

TD Séries numériques

EXERCICES D'APPLICATION DU COURS

EXERCICE 1 ■ ■ □ On s'entraîne dur

Dire si la série $\sum u_n$ est convergente, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $u_n := \dots$

- | | | |
|--------------------------|--|---|
| ① $\sqrt{\frac{n+1}{n}}$ | ⑤ $\frac{1}{n+n^2}$ | ⑨ $\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ |
| ② $\frac{n}{n^2+1}$ | ⑥ $\cos(n)$ | ⑩ $\frac{1}{n \cos^2 n}$ |
| ③ $\frac{(-1)^n}{n!}$ | ⑦ $\frac{\ln(\sqrt{n})}{n}$ | ⑪ $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ |
| ④ $\frac{1}{n+\sqrt{n}}$ | ⑧ $\frac{\text{ch}(n)}{\text{ch}(2n)}$ | |

On pourra étudier la convergence absolue.

► Indication

► Correction

EXERCICE 2 ■ □ □

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs convergentes. Montrer que les suivantes sont aussi convergentes

$$\sum \max(u_n, v_n), \quad \sum \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad \sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}.$$

► Indication

► Correction

EXERCICE 3 ■ ■ ■

Étudier les réciproques des propositions établies dans l' EXERCICE 2. ► Indication

► Correction

EXERCICES TECHNIQUES

EXERCICE 4 ■ ■ □

Dire si la série $\sum u_n$ est convergente, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $u_n := \dots$

- | | | |
|--|---|--|
| ① $1 - \cos \frac{\pi}{n}$ | ④ $n^{3/2} \left(\tan \frac{1}{n} - \text{sh} \frac{1}{n} \right)$ | ⑦ $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}$ |
| ② $\left(\frac{1}{n} \right)^{1+\frac{1}{n}}$ | ⑤ $\left(n^{\frac{1}{n}} - (n+1)^{\frac{1}{n}} \right)$ | ⑧ $\frac{(-1)^n}{n} \sin \left(\frac{1}{n} \right)$ |
| ③ $\frac{e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n^{3/2} - \lfloor n^{3/2} \rfloor + n}$ | ⑥ $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ | |

► Indication

► Correction

EXERCICE 5 ■ (A) ■

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente.

Montrer que la série $\sum u_n^2$ est convergente. ► Indication ► Correction

EXERCICE 6 ■ ■ □

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\ln n)^{\beta} n^{\alpha}}$. ► Indication

► Correction

EXERCICE 7 ■ ■ □

Étudier la convergence des séries suivantes et calculer leur somme.

- | | | |
|---|--|---|
| ① $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^3 - n}$, | ② $\sum_{n \geq 1} \ln \left(\frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 3n} \right)$, | ③ $\sum_{n \geq 0} (3 + (-1)^n)^{-n}$. |
|---|--|---|

► Indication

► Correction

EXERCICE 8 ■ ■ □

- ① Étudier la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}$.

- ② En remarquant que $\int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}$ pour tout entier p , calculer sa somme.

► Indication ► Correction

EXERCICE 9 ■ ■ □

Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. On pose $u_n = \ln \left(\cos \frac{x}{2^n} \right)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

① Montrer que $\sum u_n$ converge.

② Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 10 ■ ■ □

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \left(\cos \frac{1}{n} \right)^{n^\alpha}$. ► Indication

► Correction

EXERCICE 11 ■ ■ □ Comparaison série-intégrale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in]1, +\infty[$.

Donner un équivalent de $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, et en déduire la nature de la série $\sum u_n$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 12 ■ ■ □ Encore un équivalent

Montrer que $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \sim \ln(\ln n)$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 13 ■ ■ □ Un exemple

Posons la suite de somme partielle $U_n = \sum_{k=1}^n u_k = \sin(\sqrt{n})$.

Montrer que cela fournit un exemple de suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et telle que la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$ diverge sans limite.

► Indication ► Correction

EXERCICES "COMME EN COLLE"

EXERCICE 14 ■ ■ □ Utilisation de l'équivalent de la série harmonique

Calculer la limite de la suite de terme général

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \right).$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 15 ■ (A) ■

Soit $(u_n)_n$ une suite de réels positifs. Montrer que la série de terme général u_n converge si, et seulement si, la série de terme général $\frac{u_n}{1+u_n}$ converge. ► Indication

► Correction

EXERCICE 16 ■ (A) ■

Déterminer la nature de la série de terme général, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n := \begin{cases} 1/n & \text{si } n \text{ est un carré,} \\ 1/n^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 17 ■ ■ □

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite décroissante de réels de limite nulle.

Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum n(u_n - u_{n+1})$ ont même nature et que leurs sommes sont égales en cas de convergence. ► Indication ► Correction

EXERCICE 18 ■ ■ □

Justifier la convergence et calculer la somme de $\sum_{k \geq 1} \frac{\lfloor \sqrt{k+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{k} \rfloor}{k}$. ► Indication

► Correction

EXERCICE 19 ■ ■ ■ Divergence de la série des inverses des premiers

On énumère en ordre croissant les nombres premiers par une suite $(p_n)_{n \geq 1}$,

$$p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Vérifier $\prod_{n=1}^N \frac{1}{1 - 1/p_n} \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$, et en déduire la nature de $\sum 1/p_n$.

► Indication ► Correction

Indications

EXERCICES D'APPLICATION DU COURS

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 **On s'entraîne dur** _____

Utiliser les critères vus en cours.

[↩ retour à l'EXERCICE 1](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 _____

Il faut comparer les séries, qui sont toutes à termes positifs.

[↩ retour à l'EXERCICE 2](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 _____

Il faut comparer les séries, qui sont toutes à termes positifs. Un contre-exemple suffit si c'est faux !

[↩ retour à l'EXERCICE 3](#)

EXERCICES TECHNIQUES

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 _____

Un peu plus de travail peut être nécessaire, en utilisant les DL par exemple.

[↩ retour à l'EXERCICE 4](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 _____

Peut-on comparer les termes généraux de ces séries.

[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 _____

Disjoindre les cas, $\alpha > 1$, $\alpha = 1$ et $\alpha < 1$.

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 7 _____

Comparer à des séries connues pour la convergence, puis réduisez les formules avec des techniques connues pour la valeur de la série (décompositions en éléments simples, suppression du $(-1)^n$ avec pairs/impairs).

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 8 _____

Comparaison à une série de Riemann, puis utiliser l'indication pour tomber sur deux intégrales, l'une qui tend vers 0, et l'autre calculable.

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 9 _____

La convergence vient par équivalence.

On pourra utiliser la formule $\frac{1}{2} \sin 2a = \sin a \cos a$, pour la deuxième question, et faire apparaître une suite télescopique.

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 10

Passer à l'exponentielle, et trouver un équivalent au terme exponentiel. Il faudra faire une disjonction de cas, $\alpha \leq 2$, et $\alpha > 2$.

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 11 **Comparaison série-intégrale**

On n'a pas peur et on se lance.

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 12 **Encore un équivalent**

Encore par comparaison série-intégrale.

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 13 **Un exemple**

La suite u est donnée par télescopage. Il suffit de vérifier qu'elle tend vers 0.

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

EXERCICES "COMME EN COLLE"

INDICATION POUR L'EXERCICE 14 **Utilisation de l'équivalent de la série harmonique**

Se rappeler, ou redémontrer l'équivalent en $o(1)$ de la série harmonique.

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 15

Par double implication, en montrant à chaque fois l'équivalence entre les termes généraux.

[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 16

On sépare les sommes sur les carrés parfaits et sur les "non carrés parfaits".

[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 17

Il faut comparer ces deux séries directement. On exprime, comme d'habitude, les sommes partielles de la série $\sum n(u_n - u_{n+1})$ en fonction de celles de $\sum u_r$.

[↩ retour à l'EXERCICE 17](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 18

Décomposer la somme entre chaque carré d'entier : Si $k + 1$ n'est pas le carré d'un entier, $u_k = 0$.

[↩ retour à l'EXERCICE 18](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 19 **Divergence de la série des inverses des premiers**

Pour ceux qui s'ennuient.

[↩ retour à l'EXERCICE 19](#)

Corrections

EXERCICES D'APPLICATION DU COURS

Correction de l'EXERCICE 1 On s'entraîne dur

- ① diverge grossièrement.
- ② diverge.
- ③ converge absolument.
- ④ diverge.
- ⑤ converge absolument.
- ⑥ diverge grossièrement.
- ⑦ diverge.
- ⑧ converge absolument.
- ⑨ converge absolument.
- ⑩ diverge grossièrement.
- ⑪ converge absolument.

↩ retour à l'EXERCICE 1

Correction de l'EXERCICE 2

On exploite les comparaisons

$$\max(u_n, v_n) \leq u_n + v_n, \quad \sqrt{u_n v_n} \leq \frac{1}{2}(u_n + v_n), \quad \frac{u_n v_n}{u_n + v_n} = \frac{u_n}{u_n + v_n} v_n \leq v_n.$$

pour utiliser les critères de comparaison de série à termes positifs.

↩ retour à l'EXERCICE 2

Correction de l'EXERCICE 3

On a $u_n, v_n \leq \max(u_n, v_n)$, ce qui montre la première réciproque.

Les deux autres échouent avec le contre-exemple $u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ 1 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$ et $v_n = u_n + 1$.

↩ retour à l'EXERCICE 3

EXERCICES TECHNIQUES

Correction de l'EXERCICE 4

- ① $1 - \cos \frac{\pi}{n} \sim \frac{\pi^2}{2n^2}$, donc convergente.
- ② $n \left(\frac{1}{n}\right)^{1+1/n} = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} = \exp\left(-\frac{\ln n}{n}\right) \rightarrow \exp(0) = 1$, donc divergente.
- ③ $\frac{e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n^{3/2} - \lfloor n^{3/2} \rfloor + n} \sim \frac{e}{2n^2}$, donc convergente.
- ④ $n^{3/2} \left(\tan \frac{1}{n} - \operatorname{sh} \frac{1}{n} \right) \sim \frac{1}{6n^{3/2}}$, donc convergente.
- ⑤ $\left(n^{\frac{1}{n}} - (n+1)^{\frac{1}{n}} \right) = n^{\frac{1}{n}} \left[1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \right] \sim -\frac{1}{n^2}$, donc convergente absolue.
- ⑥ $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sim \frac{e}{2n}$, donc divergente.
- ⑦ $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-1} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$, donc divergente.

- ⑧ $\frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n^2}$ donc absolument convergent.

[↩ retour à l'EXERCICE 4](#)

Correction de l'EXERCICE 5

$\sum u_n$ converge, alors u tend vers 0, et donc $u \leq 1$ à partir d'un certain rang N . Pour tout $n > N$, on a donc $0 \leq u_n^2 \leq u_n \leq 1$, et on conclut par comparaison de série à termes positifs.

[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)

Correction de l'EXERCICE 6

Voir le cours pour le cas $\alpha = 1$. Les autres cas viennent par comparaison avec les séries de Riemann.

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

Correction de l'EXERCICE 7

- ① Comparaison à une série de Riemann pour la convergence, puis par décomposition en éléments simples, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^3 - n} = \frac{1}{4}$.
- ② Par décomposition en éléments simples, $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 3n}\right) = \ln 3$.
- ③ Comparaison à une série géométrique, puis en séparant pairs et impairs, calcul des suites géométriques, $\sum_{n=0}^{+\infty} (3 + (-1)^n)^{(-n)} = \frac{26}{15}$.

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

Correction de l'EXERCICE 8

- ① Le terme général est majoré par $(4n^2)^{-1}$, qui est le terme général d'une série (de Riemann) convergente.
- ② $2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)} = \int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2} dx - \int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2} (-x^2)^{N+1} dx = \frac{\pi}{2} - 1$,
En calculant la première intégrale et en montrant que la seconde tend vers 0.

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

Correction de l'EXERCICE 9

- ① Etant à termes positifs, $u_n \sim \cos \frac{x}{2^n} - 1 \sim -\frac{1}{2} \times \frac{x^2}{4^n}$, permet de conclure par comparaison.
- ② On a $\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \left(\ln\left(\sin \frac{x}{2^{k-1}}\right) - \ln\left(\sin \frac{x}{2^k}\right) \right) - n \ln 2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$.

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

Correction de l'EXERCICE 10

On a $n^\alpha \ln\left(\cos \frac{1}{n}\right) \sim n^\alpha \left(\cos \frac{1}{n} - 1\right) \sim -\frac{n^{\alpha-2}}{2}$, donc

- Pour $\alpha \leq 2$, la série diverge grossièrement.
- Pour $\alpha > 2$, $n^2 u_n$ tend vers 0, par croissances comparées, donc $\sum u_n$ est convergente par comparaison à une série de Riemann.

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

Correction de l'EXERCICE 11 Comparaison série-intégrale

Une comparaison série intégrale classique avec passage à la limite, donne

$$\frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq u_n \leq \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

Cela donne un équivalent $u_n \sim \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$, qui permet de conclure par comparaison.

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

Correction de l'EXERCICE 12 Encore un équivalent

On obtient

$$f(2) + \int_2^n f(t) dt \geq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \geq \int_2^{n+1} f(t) dt.$$

Cela donne l'équivalence demandée par encadrement.

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

Correction de l'EXERCICE 13 Un exemple

On veut ici une suite (S_n) qui diverge sans limite et telle que ses termes successifs soient de plus en plus proches. La suite de terme général $S_n = \sin n$ vérifie la première condition sans vérifier la seconde : nous allons «ralentir la fréquence d'oscillation».

Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons $S_n = \sin(\sqrt{n})$ et introduisons la suite (u_n) définie par

$$u_n = S_n - S_{n-1} = \sin(\sqrt{n}) - \sin(\sqrt{n-1}) \quad \text{avec} \quad n \geq 1.$$

Vérifions que la suite (u_n) est de limite nulle. Pour $n \geq 1$, on peut écrire

$$u_n = 2 \sin\left(\frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{2}\right)$$

Or en introduisant la quantité conjuguée

$$\frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{2} = \frac{1}{2(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Par composition de limites on peut conclure que la suite (u_n) est de limite nulle.

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

EXERCICES "COMME EN COLLE"

Correction de l'EXERCICE 14 Utilisation de l'équivalent de la série harmonique

Posons

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1)$$

On observe

$$u_n = 2H_n - H_{n^2} = 2(\ln n + \gamma + o(1)) - \ln(n^2) - \gamma + o(1) \rightarrow \gamma$$

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)

Correction de l'EXERCICE 15

($\Rightarrow$) $\sum u_n$ converge, donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$ et donc $\frac{u_n}{1+u_n} \times \frac{1}{u_n} = \frac{1}{1+u_n} \rightarrow 1$, d'où $u_n \sim \frac{u_n}{1+u_n}$. Par comparaison des séries à termes positifs, cela entraîne que la série de terme général $\frac{u_n}{1+u_n}$ converge.

($\Leftarrow$) Même raisonnement avec $u_n = \frac{v_n}{1-v_n}$, où $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$.

[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)

Correction de l'EXERCICE 16

Introduisons E l'ensemble des $n \in \mathbb{N}^*$ qui sont des carrés d'entiers $E = \{1, 4, 9, \dots\}$. En séparant, les termes sommés selon que l'indice est ou non le carré d'un entier, on peut écrire

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{\substack{k=1 \\ k \notin E}}^n \frac{1}{k^2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \in E}}^n \frac{1}{k} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \notin E}}^n \frac{1}{k^2} + \sum_{\ell=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{1}{\ell^2} \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = M$$

La série étudiée converge comme une série à termes positifs aux sommes partielles majorées.

[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)

Correction de l'EXERCICE 17

On a $\sum_{k=1}^n k(u_k - u_{k+1}) = \sum_{k=1}^n k u_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)u_k = \sum_{k=1}^n u_k - n u_{n+1}$.

($\Rightarrow$) Si $\sum u_n$ converge, $\sum_{k=1}^n k(u_k - u_{k+1}) \leq \sum_{k=1}^n u_k \leq \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$, car u est positive, donc $\sum n(u_n - u_{n+1})$ converge par théorème de minoration.

($\Leftarrow$) Si $\sum n(u_n - u_{n+1})$ converge, on a aussi $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (u_k - u_{k+1}) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k(u_k - u_{k+1})}{k}$.

Donc on obtient

$$0 \leq n u_n = n \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k(u_k - u_{k+1})}{k} = \sum_{k=n}^{+\infty} \underbrace{\frac{n}{k}}_{\leq 1} k(u_k - u_{k+1}) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} k(u_k - u_{k+1}) \xrightarrow{+\infty} 0.$$

Par conséquent, $(n u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de limite nulle et la relation initiale entre les sommes

partielles donne $\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n v_k + \underbrace{(n+1)u_{n+1}}_{\rightarrow 0} - \underbrace{u_{n+1}}_{\rightarrow 0} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} v_k$.

[↩ retour à l'EXERCICE 17](#)

Correction de l'EXERCICE 18

Si $k + 1$ n'est pas le carré d'un entier, $u_k = 0$.

Si $k + 1$ est le carré d'un entier p , $\lfloor \sqrt{k+1} \rfloor = p$ et $\lfloor \sqrt{k} \rfloor = p - 1$, et $u_k = \frac{1}{p^2 - 1}$.

On a donc $S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{p=2}^N \frac{1}{p^2 - 1}$, avec $N = \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor$.

Après décomposition en éléments simples, puis glissement d'indices,

$$S_n = \frac{1}{2} \left(\sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{p} - \sum_{p=3}^{N+1} \frac{1}{p} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right).$$

Quand n tend vers l'infini, N tend aussi vers l'infini et $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{4}$.

[↩ retour à l'EXERCICE 18](#)

Correction de l'EXERCICE 19 Divergence de la série des inverses des premiers

Puisque les termes $1/p_n$ sont éléments de $[0, 1[$, on peut écrire

$$\prod_{n=1}^N \frac{1}{1 - 1/p_n} = \prod_{n=1}^N \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p_n^k} \right)$$

Les termes sommés étant positifs, on peut minorer le produit en introduisant $M \in \mathbb{N}$ arbitraire

$$\prod_{n=1}^N \frac{1}{1 - 1/p_n} \geq \prod_{n=1}^N \left(\sum_{k=0}^M \frac{1}{p_n^k} \right)$$

Lorsque l'on développe le terme en second membre, on fait apparaître les inverses de tous les entiers pouvant s'écrire $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_N^{\alpha_N}$ avec $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ éléments de $\llbracket 0, M \rrbracket$. En choisissant M suffisamment grand, tous les entiers compris entre 1 et N figurent dans la liste précédente. Puisque les autres termes sommés sont positifs, on peut affirmer la minoration voulue

$$\prod_{n=1}^N \frac{1}{1 - 1/p_n} \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}.$$

Par la minoration qui précède, le produit tend vers $+\infty$ quand N croît vers l'infini. En passant au logarithme

$$\ln \left(\prod_{n=1}^N \frac{1}{1 - 1/p_n} \right) = \sum_{n=1}^N \left(-\ln \left(1 - \frac{1}{p_n} \right) \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

ce qui signifie la divergence de la série de terme général $-\ln(1 - 1/p_n)$. Or, la suite (p_n) étant de limite $+\infty$, on peut affirmer l'équivalent

$$-\ln \left(1 - \frac{1}{p_n} \right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{p_n}.$$

Par équivalence de séries à termes positifs, on conclut à la divergence de $\sum \frac{1}{p_n}$.

[↩ retour à l'EXERCICE 19](#)