

SEMAINE DU 26/1 AU 1/2

ANNEAUX DES POLYNÔMES ET ARITHMÉTIQUE

- ① Définitions formelle de polynôme, du produit, de la somme, du produit par un scalaire, de la composition de polynômes. Définition du degré d'un polynôme, propriétés du degré, Intégrité de $\mathbb{K}[X]$.
- ② Définitions de l'évaluation et des fonctions polynomiales. L'évaluation polynomiale est un morphisme d'anneaux. *Si possible, pensez à reprendre, sans perte de points, les étudiants, qui parlent de polynômes pour des fonctions polynomiales.*
- ③ Définitions de divisibilité, polynômes associés, division euclidienne. Les polynômes associés sont égaux à un scalaire près. Définitions de coefficients dominants et de polynômes unitaires. Propriétés de la relation de divisibilité.
- ④ Divisibilité par $(X - \alpha)$, définition d'une racine, un polynôme de degré n a au plus n racines distinctes et s'il s'annule en au moins $n + 1$ points distincts, est le polynôme nul.
- ⑤ Définition du polynôme dérivée, propriétés du polynôme dérivée, formule de Taylor (polynomiale), Définition et caractérisation par les polynômes dérivés des racines multiples.
- ⑥ Définition des fonctions symétriques et relations coefficients racines, définition de polynômes scindés, Théorème de D'Alembert-Gauss. Tout polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$ est scindé, factorisation des polynômes à coefficients réels.
- ⑦ Polynômes de Lagrange

PREUVES

Seules les preuves dans cette section sont à savoir par coeur par les étudiants. Les autres preuves peuvent être demandées, en proposant une méthode et/ou en aidant l'étudiant durant la réalisation de la preuve.

La question de cours sera composée d'un énoncé rapide (définition, propriété ou théorème), suivi d'une démonstration (ou exemple) de cours choisie parmi :

- ① Montrer que " a est racine d'ordre α " $\iff \exists Q \in \mathbb{K}[X], \quad P(X) = (X - a)^\alpha Q(X) \quad \text{et} \quad \tilde{Q}(a) \neq 0$ ".
- ② Énoncer et prouver la formule de Taylor.
- ③ Preuve de l'existence et l'unicité des polynômes de Lagrange.