quad \wedge \quad S_{(x,y)} = 4x^7y^3$$

no son semejantes, pues las variables comunes no tienen iguales exponentes.

Ejemplo 10.

Si los términos algebraicos:

$$P_{(x,y)} = (2mn - 1)x^{m-n}y^7$$

$$Q_{(x,y)} = (m^2 + n^2)x^5y^{m+n}$$

son semejantes, halle el valor de $m^2 - n^3$.

Resolución.

Como los términos algebraicos $P_{(x,y)}$ y $Q_{(x,y)}$ son semejantes, entonces se debe cumplir:

$$\begin{cases} m - n = 5 \\ m + n = 7 \end{cases} \quad \downarrow$$

Sumamos:

$$2m = 12$$

$$m = 6 \text{ y } n = 1$$

Por lo tanto,

$$m^2 - n^3 = 6^2 - 1^3 = 35$$

OBS.

Dos o más términos semejantes pueden reducirse (sumarse o restarse), para ello solo se opera con los coeficientes, así:

- $ax^n + bx^n = (a + b)x^n$
- $ax^3y^5 - bx^3y^5 = (a - b)x^3y^5$
- $5x^2y - 2x^2y + 3x^2y$
 $= (5 - 2 + 3)x^2y$
 $= 6x^2y$
- $2x^3y^7z^4 - 8x^3y^7z^4$
 $= (2 - 8)x^3y^7z^4$
 $= -6x^3y^7z^4$

Valor numérico

Si le asignamos valores constantes a las variables de una expresión algebraica y efectuamos las operaciones indicadas; el número real que se obtiene, se llama **valor numérico**.

Ejemplo 11.

El valor numérico de la expresión algebraica

$$P_{(x)} = 3x - 1$$

cuando $x = 2$ es:

$$P_{(2)} = 3(2) - 1 = 5$$

Así, podemos reemplazar la variable por cualquier constante.

Si $x = 1$: $P_{(1)} = 3(1) - 1 = 2$

Si $x = -1$: $P_{(-1)} = 3(-1) - 1 = -4$

Si $x = 0$: $P_{(0)} = 3(0) - 1 = -1$

Si $x = \sqrt{2}$: $P_{(\sqrt{2})} = 3\sqrt{2} - 1$

Si $x = \frac{1}{3}$: $P_{(\frac{1}{3})} = 3\left(\frac{1}{3}\right) - 1 = 1 - 1 = 0$

Ejemplo 12.

Dada la expresión algebraica:

$$R_{(x)} = 2x - 1$$

halle el valor de $R_{(R_{(2)})}$.

Resolución.

Se tiene la expresión algebraica:

$$R_{(x)} = 2x - 1$$

- Hallemos $R_{(2)}$:

$$R_{(2)} = 2(2) - 1 = 3$$

- Hallemos $R_{(3)}$:

$$R_{(3)} = 2(3) - 1 = 5$$

Nos piden calcular:

$$R_{\left(R_{\left(R_{(2)}\right)}\right)} = R_{\left(R_{(3)}\right)} = R_{(5)} = 9$$

Por lo tanto, $R_{\left(R_{\left(R_{(2)}\right)}\right)} = 9$

Ejemplo 13.

Dada la expresión matemática

$$H_{(x,y)} = \frac{x - y + 1}{x^3 + y^2}$$

halle el valor de $H_{(1;-1)}$.

Resolución.

Se tiene la expresión matemática

$$H_{(x,y)} = \frac{x - y + 1}{x^3 + y^2}$$

Nos piden hallar $H_{(1;-1)}$; es decir, vamos a reemplazar x por 1 e y por -1 . Luego:

$$\begin{aligned} H_{(1;-1)} &= \frac{1 - (-1) + 1}{1^3 + (-1)^2} \\ &= \frac{1 + 1 + 1}{1 + 1} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $H_{(1;-1)} = \frac{3}{2}$

Ejemplo 14.

Dada la expresión algebraica

$$T_{(x-1)} = x^2 + x - 2$$

halle el valor de $T_{(2)}$.

Resolución.

Se tiene la expresión algebraica

$$T_{(x-1)} = x^2 + x - 2$$

Si queremos hallar $T_{(2)}$ procedemos así:

La variable $x - 1$ lo igualamos a 2:

$$x - 1 = 2 \text{ entonces } x = 3$$

Es decir, vamos a reemplazar x por 3 (y no por 2 como parece):

$$T_{(3-1)} = 3^2 + 3 - 2$$

$$T_{(2)} = 10$$

Ejemplo 15.

Dada la expresión matemática

$$S_{(\sqrt[3]{x}-1)} = x^2 - x + 1$$

halle el valor de $S_{(1)}$.

Resolución.

Se tiene la expresión matemática

$$S_{(\sqrt[3]{x}-1)} = x^2 - x + 1$$

La variable $\sqrt[3]{x} - 1$ lo igualamos a 1:

$$\sqrt[3]{x} - 1 = 1$$

$$\sqrt[3]{x} = 2$$

Elevamos al cubo:

$$x = 8$$

Es decir, vamos a reemplazar x por 8:

$$\underbrace{S(\sqrt[3]{8}-1)}_{S(1)} = 8^2 - 8 + 1$$

$$S(1) = 57$$

Ejemplo 16.

Sea f una expresión matemática tal que

$$3f(x) = x + 4 + \frac{f(x)}{2}$$

calcule el valor de $f(f(-4))$.

Resolución.

Por dato:

$$3f(x) = x + 4 + \frac{f(x)}{2}$$

Multiplicamos por 2:

$$6f(x) = 2x + 8 + f(x)$$

$$5f(x) = 2x + 8$$

$$f(x) = \frac{2x + 8}{5}$$

Hallems $f(-4)$:

$$f(-4) = \frac{2(-4) + 8}{5} = \frac{0}{5} = 0$$

Nos piden calcular:

$$f(f(-4)) = f(0) = \frac{2(0) + 8}{5} = \frac{8}{5}$$

Ejemplo 17.

Sea g una expresión matemática tal que

$$g(z+1) = g(z) + 5z^2 - 3z + 2$$

si $g(0) = 2$, halle el valor de $g(1) + g(-1)$.

Resolución.

Se tiene la expresión matemática:

$$g(z+1) = g(z) + 5z^2 - 3z + 2$$

Para $z = 0$:

$$g_{(0+1)} = g_{(0)} + 5(0)^2 - 3(0) + 2$$

$$g_{(1)} = \frac{g_{(0)}}{2} + 2$$

Luego, $g_{(1)} = 4$

Para $z = -1$:

$$g_{(-1+1)} = g_{(-1)} + 5(-1)^2 - 3(-1) + 2$$

$$\frac{g_{(0)}}{2} = g_{(-1)} + 5 + 3 + 2$$

Luego, $g_{(-1)} = -8$

Por lo tanto, $g_{(1)} + g_{(-1)} = -4$.

Ejemplo 18.

Sabiendo que $f_{(x+6)} = ax + b$, $f_{(2)} = -14$ y $f_{(-3)} = -29$; halle el valor de $2a - b$.

Resolución.

Se tiene la expresión matemática:

$$f_{(x+6)} = ax + b$$

Para hallar $f_{(2)}$, reemplazamos $x = -4$:

$$f_{(2)} = -4a + b = -14$$

Para hallar $f_{(-3)}$, reemplazamos $x = -9$:

$$f_{(-3)} = -9a + b = -29$$

Se forma el sistema:

$$\begin{cases} -4a + b = -14 \\ -9a + b = -29 \end{cases} \downarrow$$

Restamos: $5a = 15$

$$a = 3 \text{ y } b = -2$$

Por lo tanto,

$$2a - b = 6 - (-2) = 8$$

Polinomio

La expresión algebraica que no admite las operaciones de división y radicación (para sus variables), en la que los exponentes de las variables son enteros positivos, se llama **polinomio**.

Ejemplo 19.

1. $P_{(x;y;z)} = 2x^2yz^8$

Es un polinomio de variables x ; y ; z .

Como el polinomio tiene un solo término, entonces también se le llama **monomio**.

2. $Q_{(x)} = 5x^2 + 1$

Es un polinomio de variable x .

Como el polinomio tiene solo dos términos, entonces también se le llama **binomio**.

3. $R_{(x;y)} = x^2 + y^3 - xy$

Es un polinomio de variables x e y .

Como el polinomio tiene solo tres términos, entonces también se le llama **trinomio**.

4. $S_{(x)} = x^3 + x^2 + x^{-1} + 1$

No es un polinomio porque uno de los exponentes de la variable es negativo.

5. $T_{(x;y)} = x^4 - \sqrt[3]{y^2} + x - y$

No es un polinomio porque la variable y está afectada por el símbolo radical.

6. $U_{(x;y)} = \frac{2x - 3y}{x^3 + y^5}$

No es un polinomio porque se está operando la variable con la operación de división.

Ejemplo 20.

¿Cuáles de las siguientes expresiones matemáticas son polinomios?

a. $P_{(x)} = x^3 + x^2 - x + 4^{-1}$

b. $Q_{(x)} = x^4 + x^2 + \log x$

c. $R_{(x)} = x^4 + x^2 + \log 2$

d. $S_{(x;y)} = \left(\frac{1}{x^2 + y^2 - 2} \right)^{-1}$

e. $T_{(x;y)} = x^6 + y^3 + \sin(x - y)$

Resolución.

Analizamos cada expresión matemática:

a. $P_{(x)} = x^3 + x^2 - x + 4^{-1}$

Si es polinomio, pues los exponentes de su variable son números enteros positivos.

b. $Q_{(x)} = x^4 + x^2 + \log x$

No es polinomio, pues $Q_{(x)}$ no es una expresión algebraica porque su variable está afectada de la operación logaritmo ($\log x$).

c. $R_{(x)} = x^4 + x^2 + \log 2$

Si es polinomio, pues los exponentes de su variable son números enteros positivos. Nótese que $\log 2$ es una constante.

d. $S_{(x;y)} = \left(\frac{1}{x^2 + y^2 - 2} \right)^{-1}$

No es polinomio, pues hay variables

en el denominador. Además, no está definido para $x = 1$ y $y = 1$.

Recuerde que todo polinomio siempre está definido para cualquier valor que se le asigne a sus variables.

e. $T_{(x,y)} = x^6 + y^3 + \text{sen}(x - y)$

No es polinomio, pues $T_{(x,y)}$ no es una expresión algebraica porque sus variables están afectadas de la operación seno: $\text{sen}(x - y)$.

Ejemplo 21.

Dado el polinomio

$$P_{(x)} = 2x^{n-3} - x^{6-n} + x^{\frac{n}{5}}$$

Halle el valor de $P_{(n)}$.

Resolución.

Como la expresión matemática

$$P_{(x)} = 2x^{n-3} - x^{6-n} + x^{\frac{n}{5}}$$

es un polinomio, entonces los exponentes de las variables deben ser números enteros positivos. Es decir,

$$\underbrace{n-3 \in \mathbb{Z}^+ \wedge 6-n \in \mathbb{Z}^+}_{\substack{n-3 \geq 1 \wedge 6-n \geq 1 \\ n \geq 4 \wedge 5 \geq n}} \wedge \frac{n}{5} \in \mathbb{Z}^+$$

$$n-3 \geq 1 \wedge 6-n \geq 1$$

$$n \geq 4 \wedge 5 \geq n$$

Luego,

$$n = 4 \text{ o } n = 5$$

Se descarta $n = 4$, pues no cumple la tercera condición.

Reemplazamos $n = 5$ en el polinomio:

$$P_{(x)} = 2x^2 - x^1 + x^1$$

$$P_{(x)} = 2x^2$$

Por lo tanto,

$$P_{(n)} = P_{(5)} = 2(5)^2 = 50$$

Polinomios de una variable

Generalmente usamos la letra x para indicar la variable, y el mayor exponente de la variable es llamado **grado del polinomio**.

Ejemplo 22.

Los siguientes polinomios son de una variable:

- $P_{(x)} = 4x + 1$ es un polinomio de primer grado.
- $Q_{(x)} = x^2 - x + 1$ es un polinomio de segundo grado.
- $R_{(x)} = 2x^3 + x^2 - 4x + 3$ es un polinomio de tercer grado.
- $S_{(x)} = x^4 - x + 2$ es un polinomio de cuarto grado.
- $T_{(x)} = 3$ es un polinomio constante.

En general:

$P_{(x)} = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$
es un polinomio de grado n .

Casos particulares de polinomios de una variable

Polinomio lineal (o polinomio de 1er grado)

$$P(x) = ax + b; a \neq 0$$

Ejemplo 23.

■ $P(x) = 3x - 2$

■ $Q(x) = -x + 5$

Ejemplo 24.

Si $P(x)$ es un polinomio lineal de modo que $P(2) = 2^2$ y $P(3) = 3^2$, halle el valor de $P(4)$.

Resolución.

Como $P(x)$ es un polinomio lineal, entonces tiene la siguiente forma general:

$$P(x) = ax + b$$

Por dato:

$$P(2) = 2^2 \rightarrow 2a + b = 4 \quad \uparrow$$

$$P(3) = 3^2 \rightarrow 3a + b = 9 \quad \uparrow$$

Restamos:
$$\begin{array}{r} a = 5 \\ b = -6 \end{array}$$

Reemplazamos en $P(x)$:

$$P(x) = 5x - 6$$

Por lo tanto, $P(4) = 5(4) - 6 = 14$

Ejemplo 25.

Sea $f(x) = ax + b$ un polinomio lineal de modo que $a > 0$, $f(0) = 2$ y $f(f(1)) = 5$; halle el valor de $f(-2)$.

Resolución.

Se tiene el polinomio lineal:

$$f(x) = ax + b$$

Por dato:

• $f(0) = 2$
 $b = 2$

• $f(f(1)) = 5$

$$f(a+b) = 5$$

$$f(a+2) = 5$$

$$a(a+2) + b = 5$$

$$a(a+2) + 2 = 5$$

$$a^2 + 2a - 3 = 0$$

$$\begin{array}{c} a \quad \quad 3 \\ \quad \quad \uparrow \\ a \quad \quad -1 \end{array}$$

$$(a+3)(a-1) = 0$$

$$a = -3 \vee a = 1$$

Tomamos $a = 1$, ya que $a > 0$. Luego,

$$f(x) = x + 2$$

Por lo tanto,

$$f(-2) = -2 + 2 = 0$$

twitter.com/calapenshko

Polinomio cuadrático (o polinomio de 2do grado)

$$P(x) = ax^2 + bx + c; a \neq 0$$

PNHKO

Ejemplo 26.

- $P(x) = 3x^2 - x + 7$
- $Q(x) = x^2 + 1$
- $R(x) = 2x^2 - 3x$

Ejemplo 27.

Sea $P(x)$ un polinomio cuadrático de modo que: $P_{(-1)} = 5$, $P_{(0)} = 1$ y $P_{(1)} = 3$. Halle el valor de $P_{(2)}$.

Resolución.

Como $P(x)$ es un polinomio cuadrático, entonces tiene la siguiente forma general:

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

Por dato:

- $P_{(0)} = 1 \rightarrow 0 + 0 + c = 1$
 $c = 1$
- $P_{(-1)} = 5 \rightarrow a - b + 1 = 5$
- $P_{(1)} = 3 \rightarrow a + b + 1 = 3$

De estas dos últimas expresiones se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} a - b = 4 \\ a + b = 2 \end{cases}$$

Sumando: $2a = 6$
 $a = 3$

Luego, $b = -1$

Reemplazamos en $P(x)$:

$$P(x) = 3x^2 - x + 1$$

Por lo tanto,

$$P_{(2)} = 3(2)^2 - 2 + 1 = 11$$

Ejemplo 28.

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$. Si $f_{(0)} = -2$, $f_{(1)} = 6$ y $f_{(3)} + f_{(2)} = 76$, determine el valor de $3a + 2b + c$.

Resolución.

Se tiene el polinomio cuadrático:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Por dato:

$$\begin{aligned} \underline{f_{(0)}} &= -2 \\ a(0)^2 + b(0) + c &= -2 \\ c &= -2 \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \underline{f_{(1)}} &= 6 \\ a(1)^2 + b(1) + c &= 6 \\ a + b - 2 &= 6 \\ a + b &= 8 \quad \dots (*) \end{aligned}$$

También

$$\begin{aligned} f_{(3)} + f_{(2)} &= 76 \\ a(3)^2 + b(3) + c + a(2)^2 + b(2) + c &= 76 \\ 9a + 3b - 2 + 4a + 2b - 2 &= 76 \\ 13a + 5b - 4 &= 76 \\ \underline{13a + 5b} &= 80 \\ 8a + 5(a + b) &= 80 \\ 8 & \\ 8a + 40 &= 80 \\ 8a &= 40 \\ a &= 5 \end{aligned}$$

Reemplazando en (*):

$$b = 3$$

Nos piden calcular:

$$3a + 2b + c = 3(5) + 2(3) - 2 = 19$$

Polinomio cúbico (o polinomio de 3er grado)

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d; a \neq 0$$

Ejemplo 29.

- $P(x) = x^3 + x - 1$
- $Q(x) = 2x^3 + x^2$
- $R(x) = -x^3 + 7x + 4$

Ejemplo 30.

Se sabe que el trinomio

$P(x) = (n+2)x^{n^2+2} + (n-1)x^2 - n^3 + 1$
es de tercer grado; entonces halle el valor de n .

Resolución.

Como el polinomio es de grado 3, entonces el mayor exponente de la variable es 3. Es decir,

$$\begin{aligned} n^2 + 2 &= 3 \\ n^2 &= 1 \\ n &= 1 \vee n = -1 \end{aligned}$$

Para $n = 1$, se obtiene:

$$P(x) = 3x^3$$

No es un trinomio (se descarta $n = 1$).

Para $n = -1$, se obtiene:

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + 2$$

si es un trinomio.

Por lo tanto, $n = -1$.

Ejemplo 31.

Sea $P(x)$ un polinomio cúbico de modo que $P_{(1)} = 1$; $P_{(2)} = 2$; $P_{(3)} = 3$ y $P_{(4)} = 5$. Determine el valor de $P_{(5)}$.

Resolución.

Como $P(x)$ es un polinomio cúbico (de grado 3) y se cumple que:

$$P_{(1)} = 1; P_{(2)} = 2; P_{(3)} = 3$$

entonces debe ser de la forma:

$$P(x) = a(x-1)(x-2)(x-3) + x$$

(se verifica los tres datos anteriores)

Además,

$$\begin{aligned} P_{(4)} &= 5 \\ a(3)(2)(1) + 4 &= 5 \\ 6a &= 1 \\ a &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Lo reemplazamos en $P(x)$:

$$P(x) = \frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3) + x$$

Por lo tanto,

$$P_{(5)} = \frac{1}{6}(4)(3)(2) + 5 = 9$$

En general:

Si un polinomio $P(x)$ es de grado n y se cumple que:

$P_{(1)} = 1; P_{(2)} = 2; P_{(3)} = 3; \dots; P_{(n)} = n$
entonces el polinomio es de la forma:

$$P(x) = a(x-1)(x-2) \cdot \dots \cdot (x-n) + x$$

Polinomio cuártico (o polinomio de 4to grado)

$$P_{(x)} = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$a \neq 0$$

Ejemplo 32.

- $A_{(x)} = 3x^4 - x^3 + 7x^2 - 1$
- $B_{(x)} = x^4 + x^2 - 2x$
- $C_{(x)} = -x^4 + 3x - 5$

Ejemplo 33.

Si el polinomio cuártico

$$P_{(x)} = (a-3)x^{n+2} + ax + a^2$$

es mónico, entonces halle el valor de $P_{(2n)} - P_{(a)}$.

Resolución.

Como el polinomio

$$P_{(x)} = (a-3)x^{n+2} + ax + a^2$$

es cuártico (es decir, es de grado 4), entonces:

$$n + 2 = 4$$

$$n = 2$$

Además $P_{(x)}$ es mónico; es decir:

$$\text{Coeficiente principal de } P_{(x)} = 1$$

$$a - 3 = 1$$

$$a = 4$$

Nos piden calcular:

$$P_{(2n)} - P_{(a)} = P_{(4)} - P_{(4)} = 0$$

Polinomio de grado n

$$P_{(x)} = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

Donde $n \in \mathbb{Z}^+$, además:

- $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ son los coeficientes del polinomio.
- a_0 es el coeficiente principal (CP).
- a_n es el término independiente (TI), no depende de la variable.
- n es el grado del polinomio. Se denota:

$$\text{Grad}(P_{(x)}) = n$$

$$^o[P_{(x)}] = n$$

Definición.

Si $a_0 = 1$ (es decir, coeficiente principal igual a uno), entonces $P_{(x)}$ es llamado **polinomio mónico**.

Ejemplo 34.

El polinomio

$$P_{(x)} = 5x^2 + x^3 - 2x + 7$$

es mónico, ya que su coeficiente principal es 1.

Recuerde que el coeficiente principal es aquel coeficiente que acompaña a la variable de mayor exponente.

Ejemplo 35.

El polinomio

$$P_{(x)} = 2x^5 - x^4 + 3 - 8x + 7x^6 + 4x^2$$

tiene las siguientes características:

- Sus coeficientes son:
2; -1; 3; -8; 7; 4

- Su coeficiente principal es 7
- Su término independiente es 3
- Su grado es 6
- Su término lineal es $-8x$
- Su término cuadrático es $4x^2$
- No tiene término cúbico.
- La suma de sus coeficientes es

$$2 - 1 + 3 - 8 + 7 + 4 = 7$$

Ejemplo 36.

Si el polinomio

$$P_{(x)} = (n-4)x^{n+3} - 5x^{\frac{3n-4}{2}} + n^2$$

es de menor grado posible, entonces halle el valor de $P_{(1)}$.

Resolución.

Como $P_{(x)}$ es un polinomio, entonces los exponentes de sus variables deben ser números enteros positivos. Es decir,

$$n+3 \in \mathbb{Z}^+ \wedge \frac{3n-4}{2} \in \mathbb{Z}^+$$

$$n+3 \geq 1 \wedge \frac{3n-4}{2} \geq 1$$

$$n \geq -2 \wedge 3n-4 \geq 2$$

$$n \geq -2 \wedge 3n \geq 6$$

$$\underline{n \geq -2 \wedge n \geq 2}$$

$$n \geq 2 \text{ y } n \text{ par}$$

Como $P_{(x)}$ debe ser de menor grado, consideramos algunos valores de n :

$$n=2: P_{(x)} = -2x^5 - 5x^1 + 4$$

$$n=4: P_{(x)} = -5x^4 + 16$$

$$n=6: P_{(x)} = 2x^9 - 5x^7 + 36$$

$$n=8: P_{(x)} = 4x^{11} - 5x^{10} + 64$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

Vemos que para $n=4$ se obtiene el polinomio de menor grado. Luego,

$$P_{(x)} = -5x^4 + 16$$

Nos piden hallar $P_{(1)}$:

$$P_{(1)} = -5 + 16 = 11$$

Teoremas

Dado el polinomio de grado n

$$P_{(x)} = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

se cumple que:

1. Suma de coeficientes

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = P_{(1)}$$

2. Término independiente

$$a_n = P_{(0)}$$

Ejemplo 37.

Dado el polinomio

$$P_{(x)} = (x+1)^5 + (2x-1)^4 + 3$$

Halle la suma de sus coeficientes y su término independiente.

Resolución.

Se tiene el polinomio

$$P_{(x)} = (x+1)^5 + (2x-1)^4 + 3$$

1. Suma de coeficientes

$$P_{(1)} = (2)^5 + (1)^4 + 3 = 36$$

2. Término independiente

$$P_{(0)} = (1)^5 + (-1)^4 + 3 = 5$$

Ejemplo 38.

Si la suma de coeficientes del polinomio $P_{(x)} = (2x - 1)^3(x + b)$ es igual al término independiente, halle el valor de $P_{(-b)}$.

Resolución.

Se tiene el polinomio

$$P_{(x)} = (2x - 1)^3(x + b)$$

Por dato,

$$\sum \text{Coef.}(P_{(x)}) = \text{TI}(P_{(x)})$$

Es decir:

$$\begin{aligned} P_{(1)} &= P_{(0)} \\ 1 + b &= -b \\ 2b &= -1 \\ b &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Reemplazamos en el polinomio $P_{(x)}$:

$$\begin{aligned} P_{(x)} &= (2x - 1)^3 \left(x - \frac{1}{2} \right) \\ P_{(x)} &= (2x - 1)^3 \left(\frac{2x - 1}{2} \right) \\ P_{(x)} &= \frac{(2x - 1)^4}{2} \end{aligned}$$

Nos piden calcular

$$\begin{aligned} P_{(-b)} &= P_{\left(\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{2} \left(2 \cdot \frac{1}{2} - 1 \right)^4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $P_{(-b)} = 0$.

Cambio de variable

La variable de un polinomio (o expresión algebraica) puede ser sustituida por cualquier otra variable, quedando el polinomio en términos de la nueva variable.

Ejemplo 39.

Dado el polinomio

$$P_{(x)} = 3x - 1$$

Hagámosle cambios de variable, donde la notación $x \Leftrightarrow y$, nos indica que estamos cambiando la variable x por la variable y . Luego:

$$x \Leftrightarrow y: P_{(y)} = 3y - 1$$

$$x \Leftrightarrow 2x: P_{(2x)} = 3(2x) - 1 = 6x - 1$$

$$x \Leftrightarrow x^2: P_{(x^2)} = 3x^2 - 1$$

$$\begin{aligned} x \Leftrightarrow P_{(x)}: P_{(P_{(x)})} &= 3P_{(x)} - 1 \\ &= 3(3x - 1) - 1 \\ &= 9x - 4 \end{aligned}$$

Ejemplo 40.

Dado el polinomio $T_{(x+1)} = 2x - 3$, halle la expresión $T_{(x)}$.

Resolución.**1ra forma:**

Hagamos que la variable $x + 1$ aparezca en el lado derecho de la igualdad. Así:

$$T_{(x+1)} = 2x - 3$$

$$T_{(x+1)} = 2(x + 1 - 1) - 3$$

Como la variable $x + 1$ se repite en ambos lados, lo podemos cambiar por cualquier otra variable. En nuestro caso:

cambio $x + 1$ por x :

$$T_{(x)} = 2(x - 1) - 3$$

$$T_{(x)} = 2x - 5$$

2da forma:

Con la ayuda de una variable auxiliar.

Sea

$$x + 1 = y \rightarrow x = y - 1$$

Lo reemplazamos en $T_{(x+1)} = 2x - 3$ y se obtiene:

$$T_{(y)} = 2(y - 1) - 3$$

$$T_{(y)} = 2y - 5$$

Finalmente cambiamos y por x :

$$T_{(x)} = 2x - 5$$

Ejemplo 41.

Sean f y g dos polinomios tales que

$$f_{(x+1)} = 2x - 1 \text{ y } f_{(g(x)+x)} = 6x + 1$$

Halle el valor de $f_{(g(2))}$.

Resolución.

Tenemos los siguientes datos:

$$f_{(g(x)+x)} = 6x + 1$$

$$f_{(x+1)} = 2x - 1$$

Trabajemos con este último:

$$f_{(x+1)} = 2(x + 1 - 1) - 1$$

cambio $x + 1$ por $g_{(x)} + x$:

$$f_{(g_{(x)}+x)} = 2(g_{(x)} + x - 1) - 1$$

$$6x + 1 = 2g_{(x)} + 2x - 2 - 1$$

$$6x + 1 = 2g_{(x)} + 2x - 3$$

$$4x + 4 = 2g_{(x)}$$

Sacamos mitad:

$$g_{(x)} = 2x + 2$$

Nos piden hallar:

$$f_{(g_{(2)})} = f_{(6)} = 9$$

Ejemplo 42.

Dadas las expresiones matemáticas

$$R_{(x)} = \frac{x+1}{x-1}, \quad Q_{(x)} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

determine $R_{(Q_{(R_{(x)})})}$.

Resolución.

Halleemos $Q_{(R_{(x)})}$:

$$Q_{(R_{(x)})} = \frac{(R_{(x)})^2 + 1}{(R_{(x)})^2 - 1}$$

$$= \frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 + 1}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 - 1}$$

$$= \frac{\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} + 1}{\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} - 1}$$

$$= \frac{\frac{(x+1)^2 + (x-1)^2}{(x-1)^2}}{\frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{(x-1)^2}}$$

Cancelamos $(x-1)^2$:

$$= \frac{(x+1)^2 + (x-1)^2}{(x+1)^2 - (x-1)^2}$$

Aplicamos las identidades de Legendre:

$$= \frac{2(x^2 + 1)}{4x}$$



$$= \frac{x^2 + 1}{2x}$$

Halleamos $R(q_{(R(x))})$:

$$\begin{aligned} R(q_{(R(x))}) &= R\left(\frac{x^2+1}{2x}\right) \\ &= \frac{\frac{x^2+1}{2x} + 1}{\frac{x^2+1}{2x} - 1} \\ &= \frac{\frac{x^2+2x+1}{2x}}{\frac{x^2-2x+1}{2x}} \end{aligned}$$

Cancelamos $2x$:

$$\begin{aligned} &= \frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1} \\ &= \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} \\ &= \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 \\ &= (R(x))^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$R(q_{(R(x))}) = (R(x))^2$$

Teorema

Dado el polinomio lineal: $P(x) = ax + b$
entonces se cumple:

$$\begin{aligned} \underbrace{P(P(\dots(P(x))\dots))}_{n \text{ veces } P} &= \\ &= a^n x + (a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)b \end{aligned}$$

Ejemplo 43.

Si $P(x) = 2x + 3$, halle el equivalente de la expresión $\underbrace{P(P(\dots(P(x))\dots))}_{10 \text{ veces } P}$.

Resolución.

Se tiene el polinomio lineal $P(x) = 2x + 3$ donde $a = 2$ y $b = 3$. Por el teorema anterior:

$$\begin{aligned} \underbrace{P(P(\dots(P(x))\dots))}_{10 \text{ veces } P} &= \\ &= a^{10}x + (a^9 + a^8 + \dots + a + 1)b \\ &= 2^{10}x + (2^9 + 2^8 + \dots + 2 + 1) \cdot 3 \\ &= 2^{10}x + 3 \left(\frac{2^{10} - 1}{2 - 1} \right) \\ &= 1024x + 3 \left(\frac{1024 - 1}{1} \right) \\ &= 1024x + 3(1023) \\ &= 1024x + 3069 \end{aligned}$$

Teoremas

Dada la expresión matemática

$$f\left(\frac{ax+b}{ax-b}\right) = \frac{a}{b}x; \quad ab \neq 0$$

entonces se cumple:

$$\underbrace{f(f(\dots(f(x))\dots))}_{2n \text{ veces } f} = x$$

$$\underbrace{f(f(\dots(f(x))\dots))}_{(2n-1) \text{ veces } f} = \frac{x+1}{x-1}$$

Ejemplo 44.

Sea f una expresión matemática tal que

$$f\left(\frac{3x+2}{3x-2}\right) = \frac{3}{2}x$$

entonces, por el teorema anterior:

$$\underbrace{f(f(\dots(f(1))\dots))}_{2014 \text{ veces } f} = 1$$

Ejemplo 45.

Sea f una expresión matemática tal que

$$f\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right) = 2x$$

halle el equivalente de las siguientes expresiones.

$$f(f(x)) = x \quad \text{y} \quad f(f(f(x)))$$

Resolución.

Por dato:

$$f\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right) = 2x = \frac{2}{1}x$$

Es decir, podemos aplicar el teorema anterior.

Para $f(f(x))$:

Como f se repite dos veces (cantidad par de veces), entonces:

$$f(f(x)) = x$$

Para $f(f(f(x)))$:

Como f se repite tres veces (cantidad impar de veces), entonces:

$$f(f(f(x))) = \frac{x+1}{x-1}$$

Polinomios con más de una variable

Ejemplo 46.

Los siguientes polinomios tienen más de una variable:

- $R_{(x,y)} = x^2 + xy + y^2$
- $Q_{(a,b)} = a^3 - ab + b^3$
- $R_{(x,y,z)} = x^2 + y^3 + z^4$
- $S_{(m,n)} = m + 2n - 3mn$

Grado de polinomios con varias variables

Un polinomio con más de una variable tiene dos tipos de grado:

1. **Grado relativo (GR)**, que se da con respecto a una de sus variables.
2. **Grado absoluto (GA)**, que se da con respecto a todas sus variables.

Definición. En un monomio no constante, el **grado relativo** es el exponente de la variable considerada; y el **grado absoluto** del monomio es la suma de los exponentes de todas sus variables.

Ejemplo 47.

En el monomio

$$P_{(x,y,z)} = 8x^5y^3z^6$$

se tiene:

- Grado relativo con respecto a x :

$$GR_x = 5$$

- Grado relativo con respecto a y :

$$GR_y = 3$$

- Grado relativo con respecto a z :

$$GR_z = 6$$

- Grado absoluto del monomio:

$$GA(P) = 5 + 3 + 6 = 14$$

Definición. En un polinomio que no es monomio, el **grado relativo** es el mayor exponente de la variable considerada y el **grado (absoluto)** del polinomio es el mayor grado absoluto de los términos (monomios) del polinomio.

Ejemplo 48.

En el polinomio

$$Q_{(x,y,z)} = 3x^2yz^6 + 2x^5y^4z^2 - xy^3z^4$$

se tiene

- Grado relativo con respecto a x :

$$GR_x = \max\{2; 5; 1\} = 5$$

- Grado relativo con respecto a y :

$$GR_y = \max\{1; 4; 3\} = 4$$

- Grado relativo con respecto a z :

$$GR_z = \max\{6; 2; 4\} = 6$$

También, en el polinomio

$$Q_{(x,y,z)} = \underbrace{3x^2yz^6}_{GA=9} + \underbrace{2x^5y^4z^2}_{GA=11} - \underbrace{xy^3z^4}_{GA=8}$$

- Grado absoluto del polinomio:

$$GA(Q) = \max\{9; 11; 8\} = 11$$

Ejemplo 49.

Determine el grado absoluto del siguiente polinomio.

$$P_{(x,y)} = 3x^{n-2}y + 8x^{n^2}y^{\frac{3}{n}} + 11y^{5-n}$$

Resolución.

Como $P_{(x,y)}$ es un polinomio, entonces los exponentes de las variables son números enteros positivos. Es decir,

$$\underbrace{n-2 \in \mathbb{Z}^+ \wedge 5-n \in \mathbb{Z}^+}_{n-2 \geq 1 \wedge 5-n \geq 1} \wedge \frac{3}{n} \in \mathbb{Z}^+$$

$$n-2 \geq 1 \wedge 5-n \geq 1$$

$$n \geq 3 \wedge 4 \geq n$$

Luego,

$$n = 3 \text{ o } n = 4$$

Se descarta el valor de $n = 4$ (no cumple la tercera condición).

Reemplazamos $n = 3$ en el polinomio:

$$P_{(x,y)} = \underbrace{3x^1y}_{GA=2} + \underbrace{8x^9y^1}_{GA=10} + \underbrace{11y^2}_{GA=2}$$

Por lo tanto,

$$GA(P) = \max\{2; 10; 2\} = 10$$

Ejemplo 50.

En el monomio

$$M_{(x,y)} = 4(m-1)x^{n+3}y^{3m}$$

el GA es 21 y el GR_y es igual al coeficiente, halle el valor de mn .

Resolución.

Se tiene el monomio

$$M_{(x,y)} = 4(m-1)x^{n+3}y^{3m}$$

Por dato:

- GA = 21; es decir,

$$n + 3 + 3m = 21$$

$$3m + n = 18 \quad \dots (\alpha)$$

- GR_y es igual al coeficiente; es decir,

$$3m = 4(m - 1)$$

$$3m = 4m - 4$$

$$4 = m$$

Reemplazando en (α) se obtiene

$$n = 6$$

Por lo tanto, $mn = 24$.

Polinomios especiales

1 Polinomio constante

Es aquel polinomio (de una o más variables) de la forma:

$$P_{(x)} = k$$

o

$$P_{(x,y)} = k$$

donde k es un número real diferente de cero ($k \neq 0$).

Ejemplo 51.

Dado el polinomio constante $P_{(x)} = 3$, halle el valor de J .

$$J = \frac{P_{(1)} + P_{(2)} + \dots + P_{(10)}}{P_{(-1)} + P_{(-2)} + \dots + P_{(-5)}}$$

Resolución.

Por dato, $P_{(x)} = 3$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
 Luego,

$$J = \frac{P_{(1)} + P_{(2)} + \dots + P_{(10)}}{P_{(-1)} + P_{(-2)} + \dots + P_{(-5)}}$$

$$J = \frac{\overbrace{3 + 3 + \dots + 3}^{10 \text{ sumandos}}}{\underbrace{3 + 3 + \dots + 3}_{5 \text{ sumandos}}}$$

$$J = \frac{10(3)}{5(3)}$$

$$J = 2$$

Ejemplo 52.

Sea $P_{(x)}$ un polinomio constante de modo que

$$\frac{P_{(1)} + P_{(2)}}{P_{(3)} + 4} = 1$$

Halle el valor de $P_{(2014)} + P_{(-2014)}$.

Resolución.

Como $P_{(x)}$ es un polinomio constante, entonces es de la forma:

$$P_{(x)} = k; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Lo reemplazamos en el dato:

$$\frac{k + k}{k + 4} = 1$$

$$2k = k + 4$$

$$k = 4$$

Es decir,

$$P_{(x)} = 4; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto,

$$P_{(2014)} + P_{(-2014)} = 4 + 4 = 8$$

2

Polinomio homogéneo

Es aquel polinomio que tiene todos sus términos del mismo grado.

Ejemplo 53.

Los siguientes polinomios son homogéneos:

$$P_{(x,y)} = \underbrace{x^3}_{GA=3} + \underbrace{4x^2y}_{GA=3} + \underbrace{2xy^2}_{GA=3} + \underbrace{y^3}_{GA=3}$$

todos sus términos tienen grado 3

$$Q_{(x,y)} = \underbrace{x^3y^2}_{GA=5} + \underbrace{bx^2y^3}_{GA=5} + \underbrace{cxy^4}_{GA=5}; \quad bc \neq 0$$

todos sus términos tienen grado 5

$$2b = b^2$$

Esto se cumple solo cuando $b = 2$.
Luego, $a = 4$.

Reemplazando en el polinomio P :

$$P_{(x,y,z)} = 256x^{16} + 8y^{16} + 8z^{16}$$

Por lo tanto,

$$\sum \text{Coef.}(P) = 256 + 8 + 8 = 272$$

Ejemplo 54.

Si el polinomio

$$P_{(x,y,z)} = a^4x^{a^b} + b^3y^{b^a} + abz^{a^{a-b}}$$

es homogéneo, calcule la suma de sus coeficientes. Considere $a, b \in \mathbb{N}$.

Resolución.

Como el polinomio P es homogéneo, entonces sus términos tienen el mismo grado. Es decir,

$$a^b = b^a = a^{a-b}$$

1ero. Considerando:

$$a^b = a^{a-b}$$

Como las bases son iguales, entonces los exponentes son iguales:

$$b = a - b$$

$$a = 2b$$

2do. Considerando:

$$a^b = b^a$$

Reemplazamos $a = 2b$:

$$(2b)^b = b^{2b}$$

$$(2b)^b = (b^2)^b$$

Como los exponentes son iguales, entonces las bases deben ser iguales (pues b es un número natural):

3 Polinomio ordenado

Es aquel polinomio que está ordenado con respecto a una variable llamada **ordenatriz**, donde los exponentes de la mencionada variable van aumentando o disminuyendo.

Ejemplo 55.

- $P_{(x)} = 2x^6 - 5x^4 + x^3 - 6x + 4$

Es un polinomio ordenado de forma descendente respecto a su única variable.

- $Q_{(x)} = -3 + x^2 + 2x^3 - x^5 + 4x^8$

Es un polinomio ordenado de forma ascendente respecto a su única variable.

Ejemplo 56.

$$P_{(x,y)} = x^5y + 2x^3y^3 - 4x^2y^2 + 3y^4$$

Es un polinomio ordenado de forma descendente respecto a la ordenatriz x .

$$Q_{(x,y)} = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

Es un polinomio ordenado de forma ascendente respecto a la variable y ;

también esta ordenado en forma descendente respecto a la variable x . Luego, podemos decir que existen dos variables ordenatriz.

4 Polinomio completo

Se dice que un polinomio es completo respecto a una de sus variables si posee todos los exponentes de la variable considerada, desde el mayor hasta el exponente uno, inclusive el término independiente no nulo (de la variable considerada).

Ejemplo 57.

1. $P(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$
es un polinomio completo y ordenado.
2. $Q(x) = -x^2 - 3x^4 + 3x + 6 - x^3$
es un polinomio completo y desordenado.
3. $R(x,y) = 2x^4y - x^3y^2 + x^2 - 3xy + y^2$
es un polinomio completo (y ordenado) respecto a la variable x .

Ejemplo 58.

Si el polinomio

$$P(x) = ax^{b-3} + cx^c + a + d$$

es ordenado y completo y su término independiente es 9, halle el valor de $a + b + c + d$.

Resolución.

Como el polinomio $P(x)$ es completo y ordenado, entonces se debe cumplir:

$$b - 3 = 2 \wedge c = 1 \wedge a + d = TI = 9$$

$$b = 5 \wedge c = 1 \wedge a + d = 9$$

Por lo tanto,

$$a + b + c + d = 15$$

Ejemplo 59.

Si el polinomio

$$P(x,y) = 3nx^{2a^2+1}y^{n-5} + 3y^3x^{n-5a} - bx^{b^3}y^a + abx^{n-7}$$

es completo y ordenado con respecto a la variable x , halle la suma de sus coeficientes.

Resolución.

Como el polinomio $P(x,y)$ es completo y ordenado con respecto a la variable x . Analicemos los exponentes de dicha variable:

$$x^{2a^2+1}; x^{n-5a}; x^{b^3}; x^{n-7}$$

Uno de los extremos debe ser uno, como $(2a^2 + 1) \geq 1$, entonces:

- $n - 7 = 0 \rightarrow n = 7$
- $b^3 = 1 \rightarrow b = 1$
- $n - 5a = 2 \rightarrow a = 1$
- $2a^2 + 1 = 3$

Lo reemplazamos en el polinomio P :

$$P(x,y) = 21x^3y^3 + 3y^3x^3 - xy + 1$$

Por lo tanto,

$$\sum \text{Coef.}(P) = 21 + 3 - 1 + 1 = 24$$

5

Polinomios idénticos

Dos o más polinomios del mismo grado y en las mismas variables son idénticos, si tienen el mismo valor numérico, para cualquier valor (o valores) asignados a sus variables. Es decir,

$$VN_{[P(x)]} = VN_{[Q(x)]}; \forall x \in \mathbb{R}$$

Notación:

Si P y Q son polinomios idénticos, se denota:

$$P_{(x)} \equiv Q_{(x)}$$

o

$$P_{(x,y)} \equiv Q_{(x,y)}$$

Ejemplo 60.

Los polinomios

$P_{(x)} = (x+1)^2 - (x-1)^2$ y $Q_{(x)} = 4x$ son idénticos; es decir

$$P_{(x)} \equiv Q_{(x)}$$

pues,

$$P_{(a)} \equiv Q_{(a)}; \forall a \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 61.

Dados los polinomios

$$P_{(x+1)} = x^2 - 2x + 2b$$

$$Q_{(x-1)} = x^2 - ax + 2$$

Si $P_{(x)} \equiv Q_{(x)}$, calcule el valor de $a + b$.

Resolución.

Como $P_{(x)} \equiv Q_{(x)}$; es decir, $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$

son idénticos, lo evaluamos para un valor adecuado; en este caso, para $x = 1$:

$$\underline{P_{(1)}} = \underline{Q_{(1)}}$$

$$2b = 4 - 2a + 2$$

$$2a + 2b = 6$$

Sacamos mitad: $a + b = 3$

Teoremas

1. Si dos polinomios lineales son idénticos; es decir:

$$ax + b \equiv mx + n$$

$$\text{entonces } a = m \wedge b = n.$$

2. Si dos polinomios cuadráticos son idénticos; es decir:

$$ax^2 + bx + c \equiv mx^2 + nx + p$$

$$\text{entonces } a = m \wedge b = n \wedge c = p$$

Ejemplo 62.

Si los polinomios cuadráticos

$$P_{(x)} = 4x^2 + (a-2)x + c$$

$$Q_{(x)} = (b-1)x^2 + 5x - 2$$

son idénticos, halle el valor de $a + b + c$.

Resolución.

Como los polinomios son idénticos ($P_{(x)} \equiv Q_{(x)}$); entonces por el teorema anterior, sus coeficientes deben ser iguales respectivamente. Es decir,

$$4 = b - 1 \wedge a - 2 = 5 \wedge c = -2$$

$$b = 5 \qquad a = 7 \qquad c = -2$$

Por lo tanto, $a + b + c = 10$.

Ejemplo 63.

Dados los polinomios idénticos:

$$P(x) = (a^a - 250)x^3 + 7x^2 + (6 - c)x$$

$$Q(x) = 6x^3 + (b^b - 20)x^2 + 3x$$

determine el valor de $P(a) - Q(b+1) + c^2$.

Resolución.

Como los polinomios cúbicos $P(x)$ y $Q(x)$ son idénticos, entonces se debe cumplir:

- $a^a - 250 = 6 \rightarrow a^a = 256 = 4^4$
 $\rightarrow a = 4$
- $7 = b^b - 20 \rightarrow b^b = 27$
 $\rightarrow b = 3$
- $6 - c = 3 \rightarrow c = 3$

Nos piden calcular:

$$P(a) - Q(b+1) + c^2 = \underbrace{P(4) - Q(4)}_0 + 3^2$$

$$\therefore P(a) - Q(b+1) + c^2 = 9$$

Nota.

Como $P(x)$ y $Q(x)$ son idénticos ($P(x) \equiv Q(x)$), entonces

$$P(a) = Q(a) \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

6 Polinomio idénticamente nulo

Es aquel polinomio de grado no definido de una o más variables, cuyo valor numérico siempre es cero, para cualquier valor (o valores) asignados a sus variables.

Notación:

Si P es un polinomio nulo, se denota:

$$P(x) \equiv 0$$

o

$$P(x,y) \equiv 0$$

Ejemplo 64.

Si el polinomio

$$P(x) = (x^2 - x + 3)(a - b) + (x^2 - x + 4)(b - c) + (x^2 + x + 5)(c - a)$$

es idénticamente nulo, donde $a \neq 0$. Determine el valor de $L = (b + c)/a$.

Resolución.

Como el polinomio $P(x)$ es idénticamente nulo, entonces por definición su valor numérico siempre es cero para cualquier valor asignado a su variable. En particular:

$$P(0) = 0$$

$$(3)(a - b) + (4)(b - c) + (5)(c - a) = 0$$

$$3a - 3b + 4b - 4c + 5c - 5a = 0$$

$$b + c - 2a = 0$$

$$b + c = 2a$$

$$\frac{b + c}{a} = 2$$

Por lo tanto, $L = 2$.

Teoremas

1. Si el polinomio $P(x) = ax + b$ es idénticamente nulo, entonces

$$a = 0 \wedge b = 0$$

2. Si el polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$ es idénticamente nulo, entonces

$$a = 0 \wedge b = 0 \wedge c = 0$$

Ejemplo 65.

Si el polinomio

$P(x) = (a^2 - 4)x^2 + (b^2 - 9)x + \sqrt{c} - 4$
es idénticamente nulo, halle el menor valor de $a + b + c$.

Resolución.

Como el polinomio

$P(x) = (a^2 - 4)x^2 + (b^2 - 9)x + \sqrt{c} - 4$
es idénticamente nulo, entonces por el teorema anterior, todos sus coeficientes deben ser cero. Es decir:

$$\begin{aligned} a^2 - 4 &= 0 \wedge b^2 - 9 = 0 \wedge \sqrt{c} - 4 = 0 \\ a^2 &= 2^2 \quad \underline{b^2 = 9} \quad \sqrt{c} = 4 \\ a &= 2 \quad b = 3 \text{ ó } b = -3 \quad c = 16 \end{aligned}$$

$\therefore$ El menor valor de $a + b + c$ es 15.

Como el polinomio $P(x)$ es idénticamente nulo, entonces por el teorema anterior, todos sus coeficientes son cero; es decir:

$$a + b - 4abc = 0$$

$$a + c - 3abc = 0$$

$$b + c + abc = 0$$

Sumamos: $2a + 2b + 2c - 6abc = 0$

$$2(a + b + c) = 6abc$$

$$a + b + c = 3abc$$

Nos piden calcular:

$$\begin{aligned} J &= \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} \right)^{-1} = \left(\frac{c + b + a}{abc} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{3abc}{abc} \right)^{-1} \\ &= (3)^{-1} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Teorema

Si el polinomio

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$
es idénticamente nulo, entonces todos sus coeficientes son cero; es decir,

$$a_0 = a_1 = a_{n-1} = \dots = a_n = 0$$

Ejemplo 66.

Si el polinomio

$P(x) = (a + b - 4abc)x^4 +$
 $+(a + c - 3abc)x + b + c + abc$
es idénticamente nulo, halle el valor de J .

$$J = \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} \right)^{-1}$$

Resolución.**Teorema**

Si el polinomio de grado n :

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$
se anula para más de n valores para x ,
entonces $P(x)$ es idénticamente nulo.

Ejemplo 67.

Dados los polinomios:

$$f(x) = mx + n$$

$$g(x) = (m - 2)x^2 + (n + 1)x + p - 1$$

Si $g(1) = g(\sqrt{2}) = g(\sqrt{3}) = 0$, halle $f(p)$.

Resolución.

Por dato:

$$g(1) = g(\sqrt{2}) = g(\sqrt{3}) = 0$$

es decir el polinomio de grado dos:

$$g(x) = (m-2)x^2 + (n+1)x + p-1$$

se anula para más de dos valores, entonces por el teorema anterior:

$$g(x) \text{ es nulo; es decir, } g(x) \equiv 0$$

Entonces, todos sus coeficientes deben ser ceros:

$$m-2=0 \wedge n+1=0 \wedge p-1=0$$

$$m=2 \quad n=-1 \quad p=1$$

Reemplazamos en $f(x)$:

$$f(x) = 2x - 1$$

Nos piden calcular:

$$f(p) = f(1) = 1$$

$$h_{(-1)} = -7$$

Nos piden calcular:

$$h_{(f(3)+h_{(-1)})} = h_{(37-7)} = h_{(30)}$$

Para hallar $h_{(30)}$, evaluamos para $x = 29$:

$$h_{(29+1)} = 4(29) + 1$$

$$h_{(30)} = 117$$

Rpta: C

Problema 2.

Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Si $F_{(x,y)} = x^2 - y^2$,

Calcule el valor de $F_{(3, F_{(3,4)})}$.

- A) 40 B) -49 C) -46
D) -40 E) -45

Resolución

Por dato:

$$F_{(x,y)} = x^2 - y^2$$

Hallemos $F_{(3,4)}$:

$$F_{(3,4)} = 3^2 - 4^2 = -7$$

Nos piden calcular:

$$\begin{aligned} F_{(3, F_{(3,4)})} &= F_{(3, -7)} \\ &= 3^2 - (-7)^2 \\ &= 9 - 49 \\ &= -40 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $F_{(3, F_{(3,4)})} = -40$

Rpta: D

Problemas resueltos

Problema 1.

Si $f_{(x-3)} = x^2 + 1$ y $h_{(x+1)} = 4x + 1$, halle el valor de $h_{(f_{(3)}+h_{(-1)})}$

- A) 145 B) 115 C) 117
D) 107 E) 120

Resolución

Se tiene las expresiones matemáticas

$$f_{(x-3)} = x^2 + 1 \text{ y } h_{(x+1)} = 4x + 1$$

Para hallar $f_{(3)}$, evaluamos para $x = 6$:

$$f_{(6-3)} = 6^2 + 1$$

$$f_{(3)} = 37$$

Para hallar $h_{(-1)}$, evaluamos para $x = -2$:

$$h_{(-2+1)} = 4(-2) + 1$$

Problema 3.

Dado el polinomio

$$P_{(x)} = (ax + b)(a^2x + b)(a^3x + b) \dots$$

$$(a^n x + b)$$

halle el equivalente de $\frac{P(ax)}{P(x)}$

A) $\frac{a^{n-1}x + b}{a^n x + b}$

B) $\frac{a^{n-1}x + b}{ax + b}$

C) $\frac{a^{n+1}x + b}{a^n x + b}$

D) $\frac{a^n x + b}{a^{n-1}x + b}$

E) $\frac{a^{n+1}x + b}{ax + b}$

Resolución

Se tiene el polinomio

$$P(x) = (ax + b)(a^2x + b)(a^3x + b) \dots (a^n x + b)$$

Halleamos $P(ax)$:

En el polinomio P , cambiamos x por ax :

$$P(x) = (aax + b)(a^2ax + b)(a^3ax + b) \dots (a^n ax + b)$$

$$P(x) = (a^2x + b)(a^3x + b)(a^4x + b) \dots (a^{n+1}x + b)$$

Nos piden el equivalente de

$$\frac{P(ax)}{P(x)} = \frac{(a^2x + b)(a^3x + b) \dots (a^{n+1}x + b)}{(ax + b)(a^2x + b) \dots (a^n x + b)}$$

Vemos que al simplificar, solo queda el último factor del numerador y el primer factor del denominador. Es decir,

$$\frac{P(ax)}{P(x)} = \frac{(a^{n+1}x + b)}{(ax + b)}$$

Rpta: E

Problema 4.

En el conjunto de los números reales definimos la expresión f como

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \geq 2 \\ x^2 - 1 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

Si $a < 1$, calcule $af_{(3-a)} + f_{(2a)}$

A) $3a^2 + 2a - 1$

B) $3a^2 - a - 2$

C) $2a^2 + a - 1$

D) $2a^2 + a + 1$

E) $a^2 + 3a + 1$

Resolución

- Como $a < 1$

Multipliquo por -1 :

$$-a > -1$$

Sumo 3:

$$3 - a > 2$$

Luego, por definición de f :

$$f_{(3-a)} = 3 - a - 1 = 2 - a$$

- Como $a < 1$

Multipliquo por 2:

$$2a < 2$$

Luego, por definición de f :

$$f_{(2a)} = (2a)^2 - 1 = 4a^2 - 1$$

Nos piden hallar:

$$\begin{aligned} af_{(3-a)} + f_{(2a)} &= a(2 - a) + 4a^2 - 1 \\ &= 2a - a^2 + 4a^2 - 1 \\ &= 3a^2 + 2a - 1 \end{aligned}$$

Rpta: A

Problema 5.

Sea f una expresión matemática tal que

$$f_{(x-1)} = x^2 + 2x \text{ y}$$

$$f_{(a)} - f_{(b)} = b - a \neq 0$$

¿cuál es el valor de $a + b + 5$?

A) 0

B) 5

C) -1

D) 1

E) -2

Resolución

Se tiene la expresión

$$f_{(x-1)} = x^2 + 2x$$

Cambio x por $x+1$:

$$f_{(x+1-1)} = (x+1)^2 + 2(x+1)$$

$$f_{(x)} = x^2 + 2x + 1 + 2x + 2$$

$$f_{(x)} = x^2 + 4x + 3$$

Por dato:

$$f_{(a)} - f_{(b)} = b - a$$

$$a^2 + 4a + 3 - (b^2 + 4b + 3) = b - a$$

$$a^2 + 4a + 3 - b^2 - 4b - 3 = b - a$$

$$a^2 - b^2 + 4a - 4b = b - a$$

$$(a+b)(a-b) + 4(a-b) = b - a$$

Factorizamos $(a-b)$:

$$(a-b)(a+b+4) = -(a-b)$$

Cancelamos $(a-b) \neq 0$:

$$a + b + 4 = -1$$

$$a + b + 5 = 0$$

Rpta: A

Problema 6.

Si $f_{(x)} = (3a)^{x+1}$; $a > 0$ y

$$f_{(x-1)} = 9f_{(x+1)}$$

halle el valor de a .

A) $1/9$

B) $1/3$

C) 3

D) 9

E) $1/27$

Resolución

Por dato:

$$f_{(x)} = (3a)^{x+1}$$

Entonces

$$\blacksquare f_{(x-1)} = (3a)^{x-1+1} = (3a)^x$$

$$\blacksquare f_{(x+1)} = (3a)^{x+1+1} = (3a)^{x+2}$$

Además, por dato:

$$f_{(x-1)} = 9f_{(x+1)}$$

$$(3a)^x = 9(3a)^{x+2}$$

$$(3a)^x = 9(3a)^x(3a)^2$$

Cancelamos $(3a)^x$:

$$1 = 9(3a)^2$$

$$1 = 9 \cdot 3^2 a^2$$

$$1 = 81a^2$$

$$a^2 = \frac{1}{81}$$

De donde

$$a = \frac{1}{9}$$

Rpta: A

Problema 7.

Si el polinomio

$$P_{(x)} = nx^{n+5} + (n+1)x^{n+6} +$$

$$+(n+2)x^{n+7} + \dots$$

es ordenado y completo, calcule el valor de

$$P_{(3)} - P_{(-1)}$$

A) -15

B) -12

C) 1

D) 5

E) 15

Resolución

Como el polinomio

$$P_{(x)} = nx^{n+5} + (n+1)x^{n+6} +$$

$$+(n+2)x^{n+7} + \dots$$

esta ordenado y vemos que sus exponentes van aumentando, entonces $P_{(x)}$ esta ordenado en forma decreciente; entonces el primer término nx^{n+5} es el término independiente (es decir, no debe tener variable). Por lo tanto:

$$n + 5 = 0$$

$$n = -5$$



Al reemplazarlo en $P_{(x)}$, queda expresado como:

$$P_{(x)} = -5x^{-5+5} + (-5+1)x^{-5+6} + (-5+2)x^{-5+7} + \dots$$

$$P_{(x)} = -5 - 4x - 3x^2 - 2x^3 - x^4 + 0$$

Entonces

$$P_{(1)} = -5 - 4 - 3 - 2 - 1 = -15$$

$$P_{(-1)} = -5 + 4 - 3 + 2 - 1 = -3$$

Por lo tanto,

$$P_{(1)} - P_{(-1)} = -15 - (-3) = -12$$

Rpta: B

Problema 8.

Sean P y Q dos polinomios de modo que

$$P_{(x)} + Q_{(x)} = ax + b$$

$$P_{(x)} - Q_{(x)} = a + bx$$

y $P_{(5)} = 4$, calcule el valor de $P_{(Q_{(1)})}$.

- A) $4/3$ B) $1/3$ C) $5/3$
D) $2/3$ E) $-4/3$

Resolución

Por dato:

$$P_{(x)} + Q_{(x)} = ax + b$$

$$P_{(x)} - Q_{(x)} = a + bx$$

Sumamos:

$$2P_{(x)} = (a+b)x + a + b$$

$$P_{(x)} = \frac{(a+b)x + a + b}{2}$$

Restamos:

$$2Q_{(x)} = (a-b)x - (a-b)$$

$$Q_{(x)} = \frac{(a-b)x - (a-b)}{2}$$

Además

$$\begin{aligned} P_{(5)} &= 4 \\ \frac{5(a+b) + a + b}{2} &= 4 \\ 6(a+b) &= 8 \\ a+b &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Halleamos $Q_{(1)}$:

$$Q_{(1)} = \frac{a-b-a+b}{2} = 0$$

Nos piden calcular

$$P_{(Q_{(1)})} = P_{(0)} = \frac{a+b}{2} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{2}{3}$$

Rpta: D

Problema 9.

Dado el polinomio

$$P_{(x)} = \frac{1}{2}(3x^2 - x)$$

halle el equivalente de $P_{(x+1)} - P_{(x)}$.

- A) $3x + 1$ B) $3x - 1$
C) $\frac{1}{2}(3x + 1)$
D) $\frac{1}{2}(3x - 1)$ E) $3x$

Resolución

Por dato:

$$P_{(x)} = \frac{1}{2}(3x^2 - x)$$

Entonces,

$$P_{(x+1)} = \frac{1}{2}(3(x+1)^2 - (x+1))$$

$$P_{(x+1)} = \frac{1}{2}(3(x^2 + 2x + 1) - x - 1)$$

$$P_{(x+1)} = \frac{1}{2}(3x^2 + 6x + 3 - x - 1)$$

$$P_{(x+1)} = \frac{1}{2}(3x^2 + 5x + 2)$$

Nos piden hallar:

$$\begin{aligned} & P_{(x+1)} - P_{(x)} \\ &= \frac{1}{2}(3x^2 + 5x + 2) - \frac{1}{2}(3x^2 - x) \\ &= \frac{1}{2}(3x^2 + 5x + 2 - (3x^2 - x)) \\ &= \frac{1}{2}(3x^2 + 5x + 2 - 3x^2 + x) \\ &= \frac{1}{2}(6x + 2) \\ &= 3x + 1 \end{aligned}$$

Rpta: A

$$\frac{6x}{4} = \frac{t+1}{t-1}$$

Es decir,

$$\frac{t+1}{t-1} = \frac{3}{2}x$$

Lo reemplazamos en (*):

$$f(t) = \frac{t+1}{t-1}$$

Nos piden calcular

$$f(f(f(15))) = f\left(f\left(\frac{8}{7}\right)\right) = f(15) = \frac{8}{7}$$

Note que:

$$f\left(\frac{8}{7}\right) = \frac{\frac{8}{7} + 1}{\frac{8}{7} - 1} = 15$$

Rpta: E

Problema 10.

Sea f una expresión matemática tal que

$$f\left(\frac{3x+2}{3x-2}\right) = \frac{3}{2}x$$

calcule el valor de $f(f(f(15)))$.

- A) 15 B) 1/15 C) 8/15
D) 7/8 E) 8/7

Resolución

Se tiene la expresión matemática

$$f\left(\frac{3x+2}{3x-2}\right) = \frac{3}{2}x \quad \dots (*)$$

Hagamos el siguiente cambio de variable:

$$\frac{3x+2}{3x-2} = t = \frac{t}{1}$$

Recuerde:

$$\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

Lo aplicamos al problema:

$$\frac{3x+2+3x-2}{3x+2-(3x-2)} = \frac{t+1}{t-1}$$

Problema 11.

Si $P_{(n+2)} = 5P_{(n+1)} - 6P_{(n)}$,

$P_{(0)} = 0$ y $P_{(1)} = 2$

Halle el valor de

$$\frac{P_{(12)}}{3^{12} - 2^{12}}$$

- A) 2 B) 12 C) 9
D) 10 E) 15

Resolución

Se tiene la expresión

$$P_{(n+2)} = 5P_{(n+1)} - 6P_{(n)}$$

Es una ecuación de recursividad, entonces formemos la ecuación característica:

$$r^2 = 5r - 6$$

$$r^2 - 5r + 6 = 0$$

$$\begin{array}{l} r \quad \quad \quad -2 \\ r \quad \quad \quad -3 \end{array}$$

$$(r-2)(r-3) = 0$$

entonces:

$$r_1 = 2 \text{ y } r_2 = 3$$

Se sabe que la solución de la ecuación de recursividad esta dada por:

$$P_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$$

Reemplazamos:

$$P_n = c_1 (2)^n + c_2 (3)^n$$

También

$$P_{(0)} = 0 \rightarrow c_1 + c_2 = 0$$

$$P_{(1)} = 2 \rightarrow \frac{2c_1 + 3c_2}{2(c_1 + c_2) + c_2} = 2$$

$$c_2 = 2$$

$$c_1 = -2$$

Luego,

$$P_n = -2 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$$

Nos piden hallar

$$\begin{aligned} \frac{P_{(12)}}{3^{12} - 2^{12}} &= \frac{-2 \cdot 2^{12} + 2 \cdot 3^{12}}{3^{12} - 2^{12}} \\ &= \frac{-8192 + 1062882}{531441 - 4096} \\ &= \frac{1054690}{527345} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Rpta: A

Problema 12.

Si se cumple que $f_x = 3^x$, calcule el valor numérico de K .

$$K = \frac{f_{(x+2)} - f_{(x+1)}}{30 \cdot f_{(x)}}$$

A) 12

B) 6

C) 1

D) 0,5

E) 0,2

Resolución

Por dato: $f_x = 3^x$

Entonces

$$f_{(x+2)} = 3^{x+2}$$

$$f_{(x+1)} = 3^{x+1}$$

Lo reemplazamos en K :

$$\begin{aligned} K &= \frac{f_{(x+2)} - f_{(x+1)}}{30 \cdot f_{(x)}} = \frac{3^{x+2} - 3^{x+1}}{30 \cdot 3^x} \\ &= \frac{3^x \cdot 3^2 - 3^x \cdot 3^1}{30 \cdot 3^x} \end{aligned}$$

Cancelamos 3^x :

$$\begin{aligned} &= \frac{3^2 - 3}{30} \\ &= \frac{6}{30} \\ &= \frac{1}{5} = 0,2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $K = 0,2$.

Rpta: E

Problema 13.

Si $f_{(x+2)} = f_{(x)} - 2x + 1$ y $f_{(0)} = 3$, entonces, halle el valor de $f_{(2)} + f_{(-2)}$.

A) -2

B) 2

C) 4

D) 3

E) 1

Resolución

Se tiene la relación

$$f_{(x+2)} = f_{(x)} - 2x + 1$$

Lo evaluamos para $x = 0$:

$$f_{(2)} = \frac{f_{(0)} - 2(0) + 1}{3}$$

$$f_{(2)} = 4$$

Lo evaluamos para $x = -2$:

$$\frac{f(0)}{3} = f_{(-2)} - 2(-2) + 1$$

$$f_{(-2)} = -2$$

Por lo tanto,

$$f_{(2)} + f_{(-2)} = 4 - 2 = 2$$

Rpta: B

Problema 14.

Si $f_{(x+2)} = f_{(x)} - 2x + 1$ y $f_{(0)} = 3$, entonces, halle el valor de $f_{(2)} + f_{(-2)}$.

- A) -2 B) 2 C) 4
D) 3 E) 1

Resolución

Se tiene la expresión

$$f_{(x+2)} = f_{(x)} - 2x + 1 \text{ con } f_{(0)} = 3$$

Para hallar $f_{(2)}$ le damos $x = 0$:

$$f_{(2)} = \frac{f_{(0)}}{3} - 2(0) + 1 = 4$$

$$f_{(2)} = 3 + 1 = 4$$

Para hallar $f_{(-2)}$ le damos $x = -2$:

$$\frac{f_{(0)}}{3} = f_{(-2)} - 2(-2) + 1$$

$$3 = f_{(-2)} + 5$$

$$f_{(-2)} = -2$$

Por lo tanto,

$$f_{(2)} + f_{(-2)} = 2$$

Rpta: B

Problema 15.

Si $f_{(x+4)} = x^2 + 3x$, halle el equivalente de $f_{(a+1)}$.

- A) $3a - 2$ B) $2a^2 - 6a + 4$
C) $a^2 + 3a + 4$
D) $a^2 - 3a + 4$ E) $a^2 - 3a$

Resolución

Se tiene la expresión

$$f_{(x+4)} = x^2 + 3x$$

Para hallar la expresión $f_{(a+1)}$, cambiamos x por $a - 3$:

$$f_{(a-3+4)} = (a-3)^2 + 3(a-3)$$

$$f_{(a+1)} = a^2 - 6a + 9 + 3a - 9$$

$$f_{(a+1)} = a^2 - 3a$$

Rpta: E

Problema 16.

Sea P un polinomio de modo que

$$P_{(x)} = a + bx + cx^2 \text{ y}$$

$$P_{(x+1)} = 6 + 8x + 3x^2,$$

halle el valor de $a^2 + b^2 + c^2$.

- A) 6 B) 3 C) 5
D) 12 E) 14

Resolución

Por dato

$$P_{(x+1)} = 6 + 8x + 3x^2$$

A x lo cambio por $x - 1$:

$$P_{(x-1+1)} = 6 + 8(x-1) + 3(x-1)^2$$

$$P_{(x)} = 6 + 8x - 8 + 3(x^2 - 2x + 1)$$

$$P_{(x)} = 6 + 8x - 8 + 3x^2 - 6x + 3$$

$$P_{(x)} = 1 + 2x + 3x^2$$

$$= a + bx + cx^2 \text{ (dato)}$$

Luego,

$$a = 1, b = 2 \text{ y } c = 3$$

Por lo tanto,

$$a^2 + b^2 + c^2 = 14$$

Rpta: E

Problema 17.

Halle el valor de T_{21} si se sabe que

$$T_{n+1} = T_n + n \text{ y } T_1 = 4$$

- A) 100 B) 110 C) 214
D) 511 E) 411

Resolución

Por dato:

$$T_{n+1} = T_n + n$$

$$n = 1: T_2 = T_1 + 1$$

$$n = 2: T_3 = T_2 + 2$$

$$n = 3: T_4 = T_3 + 3$$

$$\vdots$$

$$n = 20: T_{21} = T_{20} + 20$$

Sumamos:

$$T_{21} = T_1 + 1 + 2 + 3 + \dots + 20$$

$$T_{21} = 4 + \frac{20 \cdot 21}{2}$$

$$T_{21} = 214$$

Rpta: C

Problema 18.

Se define la siguiente operación matemática

$$F_{(t-1)} = F_{(t)} - 2t$$

además, $F_{(1)} = 2$; calcule el valor de

$$E = \sqrt{F_{(9)} + 10}.$$

- A) 11 B) 10 C) 12
D) 90 E) 15

Resolución

Se tiene la relación

$$F_{(t-1)} = F_{(t)} - 2t$$

$$t = 2: F_{(1)} = F_{(2)} - 2(2)$$

$$t = 3: F_{(2)} = F_{(3)} - 2(3)$$

$$t = 4: F_{(3)} = F_{(4)} - 2(4)$$

$$\vdots$$

$$t = 9: F_{(8)} = F_{(9)} - 2(9)$$

Sumamos:

$$\frac{F_{(1)}}{2} = \frac{F_{(9)} - 2(2 + 3 + \dots + 9)}{44}$$

$$F_{(9)} = 90$$

Nos piden hallar:

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{F_{(9)} + 10} \\ &= \sqrt{90 + 10} \\ &= \sqrt{100} = 10 \end{aligned}$$

Rpta: B

Problema 19.

Halle el valor de m si se sabe que

$$P_{(1)} + P_{(0)} = 200$$

$$P_{(x-2)} = (x+2)^3 + 3(x-1) + mx + 5$$

- A) 8/3 B) -2/3 C) 2
D) -8/5 E) 5/3

Resolución

Se tiene la expresión

$$P_{(x-2)} = (x+2)^3 + 3(x-1) + mx + 5$$

Para hallar $P_{(1)}$, evaluamos para $x = 3$:

$$P_{(3-2)} = (3+2)^3 + 3(3-1) + 3m + 5$$

$$P_{(1)} = 125 + 6 + 3m + 5$$

$$P_{(1)} = 136 + 3m$$

Para hallar $P_{(0)}$, evaluamos para $x = 2$:

$$P_{(2-2)} = (2+2)^3 + 3(2-1) + 2m + 5$$

$$P_{(0)} = 64 + 3 + 2m + 5$$

$$P_{(0)} = 72 + 2m$$

También

$$P_{(1)} + P_{(0)} = 200$$

$$136 + 3m + 72 + 2m = 200$$

$$5m + 208 = 200$$

$$5m = -8$$

$$m = -\frac{8}{5}$$

Rpta: D

Problema 20.

Si $f_{(x)} = (x-1)^2 + a$

entonces $\frac{f_{(x)} - f_{(x+2)}}{x}$ será

- A) 4 B) 2 C) 1
D) -4 E) -2

Resolución

Por dato: $f_{(x)} = (x-1)^2 + a$

Entonces

$$\begin{aligned} f_{(x+2)} &= (x+2-1)^2 + a \\ &= (x+1)^2 + a \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} &\frac{f_{(x)} - f_{(x+2)}}{x} \\ &= \frac{(x-1)^2 + a - ((x+1)^2 + a)}{x} \\ &= \frac{(x-1)^2 - (x+1)^2}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{x^2 - 2x + 1 - (x^2 + 2x + 1)}{x} \\ &= \frac{-4x}{x} \\ &= -4 \end{aligned}$$

Rpta: D

Problema 21.

Sea Φ una expresión matemática tal que

$$\Phi_{(x,y)} = 2x + 3y \leftrightarrow x < y$$

$$\Phi_{(x,y)} = 2x - 5y \leftrightarrow x \geq y$$

Calcule el valor de $\Phi_{(\Phi_{(1,1)}, \Phi_{(0,1)})}$

- A) 2 B) 3 C) (2; 3)
D) -3 E) 0

Resolución

Se tiene las expresiones

$$\Phi_{(x,y)} = 2x + 3y \leftrightarrow x < y \dots (\alpha)$$

$$\Phi_{(x,y)} = 2x - 5y \leftrightarrow x \geq y \dots (\beta)$$

Para hallar $\Phi_{(1,1)}$, reemplazamos en (β) :

$$\Phi_{(1,1)} = 2(1) - 5(1) = -3$$

$$\Phi_{(1,1)} = -3$$

Para hallar $\Phi_{(0,1)}$, reemplazamos en (α) :

$$\Phi_{(0,1)} = 2(0) + 3(1) = 3$$

$$\Phi_{(0,1)} = 3$$

Nos piden calcular:

$$\Phi_{(\Phi_{(1,1)}, \Phi_{(0,1)})} = \Phi_{(-3,3)}$$

lo reemplazamos en (α) :

$$= 2(-3) + 3(3)$$

$$= 3$$

Rpta: B

Problema 22.

Rpta: B

Halle el valor de $(a^2 + b^2 + c^2)^{b+c}$ si el polinomio

$$P(x) = 3x^{3a-b} + 5x^{2a} + 7x^{3b+c} + 8x^{a+b+c} + \dots$$

es completo y ordenado en forma decreciente.

- A) 11 B) 14 C) 16
D) 19 E) 25

Resolución

Como el polinomio

$$P(x) = 3x^{3a-b} + 5x^{2a} + 7x^{3b+c} + 8x^{a+b+c} + \dots$$

esta completo y ordenado en forma decreciente, se cumple que la diferencia de dos exponentes consecutivos es 1. Es decir,

$$3a - b - (2a) = 1$$

$$a - b = 1 \quad \dots (1)$$

$$2a - (3b + c) = 1$$

$$2a - 3b - c = 1 \quad \dots (2)$$

$$3b + c - (a + b + c) = 1$$

$$2b - a = 1 \quad \dots (3)$$

De (1) y (3):

$$\begin{array}{r} a - b = 1 \\ 2b - a = 1 \end{array} \quad \downarrow$$

Sumamos: $b = 2 \wedge a = 3$

Lo reemplazamos en (2):

$$2(3) - 3(2) - c = 1$$

$$c = -1$$

Nos piden calcular

$$(a^2 + b^2 + c^2)^{b+c} = (9 + 4 + 1)^{2-1} = 14$$

Problema 23.

Si $P_{(x,y)}$ es un polinomio homogéneo de cuarto grado y $P_{(2,-1)} = 2$, halle el valor de $P_{(-6,3)}$.

- A) 6 B) -6 C) 54
D) -54 E) 162

Resolución

Como $P_{(x,y)}$ es un polinomio homogéneo de cuarto grado, entonces se cumple:

$$P_{(\lambda x, \lambda y)} = \lambda^4 P_{(x,y)}$$

Como

$$P_{(2,-1)} = 2$$

Reemplazamos $x = 2$ e $y = -1$:

$$P_{(2\lambda, -\lambda)} = \lambda^4 P_{(2,-1)}$$

De aquí: $\lambda = -3$

Luego,

$$\begin{aligned} P_{(-6,3)} &= (-3)^4 P_{(2,-1)} \\ &= (-3)^4 \cdot 2 \\ &= 162 \end{aligned}$$

Rpta: E

Problema 24.

Sea $P_{(x)}$ un polinomio definido por

$$P_{(x)} = 3x^{\frac{n}{2}} - 4x^{n-2} + 7x^{12-n} + 2x^{\frac{n}{3}}$$

halle el número de valores enteros que toma n .

- A) 6 B) 1 C) 5
D) 3 E) 2

Resolución

Como la expresión matemática

$$P_{(x)} = 3x^{\frac{n}{2}} - 4x^{n-2} + 7x^{12-n} + 2x^{\frac{n}{3}}$$

es un polinomio, entonces los exponentes de las variables deben ser números enteros positivos. Es decir,

$$n-2 \geq 1 \wedge 12-n \geq 1 \wedge \frac{n}{2}; \frac{n}{3} \in \mathbb{Z}^+$$

$$\underline{n \geq 3 \wedge 11 \geq n} \wedge \underline{n = 2 \wedge n = 3}$$

$$3 \leq n \leq 11 \quad \wedge \quad n = 6$$

El único valor de n que cumple estas dos condiciones es 6.

Por lo tanto, el número de valores enteros que toma n es 1.

Rpta: B

Problema 25.

Si la diferencia entre los grados relativos de x e y es 5, además el menor exponente de y es 3, halle el grado absoluto del polinomio.

$$P_{(x,y)} = 4x^{m+n-2}y^{m-3} + 7x^{m+n+5}y^{m-4} + \sqrt{2}x^{m+n-6}y^{m+2}$$

- A) 16 B) 17 C) 7
D) 5 E) 11

Resolución

En el polinomio

$$P_{(x,y)} = 4x^{m+n-2}y^{m-3} + 7x^{m+n+5}y^{m-4} + \sqrt{2}x^{m+n-6}y^{m+2}$$

vemos que:

$$GR_x = m + n + 5 \quad (\text{mayor exponente de } x)$$

$$GR_y = m + 2 \quad (\text{mayor exponente de } y)$$

Por dato:

$$GR_x - GR_y = 5$$

$$m + n + 5 - (m + 2) = 5$$

$$n + 3 = 5$$

$$n = 2$$

También por dato, el menor exponente de y es 3. Es decir:

$$m - 4 = 3$$

$$m = 7$$

Lo reemplazamos en el polinomio:

$$P_{(x,y)} = \underbrace{4x^7y^4}_{GA=11} + \underbrace{7x^{14}y^3}_{GA=17} + \underbrace{\sqrt{2}x^3y^9}_{GA=12}$$

Por lo tanto, $GA(P_{(x,y)}) = 17$.

Rpta: B

Problema 26.

Si la expresión matemática

$$P_{(x,y,z)} = abx^ay^b + bcx^az^c + acy^bz^c$$

es un polinomio homogéneo de grado de homogeneidad n , entonces halle el valor de

$$I = \sqrt[n-1]{\frac{(a+b+c)^n}{a^n + b^n + c^n}}$$

- A) $1/3$ B) $1/2$ C) 3
D) 2^n E) 3^n

Resolución

Como el polinomio

$$P_{(x,y,z)} = \underbrace{abx^ay^b}_{GA=a+b} + \underbrace{bcx^az^c}_{GA=a+c} + \underbrace{acy^bz^c}_{GA=b+c}$$

es homogéneo, entonces los grados absolutos de sus términos son iguales. Es decir,

$$a + b = a + c = b + c$$

De aquí se obtiene:

$$a = b = c$$

Nos piden calcular:

$$J = \sqrt[n-1]{\frac{(a+b+c)^n}{a^n + b^n + c^n}}$$

$$J = \sqrt[n-1]{\frac{(a+a+a)^n}{a^n + a^n + a^n}}$$

$$J = \sqrt[n-1]{\frac{(3a)^n}{3a^n}}$$

$$J = \sqrt[n-1]{\frac{3^n a^n}{3a^n}}$$

$$J = \sqrt[n-1]{\frac{3^n}{3}}$$

$$J = \sqrt[n-1]{3^{n-1}}$$

$$J = 3$$

Rpta: C

Problema 27.

Si la suma de los grados absolutos de todos los términos de un polinomio homogéneo y completo de dos variables es 132. ¿Cuál es su grado absoluto?

- A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

Resolución

Consideremos el polinomio homogéneo y completo de dos variables en forma general:

$$P_{(x,y)} = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \dots + a_n y^n$$

Por dato:

$$\sum \text{Grados absolutos} = 132$$

$$\underbrace{n + n + n + \dots + n}_{(n+1) \text{ sumandos}} = 132$$

$$n(n+1) = 132$$

$$n^2 + n = 132$$

$$n^2 + n - 132 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} n & & -11 \\ & \nearrow & \searrow \\ n & & 12 \end{array}$$

$$(n-11)(n+12) = 0$$

$$n = 11 \quad (n = -12 \text{ se descarta})$$

Por lo tanto, $GA(P_{(x,y)}) = n = 11$.

Rpta: B

Problema 28.

Dado el polinomio

$$P_{(x,y)} = 3x^{a^{b-4}} - 2y^{a^{2(b-4)}} + (xy)^{a^{b-4}} - x^{4+a^{b-4}}$$

Si la suma de los grados absolutos de los términos del polinomio $P_{(x,y)}$ es igual a $(a^2 + 2)^2$. Calcule el valor de b

- A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 8

Resolución

Se tiene el polinomio

$$\underbrace{3x^{a^{b-4}}}_{GA: a^{b-4}} - \underbrace{2y^{a^{2(b-4)}}}_{GA: a^{2(b-4)}} + \underbrace{(xy)^{a^{b-4}}}_{GA: 2a^{b-4}} - \underbrace{x^{4+a^{b-4}}}_{GA: 4+a^{b-4}}$$

Por dato:

$$a^{b-4} + a^{2(b-4)} + 2a^{b-4} + 4 + a^{b-4} = (a^2 + 2)^2$$

$$\underbrace{a^{2(b-4)} + 4a^{b-4} + 4}_{\text{trinomio cuadrado perfecto}} = (a^2 + 2)^2$$

$$(a^{b-4} + 2)^2 = (a^2 + 2)^2$$

Por simple comparación:

$$a^{b-4} + 2 = a^2 + 2$$

$$\begin{aligned}a^{b-4} &= a^2 \\ b-4 &= 2 \\ b &= 6\end{aligned}$$

Rpta: D

Universidad Nacional del Callao (UNAC)

Problema 29.

Si $f_{(2x-1)} = x^2 - 3$, halle $f_{(4)} - f_{(2)}$.

- A) 4 B) 8 C) -2
D) 2 E) -5

UNAC 2002 - II

Resolución

Se tiene la expresión matemática:

$$f_{(2x-1)} = x^2 - 3$$

Para hallar $f_{(4)}$ hacemos: $2x - 1 = 4$ de donde, $x = 5/2$. Luego,

$$f_{(4)} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 3 = \frac{25}{4} - 3 = \frac{13}{4}$$

Para hallar $f_{(2)}$ hacemos: $2x - 1 = 2$ de donde, $x = 3/2$. Luego,

$$f_{(2)} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 = \frac{9}{4} - 3 = \frac{-3}{4}$$

Por lo tanto,

$$f_{(4)} - f_{(2)} = \frac{13}{4} - \frac{-3}{4} = 4$$

Rpta: A

Problema 30.

Si $g_{(f(x))} = x + 2$, halle $g_{(27)}$, siendo

$$f_{(x)} = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

- A) 0 B) 3 C) 2
D) 8 E) -1

UNAC 2007 - I

Resolución

Se tiene el polinomio

$$f_{(x)} = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

Vemos que es un binomio al cubo; es decir,

$$f_{(x)} = (x + 2)^3$$

También se tiene por dato:

$$g_{(f(x))} = x + 2$$

$$g_{((x+2)^3)} = x + 2$$

Como queremos hallar $g_{(27)}$, basta hacer $x = 1$:

$$g_{((1+2)^3)} = 1 + 2$$

Por lo tanto,

$$g_{(27)} = 3$$

Rpta: B

Problema 31.

Si determine el grado del polinomio

$$(x^{1^2} + 1)^2 (x^{2^2} + 2)^3 (x^{3^2} + 3)^4 (x^{4^2} + 1)^5 \dots$$

10 factores

- A) 3390 B) 3400 C) 3410
D) 3370 E) 3380

UNAC 2007 - II

Resolución

Se tiene el polinomio

$$(x^{1^2} + 1)^2 (x^{2^2} + 2)^3 (x^{3^2} + 3)^4 (x^{4^2} + 1)^5 \dots$$

10 factores

Recuerde:

Si el polinomio tiene la forma:

$$P(x) = (x^a + m)^a (x^b + m)^b \dots (x^y + m)^d$$

entonces, su grado está dado por:

$$^o[P(x)] = aa + \beta b + \dots + \gamma d$$

En el problema:

$$\begin{aligned} ^o[P(x)] &= \\ &= 1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 3 + 3^2 \cdot 4 + \dots + 10^2 \cdot 11 \\ &= 1^2(1+1) + 2^2(2+1) + 3^2(3+1) + \\ &\quad \dots + 10^2(10+1) \\ &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3 + \\ &\quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2 \\ &= \left(\frac{10 \cdot 11}{2}\right)^2 + \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} \\ &= 3025 + 385 = 3410 \end{aligned}$$

Rpta: C

Universidad Nacional de Ingeniería (UNI)

Problema 32.

Sean P, Q dos polinomios dados por

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$Q(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 1$$

Si $P(x) \equiv Q(x-1)$, determine el valor de $a + b + c + d$.

- A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 5

UNI 2000 - I

Resolución

Por dato: $P(x) \equiv Q(x-1)$

Lo evaluamos para un valor adecuado; en este caso, para $x = 1$:

$$P(1) \equiv Q(0)$$

$$\begin{aligned} a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) + d &= \\ &= 2(0)^3 - (0)^2 + 3(0) + 1 \\ a + b + c + d &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $a + b + c + d = 1$

Rpta: B

Problema 33.

Sean los polinomios

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$Q(x) = ax^2 + d$$

$$R(x) = ax + b$$

Si $P(0) = 2, Q(1) = R(2) = 1$,

halle x tal que $R(x) = 0$.

- A) -3 B) -1 C) 0
D) 1 E) 3

UNI 2000 - I

Resolución

Por dato:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

También

$$\begin{aligned} \frac{P(0)}{a(0)^3 + b(0)^2 + c(0) + d} &= 2 \\ d &= 2 \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} Q(x) = ax^2 + d \text{ y } Q(1) &= 1 \\ a + d &= 1 \\ a &= -1 \end{aligned}$$

También

$$R_{(x)} = ax + b \text{ y } \underline{R_{(2)}} = 1$$

$$2a + b = 1$$

$$b = 3$$

Rpta: B

Reemplazamos en $R_{(x)}$:

$$R_{(x)} = -x + 3$$

Nos piden hallar x tal que $R_{(x)} = 0$:

$$R_{(x)} = -x + 3 = 0$$

$$x = 3$$

Rpta: E

Problema 34.

Dada la función polinomial

$$P_{(x)} = x^3 - 10000x^2 - 10002x + 9999$$

calcule el valor de $P_{(10001)}$.

- A) -3 B) -2 C) -1
D) 0 E) 1

UNI 2001 - I

Resolución

Hagamos el siguiente cambio:

$$10001 = a$$

Luego el polinomio se expresa como

$$P_{(x)} = x^3 - \frac{10000}{a-1}x^2 - \frac{10002}{a+1}x + \frac{9999}{a-2}$$

Es decir,

$$P_{(x)} = x^3 - (a-1)x^2 - (a+1)x + a-2$$

Nos piden calcular

$$P_{(10001)} = P_{(a)}$$

$$= a^3 - (a-1)a^2 - (a+1)a + a-2$$

$$= a^3 - a^3 + a^2 - a^2 - a + a - 2$$

$$= -2$$

Por lo tanto,

$$P_{(10001)} = -2$$

Problema 35.

Dados los siguientes polinomios $P_{(x)}$ de grado dos y término independiente uno; y $Q_{(x)} = (x-1)P_{(x)} + 3x + 1$. Si $Q_{(2)} = 7$ y $P_{(1)} = 2$. Halle la suma de raíces de $Q_{(x)}$.

- A) 0 B) 8/3 C) 10/3
D) 4 E) 5

UNI 2004 - II

Resolución

Por dato: $Q_{(x)} = (x-1)P_{(x)} + 3x + 1$

$$Q_{(2)} = 7$$

$$P_{(1)} = 2$$

Además, $P_{(x)}$ es de grado dos y término independiente uno. Es decir, tiene la forma: $P_{(x)} = ax^2 + bx + 1$

Dato: $P_{(1)} = a + b + 1 = 2$

$$a + b = 1 \quad \dots(\alpha)$$

Además,

$$Q_{(2)} = \underline{P_{(2)}} + 7 = 7$$

$$4a + 2b + 1 + 7 = 7$$

$$4a + 2b = -1 \quad \dots(\beta)$$

De (α) y (β) se forma el sistema:

$$\begin{cases} a + b = 1 & (I) \\ 4a + 2b = -1 & (II) \end{cases}$$

$$(I) \times 2: \quad 2a + 2b = 2 \quad (III)$$

Restamos $(II) - (III)$:

$$2a = -3$$

$$a = -\frac{3}{2}$$

Reemplazando en (I) obtenemos:

$$-\frac{3}{2} + b = 1$$

$$b = \frac{5}{2}$$

Luego, $P_{(x)}$ se expresa como:

$$P_{(x)} = \left(-\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1\right)$$

Lo reemplazamos en $Q_{(x)}$:

$$Q_{(x)} = (x-1)\left(-\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1\right) + 3x + 1$$

Reduciendo se obtiene:

$$Q_{(x)} = -\frac{3}{2}x^3 + 4x^2 + \frac{3}{2}x$$

La suma de raíces de $Q_{(x)}$ lo hallamos por el teorema de Cardano:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{\frac{4}{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}$$

Rpta: B

Problemas propuestos

Problema 1.

Dada la expresión matemática

$$f_{(2x-5)} = \sqrt{2x+1} + \sqrt{x+5}$$

halle el valor de $f_{(3)}$.

A) $\sqrt{7} + \sqrt{8}$

B) $\sqrt{3} + \sqrt{6}$

C) 3

D) 5

E) 6

Problema 2.

Dada la expresión matemática

$$P_{(x)} = \frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x}} - \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}}$$

calcule el valor de $P_{(1)} \cdot P_{(\sqrt{3})}$

A) 4

B) 2

C) $\sqrt{3}$

D) 1

E) $4\sqrt{3}$

Problema 3.

Sea P una expresión matemática de modo que

$$P_{(x)} = \begin{cases} 3x^2 + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3x - 14 & \text{si } 1 < x \leq 5 \\ 2x + 3 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

calcule el valor de $P(P(P(1)))$.

A) 7

B) -1

C) 11

D) 13

E) 17

Problema 4.

Sean P y g dos polinomios de modo que

$$P_{(x)} = x^2 + 4x + g_{(x)}$$

$$g_{(x+2)} = x^{2010} + 2x + 3$$

determine el valor de $P_{(3)}$.

- A) 9 B) 12 C) 21
D) 2010 E) 27

Problema 5.

Sea f una expresión de modo que

$$f\left(\sqrt{\frac{x+3}{2}}\right) = 2x^2 - 18$$

calcule el valor de $\frac{f(1) + f(-1)}{2}$

- A) 11 B) 9 C) 10
D) 8 E) 7

Problema 6.

Sea $P(x)$ un polinomio de modo que

$$\frac{P(x+1) - P(x)}{2} = x$$

halle el valor de $P(3) - P(2)$.

- A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

Problema 7.

Halle el valor numérico del polinomio

$$P(x) = x(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) - \sqrt{8}$$

para $x = \sqrt[3]{\sqrt{2} + 1} + \sqrt[3]{\sqrt{2} - 1}$

- A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) 0
D) $2\sqrt{2}$ E) 2

Problema 8.

Dado el polinomio

$$P(x) = 10x^{5-n} + 3x^{n-2} - 5x^{\frac{6}{n-1}}$$

determine el valor de $P_{(n-1)}$.

- A) -34 B) -74 C) -86
D) 40 E) 46

Problema 9.

Dado el polinomio

$$P(x) = \sqrt{3}x^{\frac{8}{n+1}} - 5x^{4-n} + x^{n-1} - \sqrt{3}$$

calcule el valor de $P_{(-1)}$.

- A) 6 B) 3 C) 1
D) 0 E) -4

Problema 10.

Dado el polinomio

$$P(x) = 3x^4 + 5x - 6x^5 + 10(x+2) + 4$$

se afirma que:

- A) $^0[P(x)] = 4$
B) el término independiente es 4.
C) el coeficiente principal es 3.
D) la suma de coeficientes es 16.
E) el coeficiente del término lineal es 15.

Problema 11.

Sea $h(x) = ax + b$ un polinomio lineal y mónico de modo que $h(1) = 2h(0)$, entonces, ¿cuál es el valor de $h(a+b) + h(ab)$?

- A) 0 B) 5 C) 2
D) 3 E) 7

Problema 12.

Sea $P(x)$ un polinomio de grado par tal que

$$P(x) = [(n+1)x - 1]^n - n(x^n - 1) + 2n$$

Si la suma de coeficientes excede un uno al término independiente, entonces, ¿cuál es el valor de $P_{(n)}$?

- A) 2 B) 7 C) 8
D) 15 E) 23

Problema 13.

Dada el polinomio: $P_{(x+1)} = x^2 + ax + b$
 calcule el valor de $P_{(3)}$ si se sabe que su término independiente es 2 y la suma de sus coeficientes es 5.

- A) 17 B) 13 C) 15
 D) 19 E) 14

Problema 14.

Dado el polinomio

$$P_{(x-1)} = (3mx - 4m)^2 + (3x - 4)^{4m} - x^2 + 4$$

Halle la suma de sus coeficientes si se sabe que es el cuádruple de su término independiente.

- A) 32 B) 20 C) 16
 D) 8 E) 2

Problema 15.

Halle el valor de n si se sabe que el término independiente del siguiente polinomio es 2^{325} .

$$P_{(x)} = (x+2)(x+4)(x+8) \dots (x+2^n)$$

- A) 25 B) 26 C) 24
 D) 112 E) 250

Problema 16.

Se define:

$$P_n(x) = (x+n+1)^3 - (x+n)^3$$

Determine la suma de coeficientes de $P_2(x)$ y el término independiente de $P_3(x)$.

- A) 3 y 4 B) 64 y 27
 C) 37 y 37
 D) 20 y 27 E) 4 y 8

Problema 17.

Dadas las expresiones matemáticas

$$P_{(1+2+3+\dots+x)} = 4x + a$$

$$Q_{(1+3+5+\dots+(2x-1))} = 5x + 2b$$

Si $P_{(15)} - Q_{(16)} = 0$; $ab \neq 0$

halle el valor de a/b .

- A) 1 B) 2 C) 3
 D) 1/2 E) -1

Problema 18.

Dado los polinomios

$$P_{(x)} = (x^2 + x - 1)(x^5 - x + 1)$$

$$Q_{(x)} = (x^3 + 4)(x^4 - 6) + (x^2 + 1)^3 - x^7$$

determine el grado de $P_{(x)} - Q_{(x)}$.

- A) 7 B) 6 C) 5
 D) 8 E) 9

Problema 19.

Sea P una expresión matemática de

de modo que $P_{(x^2 + \frac{1}{x^2})} = x^4 + \frac{1}{x^4} + 3$

halle el equivalente de $\frac{P_{(x)} + P_{(-x)}}{2}$

- A) x^2 B) 1 C) 0
 D) x E) $P_{(x)}$

Problema 20.

Dado los polinomios

$$A_{(x)} = 3x^2 - x + 2 \text{ y } B_{(x)} = x^2 + x$$

Si para todo x real se cumple que

$$m \cdot A_{(x)} + n \cdot B_{(x)} \equiv px^2 + 3x + 4$$

calcule el valor de $\frac{m+n+A_{(1)}}{p}$

- A) 7/11 B) 4/11 C) 1/11
D) 1 E) 0

Problema 21.

Si los polinomios P y Q son idénticos, entonces halle el valor de $A + B - 3C$.

$$P(x) = A(x+1)^2 + B(x-1)^2$$

$$Q(x) = 6x^2 + 4x + 3C - 4$$

- A) 4 B) 2 C) 0
D) -2 E) -4

Problema 22.

Sean P y Q dos polinomios de modo que $P_{(x+3)} = 2x + 5$; $P_{(Q(x)+2)} = 6x + 7$ halle el valor de $Q(1)$.

- A) 1 B) 3 C) 5
D) 7 E) 9

Problema 23.

Sea f un polinomio de modo que $f_{(2x-1)} = 6x + 5$, halle el equivalente de $f(x) + f_{(2x+1)}$.

- A) $6x + 16$ B) $9x + 19$
C) $12x + 19$
D) $9x + 16$ E) $12x + 16$

Problema 24.

Sea P un polinomio de modo que $P_{(3x+1)} = 15x - 4$; halle el equivalente de $P_{(2x+3)}$.

- A) $10x + 1$ B) $10x + 3$
C) $10x - 5$
D) $10x + 6$ E) $10x$

Problema 25.

Dado el polinomio cúbico $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ halle el equivalente de f .

$$f = \frac{\left[(P(x))^{P_{(1/3)}} \right]^{\frac{27}{8}}}{\sqrt[3]{P_{(x-1)}} + \sqrt[3]{P_{(x+1)}}}$$

- A) $\frac{x-1}{2}$ B) $\frac{(x-1)^2}{2}$
C) $(x-1)^2$
D) $(x-1)^3$ E) $x-1$

Problema 26.

Dada la expresión matemática

$$P_{\left(x+\frac{1}{x}\right)} = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

calcule el valor de $P_{(\sqrt[3]{2})}$.

- A) $\sqrt{2}$ B) 4 C) 2
D) 8 E) $\sqrt[3]{4}$

Problema 27.

Dado el polinomio $P(x) = x^2 - x - 2$ halle el equivalente de la expresión

$$P_{(x+1)} - P_{(x-1)}$$

- A) $2x^2$ B) $2x$ C) $4x - 2$
D) $2x^2 + 2$ E) 0

Problema 28.

Dada la expresión matemática

$$f_{(2x-1)} = x(x-1)$$

halle el equivalente de $4f_{(\sqrt{x})} + 1$.

- A) 1/4 B) $x/4$ C) x
D) 1 E) $4x$

Problema 29.

Sea f una expresión matemática tal que

$$f(x) - 2f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{x+1}{x-1}$$

halle $f(x)$

- A) $\frac{2x^2 - x + 1}{-3(x-1)}$ B) $\left[\frac{1}{x}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$
 C) $\left[\frac{1}{x}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2\right]^{\frac{1}{3}}$
 D) $\frac{x+1}{x-1}$ E) $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{3}}$

Problema 30.

Si

$$f\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{x-1}{x+1}; \quad x > 1$$

halle el valor de n que verifica la igualdad

$$f(2n-1) \cdot f\left(\frac{1}{n-1}\right) = 3$$

- A) $2/3$ B) $1/3$ C) 1
 D) $-2/3$ E) $-1/3$

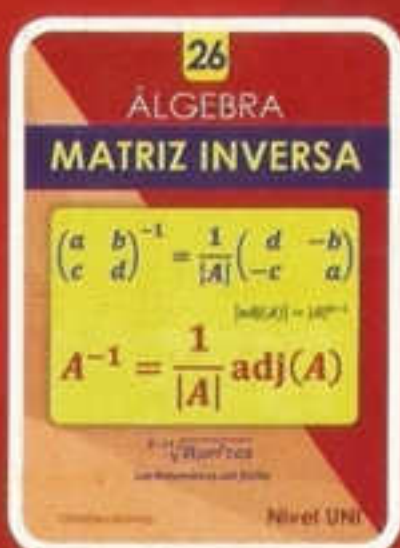
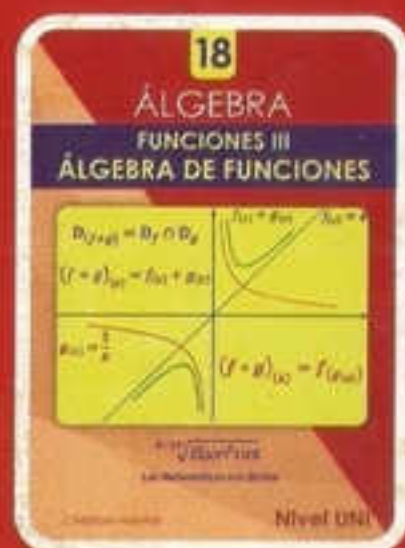
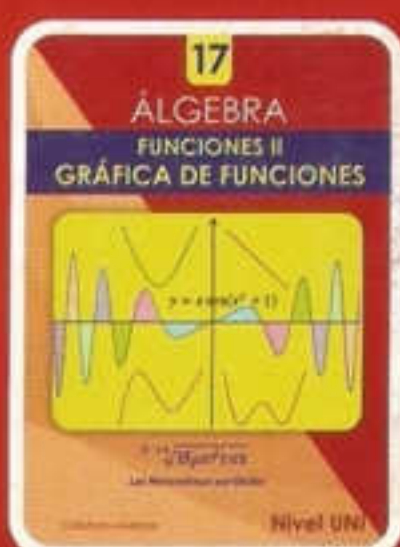
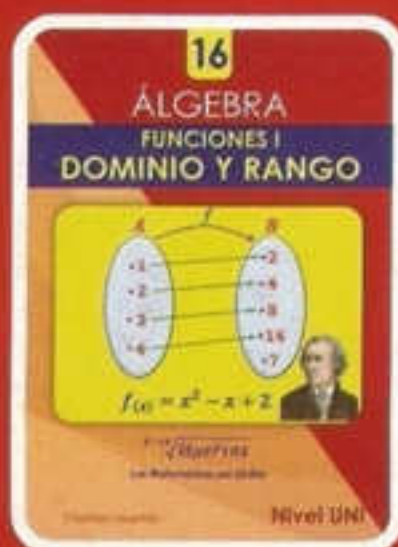
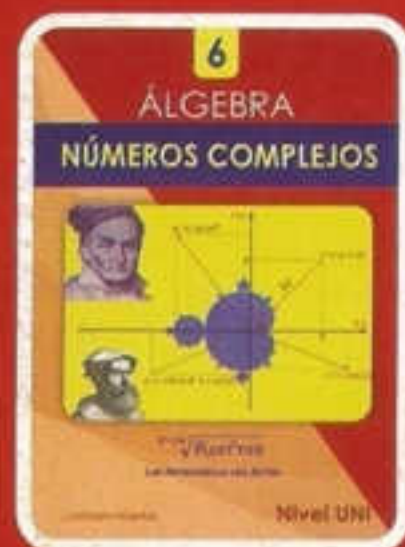
Claves

01 E	11 B	21 E
02 B	12 E	22 C
03 D	13 A	23 B
04 E	14 B	24 D
05 D	15 A	25 B
06 A	16 C	26 C
07 C	17 B	27 C
08 A	18 A	28 C
09 A	19 E	29 A
10 E	20 D	30 E

twitter.com/calapenshko



OTRAS PUBLICACIONES



$\bar{x} - 14 \sqrt{\text{Hueñtas}}$

twitter.com/calapenshko

16.11.20



Christiam Huertas

993 473 766

chr1614@hotmail.com

ALGEBRAPRE

