

FICHE DÉRIVATIONS

Le but est de s'exercer à dériver de manière rapide et efficace. On peut avoir des calculs "bruts" à faire, ou alors vouloir faire une étude de fonctions. Dans ce cas, on a comme stratégie de mettre la dérivée sous forme factorisée afin de pouvoir faire un tableau de signe.

Attention! Résoudre $f'(x) = 0$ ne justifie pas et ne donne pas le signe de la dérivée pour les fonctions.

RAPPEL DES FORMULES DE DÉRIVATION DE TERMINALE

Fonction simple	fonction dérivée en x	Fonction composée	dérivée de la fonction composée
$f : x \mapsto \lambda$	$f'(x) = 0$		
$f : x \mapsto \lambda x + \mu$	$f'(x) = \lambda$	$x \mapsto \lambda \cdot u(x) + \mu$	$\lambda \cdot u'$
$f : x \mapsto x^n \ (n \in \mathbb{R})$	$f'(x) = nx^{n-1}$	u^n	$nu' u^{n-1}$
$f : x \mapsto \sqrt{x}$ pour $x \geq 0$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ pour $x > 0$	$\sqrt{u}$ pour $u(x) \geq 0$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ pour $u(x) > 0$.
$f : x \mapsto \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$	$\frac{1}{u}$ pour $u(x) \neq 0$	$\frac{-u'}{u^2}$ pour $u(x) \neq 0$
$f = \sin$	$f'(x) = \cos x$	$\sin(u)$	$u' \cos(u)$
$f = \cos$	$f'(x) = -\sin x$	$\cos(u)$	$-u' \sin(u)$
$f : x \mapsto \ln x$ pour $x > 0$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$\ln(u)$ pour $u(x) > 0$	$\frac{u'}{u}$ pour $u(x) > 0$
$f : x \mapsto \exp x$	$f'(x) = \exp(x)$	e^u	$u' e^u$

On remarquera que les formules pour $\sqrt{\cdot}$ et pour l'inverse sont des cas particuliers de la formule de dérivation de x^n pour $n = \frac{1}{2}$, et $n = -1$.

On remarquera aussi que les formules de dérivations composées se déduisent simplement des dérivées simples "en multipliant par u' ."

somme de fonctions	$(u + v)' = u' + v'$
produit de fonctions	$(uv)' = u'v + uv'$
quotient de fonctions	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

EXERCICE 1 □ □ □

Dériver les fonctions suivantes (pour l'instant sans préciser le domaine de dérivabilité).

$$\textcircled{1} f : x \mapsto 2x^3 - 5x^2 + 3\sin(x) - \sqrt{2}$$

$$\textcircled{3} h : x \mapsto \frac{3(x^2 + 2x)}{2(x + 5)}$$

$$\textcircled{2} g : x \mapsto \frac{-2}{3}x^3 + \frac{2}{x}$$

$$\textcircled{4} a : x \mapsto (x^2 + 1)\exp(2x)$$

EXERCICE 2 ■ □ □

Dériver les fonctions suivantes en précisant les contraintes sur x pour avoir existence de la fonction (la rédaction du domaine de dérivabilité sera vue à un autre moment).

$$\textcircled{1} a_1 : x \mapsto 5(2x^2 - 3)^3$$

$$\textcircled{5} a_5 : x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\textcircled{2} a_2 : x \mapsto \ln(\ln x)$$

$$\textcircled{6} a_6 : x \mapsto (2x^2 - 1)\sqrt{\ln(x^2 + 1) + 1}$$

$$\textcircled{3} a_3 : x \mapsto \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$\textcircled{7} a_7 : x \mapsto \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$\textcircled{4} a_4 : x \mapsto x \exp\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$$

EXERCICE 3 ■ □ □

Dériver les fonctions suivantes en mettant la dérivée de manière la plus factorisée possible pour simplifier la recherche de signe:

$$\textcircled{1} f_1 : x \mapsto \left(\frac{7x-8}{9-2x}\right)^3$$

$$\textcircled{8} f_8 : x \mapsto e^{\sqrt{-9x+3}}$$

$$\textcircled{2} f_2 : x \mapsto \left(\frac{\sqrt{4x+1}}{3x+6}\right)^3$$

$$\textcircled{9} f_9 : x \mapsto \exp\left(\frac{\sqrt{4x+7}}{x+5}\right)$$

$$\textcircled{3} f_3 : x \mapsto \left(\frac{e^{5x-8}}{x^2-7x+12}\right)^4$$

$$\textcircled{10} f_{10} : x \mapsto \ln\left(\frac{x^2}{5x-6}\right)$$

$$\textcircled{4} f_4 : x \mapsto \sqrt{\frac{2x+4}{5-x}}$$

$$\textcircled{11} f_{11} : x \mapsto \ln(\sqrt{x} + e^x)$$

$$\textcircled{5} f_5 : x \mapsto \sqrt{e^x(x^2-4x+15)}$$

$$\textcircled{12} f_{12} : x \mapsto \cos(3\sqrt{x} + 5)$$

$$\textcircled{6} f_6 : x \mapsto \sqrt{\frac{(5x-8)^4}{4-x^2}}$$

$$\textcircled{13} f_{13} : x \mapsto -2\sin(3+5x)$$

$$\textcircled{7} f_7 : x \mapsto \sqrt{e^{-x^2-5x}}$$

$$\textcircled{14} f_{14} : x \mapsto x^3 \cos(2x+5)$$

$$\textcircled{15} f_{15} : x \mapsto \sin\left(\frac{e^x}{3x-1}\right)$$

Donner enfin le domaine de définition et de dérivabilité des fonctions de l'exercice précédent.

CORRECTION

Correction de l'EXERCICE 1

$$(1) f'(x) = 3x^2 - 10x + 3 \cos(x).$$

$$(3) h'(x) = \frac{3(x^2 + 10x + 10)}{2(x+5)^2}.$$

$$(2) g'(x) = -2x^2 - \frac{2}{x^2}.$$

$$(4) a'(x) = 2(x^2 + x + 1) \exp(2x).$$

Correction de l'EXERCICE 2

$$(1) a'_1(x) = 60x(2x^2 - 3)^2$$

$$(5) a'_5(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(2) a'_2(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$$

$$(3) a'_3(x) = -\frac{1}{(x-1)^2 \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$$

$$(6) a'_6(x) = \frac{x(6x^2 + 4(x^2 + 1) \log(x^2 + 1) + 3)}{(x^2 + 1) \sqrt{\log(x^2 + 1) + 1}}$$

$$(4) a'_4(x) = \frac{(x^2 + 7x + 4) \exp\left(\frac{x-1}{x+2}\right)}{(x+2)^2}$$

$$(7) a'_7(x) = \frac{3}{2(x^2 + x + 1)^{3/2}}$$

Correction de l'EXERCICE 3

$$(1) \mathcal{D}_{f_1} = \mathcal{D}_{f'_1} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{9}{2} \right\}, \quad f'_1(x) = \frac{141(7x-8)^2}{(9-2x)^4}.$$

$$(2) \mathcal{D}_{f_2} = \left[-\frac{1}{4}; +\infty \right[, \mathcal{D}_{f'_2} = \left[-\frac{1}{4}; +\infty \right[, \quad f'_2(x) = \frac{(3-2x)\sqrt{4x+1}}{9(x+2)^4}.$$

$$(3) x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4), \mathcal{D}_{f_3} = \mathcal{D}_{f'_3} = \mathbb{R} \setminus \{3; 4\}, \quad f'_3(x) = \frac{4(e^{5x-8})^4(5x^2 - 37x + 67)}{(x^2 - 7x + 12)^5} \text{ qui ne se simplifie pas}$$

plus car les deux polynômes de degré deux n'ont pas de racine commune.

$$(4) \mathcal{D}_{f_4} = [-2; 5], \mathcal{D}_{f'_4} =]-2; 5[, \quad f'_4(x) = \frac{7}{(5-x)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2x+4}}. \text{ Car sur } \mathcal{D}_{f_4}, \quad 2x+4 \geq 0 \text{ et } 5-x \geq 0.$$

$$(5) \mathcal{D}_{f_5} = \mathcal{D}_{f'_5} = \mathbb{R} \text{ car le polynôme reste toujours strictement positif.} \quad f'_5(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{2} \sqrt{\frac{e^x}{(x^2 - 4x + 15)}}.$$

$$(6) \mathcal{D}_{f_6} = \mathcal{D}_{f'_6} =]-2; 2[, \quad f'_6(x) = \frac{-(5x-8)(5x^2 + 8x - 40)}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$(7) \mathcal{D}_{f_7} = \mathcal{D}_{f'_7} = \mathbb{R}, \quad f'_7(x) = -\left(x + \frac{5}{2}\right) \sqrt{e^{-x^2-5x}}.$$

$$(8) \mathcal{D}_{f_8} =]-\infty; \frac{1}{3}], \mathcal{D}_{f'_8} = \left] -\infty; \frac{1}{3} \right[, \quad f'_8(x) = \frac{-9}{2\sqrt{-9x+3}} e^{\sqrt{-9x+3}}.$$

$$(9) \mathcal{D}_{f_9} = \left[-\frac{7}{4}; +\infty \right[, \mathcal{D}_{f'_9} = \left] -\frac{7}{4}; +\infty \right[, \quad f'_9(x) = \frac{3-2x}{2(x+5)^2 \sqrt{4x+7}} \exp\left(\frac{\sqrt{4x+7}}{x+5}\right).$$

Pas de prolongement de la dérivée en $-\frac{7}{4}$.

$$(10) \mathcal{D}_{f_{10}} = \mathcal{D}_{f'_{10}} = \left] \frac{6}{5}; +\infty \right[, \quad f'_{10}(x) = \frac{5x-12}{x(5x-6)}.$$

$$(11) \mathcal{D}_{f_{11}} = \mathbb{R}^+, \mathcal{D}_{f'_{11}} = \mathbb{R}^{+*}, \quad f'_{11}(x) = \frac{1+2\sqrt{x}e^x}{2x+2\sqrt{x}e^x}.$$

$$(12) \mathcal{D}_{f_{12}} = \mathbb{R}^+, \mathcal{D}_{f'_{12}} = \mathbb{R}^{+*}, \quad f'_{12}(x) = \frac{-3}{2\sqrt{x}} \sin(3\sqrt{x}+5).$$

$$(13) \mathcal{D}_{f_{13}} = \mathcal{D}_{f'_{13}} = \mathbb{R}, \quad f'_{13}(x) = -10 \cos(3+5x).$$

$$(14) \mathcal{D}_{f_{14}} = \mathcal{D}_{f'_{14}} = \mathbb{R}, \quad f'_{14}(x) = 3x^2 \cos(2x+5) - 2x^3 \sin(2x+5).$$

$$(15) \mathcal{D}_{f_{15}} = \mathcal{D}_{f'_{15}} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}, \quad f'_{15}(x) = \frac{e^x(3x-4)}{(3x-1)^2} \cos\left(\frac{e^x}{3x-1}\right).$$