

TD

Théorie des ensembles

Premiers pas

EXERCICE 1 ■ □ □

Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble. Quelles sont les assertions vraies?

- | | | | |
|----------------------------------|-----------------------------|--------------------------|-------------------------|
| ① $a \in E$ | ⑤ $\{\emptyset\} \subset E$ | ⑨ $\{a, b\} \in E$ | ⑬ $a \cup c = \{a, c\}$ |
| ② $a \subset E$ | ⑥ $a, b \subset E$ | ⑩ $\{a\} \subset E$ | ⑭ $a \cup \{b, c\} = E$ |
| ③ $\emptyset \in E$ | ⑦ $a, b \in E$ | ⑪ $\{a\} \in E$ | ⑮ $\{a, b\} \cup \{c\}$ |
| ④ $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ | ⑧ $\{a, b\} \subset E$ | ⑫ $a \cap c = \emptyset$ | ⑯ $\{a, b\} \cap \{c\}$ |

▶ Indication ▶ Correction

EXERCICE 2 ■ □ □

Écrire avec des symboles mathématiques les ensembles suivants :

- | | |
|--|---|
| ① l'ensemble des entiers naturels divisibles par 5. | ⑤ L'ensemble des fonctions qui sont le produit de deux fonctions affines. |
| ② l'ensemble des entiers qui sont la somme de deux carrés d'entiers. | ⑥ L'ensemble des intervalles à bornes entières. |
| ③ l'ensemble des nombres complexes dont la partie réelle est égale à la partie imaginaire. | ⑦ L'ensemble des fonctions de $]0, 2[$ dans $\mathbb{R}$ dérivables en 1. |
| ④ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui s'annulent en 0. | ⑧ L'ensemble des suites réelles croissantes. |

▶ Indication ▶ Correction

EXERCICE 3 ■ □ □

Décrire $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))))$ en extension.

▶ Indication

▶ Correction

EXERCICE 4 ■ □ □

Soit A et B deux ensembles. Montrer que

- | | |
|--|---|
| ① $A \subset B \iff A \cup B = B$ | ③ $A = B \iff A \cap B = A \cup B$ |
| ② $A \subset B \iff A \cap B = A$ | ④ $A \cap B = (A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$ |
| ⑤ $A \cap B = \emptyset \iff \text{Card}(A) + \text{Card}(B) = \text{Card}(A \cup B)$, pour A et B finis. | |
| ⑥ $(A = B) \iff ((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = \emptyset)$. | |

▶ Indication

▶ Correction

EXERCICE 5 ■ □ □

Soit E un ensemble. La différence symétrique de deux parties F et G de E est la partie

$$F \Delta G = (\bar{F} \cap G) \cup (F \cap \bar{G}).$$

- ① Montrer que, pour toutes parties F et G de E , $F \Delta G = (F \cup G) \cap \overline{F \cap G}$.
- ② Vérifier que, pour toutes parties F et G de E , la fonction indicatrice de $F \Delta G$ est égale à

$$\mathbb{1}_F + \mathbb{1}_G - 2\mathbb{1}_F \mathbb{1}_G.$$

Retrouver le résultat de la question précédente.

▶ Indication

▶ Correction

EXERCICE 6 ■ □ □

Les relations $\mathcal{R}$ définies ci-dessous sont-elles des relations d'ordre sur $\mathbb{R}$?

- ① $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad x \mathcal{R} y \iff x < y.$
- ② $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad x \mathcal{R} y \iff e^x \leq e^y.$
- ③ $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad x \mathcal{R} y \iff |x| \leq |y|.$
- ④ $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad x \mathcal{R} y \iff x - y \in \mathbb{N}.$
- ⑤ $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad x \mathcal{R} y \iff x - y \in \mathbb{Z}.$

► Indication ► Correction

EXERCICE 7 ■ □ □

Étant données A, B et C trois parties d'un ensemble E , montrer que

$$(1) A \Delta B = A \Delta C \iff B = C \quad (4) A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C$$

$$(2) A \setminus B = A \iff B \setminus A = B$$

$$(3) A \Delta B = A \cap B \implies A = B = \emptyset. \quad (5) \begin{cases} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{cases} \iff B = C$$

Δ est définie dans l'exercice 5. ► Indication ► Correction

EXERCICE 8 ■ ■ □

Soit A et B deux parties d'un ensemble E . Résoudre l'équation (d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$) $A \cap X = B$, puis l'équation $A \cup X = B$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 9 ■ □ □

Soit E un ensemble et A une partie de E . On définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(E)$ par

$$X \mathcal{R} Y \iff X \cup A = Y \cup A.$$

(1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(2) Décrire la classe d'équivalence de $X \in \mathcal{P}(E)$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 10 ■ □ □

On définit une relation binaire $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$x \preccurlyeq y \iff \exists n \in \mathbb{N}, y = x^n$$

Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre.

Cet ordre est-il total? ► Indication ► Correction

EXERCICE 11 ■ □ □

Soit $\preccurlyeq$ la relation définie sur $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$ par

$$(x, y) \preccurlyeq (x', y') \iff (x, y) = (x', y') \text{ ou } y \leq x'$$

Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur E . ► Indication ► Correction

EXERCICE 12 ■ □ □

On définit une relation binaire ' $\preccurlyeq$ ' sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ par

$$z \preccurlyeq z' \iff |z| < |z'| \text{ ou } (|z| = |z'| \text{ et } \operatorname{Re}(z) \leq \operatorname{Re}(z'))$$

Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre total. ► Indication ► Correction

EXERCICE 13 ■ ■ □

Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné tel que toute partie non vide admet un plus petit élément et un plus grand élément. Montrer que E est fini. ► Indication ► Correction

EXERCICE 14 ■ ■ □

On définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}$ par $x \mathcal{R} y$ si $\cos^2 x + \sin^2 y = 1$.

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence puis déterminer ses classes d'équivalence.

► Indication ► Correction

EXERCICE 15 ■ ■ □

On définit une relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{Z}$ par $x \mathcal{R} y$ si, et seulement si, $x + y$ est pair.

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et préciser ses classes d'équivalence.

► Indication ► Correction

EXERCICE 16 ■ ■ ■

Soit E un ensemble de cardinal n , $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E ayant k classes d'équivalence et $G = \{(x, y) \in E^2 \mid x \mathcal{R} y\}$ le graphe de $\mathcal{R}$ supposé de cardinal p . Prouver qu'on a $n^2 \leq kp$. ► Indication ► Correction

Indications

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 1](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 2](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 3](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 4](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 7 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 8 _____

Faire un dessin et trouver quels sont les ensembles qui vérifient l'équation. Il doivent dépendre de A et B .

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 9 _____

Vérifier la définition de relation d'équivalence ne pose pas de problème.
On doit regarder la partie des ensembles Y dans la classe de X qui est dans A et la partie qui est en dehors de A .

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 10 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 11 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 12 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 13 _____

Montrer que l'ordre doit être total. Procéder par l'absurde. Construire alors une suite d'élément strictement croissante dans E . Cette suite induit alors un ensemble qui n'admet alors pas de plus grand élément.

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 14 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 15 _____[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)INDICATION POUR L'EXERCICE 16 _____

Écrire n et p en fonction de k et n_i le cardinal de chaque classe d'équivalence.

[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)

Corrections

Correction de l'EXERCICE 1

Vrais sont (1), (4), (7), (8), (10). On a aussi

15) $\{a, b\} \cup \{c\} = E$

16) $\{a, b\} \cup \{c\} = \emptyset$

↩ retour à l'EXERCICE 1

Correction de l'EXERCICE 2

Fait en cours.

↩ retour à l'EXERCICE 2

Correction de l'EXERCICE 3

Fait en cours.

↩ retour à l'EXERCICE 3

Correction de l'EXERCICE 4

Fait en cours.

↩ retour à l'EXERCICE 4

Correction de l'EXERCICE 5

Fait en cours.

↩ retour à l'EXERCICE 5

Correction de l'EXERCICE 6

- ① Non. En effet, $1 < 1$ est faux, donc elle n'est pas réflexive.
- ② En passant au logarithme, $e^x \leq e^y \iff x \leq y$. C'est donc bien une relation d'ordre car ' $\leq$ ' en est une sur $\mathbb{R}$.
- ③ Non. On a $(-2)\mathcal{R}2$ et $2\mathcal{R}(-2)$ et $2 \neq 2$, donc la relation n'est pas antisymétrique.
- ④ Oui. La preuve n'a pas de difficulté.

- ⑤ Non. On a $(-2)\mathcal{R}2$ et $2\mathcal{R}(-2)$ et $2 \neq 2$, donc la relation n'est pas antisymétrique.

↩ retour à l'EXERCICE 6

Correction de l'EXERCICE 7

↩ retour à l'EXERCICE 7

Correction de l'EXERCICE 8

Faisons seulement $A \cap X = B$. L'autre équation est similaire.

On peut remarquer déjà que $A \supset B$, sinon l'équation n'a pas de solution. Dans ce cas, en faisant plusieurs dessins, on peut remarquer que le plus petit ensemble qui vérifie l'équation est B et que tout ensemble plus grand qui ne contient aucun autre élément de A vérifie aussi l'équation. Montrons alors que les solutions de l'équation sont les ensembles $B \cup Y$, où $Y \in \mathcal{P}(\bar{A})$.

En effet, on vérifie directement que ces éléments vérifient l'équation, puisque pour tout $Y \in \mathcal{P}(\bar{A})$, $A \cap (B \cup Y) = (A \cap B) \cup (A \cap Y) = B \cup \emptyset = B$.

De plus, décomposons $X = X_A \cup X_{\bar{A}}$, avec $X_A \subset A$ et $X_{\bar{A}} \subset \bar{A}$. On a alors $A \cap X = B \iff X_A = B$, donc il n'y a aucune condition sur $X_{\bar{A}}$ et donc on a bien

$$X = B \cup X_{\bar{A}}, \text{ avec } X_{\bar{A}} \in \mathcal{P}(\bar{A}) \text{ quelconque}.$$

L'ensemble des solutions de la seconde équation est, dans le cas où $A \subset B$,

$$\{B \cap \bar{Y} \mid Y \in \mathcal{P}(A)\}.$$

Comme précédemment si $A \not\subset B$, il n'y a pas de solutions.

↩ retour à l'EXERCICE 8

Correction de l'EXERCICE 9

Preuve de colle, pour plus de détails.

On montre par double inclusion que pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$,

$$\text{cl}(X) = \{(X \setminus A) \cup B \mid B \subset A\}.$$

↩ retour à l'EXERCICE 9

Correction de l'EXERCICE 10

La réflexivité est vraie en prenant $n = 1$, l'antisymétrie découle du fait que $x = x^{nk}$ avec $n, k \in \mathbb{N}$, n'a pour seule solution $n = k = 1$, et la transitivité est un jeu de puissances. L'ordre n'est clairement pas total, en prenant par exemple 2 et 3 qui ne sont pas comparables.

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

Correction de l'EXERCICE 11

La réflexivité vient du jeu d'égalités obtenu $x \leq y \leq x$ qui implique que $x = y$.
L'antisymétrie vient du jeu d'égalités obtenu $x \leq y \leq x' \leq y' \leq x$ qui implique que $x = y = x' = y'$.

La transitivité vient de la transitivité de '=' et de '<=' sur $\mathbb{R}$.

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

Correction de l'EXERCICE 12

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

Correction de l'EXERCICE 13

Montrons que l'ordre est total. Pour tous $x, y \in E$, la partie $\{x, y\}$ est non vide, donc elle admet un plus petit élément et un plus grand élément. Ainsi x et y sont comparables et l'ordre $\preccurlyeq$ est donc total.

Construisons une suite strictement croissante. Supposons E infini. Posons x_0 le plus petit élément de E . Pour $n \geq 0$, comme $E \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$ est non vide (on n'a retiré qu'un nombre fini d'éléments d'un ensemble infini), il admet un plus petit élément x_{n+1} . On obtient ainsi une suite strictement croissante $x_0 \prec x_1 \prec x_2 \prec \dots$.

Contradiction. Considérons la partie $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset E$. Elle est non vide. Or, par construction, A n'a pas de plus grand élément, puisque la suite est strictement croissante. Cela contredit l'hypothèse "toute partie non vide admet un plus grand élément".

Donc E ne peut pas être infini et donc E est fini.

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

Correction de l'EXERCICE 14

Fait en cours.

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)

Correction de l'EXERCICE 15

[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)

Correction de l'EXERCICE 16

Notons les classes d'équivalence $cl_1, \dots, cl_k$ et leurs tailles $n_i = |cl_i|$, pour $i = 1, \dots, k$.

$$\text{Alors } n = |E| = \left| \bigcup_{i=1}^k cl_i \right| = \sum_{i=1}^k |cl_i| = \sum_{i=1}^k n_i$$

$$\text{et } p = |G| = \sum_{i=1}^k |cl_i|^2 = \sum_{i=1}^k n_i^2.$$

*₁ Les classes d'équivalentes sont disjointes, donc compter le nombre d'éléments dans toutes les classes d'équivalences est comme sommer le nombre d'éléments dans chaque classe.

*₂ $(x, y) \in G$ si et seulement si x, y sont dans la même classe. La somme de tous les éléments du graphe peut être décomposés en la somme sur chaque classe d'équivalence, que l'on doit compter au carré, car pour $(x, y) \in cl_i \times cl_i$, on a aussi $(y, x) \in cl_i \times cl_i$.

L'inégalité que l'on veut démontrer revient à montrer alors que $\left(\sum_{i=1}^k n_i \right)^2 \leq k \sum_{i=1}^k n_i^2$.

C'est l'inégalité de Cauchy-Schwartz, que l'on verra plus tard dans un cas plus général. Mais ici on peut le démontrer directement.

$$\begin{aligned} \text{En effet, } k \sum_{i=1}^k n_i^2 - \left(\sum_{i=1}^k n_i \right)^2 &= k \sum_{i=1}^k n_i^2 - \sum_{i=1}^k n_i^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq k} n_i n_j \\ &= (k-1) \sum_{i=1}^k n_i^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq k} n_i n_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } &\sum_{1 \leq i < j \leq k} n_i^2 + n_j^2 \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=i+1}^k n_i^2 + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{j-1} n_j^2 \\ &= \sum_{i=1}^k n_i^2 (k-i) + \sum_{i=1}^k n_i^2 (i-1) \\ &= (k-1) \sum_{i=1}^k n_i^2 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } k \sum_{i=1}^k n_i^2 - \left(\sum_{i=1}^k n_i \right)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq k} n_i^2 + n_j^2 - 2n_i n_j = \sum_{1 \leq i < j \leq k} (n_i - n_j)^2 \geq 0.$$

Ce qui nous donne le résultat voulu.

[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)