

## CHANGEMENT D'INDICE ET COEFFICIENTS BINOMIAUX

EXERCICE 1 ■ □ □

Calculer les sommes suivantes en faisant un changement d'indice.

$$\textcircled{1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\textcircled{4} \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k}$$

$$\textcircled{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

$$\textcircled{5} \sum_{k=1}^n (n-k+1)$$

$$\textcircled{3} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k} \right)$$

Correction de l'EXERCICE 2

$\textcircled{1}$  Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \frac{(k+1) - k}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

$\textcircled{2}$  Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^n \frac{(k+2) - k}{2k(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) \\ &= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

$\textcircled{3}$  Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k} \right) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+1-k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ &= 0 \end{aligned}$$

En faisant le changement d'indice  $k \leftarrow n+1-k$ , dans la deuxième somme.

$\textcircled{4}$  On remarque, en faisant un changement d'indice que c'est la moitié de la formule du binôme  $(1+1)^{2n+1}$ .

$\textcircled{5}$  Effectuons le changement d'indices  $\ell = n-k+1$ . Lorsque  $k$  varie de 1 à  $n$ , alors  $\ell$  varie aussi de 1 à  $n$ . On a donc

$$\sum_{k=1}^n (n+1-k) = \sum_{\ell=1}^n \ell = \frac{n(n+1)}{2}$$

EXERCICE 3 ■ ■ □ **Formules binôme**

Soient  $n, p \in \mathbb{N}$ . Calculer les sommes suivantes.

$$\textcircled{1} \sum_{k=0}^p \binom{n+k}{n}$$

$$\textcircled{3} \sum_{k=0}^n k \binom{2n}{2k} \text{ (Changement d'indice } l = n - k).$$

$$\textcircled{2} \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k}$$

### Correction de l'EXERCICE 4

① On essaie pour les premières valeurs et on conjecture

$$\sum_{k=0}^p \binom{n+k}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}.$$

On fixe  $n \in \mathbb{N}$ . Cette formule se prouve alors par récurrence sur  $p \in \mathbb{N}$ . Elle est banale pour  $p = 0$ . Si elle est vraie au rang  $p$ , on a

$$\sum_{k=0}^{p+1} \binom{n+k}{n} = \sum_{k=0}^p \binom{n+k}{n} + \binom{n+p+1}{n} = \binom{n+p+1}{n+1} + \binom{n+p+1}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}$$

d'après la relation de Pascal.

② D'après la formule du binôme de Newton,  $S_1 = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = (1+1)^{2n} = 2^{2n}$ .

D'après la formule du binôme de Newton,  $S_2 \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k = (1-1)^{2n} = 0$ , car  $n \neq 0$ .

Or

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} + \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} = S_1$$

et

$$-\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} + \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} = S_2.$$

On résout le système engendré et on obtient  $T_1 := \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} = S_1/2 = 2^{2n-1}$

③ Via un changement de variable et la symétrie des coefficients binomiaux,

$$V_1 = \sum_{\ell=0}^n (n-\ell) \binom{2n}{2n-2\ell} = nT_1 - V_1$$

Ainsi  $V_1 = nT_1/2 = n 2^{2n-2}$ .

### EXERCICE 5 ■■■

① Calculer  $\sum_{k=0}^{2n} k^2 \binom{2n}{k}$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ .

② Calculer  $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{2n}{2k}$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ .

③ Calculer  $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{2n}{2k+1}$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ .

④ On pose pour  $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ ,  $S_p(n) = \sum_{k=0}^n k^p$ . Calculer

$$\sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} S_j(n) = (n+1)^{p+1}$$

- ⑤ Pour tout  $n \geq 2$ , calculer

$$u_n = \prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}$$

### Correction de l'EXERCICE 6

- ① Déjà faite en cours.  
 ② Supposons  $n \geq 2$ . Adaptons la méthode précédente. Pour tout réel  $x$ , posons

$$P(x) = \frac{(1+x)^{2n} + (1-x)^{2n}}{2} = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} x^{2k}$$

Pour tout réel  $x$ , on a

$$\begin{aligned} P'(x) &= \sum_{k=1}^n 2k \binom{2n}{2k} x^{2k-1} \\ &= 2n \frac{(1+x)^{2n-1} - (1-x)^{2n-1}}{2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P''(x) &= \sum_{k=1}^n 2k(2k-1) \binom{n}{k} x^{2k-2} \\ &= 2n(2n-1) \frac{(1+x)^{2n-2} + (1-x)^{2n-2}}{2} \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} &= \frac{P'(1) + P''(1)}{4} \\ &= n(2n+1)2^{2n-4} \end{aligned}$$

Pour  $n = 0$ , la somme est nulle. Pour  $n = 1$ , elle vaut 1.

- ③ S'obtient en faisant la différence de la première et la deuxième.  
 ④

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j+1} S_j(n) &= \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} \sum_{k=0}^n k^j \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} k^j \quad \text{par interversion de l'ordre de sommation} \\ &= \sum_{k=0}^n \left( \left( \sum_{j=0}^{p+1} \binom{p+1}{j} k^j \right) - k^{p+1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^n (k+1)^{p+1} - k^{p+1} = (n+1)^{p+1} \quad \text{via la formule du binôme} \end{aligned}$$

- ⑤ Soit  $k \geq 2$ . On a

$$\frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \frac{(k-1)(k^2 + k + 1)}{(k+1)(k^2 - k + 1)} = \frac{k-1}{k+1} \times \frac{v_k}{v_{k-1}}$$

en posant  $v_k = k^2 + k + 1$  puisqu'alors  $v_{k-1} = (k-1)^2 + k - 1 + 1 = k^2 - k + 1$ .

On a

$$\begin{aligned} u_n &= \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k+1} \times \prod_{k=2}^n \frac{v_k}{v_{k-1}} \\ &= \frac{2(n-1)!}{(n+1)!} \frac{v_n}{v_1} = \frac{2(n^2 + n + 1)}{3n(n+1)} \end{aligned}$$

après télescopage.