ANÁLISE MATEMÁTICA I

Armando Machado

UNIVERSIDADE DE LISBOA
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática

2014

Classificação A.M.S. (2010): 26-01, 26A06

ISBN: 978-972-8394-26-4

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Este texto tem como principal objetivo apoiar o estudo da disciplina Análise Matemática I, do curriculum do primeiro semestre do primeiro ano das licenciaturas de Matemática e Matemática Aplicada, disciplina que lecionámos nos últimos anos letivos. Ele não pretende, de modo nenhum, concorrer com os muito bons livros que existem nesta área, como por exemplo os que escolhemos para a bibliografia, livros cuja consulta será naturalmente muito recomendável, especialmente para o estudante mais ambicioso. Este objetivo fez também com que procurássemos em muitos pontos ser mais detalhados do que é usual aparecer num livro de Análise Matematica, em particular sempre que são introduzidos assuntos que a nossa experiência nos levava a considerar como mais delicados para um estudante que encontra pela primeira vez uma abordagem mais estruturada e justificada de assuntos examinados informalmente no ensino secundário.

Muitos dos assuntos abordados nesta disciplina, como os limites de funções e de sucessões, a continuidade, e a derivabilidade, já foram estudados no ensino secundário, embora de forma assumidadamente desorganizada, incompleta e pouco rigorosa. O conhecimento informal destes assuntos não é compatível com a sua utilização em contextos mais avançados, facto que é especialmente relevante quando consideramos estudantes das licenciaturas da área da matemática, que são supostos conhecê-los de forma mais profunda e adquirirem uma autonomia que lhes permita não só aplicá-los de forma fiável como serem capazes de adaptá-los a situações diferentes e eventualmente novas (ver, a propósito, o texto [3], proposto aos estudantes de Matemática que ingressam na Universidade de Oxford). Por esse motivo é fundamental que esses assuntos sejam reexaminados no início dos estudos universitários, apresentando definições dos conceitos sem ambiguidades, habituando o estudante à necessidade de justificar as propriedades que se enunciam e sublinhando as relações de interdependência entre as diferentes matérias.

É claro que o objetivo de apresentar definições claras de todos os conceitos envolvidos e de justificar todas as afirmações que se fazem tem sempre limitações, sendo forçoso partir de um contexto básico constituído por conceitos que não se definem e por relações entre esses conceitos que se admitem sem justificação. Há várias escolhas possíveis para esse contexto básico que dependem principalmente das motivações e da maturidade matemática dos destinatários. Num curso com espírito de Fundamentos, destinado a um público mais avançado que é suposto já dominar informalmente os assuntos, poder-se-á partir de um contexto em que apenas se supõem conhecidas as propriedades dos números naturais (ou até apenas a teoria dos conjuntos…) e, a partir daí, construir sucessivamente os inteiros relativos, os números racionais e os números reais, e as operações e relações que os envolvem, estabelecendo as respetivas propriedades. Trata-se de uma via cujo desenvolvimento tende a ser lento e que facilmente se torna desmotivadora para a grande maioria dos estudantes que entram na universidade e mesmo para muitos num estágio um pouco mais avançado da formação matemática. Uma segunda via, muito utilizada em livros mais avançados de Análise Matemática, a via axiomática, consiste em isolar um conjunto muito limitado de conceitos e propriedades primitivos envolvendo os números reais (uma axiomática) e em desenvolver em seguida a restante teoria dos números reais de forma dedutiva a partir do que foi tomado como ponto de partida. Mesmo esta via implica que se demonstrem muitas propriedades que, apesar de não estarem incluídas nas de partida, o estudante está habituado a considerar como evidentes, atividade que, apesar de ter um papel formativo importante ao nível da exercitação do raciocínio matemático, tende a tornar-se morosa e desencorajante para um grande número de estudantes.

Tendo em conta as dificuldades que referimos no parágrafo anterior, fomos conduzidos a utilizar no curso, e consequentemente neste texto, uma via que corresponde a utilizar como contexto básico um conjunto ainda mais rico de conceitos e propriedades, limitando assim a necessidade de justificação às propriedades que ultrapassam esse contexto básico. O contexto básico consiste essencialmente no facto de os números reais incluirem os números racionais (em particular os números inteiros) e de no quadro dos números reais estarem definidas a relação de ordem $>$ e as operações algébricas $+$ e $\times$ (assim como as suas inversas), de uma forma que estende as respetivas contrapartidas nos números racionais, e gozando de todas as propriedades algébricas que o estudante está habituado a utilizar e que já eram válidas no quadro destes últimos. Quais são essas propriedades algébricas (para quem conheça o conceito, são as dos chamados corpos ordenados) é algo que não enunciamos explicitamente no texto mas de que nos parece que o estudante facilmente terá consciência; tentar fazê-lo de uma forma sistemática poder-nos-ia conduzir à perda de um tempo precioso e mais uma vez à possível desmotivação de muitos estudantes. Apresentamos enfim a propriedade que distingue os números reais dos números racionais (os números reais constituem um corpo ordenado completo) propriedade que será introduzida na forma da exigência de existência de supremo para os conjuntos majorados não vazios. Essa propriedade será examinada com mais atenção e será essencial para todo o desenvolvimento posterior da teoria.

Não parece necessário enumerar quais o assuntos que são abordados neste curso, uma vez que isso é feito no índice, tal como nos dispensamos de descrever resumidamente o tratamento dos diferentes assuntos quando esse tratamento é praticamente o mesmo em todos os textos de Análise Matemática. Vamos assim apenas referir apenas algumas das opções que tomámos e que não partilham a mesma unanimidade.

Relativamente às chamadas “noções topológicas” pereceu-nos ser preferível reduzi-las ao mínimo que é necessário para as aplicações ao estudo das funções; reduzimo-las assim à noção de ponto aderente a um conjunto de números reais, e à pequena variante dos pontos de acumulação e dos pontos isolados, que é o que é necessário para apoiar a noção de limite. Não referimos assim as noções usuais de pontos interiores, exteriores e fronteiros, que são sem dúvida necessárias quando se passa para $\mathbb{R}^n$ mas que no contexto de $\mathbb{R}$ apenas intervêm relativamente a conjuntos que são intervalos, caso em que correspondem apenas a afirmar se os pontos são ou não uma das extremidades. Optámos também por apresentar estas noções topológicas desde o início no contexto da reta estendida $\overline{\mathbb{R}}$, que inclui os objetos $-\infty$ e $+\infty$, por ser esse o contexto em se unificam mais facilmente os diferentes tipos de limite que é usual considerar, embora em qualquer caso nos limitemos a considerar que os conjuntos considerados são subconjuntos de $\mathbb{R}$.

A noção de limite é apresentada de início no contexto das funções e usando a noção de vizinhança-δ de um ponto (finito ou infinito). A definição é apresentada de forma a unificar os casos em que o ponto (aderente ao domínio) em que se calcular o limite e o próprio limite podem ser finitos ou infinitos. Ao contrário da opção tomada por vários autores, optámos por não excluir o valor da função no ponto em que se toma o limite, quando pertencente ao domínio, da definição de limite. Uma vez que examinamos também a noção trivial de limite relativo a um subconjunto do domínio (ao qual o ponto ainda seja aderente), generalizando o que se faz habitualmente com os limites laterais, quem preferir a noção alternativa poderá sempre considerar o limite relativo ao domínio com o ponto retirado. Os limites das sucessões aparecem simplesmente como casos particulares dos limites de funções, agora com domínio $\mathbb{N}$, não sendo assim necessário reenunciar todas as propriedades que foram estudadas para os limites de funções.

Os sublimites de uma função num ponto são definidos como os limites nesse ponto de uma restrição desta a algum subconjunto ao qual o ponto seja aderente e é apresentada uma caracterização equivalente destes em termos de vizinhanças. Os sublimites de uma sucessão são definidos como os sublimites desta enquanto função o que dispensa o uso das subsucessões para o seu estudo, sendo substituídas pelas restrições desta a subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$. O teorema de Bolzano-Weierstrass sobre a existência de sublimites é também demonstrado primeiro para as funções, tal como a condição de Cauchy para a existência de limite aparece para as funções antes de ser enunciada para as sucessões.

As exponenciais de base maior que 0 e expoente real são definidas primeiro para os expoentes racionais e, seguidamente estendidas a $\mathbb{R}$ pela condição de ser mantida a monotonia, provando-se então a continuidade da função obtida.

O estudo das derivadas é feito seguindo o caminho habitual e depois deste são definidas as primitivas e são introduzidas através de exemplos algumas das técnicas clássicas de primitivação. O estudo dessas técnicas não pretende ser exaustivo e limita-se a examinar os exemplos mais simples e clarificadores. Uma vez que o estudo do integral de Riemann não é abordado neste semestre, pensámos ser interessante exemplificar algumas utilizações das primitivas, por exemplo na determinação de áreas e de volumes de sólidos de revolução. Estes exemplos são encarados como aplicações da Análise Matemática à “vida real”, pensando nas área e nos volumes como realidades exteriores que se conhecem intuitivamente e que, a partir desse conhecimento, podem ser calculadas com o auxílio do que foi estudado no curso.

O último capítulo tem um carácter diferente dos restantes, uma vez que os assuntos expostos não se inserem no que é abordado no curso de Análise do primeiro semestre. O nosso objetivo foi esboçar uma tentativa de abordagem do estudo das séries que privilegia a não utilização da ordem no conjunto de índices (famílias somáveis). Se se perde, por um lado, a ocasião de desenvolver a análise das séries simplesmente convergentes (análise que foi, de qualquer modo abordada de modo sucinto no momento do estudo da fórmula de Taylor com referência às séries de Taylor, essas sim consideradas num contexto ordenado de limite das somas parciais), ganha-se em simplicidade em tudo o que respeita à associatividade e aos pontos em que se é levado a considerar, por exemplo, séries duplas. Faz-se, em particular, um estudo das propriedades elementares das funções analíticas que tira partido das simplificações permitidas por esta abordagem. No contexto em que nos colocamos tanto a definição das somas infinitas como o estudo das propriedades de continuidade e derivabilidade para as somas de funções está claramente inspirado (embora sem necessitarmos de o conhecer) no modo de proceder habitual no quadro do integral de Lebesgue, não deixando de aparecer referências aos teoremas da convergência monótona e dominada e passando, naturalmente pelo lema de Fatou. O caráter de esboço deste capítulo e o facto de termos querido manter o texto dentro de dimensões razoáveis levou-nos a omitir assuntos importantes sobre as séries, como os critérios mais finos de convergência no caso das parcelas positivas, omissão essa que não tem nenhuma relação com a nossa opção pelas somas não ordenadas.

No fim de cada secção do texto propomos ao estudante um conjunto de exercícios. Se um ou outro aparecem como complemento à exposição teórica, um grande número corresponde ao que é tradicional propor nas aulas teórico-práticas desta disciplina. Em particular, tomámos a liberdade de ir buscar ao livro [7] do nosso colega Mário Figueira, que regeu esta disciplina durante vários anos, muitos dos exercícios aí propostos. Assinalaremos com ★ os exercícios (ou as suas alíneas) que tenham um caráter mais teórico ou cuja resolução seja um pouco mais exigente e com ★★ aqueles que se podem considerar como destinados aos estudantes mais corajosos.

CAPÍTULO I
Números reais e limites

§1. Generalidades sobre os números reais.

I.1.1 **(Os números reais como corpo contendo os números racionais)** Os números reais são os personagens centrais de toda a Análise Matemática pelo que é importante ter bem presentes as suas propriedades fundamentais.

Os números reais incluem os números racionais, em particular também os números inteiros. No contexto dos números reais, estão definidas duas operações fundamentais, a *adição* $+$ e a *multiplicação* $\times$ que generalizam as operações análogas no quadro dos números racionais[1]. Estas operações gozam de propriedades algébricas que os estudantes estão habituados a reconhecer e aplicar e que, apesar de nos abstermos de detalhar completamente, podem ser caracterizadas pelo facto de serem todas consequências de certas propriedades básicas das operações, nomeadamente:

a) Valem as propriedades comutativa e associativa da adição e da multiplicação e a segunda tem a propriedade distributiva relativamente à primeira.

b) O número real 0 é elemento neutro da adição e elemento absorvente da multiplicação. O número real 1 é elemento neutro da multiplicação.

c) Cada número real x, admite um único simétrico, notado $-x$, isto é, um único número real que somado com ele dá 0. Cada número real $x \neq 0$ admite um único inverso, notado x^{-1}, isto é, um único número real que multiplicado por ele dá 1.

O facto de estas propriedades serem válidas costuma ser traduzido pela afirmação de que os números reais constituem um *corpo* (contendo os números racionais).[2] [3]

Como sucede em qualquer corpo, a partir da soma e da multiplicação ficam definidas duas operações inversas, a *subtração* e a *divisão*: Dados números reais x e y, existe um único número real que somado com y dá x, nomea-

---

[1]Quando falamos em generalização, estamos a significar que, se x e y são racionais, a soma $x + y$ e o produto $x \times y$, no contexto dos números reais, coincidem com a soma e a multiplicação no contexto dos números racionais, em particular são números racionais.

[2]Os números racionais constituem também um corpo, o mesmo acontecendo com os números complexos, estudados no ensino secundário. Já os números inteiros não constituem um corpo uma vez que no contexto destes não existem, em geral, inversos.

[3]O estudante interessado em aprofundar mais o modo como destas propriedades básicas se podem deduzir as restantes poderá consultar, por exemplo, [2], [4] ou [9]. As mesmas referências podem ser utilizadas para aprofundar o que resumiremos adiante em I.1.3 sobre a ordenação dos números reais.

damente o número

$$x - y = x + (-y),$$

e, no caso em que $y \neq 0$, existe um único número real que multiplicado por y dá x, nomeadamente o número

$$\frac{x}{y} = x \times y^{-1},$$

em particular, se $y \neq 0$, tem-se $y^{-1} = \frac{1}{y}$.

I.1.2 Para além das quatro operações, está definida no contexto dos números reais (como no de qualquer corpo) uma outra noção, a de potência de expoente inteiro maior ou igual a 0. Assim, se x é um número real e n é um número inteiro maior ou igual a 0, a notação x^n (*potência* de *base* x e *expoente* n) designa naturalmente o produto de n termos todos iguais a x, no caso em que $n \geq 2$, e nos outros casos está definida por $x^1 = x$ e $x^0 = 1$. Em particular, tem-se $x^n \neq 0$ sempre que $x \neq 0$. Como consequências simples das propriedades associativa e comutativa da multiplicação[4], valem as *propriedades algébricas das potências*:

$$(x \times y)^n = x^n \times y^n, \quad x^{m+n} = x^m \times x^n, \quad x^{m\times n} = (x^m)^n,$$

e, consequentemente, se $y \neq 0$ e $m \geq n$,

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}, \quad y^{m-n} = \frac{y^m}{y^n}.$$

Tem-se, é claro,

$$1^n = 1,$$
$$0^n = 0, \text{ se } n \geq 1$$

(note-se que, por definição, $0^0 = 1$).

I.1.3 **(Os números reais como corpo ordenado)** Nos números reais está definida uma ordenação, que generaliza a ordenação existente nos números racionais. Quer isto dizer que, se x e y são números reais, sabemos o que significa $x > y$ (x maior que y) e que são válidas as propriedades transitiva e *tricotómica* (esta última afirma que $x > y$ só é possível quando $x \neq y$ e que, dados números reais distintos, há sempre um que é maior que o outro). Naturalmente, a relação oposta $x < y$ é definida como significando o mesmo que $y > x$ e a relação lata $x \geq y$ significa "$x > y$ ou $x = y$", tendo $y \leq x$ como sinónima.

[4]A propriedade associativa já foi necessária para não haver dúvidas sobre a ordem pela qual se multiplicam os n termos iguais a x. Para quem achar interessante procurar justificar estas propriedades, sugere-se a resolução do exercício I.2.2, depois do estudo do método de demonstração por indução matemática.

A relação de ordem $>$ e a sua variante lata $\geq$ verificam, relativamente às operações $+$ e $\times$, um conjunto de propriedades (propriedades algébricas da relação de ordem) que os estudantes estão habituados a reconhecer e aplicar e que, apesar de nos abstermos de detalhar completamente, incluem as seguintes, a partir das quais as restantes se podem deduzir facilmente:

a) Se $x > y$, então, para cada z, $x + z > y + z$. Em consequência, no caso em que variamos ambas as parcelas da soma, podemos afirmar que, se $x > y$ e $z > w$, então

$$x + z > y + z > y + w,$$

e daqui concluímos facilmente que, se $x > y$, então $-x < -y$ [5].

b) Se $x > y$ e $z > 0$, então $x \times z > y \times z$. Em consequência, se $x > y$ e $z < 0$, então $x \times z < y \times z$ [6]. Concluímos destas duas propriedades a habitual regra do sinal dum produto:

Se $x > 0$ e $z > 0$, então $x \times z > 0$;
Se $x > 0$ e $z < 0$, então $x \times z < 0$;
Se $x < 0$ e $z > 0$, então $x \times z < 0$;
Se $x < 0$ e $z < 0$, então $x \times z > 0$.

Da regra dos sinais dum produto decorre que, se $x \neq 0$, então $x^2 = x \times x$, é maior que 0. Em particular $1 = 1 \times 1 > 0$ e portanto, lembrando as propriedades apontadas em a), todos os números naturais, podendo ser obtidos como somas de um número finito de parcelas iguais a 1, são também maiores que 0[7]. Também pela regra dos sinais, se $x > 0$, então $x^{-1} > 0$ e $x^n > 0$, para cada inteiro $n \geq 0$, e, se $x < 0$, então $x^{-1} < 0$ [8]. Analogamente ao que referimos em a), quando variamos ambos os termos do produto, podemos afirmar que, se $x > y \geq 0$ e $z > w \geq 0$, então

$$x \times z > y \times z \geq y \times w$$

e daqui concluímos outra das propriedades que usamos com frequência, nomeadamente que, se $x > y > 0$, então $x^{-1} < y^{-1}$.

O facto de o corpo dos números reais possuir uma ordenação com as propriedades que acabamos de relembrar costuma ser traduzido pela afirmação de que estamos em presença de um *corpo ordenado*[9].

---

[5] Se, por absurdo, fosse $-x \geq -y$, vinha $0 = x + (-x) > y + (-y) = 0$.

[6] Reparar que $-z > 0$, e portanto $-x \times z > -y \times z$

[7] Uma versão mais correta deste argumento poderá ser dada depois de revermos adiante o método de demonstração por indução matemática.

[8] Reparar que $x \times x^{-1} = 1 > 0$.

[9] Os números racionais constituem naturalmente também um corpo ordenado. Já os números complexos, estudados no ensino secundário, não constituem um corpo ordenado, uma vez que não foi definida no respetivo contexto nenhuma ordenação. Aliás a definição, no contexto dos números complexos, de uma ordenação para a qual ficássemos com

I.1.4 **(Médias e a relação "estar entre")** Diz-se que um número real z *está entre* dois números reais x e y se se verifica uma das duas duplas desigualdades

$$x < z < y, \quad y < z < x.$$

Uma propriedade importante dos números reais, que já era possuída pelos números racionais, diz-nos que, se $x \neq y$, existe sempre z que está entre x e y [10]. Uma maneira de exibir um exemplo de um z nas condições referidas é tomar para z a *média aritmética* (ou simplesmente *média*) de x e y:

$$z = \frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2}\,y.$$

Com efeito, no caso em que $x < y$, deduzimos das propriedades algébricas da relação de ordem atrás referidas que

$$z = \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2}\,y < \frac{1}{2}\,y + \frac{1}{2}\,y = y,$$
$$z = \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2}\,y > \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2}\,x = x,$$

e o caso em que $y < x$ tem uma justificação análoga, tendo em conta a simetria dos papéis de x e y na relação "estar entre". Repare-se que no caso em que os reais distintos x e y são ambos racionais o real intermédio z que construímos é também um número racional.

Refira-se, a propósito, um método mais geral para construir números reais entre números reais distintos x e y: Suponhamos que se fixaram dois números reais s e t, maiores que 0 e com $s + t = 1$ (por exemplo, $s = \frac{1}{3}$ e $t = \frac{2}{3}$, ou $s = \frac{3}{5}$ e $t = \frac{2}{5}$, ou s arbitrário entre 0 e 1 e $t = 1 - s$). Se x e y são números reais, ao número real

$$z = sx + ty$$

dá-se o nome de *média aritmética pesada* de x e y (ou simplesmente *média pesada* de x e y), associada aos pesos s e t (a média usual é simplesmente a média pesada associada aos pesos $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$). Analogamente ao que foi feito para as médias usuais, vemos que, se $x < y$ e z é a média aritmética pesada de x e y associada aos pesos s e t, então tem-se $x < z < y$, uma vez que

$$z = sx + ty < sy + ty = y,$$
$$z = sx + ty > sx + tx = x.$$

---

um corpo ordenado é impossível, uma vez que se tem $i \times i = -1 < 0$, contrariando uma das propriedades válidas em qualquer corpo ordenado.

[10] Repare-se que esta propriedade não é válida no contexto dos números inteiros: Por exemplo, entre 2 e 3 não existe nenhum número inteiro.

Refira-se a propósito que, no caso em que $x = y$, a média pesada $sx + ty$ é

$$sx + ty = sx + tx = (s + t)x = x = y.$$

I.1.5 **(Notações envolvendo conjuntos de números reais)** No estudo da Análise Matemática vamos encontrar muitas vezes conjuntos de números reais. A noção de conjunto já foi utilizada várias vezes no ensino secundário e dever-se-á ter presente, em particular, que um conjunto fica perfeitamente determinado se exibirmos uma propriedade que distinga os elementos do conjunto daqueles que não lhe pertencem e que não pode assim haver conjuntos diferentes que tenham exatamente os mesmos elementos. Vamos referir o significado de algumas notações que são utilizadas no contexto dos conjuntos (no nosso caso, usualmente conjuntos de números reais) que na maioria dos casos são já bem conhecidas pelos estudantes mas que excecionalmente poderão ter significados que não coincidem exatamente com aqueles a que estão habituados:

a) Se A e B designam conjuntos, as notações $A \cap B$, $A \cup B$ e $A \setminus B$ referem-se, respetivamente, à *interseção*, à *união* e à *diferença* dos conjuntos, isto é, ao conjunto dos reais que pertencem simultaneamente a A e a B, ao conjunto daqueles que pertencem a pelo menos um dos dois conjuntos A e B, e ao conjunto dos números reais que pertencem a A mas não pertencem a B. Sublinhe-se que, no último caso não se supõe, de modo nenhum, que o conjunto B esteja contido no conjunto A; pode até acontecer que A e B não tenham pontos comuns, caso em que $A \setminus B = A$. O facto de um número real x pertencer a um conjunto A é usualmente notado por $x \in A$ e diz-se então também que x é um elemento do conjunto A. Para afirmar o contrário, isto é, que x não é elemento do conjunto A escreve-se $x \notin A$. [11]

b) Se A e B designam conjuntos, a notação $A \subset B$ exprime que A está contido em B (por outras palavras, que A é um *subconjunto* de B), isto é, que todos os elementos de A são também elementos de B [12]; Com o mesmo significado escreve-se também $B \supset A$ e diz-se que B contém A. Repare-se que dizer que se tem $A = B$ é o mesmo que dizer que se tem simultaneamente $A \subset B$ e $B \subset A$ (isto é, que A e B têm os mesmos elementos) e que este facto conduz a um processo muitas vezes utilizado quando se quer justificar uma igualdade envolvendo conjuntos.

c) O conjunto vazio, isto é, aquele que não tem nenhum elemento, é habitualmente notado $\emptyset$. O conjunto de todos os número reais é representado com o símbolo $\mathbb{R}$ e usam-se notações do mesmo “alfabeto” para designar

---

[11] Em geral, um símbolo cortado significa o contário da correspondente versão não cortada, como acontece com os símbolos bem conhecidos $=$ e $\neq$.

[12] Note-se que em vários livros a notação $A \subset B$ é tomada com um significado diferente, nomeadamente, afirmando que A está estritamente contido em B, no sentido que, além de A estar contido em B, A é diferente de B. Nesses livros usa-se a notação $A \subseteq B$ no sentido em que nós usamos $A \subset B$, isto é, quando não se quer excluir a possibilidade de se ter $A = B$.

alguns subconjuntos importantes de $\mathbb{R}$, nomeadamente $\mathbb{Q}$ para o conjunto dos números racionais, $\mathbb{Z}$ para o dos números inteiros e $\mathbb{N}$ para o dos números naturais (os inteiros maiores que 0 [13]). Usaremos também a notação $\mathbb{N}_0$ para designar o conjunto dos números inteiros maiores ou iguais a 0.

d) Expliquemos, com o auxílio de exemplos, o modo que utilizaremos para explicitar conjuntos que são caracterizados por uma dada propriedade ou pela enumeração de todos os seus elementos: A notação

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{Q} \text{ e } x > -1\}$$

descreve o conjunto dos números reais que são simultaneamente racionais e maiores que -1; A notação

$$\{1, 2, \frac{3}{2}, 7\}$$

designa o conjunto finito cujos únicos elementos são indicados entre chavetas, conjunto que também pode ser designado por uma notação do tipo exemplificado em primeiro lugar, embora de forma menos compacta:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x = 1 \text{ ou } x = 2 \text{ ou } x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = 7\},$$

e, em particular, a notação $\{-1\}$ designa o *conjunto unitário* cujo único elemento é o número real -1.

Há ainda um tipo de notação menos explícita, que, apesar de idealmente ser preferível evitar, não deixa muitas vezes dúvidas sobre o que se pretende significar e que consiste em indicar entre chavetas alguns elementos do conjunto seguidos de reticências, na esperança que isso indique, com *alguma dose de bom senso*, quais os restantes elementos. Por exemplo escrevemos

$$\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{9}\}$$

para significar o conjunto finito cujos elementos são os inversos dos números naturais menores ou iguais a 9 ou

$$\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots\}$$

para significar o conjunto infinito cujos elementos são os inversos dos quadrados dos números naturais. Para estes conjuntos podem também ser respetivamente utilizadas as notações mais precisas

[13]Para alguns matemáticos os números naturais incluem o 0. Não é essa a convenção que faremos aqui, apesar de considerarmos que se podem considerar muito válidas as razões que apontam para a eventual inclusão do 0 (o número de elementos do conjunto vazio…).

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{1\le n\le 9}{}^{14},$$
$$\left\{\frac{1}{n^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

ou, alternativamente, com a notação, em todos os casos utilizável, do tipo referido no primeiro exemplo,

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ com } 1 \le n \le 9 \text{ e } x = \frac{1}{n}\},$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ com } x = \frac{1}{n^2}\}.$$

e) Entre os conjuntos que são referidos com mais frequência no estudo da Análise Matemática contam-se os *intervalos*, que o estudante já encontrou também em estudos anteriores, nomeadamente os conjuntos dos tipos

$$\begin{aligned}
&[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\},\\
&[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\},\\
&]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\},\\
&]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},\\
&[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\},\\
&]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\},\\
&]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\},\\
&]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\},\\
&]-\infty, +\infty[= \mathbb{R},
\end{aligned}$$

onde a, b são números reais que se costumam referir como *extremidades* do intervalo, dando-se o nome de *pontos interiores do intervalo* aos elementos deste que não são extremidades. Observe-se que o conjunto vazio é um intervalo, que se pode escrever com diferentes escolhas das extremidades, nomeadamente é qualquer dos intervalos dos primeiros quatro tipos com $a > b$ ou dos segundo, terceiro ou quarto tipos com $a = b$ e que um conjunto unitário $\{a\}$ é também um intervalo, nomeadamente $\{a\} = [a, a]$. Chamamos *intervalos não triviais* àqueles que têm mais que um elemento isto é, àqueles cujas extremidades não coincidem.

I.1.6 **(Máximo e mínimo dum conjunto)** Se A é um conjunto de números reais, chama-se *máximo* de A a um elemento de A que seja maior que todos os outros elementos de A e *mínimo* de A a um elemento de A que seja menor que todos ou outros elementos de A. O máximo e o mínimo de A, quando existam, podem ser notados $\max(A)$ e $\min(A)$, ou simplesmente $\max A$ e $\min A$, respetivamente.

Observe-se que um conjunto A não pode ter mais que um máximo nem mais

[14] É costume considerar implicitamente que a variável n só toma valores inteiros.

que um mínimo visto que, por exemplo no primeiro caso, se a e a' fossem dois máximos distintos, cada um deles teria que ser maior que o outro o que é impossível[15]. Por este motivo é possível utlizar o artigo definido e dizer que um número é **o** máximo ou **o** mínimo de um conjunto (também se diz *o maior* ou *o menor* elemento do conjunto).

Observe-se também um conjunto pode não ter máximo ou não ter mínimo: Desde logo, o conjunto vazio $\emptyset$ não tem máximo nem mínimo, simplesmente porque não tem nenhum elemento; O conjunto $\mathbb{R}$ também não tem máximo nem mínimo, uma vez que, para cada elemento a de $\mathbb{R}$ o elemento $a+1$ de $\mathbb{R}$ é maior que ele e o elemento $a-1$ de $\mathbb{R}$ é menor que ele; O intervalo $[0,1[$ tem mínimo 0 mas não tem máximo, uma vez que se $a \in [0,1[$ há sempre um elemento deste conjunto maior que a (qualquer número real entre a e 1 [16]).

Um erro frequente é fazer referência ao máximo ou ao mínimo de um conjunto sem nos assegurarmos previamente da existência de máximo ou de mínimo para o conjunto em questão.

Há um tipo importante de conjuntos para os quais podemos assegurar diretamente a existência de máximo e de mínimo: Trata-se dos conjuntos finitos e não vazios. A explicação da razão por que isso acontece pode ser feita do seguinte modo no que se refere ao máximo (o caso do mínimo é análogo):

a) Se o conjunto tem um único elemento, esse elemento é o máximo (e, de facto, também o mínimo).

b) Se o número de elementos do conjunto é 2, então a propriedade tricotómica da ordenação garante que um deles é maior que o outro e esse é então o máximo (o outro é o mínimo).

c) Se o número de elementos é 3, utilizamos o que já sabemos sobre conjuntos com 2 elementos: retiramos provisoriamente um dos elementos, consideramos o máximo do conjunto parcial com 2 elementos que ficou e repescando o elemento retirado, reparamos que o máximo entre este e o máximo parcial considerado vai ser o máximo do conjunto total.

d) O raciocínio referido em c) pode ser adaptado trivialmente para mostrar que os conjuntos com 4 elementos têm máximo, depois de sabermos que isso acontece com aqueles que têm 3 elementos, deduzindo daqui sucessivamente que os conjuntos com 5 elementos, com 6 elementos, etc… também têm máximo. Note-se que uma explicação mais clara do raciocínio que acabamos de fazer (menos *etcetérica*…) poderá ser feita quando for revisto adiante o método de demonstração por indução matemática.

Para além dos conjuntos finitos não vazios, há outro tipo de conjuntos para os quais se pode garantir a existência de mínimo embora não de máximo. Mais precisamente, qualquer conjunto não vazio A de números naturais tem um mínimo. A razão por que isso acontece é que, escolhido um elemento

[15] O que acabamos de fazer é o que se chama um *raciocínio por absurdo*: Para mostrar que uma afirmação é verdadeira, admite-se que ela é falsa e tenta-se deduzir uma contradição.

[16] Lembrar o que se referiu em I.1.4.

fixado $p \in A$, podemos chamar A' o conjunto dos elementos de A que são menores ou iguais a p, conjunto que é ainda não vazio e já é finito (no máximo p elementos) e como tal, admite um mínimo, verificando-se então facilmente que esse mínimo é automaticamente também mínimo do conjunto A na sua totalidade[17] (costuma-se dizer, por este motivo, que os números naturais têm a propriedade de *boa ordenação*).

I.1.7 **(Majorantes e minorantes)** Diz-se que um número real b é um *majorante* de um conjunto A se b é maior ou igual a todos os elementos do conjunto A. É claro que, se A tiver um elemento máximo b, esse máximo é, em particular, um majorante de A. Note-se, no entanto, que, ao contrário do que acontecia com a noção de máximo, não exigimos que um majorante tenha que pertencer a A (se pertencesse, seria evidentemente o máximo de A). Um conjunto A diz-se *majorado* se possuir algum majorante. Repare-se que, se um conjunto A admite um majorante b, então admite necessariamente mais majorantes, por exemplo todos os números reais maiores que b ($b + 1$ ou, mais geralmente $b + x$, com $x > 0$ estão nessas condições); é por essa razão que utilizamos sempre o artigo indefinido, "**um** majorante" e não "**o** majorante". Examinemos alguns exemplos concretos:

a) O conjunto $\mathbb{R}$ de todos os números reais não é majorado. Com efeito, nenhum número b pode ser majorante de $\mathbb{R}$, uma vez que ele não é maior ou igual, por exemplo, ao elemento $b + 1 \in \mathbb{R}$.

b) Analogamente, o conjunto $[3, +\infty[$ não é majorado, uma vez que, se b é um número real arbitrário, o maior dos dois números 3 e $b + 1$ pertence ao conjunto e é maior que b.

c) O intervalo $[0, 1]$, tem máximo 1, em particular é majorado e 1 é um dos seus majorantes. Os outros majorantes deste conjunto são exatamente os números maiores que 1, já que um número menor que 1 não pode ser majorante (por não ser maior ou igual ao elemento $1 \in [0, 1]$.

d) O intervalo $[0, 1[$ não tem máximo, já que, para cada $x \in [0, 1[$ existe sempre um elemento deste conjunto que é maior que ele, por exemplo a média de x e 1. No entanto ele é majorado e um dos majorantes é 1. De facto, tal como acontecia em c), os restantes majorantes são exatamente os números maiores que 1, já que um número menor que 0 não pode ser majorante (por 0 pertencer ao conjunto) e um número em $[0, 1[$ também não pode ser majorante (senão seria o máximo que, como já referimos, o conjunto não tem).

e) O exame do exemplo do conjunto vazio $\emptyset$ levanta por vezes algumas questões, por motivo da dificuldade de perceber o sentido de afirmar alguma

---

[17] No entanto, o máximo de A' não tem que ser máximo de A e é essa a razão por que não podemos garantir que qualquer conjunto contido em $\mathbb{N}$ tenha necessariamente máximo: Por exemplo o conjunto dos números pares não tem máximo, como aliás também acontece com o próprio $\mathbb{N}$.

coisa sobre todos os elementos do conjunto vazio[18]. No entanto, se refletirmos com mais cuidado, facilmente reconheceremos que o conjunto vazio $\emptyset$ é majorado e que, de facto, os seus majorantes são todos os números reais (por exemplo, -5 é um majorante de $\emptyset$, uma vez que não existe nenhum elemento de $\emptyset$ que seja maior que -5).
Uma noção análoga à de majorante é a de minorante. Diz-se que um número real a é um *minorante* de um conjunto A se a é menor ou igual a todos os elementos do conjunto A. Se o conjunto A tiver mínimo a, esse mínimo é certamente um minorante, mas um minorante não tem necessariamente que pertencer ao conjunto (se pertencesse seria evidentemente o mínimo). Um conjunto A diz-se *minorado* se possuir algum minorante. Deixamos para o estudante a tarefa de examinar para estas noções exemplos análogos aos apresentados acima para as noções de majorante e de conjunto majorado.
Referimos enfim uma nova definição: Diz-se que um conjunto A de números reais é *limitado* se for simultaneamente majorado e minorado.

I.1.8 **(Supremos e ínfimos)** Já referimos atrás que se um conjunto A tiver b como elemento máximo, então b é, em particular, um majorante de A; de facto, se refletirmos um pouco, concluímos que o máximo b é um majorante especial, nomeadamente *o menor de todos os majorantes*, já que qualquer número menor que b não pode ser majorante do conjunto, justamente por não ser maior ou igual ao elemento b do conjunto. Por outro lado, no exemplo estudado na alínea d) de I.1.7 verificámos que o conjunto $[0,1[$, apesar de não ter máximo, admite majorante e, de entre estes, um que é menor que todos os outros, nomeadamente o número real 1 (não é máximo porque não pertence ao conjunto). Somos assim conduzidos a uma definição que descreve o que sucede nestes casos:
Dizemos que um conjunto A de números reais admite o número real b como *supremo* se b é um majorante de A menor que todos os outros majorantes de A (por outras palavras, o supremo, se existir, é o mínimo do conjunto dos majorantes de A). Quando um conjunto A admite um supremo, este pode ser notado $\sup(A)$ ou simplesmente $\sup A$. Destacamos as seguintes propriedades da noção de supremo:
a) Um conjunto não pode ter mais que um supremo (uma vez que o conjunto dos seus majorantes não pode ter mais que um mínimo). Por esse motivo, podemos usar o artigo definido e referir "**o** supremo" dum conjunto.
b) Se um conjunto tem máximo, então esse máximo é também supremo do conjunto. Se um conjunto tem supremo então esse supremo é máximo se, e

[18]O que se passa é que qualquer afirmação que se faça sobre todos os elementos do conjunto vazio é automaticamente vedadeira. Por exemplo, a afirmação "todos os elefantes com seis pares de patas têm duas trombas" deve ser considerada como verdadeira por qualquer pessoa que acredite que não existe nenhum elefante com tantas patas… Repare-se que, se afirmação fosse falsa, a sua negação seria verdadeira e essa negação correspondia a afirmar que existia um elefante com seis pares de patas que não tinha duas trombas.

só se, pertencer ao conjunto.[19]

A noção de supremo admite uma "noção dual" (no mesmo sentido que podemos considerar as noções de máximo e mínimo como duais, tal como as de majorante e minorante):

Diz-se que um conjunto A de números reais admite o número real a como *ínfimo* se a é um minorante de A maior que todos os outros minorantes de A (por outras palavras, o ínfimo, se existir, é o máximo do conjunto dos minorantes de A). Quando um conjunto A admite um ínfimo, este pode ser notado $\inf(A)$ ou simplesmente $\inf A$. De forma análoga, destacamos as seguintes propriedades "duais" da noção de ínfimo:

a′) Um conjunto não pode ter mais que um ínfimo (uma vez que o conjunto dos seus minorantes não pode ter mais que um máximo). Por esse motivo, podemos usar o artigo definido e referir "**o** ínfimo" dum conjunto.

b′) Se um conjunto tem mínimo, então esse mínimo é também ínfimo do conjunto. Se um conjunto tem ínfimo então esse ínfimo é mínimo se, e só se, pertencer ao conjunto.

I.1.9 **(Os números reais como corpo ordenado completo)** O conjunto vazio $\emptyset$ não admite supremo, uma vez que todos os números reais são majorantes e portante não existe um majorante mínimo. Um conjunto que não seja majorado também não admite supremo, uma vez que não admitindo majorantes, não pode ter um majorante mínimo. Uma propriedade fundamental dos números reais é que estas são as únicas exceções:

Todo o conjunto A de números reais que seja majorado e não vazio admite um supremo.

Esta propriedade é uma propriedade muito especial dos números reais e costuma ser traduzida pela afirmação de que eles constituem um *corpo ordenado completo*. Por exemplo, veremos adiante, no exercício I.1.10, que os números racionais, apesar de constituirem também um corpo ordenado, não têm a propriedade de completude, já que existem conjuntos de números racionais, majorados e não vazios, cujos majorantes racionais não têm um mínimo.

A propriedade de completude que enunciámos atrás é a última propriedade dos números reais que admitimos sem justificação. Todas as propriedades que estudaremos daqui em diante podem ser justificadas a partir das propriedades referidas até agora. Sem a propriedade de completude a maioria das propriedades importantes que são estudadas em Análise Matemática não poderia ser estabelecida. Como primeiro exemplo de aplicação da propriedade de completude, vamos mostrar que não precisamos de admitir sem justificação a propriedade dual daquela, mas podemos demonstrá-la a partir da que foi admitida.

[19] A relação entre máximo e supremo lembra talvez o ditado "Quem não tem cão, caça com gato", com o máximo a jogar o papel de cão e o supremo o de gato.

I.1.10 **(A propriedade dual da que define a completude dos reais)** Se A é um conjunto minorado e não vazio de números reais, então A admite um ínfimo.

Dem:[20] Vamos designar por B o conjunto dos minorantes do conjunto A, conjunto que é não vazio uma vez que, por hipótese, A é um conjunto minorado. Reparemos agora que, se x é um elemento arbitrário de A, x é um majorante do conjunto B, já que cada elemento de B, sendo um minorante de A, é, em particular, menor ou igual que x. Em particular, uma vez que A não é vazio, vemos que o conjunto não vazio B é majorado. Pela propriedade de completude, vemos que o conjunto B tem um supremo b. Reparemos agora que cada elemento $x \in A$ é maior ou igual a b, uma vez que, como já referimos, x é um majorante de B e b é o menor desses majorantes. Esta conclusão quer precisamente dizer que b é um minorante de A e portanto b não é só o supremo do conjunto dos minorantes de A, é mesmo o máximo deste conjunto, por outras palavras, b é o ínfimo do conjunto A. □[21]

A propriedade que referimos a seguir, é outra das que facilmente aceitaríamos como já conhecida mas acabámos de prometer que a partir de agora tudo admitiria uma justificação pelo que ficava mal começarmos já a quebrar a promessa… Para além disso, é instrutuivo verificarmos como a propriedade fundamental de completude intervém na demonstração (diga-se, a propósito, que existem corpos ordenados, que não teremos ocasião de examinar, em que a propriedade que vamos referir é falsa).

I.1.11 **(Propriedade arquimediana dos números reais)** O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais não é um subconjunto majorado de $\mathbb{R}$. Por outras palavras, dado um número real arbirário x, tão grande quanto se queira[22], existe sempre um número natural n tal que $n > x$. [23]

Dem: Vamos mostrar que $\mathbb{N}$ não é majorado pelo método de redução ao absurdo, ou seja, vamos supor que $\mathbb{N}$ era majorado e verificar que isso nos conduz a uma contradição. Ora, supondo que $\mathbb{N}$ é majorado, podemos chamar b ao supremo de $\mathbb{N}$. Como b é o menor dos majorantes de $\mathbb{N}$ e $b - 1 < b$,

[20] A abreviatura "Dem:" será utilizada neste texto para anunciar uma demonstração do resultado que se está a referir. Ver o exercício I.1.9, no fim desta secção, para uma justificação alternativa à que vamos utilizar.

[21] O símbolo □, usualmente no fim da linha, indica o fim de uma demonstração.

[22] A expressão "tão grande quanto se queira" é totalmente inútil do ponto de vista da afirmação que estamos a fazer: A afirmação é válida para qualquer número real x, seja ele intuitivamente grande ou não. Ao utilizarmos a expressão estamos a fazer o mesmo que se disséssemos: Repare que o que estamos a afirmar sobre x é tanto mais "forte" quanto maior for x, isto é, se for verdadeiro para um certo valor de x é trivialmente também verdadeiro para os valores menores de x.

[23] O estudante menos habituado a interpretar este tipo de afirmações matemáticas deverá examinar cuidadosamente o significado do que afirmámos: O número natural n depende do número real x que nos derem; não afirmamos, de modo nenhum, que exista um número natural que seja maior que todos os números reais (o que é claramente falso).

$b-1$ não pode ser um majorante de $\mathbb{N}$, ou seja, existe um número natural n tal que n é maior que $b-1$. Mas então $n+1>b$, o que é absurdo, uma vez que $n+1$ também é um número natural e b é, por hipótese, um majorante de $\mathbb{N}$. Reparemos enfim que afirmar que $\mathbb{N}$ não é majorado é o mesmo que dizer que, dado $x\in\mathbb{R}$ arbitrário, x não é um majorante de $\mathbb{N}$, ou seja, existe um número natural maior que x. □

I.1.12 **(Corolário[24])** Dado um número real $\delta>0$, tão pequeno quanto se queira[25], existe sempre um número natural n tal que $\frac{1}{n}<\delta$.

Dem: Considerando o número $\frac{1}{\delta}>0$, o resultado precedente afirma a existência de um número natural n tal que $n>\frac{1}{\delta}$, condição que implica que $\frac{1}{n}<\delta$. □

I.1.13 **(A parte inteira de um número real)** Seja x um número real. Existe então um único número inteiro p tal que $x\in[p,p+1[$, inteiro esse a que se dá o nome de *parte inteira* de x e que se nota $\mathrm{int}(x)$.

Dem: Comecemos por reparar que, dados dois números inteiros distintos, podemos chamar p ao menor deles e q ao maior e, uma vez que $p<q$, e portanto $p+1\le q$ (por se tratarem de números inteiros), constatamos que $[p,p+1[$ e $[q,q+1[$ não podem ter elementos comuns. Concluímos assim que um número real x não pode pertencer a mais que um intervalo do tipo $[p,p+1[$. Provemos agora a existência de um intervalo do tipo $[p,p+1[$ que contenha o ponto x, começando por examinar o caso particular em que $x\ge 0$: Pela propriedade arquimediana, podemos considerar um número natural maior que x e chamar n ao menor número natural nessas condições (lembrar a propriedade de boa ordenação dos naturais referida em I.1.6). Tem-se então que x é menor que n mas não é menor que $n-1$, por outras palavras, x pertence ao intervalo $[n-1,n[$, que é do tipo referido (com $p=n-1$). Examinemos, por fim, o caso em que $x<0$. Nesse caso, tem-se $-x>0$ e portanto, como vimos atrás, existe um inteiro m tal que $-x$ pertença ao intervalo $[m,m+1[$. Vemos então que, ou $-x=m$, e portanto $x=-m\in[-m,-m+1[$, ou $-x\in\,]m,m+1[$, e portanto

$$x\in\,]-m-1,-m[\,\subset[-m-1,-m[,$$

---

[24]Um corolário é uma afirmação que é consequência direta de um resultado estabelecido anteriormente.

[25]Tal como acontecia com a expressão "tão grande quanto se queira", utilizada em I.1.11, a expressão "tão pequeno quanto se queira" é totalmente inútil do ponto de vista da afirmação que estamos a fazer: A afirmação é válida para qualquer número real $\delta>0$, seja ele intuitivamente pequeno ou não. Ao utilizarmos a expressão estamos a fazer o mesmo que se disséssemos: Repare que o que estamos a afirmar sobre $\delta>0$ é tanto mais "forte" quanto menor for o número $\delta>0$, isto é, se for verdadeiro para um certo valor de δ maior que 0 é trivialmente também verdadeiro para os valores maiores de δ. As letras gregas δ e ε são utilizadas com frequência em situações onde faz sentido utilzar a expressão "tão pequeno quanto se queira".

em qualquer caso x pertence a um intervalo do tipo $[p, p+1[$ (no primeiro caso com $p = -m$ e no segundo com $p = -m-1$. □

I.1.14 **(Densidade dos números racionais)** Se $x \neq y$ são dois números reais, existe sempre um número racional z entre x e y. [26]

Dem: Como já aconteceu antes, tendo em conta a simetria dos papéis de x e y, basta examinar o caso em que $x < y$. Como veremos adiante, se se tivesse mesmo $x < y - 1$, conseguia-se até encontrar um número inteiro entre x e y. Por esse motivo vamos começar por tentar reduzir o caso geral a esse caso particular. Ora, aplicando a propriedade arquimediana, podemos fixar um número natural n maior que o número $\frac{1}{y-x}$, tendo-se então

$$ny - nx = n(y - x) > 1.$$

Tendo em conta I.1.13, podemos agora considerar um inteiro p tal que $nx \in [p, p+1[$ e obtemos então, por um lado, $nx < p+1$ e, por outro,

$$ny > nx + 1 \geq p + 1$$

pelo que o número racional $z = \frac{p+1}{n}$ verifica as desigualdades pretendidas

$$x < \frac{p+1}{n} < y.$$ □

Um facto que o estudante está habituado a utilizar sem levantar questões mas que claramente necessita de uma explicação é a existência de raizes quadradas para números reais positivos arbitrários, tanto mais que, tal como já era conhecido pelos geómetras gregos e como recordaremos em breve, essa propriedade não é verdadeira quando se trabalha apenas no contexto dos números racionais. Não é de espantar que na demonstração da existência de raizes quadradas a propriedade de completude dos números reais jogue um papel essencial.

I.1.15 **(Existência de raizes quadradas)** Seja $y \geq 0$ um número real. Existe então um, e um só, número real $x \geq 0$ tal que $x^2 = y$, número esse a que se dá o nome de *raiz quadrada* de y e que é notado $\sqrt{y}$. [27]

Dem: Para uma melhor sistematização, vamos dividir a demonstração em várias partes:

1) Comecemos por justificar o facto de não poder haver mais que um número maior ou igual a 0 cujo quadrado é igual a y. Ora, isso resulta de que, como

[26] Comparar com o que se referiu em I.1.4: Reparar que nesse momento apenas se garantiu a existência de um número real entre x e y, enquanto que agora afirmamos mais, que existe mesmo um número racional entre os dois números reais.

[27] É claro que um número menor que 0 não pode ter raiz quadrada, uma vez que, como sabemos, o quadrado de um número real arbitrário é sempre maior ou igual a 0, como foi referido em I.1.3.

referimos em I.1.3, se $x > a \geq 0$, então

$$x^2 = x \times x > a \times a = a^2,$$

e portanto x^2 e a^2 não podem ser ambos iguais a y.
2) Para simplificar alguns detalhes, vamos começar por provar a existência de raiz quadrada de y no caso particular em que $y \geq 1$.
Subdem: Consideremos o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1 \text{ e } x^2 \leq y\}$$

e reparemos que $1 \in A$ e que y é um majorante de A, já que, se $x > y$, então

$$x^2 = x \times x > y \times y \geq y \times 1 = y,$$

portanto $x \notin A$. [28] Uma vez que A é majorado e não vazio, sabemos que A admite um supremo $c = \sup(A)$, que verifica evidentemente $c \geq 1$, por ser $1 \in A$. Vamos provar que esse supremo c é a raiz quadrada procurada, isto é que $c^2 = y$. Para isso vamos mostrar separadamente que qualquer das desigualdades $c^2 < y$ e $c^2 > y$ conduz a contradição.
Comecemos por examinar o que sucederia se fosse $c^2 < y$. Chamemos h ao menor dos dois números c e $\frac{y-c^2}{3c}$, reparando que se tem $h > 0$, $h \leq c$ e $h \leq \frac{y-c^2}{3c}$. Uma vez que $c + h > c \geq 1$ e

$$\begin{aligned}(c+h)^2 = c^2 + 2ch + h^2 \leq c^2 + 2ch + ch = c^2 + 3ch \leq \\ \leq c^2 + (y - c^2) = y,\end{aligned}$$

vemos que $c + h \in A$, o que é absurdo por ser $c + h > c$ e c ser o supremo de A.
Examinemos agora o que sucederia se fosse $c^2 > y$. Chamemos h ao menor dos dois números c e $\frac{c^2-y}{2c}$, reparando que se tem $h > 0$, $h \leq c$ e $h \leq \frac{c^2-y}{2c}$. Uma vez que

$$(c-h)^2 = c^2 - 2ch + h^2 > c^2 - 2ch \geq c^2 - (c^2 - y) = y$$

vemos que $x \leq c - h$, para cada $x \in A$ (se fosse $x > c - h$, vinha também $x^2 > (c-h)^2 > y$), por outras palavras $c - h$ também seria um majorante de A o que é absurdo porque $c - h < c$ e c, sendo o supremo de A, é o menor dos majorantes de A.
3) Uma vez que $0^2 = 0$, e portanto 0 é raiz quadrada de 0, resta-nos mostrar que os números reais y tais que $0 < y < 1$ também têm raiz quadrada. Ora, sendo $0 < y < 1$, tem-se $\frac{1}{y} > 1$, pelo que, tal como verificámos em 2), $\frac{1}{y}$ admite uma raiz quadrada c. Tem-se então $c^2 = \frac{1}{y}$, donde

[28] Reparar que dizer que "se $x \in A$ então $x \leq y$" é equivalente a dizer que "se $x > y$ então $x \notin A$" (duas afirmações contrarrecíprocas têm o mesmo valor de verdade).

$$y = \frac{1}{c^2} = \left(\frac{1}{c}\right)^2,$$

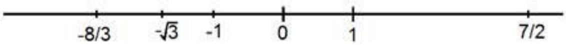
o que mostra que y admite a raiz quadrada $\frac{1}{c}$. □

O facto de todo o número real positivo admitir raiz quadrada vai-nos permitir exibir, pela primeira vez, um exemplo de número que não é racional.

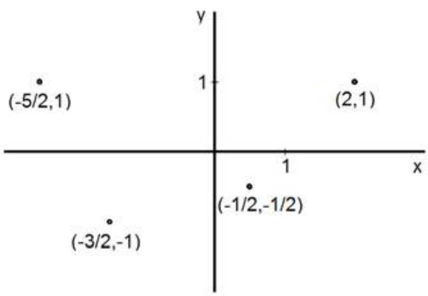
I.1.16 **(Existência de números irracionais)** Chamam-se *irracionais* aos números reais que não são racionais. O número $\sqrt{2}$ é um exemplo de irracional.
Dem: Suponhamos, por absurdo, que $\sqrt{2}$ era racional e portanto que se podia escrever $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, com p e q números naturais. Se necessário "simplificando" a fração, podemos já supor que p e q são primos entre si, em particular que não são ambos pares. Podemos agora notar que $2 = \frac{p^2}{q^2}$ donde $p^2 = 2q^2$, o que implica que p^2 é par, e portanto p é par (o quadrado dum número ímpar é ímpar). Tem-se assim $p = 2n$, para um certo natural n, pelo que $(2n)^2 = 2q^2$, donde $q^2 = 2n^2$, o que, como antes, implica que q^2 é par, e portanto q é também par. Chegámos assim a uma contradição, visto que estávamos a supor que p e q não eram ambos pares. □

Uma das razões da importância dos números reais é a sua aplicabilidade na "vida real", nomeadamente como instrumento para traduzir a medida de vários tipos de grandezas, como a massa, o comprimento ou a área. Em cada um dos casos, fixada uma unidade base para a grandeza em questão, é intuitivamente facil compreender o que é uma grandeza com uma medida racional positiva: Por exemplo, uma grandeza cuja medida é $\frac{7}{5}$ é uma grandeza que se obter somando 7 grandezas de medida $\frac{1}{5}$, estas últimas sendo aquelas que somadas 5 vezes permitem obter a medida base que se fixou. A experiência mostrou, no entanto, que, pelo menos no caso do comprimento, a utilização única dos números racionais para medir era insuficiente, nomeadamente quando os geómetras gregos descobriram que a diagonal de um quadrado cujo lado fosse a unidade base de comprimento não podia ser medida por um número racional (o problema é, evidentemente, a irracionalidade de $\sqrt{2}$). Por esse motivo considera-se que os números reais são o contexto natural para se medir os diferentes tipos de grandeza e essa hipótese de trabalho tem-se revelado fecunda para a utilização da Matemática, em especial da Análise Matemática, na compreensão da realidade.

I.1.17 Tal como o estudante já está habituado a considerar, a possibilidade de utilizar os números reais para medir grandezas, neste caso o comprimento, permite estabelecer uma correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos de uma reta, onde se fixou uma origem, uma unidade de comprimento e um dos sentidos como positivo (um *eixo orientado*). Ao número real 0 fica a corresponder a origem fixada, a cada número real x maior que 0 fica a corresponder o ponto da reta para o lado positivo da origem que está a distância x desta e a cada número real x menor que 0 fica a corresponder o ponto da reta para o lado negativo da origem que está à distância $-x$ desta. Aos sentidos positivo e negativo costuma-se associar as palavras “direita” e “esquerda” respetivamente e, por uma questão de “bom senso”, procura-se naturalmente que, nos casos em que a estas palavras possa corresponder uma interpretação geométrica, a escolha do sentido positivo seja feita de forma a fazer coincidir as duas interpretações; é o que acontece quando a reta considerada é imaginada como estando parcialmente colocada horizontalmente numa página dum livro ou num quadro duma sala de aula, mas já não acontece, por exemplo quando esta é imaginada na posição vertical.



Repare-se que um número real é menor que outro se, e só se, o ponto correspondente ao primeiro estiver à esquerda do ponto correpondente ao segundo. Esta interpretação intuitiva dos números reais como identificando os pontos de uma reta faz com que frequentemente se use a palavra “ponto” no lugar de “número real” e se dê o nome de *reta real* ao conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.
Refira-se a propósito que, a partir da correspondência entre números reais e pontos de um eixo orientado, é possível obter, pelo método que o estudante já conhece, uma correspondência biunívoca entre pares ordenados (x, y) de números reais e pontos de um plano, no qual se fixou um referencial (que, implicitamente, será sempre suposto ortonormado), dizendo-se então que x e y são respetivamente a *abcissa* e a *ordenada* do ponto correspondente.



As correspondências entre números reais e pontos de uma reta e entre pares ordemados de números reais e pontos de um plano, que acabamos de recordar, têm aplicação nos dois sentidos. Por um lado, permitem aplicar os números reais no estudo da geometria; é o que o estudante já

encontrou quando estudou geometria analítica, plana ou no espaço. Por outro, permite encontrar na geometria um auxiliar intuitivo de grande valor para as propriedades dos números reais ou, como estudaremos mais adiante, das funções reais de variável real. Relativamente a este último sentido, convirá sublinhar que temos apenas um auxiliar intuitivo e que qualquer resultado que nos pareça ser válido na base de uma interpretação geométrica terá sempre uma justificação alternativa baseada apenas nas propriedades dos números reais que descrevemos à partida: Se é verdade que a intuição geométrica é um valor essencial para a compreensão e a descoberta em Matemática, um raciocínio feito apenas na base desta conduz com frequência a afirmações incorretas.
A noção de valor absoluto de um número real, que examinamos a seguir é um exemplo de noção que tem uma interpretação geométrica importante.

I.1.18 O valor absoluto de um número real é por vezes descrito de forma informal como sendo "o número real sem o sinal". Uma forma mais precisa e por vezes mais manejável de o definir é dizer que o *valor absoluto* ou *módulo* de x, notado $|x|$, é o maior dos dois números reais x e $-x$:

$$|x| = \max\{x, -x\},$$

tendo-se assim $|x| = x$ se $x \geq 0$ e $|x| = -x$ se $x \leq 0$ (se $x = 0$ valem as duas caracterizações). Repare-se que resulta diretamente da definição apresentada que, se x é um número real, x e $-x$ têm o mesmo valor absoluto e tanto x como $-x$ são menores ou iguais a esse valor absoluto. Geometricamente, $|x|$ é a distância à origem do ponto da reta correspondente a x.

I.1.19 **(Propriedades do valor absoluto)** Se x e y são números reais, tem-se

$$|x \times y| = |x| \times |y|, \quad |\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|} \text{ (se } y \neq 0\text{)},$$
$$|x + y| \leq |x| + |y|, \quad |-x| = |x|.$$

Dem: Para obtermos a igualdade que envolve o módulo do produto, vamos examinar separadamente cada um dos casos possíveis:
Se $x \geq 0$ e $y \geq 0$, então $x \times y \geq 0$ e portanto

$$|x \times y| = x \times y = |x| \times |y|;$$

Se $x \geq 0$ e $y \leq 0$, então $x \times y \leq 0$ e portanto

$$|x \times y| = -(x \times y) = x \times (-y) = |x| \times |y|;$$

Se $x \leq 0$ e $y \geq 0$, então $x \times y \leq 0$ e portanto

$$|x \times y| = -(x \times y) = (-x) \times y = |x| \times |y|;$$

Se $x \leq 0$ e $y \leq 0$, então $x \times y \geq 0$ e portanto

$$|x \times y| = x \times y = (-x) \times (-y) = |x| \times |y|.$$

A propriedade envolvendo o valor absoluto do inverso resulta da que acabamos de justificar, uma vez que

$$|y| \times |\frac{x}{y}| = |y \times \frac{x}{y}| = |x|,$$

donde $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$. Do mesmo modo, podemos escrever

$$|-x| = |(-1) \times x| = |-1| \times |x| = 1 \times |x| = |x|.$$

Para justificar a propriedade do módulo da soma, em vez de tentar estudar, como para o produto, todos os casos possíveis, o que seria neste caso mais complicado, partimos duma ideia mais simples: Começamos por reparar que se tem em todos os casos $x \le |x|$ e $y \le |y|$ [29] e portanto

$$x + y \le |x| + |y|.$$

Do mesmo modo, de se ter $-x \le |x|$ e $-y \le |y|$, deduzimos que

$$-(x + y) = (-x) + (-y) \le |x| + |y|.$$

Uma vez que $|x + y|$ é igual a um dos dois números $x + y$ e $-(x + y)$, que são ambos menores ou iguais a $|x| + |y|$, podemos finalmente concluir que $|x + y| \le |x| + |y|$. □

I.1.20 **(Conjuntos limitados e o valor absoluto)** Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é limitado se, e só se, existe $M \ge 0$ tal que, para cada $x \in A$, $|x| \le M$.

Dem: Suponhamos que existe $M \ge 0$ tal que, para cada $x \in A$, $|x| \le M$. Em particular, para cada $x \in A$, $x \le |x| \le M$ e $-x \le |x| \le M$, portanto $x \ge -M$, o que mostra que A admite M como majorante e $-M$ como minorante, e portanto é limitado. Suponhamos, reciprocamente, que A é limitado, ou seja, que admite um minorante a e um majorante b. Consideremos o número $M \ge 0$, $M = \max\{|a|, |b|\}$. Para cada $x \in A$, vem, por um lado,

$$x \le b \le |b| \le M$$

e, por outro lado $x \ge a$, donde

$$-x \le -a \le |a| \le M;$$

Uma vez que $|x|$ é igual a um dos dois números x e $-x$, concluímos que $|x| \le M$. □

O valor absoluto intervém na definição de um conceito que é sugerido pela interpretação geométrica dos números reais como pontos de uma reta. Repare-se, com efeito, que, se $x \ge y$, a distância dos pontos da reta

[29] Igualdade no caso em que o número é maior ou igual a 0 e desigualdade estrita caso contrário.

que correspondem a estes dois números reais é igual a $x - y$ e que, se $x \leq y$ ela é igual a $y - x = -(x - y)$, pelo que, em qualquer dos casos, ela pode ser caracterizada como sendo o módulo $|x - y|$. Estas considerações geométricas, justificam que se apresente a seguinte definição.

I.1.21 Dados números reais x e y, define-se a sua *distância* $d(x, y)$ pela igualdade

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Esta noção de distância verifica as seguintes propriedades que nós associamos intuitivamente à ideia de distância[30]:

1) Dados $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se $d(x, y) = 0$ se, e só se, $x = y$.

2) (Simetria) Dados $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se $d(x, y) = d(y, x)$.

3) (Desigualdade triangular[31]) Dados $x, y, z \in \mathbb{R}$, tem-se

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Dem: A propriedade 1) é uma consequência direta de se ter $|z| = 0$ se, e só se, $z = 0$ e a propriedade 2) resulta de se ter $|-z| = |z|$. Quanto à desigualdade triangular, reparamos que se pode escrever $x - z = (x - y) + (y - z)$, e portanto

$$\begin{aligned} d(x, z) = |x - z| = |(x - y) + (y - z)| \leq \\ \leq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$ □

I.1.22 **(A distância entre dois valores absolutos)** Dados dois números reais x e y, tem-se

$$d(|x|, |y|) \leq d(x, y).$$

Dem: Podemos escrever

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|,$$

donde

$$|x| - |y| \leq |x - y| = d(x, y).$$

---

[30]Apesar disso, temos que justificar essas propriedades, uma vez que não é o nome que atribuímos a uma noção que definimos que faz com que essa noção tenha que obedecer às propriedades que associamos ao nome.

[31]A justificação deste nome tem a ver com o que acontece quando consideramos a noção usual de distância entre pontos dum plano: Quando x, y e z designam pontos do plano a desigualdade $d(x, z) < d(x, y) + d(y, z)$, válida quando eles não forem colineares, corresponde a propriedade usual que relaciona as medidas dos três lados dum triângulo, sendo fácil reparar que, quando eles forem colineares, tanto pode ser verdadeira esta desigualdade como a igualdade entre os dois membros.

Por simetria dos papéis de x e y, tem-se também

$$|y| - |x| \leq d(y,x) = d(x,y).$$

Uma vez que $d(|x|,|y|) = ||x| - |y||$ é um dos dois números $|x| - |y|$ e $|y| - |x|$, que vimos serem ambos menores ou iguais a $d(x,y)$, concluímos que $d(|x|,|y|) \leq d(x,y)$. □

A noção de distância é especialmente importante para entender intuitivamente a noção de proximidade, esta última sendo de grande importância em Análise Matemática, por exemplo na definição de limite e, em particular, na de continuidade.

I.1.23 Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$. Para cada $x \in \mathbb{R}$ têm-se então as seguintes equivalências:

$$d(x,a) = |x - a| \leq \delta \Leftrightarrow x \in [a - \delta, a + \delta],$$
$$d(x,a) = |x - a| < \delta \Leftrightarrow x \in]a - \delta, a + \delta[.$$

Define-se a *vizinhança-δ* de a como sendo o intervalo

$$V_\delta(a) =]a - \delta, a + \delta[$$

dos números reais que estão a uma distância menor que δ de a.

Dem: Uma vez que $|x - a|$ é o maior dos dois números $x - a$ e $-(x - a) = a - x$, dizer que se tem $|x - a| \leq \delta$ é equivalente a dizer que se tem simultaneamente $x - a \leq \delta$ e $a - x \leq \delta$ ou seja $x \leq a + \delta$ e $x \geq a - \delta$, por outras palavras, $x \in [a - \delta, a + \delta]$. A justificação da segunda equivalência é inteiramente análoga. □

As equivalências que acabamos de estabelecer são muitas vezes utilizadas na representação na forma de intervalo, ou de união de intervalos, das soluções de certas inequações que envolvem valores absolutos. Por exemplo, o conjunto das soluções de $|x + 4| \leq 2$ é o intervalo

$$[-6, -2] = [-4 - 2, -4 + 2]$$

e o conjunto das soluções de $|x - 1| \geq 3$ é o complementar do intervalo $]-2, 4[=]1 - 3, 1 + 3[$, portanto a união de intervalos

$$]-\infty, -2] \cup [4, +\infty[.$$

Exercícios

★ Ex I.1.1 Apesar de não nos propormos demonstrar (nem sequer enunciar) todas as propriedades algébricas que decorrem de os números reais constituirem um corpo (isto é, verificarem as propriedades básicas referidas nas alíneas a) a c) de I.1.1) pode ser útil, do ponto de vista do treino da capacidade de desenvolver raciocínios simples, justificar uma ou outra.
a) Utilizar as propriedades básicas dos corpos para mostrar que, dados números reais x e y, tem-se $x \times y = 0$ se, e só se, $x = 0$ ou $y = 0$ (*lei de anulamento do produto*).
b) Deduzir de a) a *lei do corte*: Se $x \neq 0$ e $x \times y = x \times z$, então $y = z$.
c) Já aconteceu um estudante mais distraído "generalizar" a lei do anulamento do produto afirmando que "dados números reais x e y, tem-se $x \times y = 1$ se, e só se, $x = 1$ ou $y = 1$". Como explicaria a esse seu colega que afirmação feita não é correta?

Ex I.1.2 Verificámos em I.1.4 que, se $x < y$ e z é a média aritmética de x e y associada aos pesos s e t, então $x < z < y$. Justificar a seguinte propriedade recíproca: Se x, y e z são números reais com $x < z < y$, então existem pesos $s > 0$ e $t > 0$, com $s + t = 1$ tais que $z = s\,x + t\,y$ (por outras palavras, todos os números entre x e y são médias pesadas de x e y com pesos convenientes).

Ex I.1.3 Lembrando o que foi referido em I.1.4 sobre as médias aritméticas, justificar que, dados dois números racionais $a < b$, o intervalo $]a, b[$ inclui uma infinidade de números racionais. **Sugestão:** Raciocinar por absurdo: Se houvesse apenas um número finito de racionais, e uma vez que existe pelo menos um, poderíamos chamar c ao maior deles. O que aconteceria então à média de c e b?

Ex I.1.4 Parece intuitivo que, se a é um minorante de um conjunto A e b um majorante desse conjunto, então $a \leq b$. Provar que isso é efetivamente verdade no caso em que A não é vazio. No caso em que $A = \emptyset$, encontrar um contraexemplo que mostra que a afirmação não é correta (lembrar o que foi dito na alínea e) de I.1.7.

★ Ex I.1.5 Mostrar que, se $a < b$ são dois números reais, então o intervalo aberto $]a, b[$ tem supremo b e ínfimo a.

Ex I.1.6 Determinar, caso existam, o supremo e o ínfimo de cada um dos seguintes conjuntos referindo, em cada caso, se os valores determinados são ou não máximos e mínimos, respetivamente.
a) O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais.
b) O conjunto $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos inversos dos números naturais.

c) O conjunto A dos números que se podem escrever na forma $(-1)^n \times \frac{1}{n}$, com n número natural.

Ex I.1.7 Sejam A e B dois conjuntos de números reais tais que $A \subset B$.
a) Reparar que todo o majorante de B é também um majorante de A e deduzir daqui que, se os supremos existirem, tem-se $\sup(A) \leq \sup(B)$.
b) Reparar que todo o minorante de B é também um minorante de A e deduzir daqui que, se os ínfimos existirem, tem-se $\inf(A) \geq \inf(B)$.

★ Ex I.1.8 Sejam A e B dois conjuntos de números reais.
a) Mostrar que, se A e B admitem supremos, então a união $A \cup B$ admite como supremo o maior dos dois números $\sup(A)$ e $\sup(B)$.
b) Mostrar que, se A e B admitem ínfimos, então a união $A \cup B$ admite como ínfimo o menor dos dois números $\inf(A)$ e $\inf(B)$.

★ Ex I.1.9 Se A é um conjunto de números reais, notaremos $-A$ o conjunto cujos elementos são exatamente os da forma $-x$, com $x \in A$.
a) Verificar que b é majorante de um conjunto A se, e só se, $-b$ é um minorante do conjunto $-A$.
b) Deduzir de a) que, b é supremo de um conjunto A se, e só se, $-b$ é ínfimo do conjunto $-A$.
c) Verificar que as conclusões de a) e b) permitem dar uma justificação alternativa da propriedade dual da que define a completude, referida em I.1.10.

Ex I.1.10 **(O corpo ordenado $\mathbb{Q}$ não é completo)** Seja $A \subset \mathbb{Q}$ o conjunto de todos os números racionais menores que $\sqrt{2}$. Mostrar que, apesar de A admitir um majorante racional e não ser vazio, o conjunto dos majorantes racionais de A não tem mínimo, por outras palavras, no contexto dos números racionais, não existe supremo para A (embora, no contexto dos números reais, A tenha $\sqrt{2}$ como supremo). **Sugestão:** Lembrar a propriedade de densidade dos números racionais em I.1.14.

★ Ex I.1.11 Sejam a, b, c, d números racionais tais que $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$. Mostrar que se tem necessariamente $a = c$ e $b = d$.

★ Ex I.1.12 **(No mesmo espírito que I.1.16)** **a)** Sejam n um número natural, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números inteiros (positivos ou não) e x um número racional tal que

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0.$$

Mostrar que x tem que ser um número inteiro. **Sugestão:** Se x não fosse inteiro, podia escrever-se $x = \frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 1$ e p e q primos entre si. Atender então a que p^n e q também são primos entre si e chegar a um absurdo, substituindo x por $\frac{p}{q}$ na igualdade acima, multiplicando ambos os membros por q^n e concluindo, a partir daí, que p^n seria múltiplo de q.
b) Verificar que a conclusão de I.1.16 é uma consequência imediata do

resultado referido em a), tal como o é o facto mais geral de, para cada $n \in \mathbb{N}$ que não seja um *quadrado perfeito* (isto é, o quadrado de um número natural), o número $\sqrt{n}$ ser irracional.

c) Verificar que, por exemplo, $\sqrt{\frac{3}{5}}$ é um número irracional e enunciar e justificar um resultado geral, sobre irracionalidade das raizes quadradas de números racionais positivos dados na forma de fração irredutível, que tenha este como caso particular. **Sugestão:** Ter em conta o facto de $\sqrt{15}$ ser irracional.

Ex I.1.13 Lembrar que as operações usuais quando aplicadas a números racionais dão resultados racionais. Deduzir daqui que:
a) Se x é irracional, então $-x$ e x^{-1} são também irracionais.
b) Se a é racional e x é irracional, então $a + x$ é irracional e, no caso em que $a \neq 0$, ax é irracional.
Mostrar ainda, com o auxílio de exemplos convenientes, que
c) Se x e y são irracionais, tanto pode acontecer que $x + y$ seja racional como que $x + y$ seja irracional.
d) Se x e y são irracionais, tanto pode acontecer que xy seja racional como que xy seja irracional.
Encontrar ainda um exemplo em que:
e) Os números reais x e y são irracionais e $x + y$ e xy são ambos racionais.

Ex I.1.14 **(Densidade dos números irracionais)** Lembrar a propriedade de densidade dos números racionais: Dados números reais $x > y$, existe sempre um número racional z entre x e y. Utilizar esta propriedade para justificar a correspondente propriedade de densidade dos números irracionais: Dados números reais $x > y$, existe sempre um número irracional z entre x e y. **Sugestão:** Começar por considerar um número racional entre $x + \sqrt{2}$ e $y + \sqrt{2}$.

★ Ex I.1.15 Lembrando que, como se viu na alínea b) do exercício I.1.12, $\sqrt{5}$ e $\sqrt{8}$ são ambos irracionais, mostrar que $\sqrt{8} + \sqrt{5}$ também é irracional.
Sugestão: Reparar que não se pode garantir, em geral, que a soma de números irracionais tenha que ser irracional. Neste caso, considerar o produto de $\sqrt{8} + \sqrt{5}$ por $\sqrt{8} - \sqrt{5}$ para deduzir que, se o primeiro fosse racional, o mesmo sucedia com o segundo, deduzindo daí que $\sqrt{8}$ seria racional, o que sabemos não acontecer.

Ex I.1.16 Seja a um número real maior ou igual a 0. Dado $x \in \mathbb{R}$ justificar as equivalências

$$x^2 \leq a \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{a},$$
$$x^2 < a \Leftrightarrow |x| < \sqrt{a}.$$

Ex I.1.17 Exprimir cada um dos seguintes conjuntos como intervalo ou como união de intervalos:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid |2x+1| \leq 1\}$;
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x-5| < |x+1|\}$;
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x^2-2| \leq 1\}$;
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid (2x+3)^6(x-2) \geq 0\}$.
★ **e)** $\{x \in \mathbb{R} \mid |x-2|+|x+3| < 8\}$.

Ex I.1.18 **a)** Mostrar que, dados números reais a e b, o seu produto é sempre menor ou igual que a média aritmética dos seus quadrados:

$$ab \leq \frac{a^2+b^2}{2},$$

e descobrir quais os números reais para os quais é válida a igualdade entre os dois membros. **Sugestão:** Reparar que $(a-b)^2 \geq 0$ e considerar o desenvolvimento do quadrado no primeiro membro.

b) Deduzir de a) que, quaisquer que sejam os números reais x, y, α, com $\alpha > 0$, tem-se

$$xy \leq \frac{1}{\alpha}\,x^2 + \frac{\alpha}{4}\,y^2$$

e reparar que a desigualdade em a) correponde ao caso particular em que $\alpha = 2$.

c) Deduzir de a) que, dados números reais $c \geq 0$ e $d \geq 0$, tem-se sempre

$$\sqrt{cd} \leq \frac{c+d}{2},$$

descobrindo também quais os números reais para os quais é válida a igualdade entre os dois membros. **Nota:** Costuma-se chamar a $\sqrt{cd}$ a *média geométrica* dos números c e d pelo que o que concluímos nesta alínea foi uma desiguladade envolvendo as médias geométrica e aritmética de dois números maiores ou iguais a 0.

d) Deduzir de a) que, sempre que $x^2+y^2 \leq 1$, tem-se $|x+y| \leq \sqrt{2}$.

§2. O método de indução matemática e aplicações.

I.2.1 O *método de indução matemática*, ou simplesmente *método de indução*, que alguns estudantes já estudaram no ensino secundário, não sendo um método específico da Análise Matemática, tem muitas aplicações no estudo desta. Trata-se de um método para mostrar que uma afirmação que depende de um número natural arbitrário n é válida para todos os valores de n. O método consiste em dois passos:

Passo 1: Verifica-se que a afirmação que se obtém quando se dá a n o valor

1 é verdadeira.
Passo 2: Verifica-se que sempre que a afirmação fica verdadeira quando se substitui n por um certo número natural, ela fica também verdadeira quando se faz a substituição de n pelo número natural seguinte. Na prática, para efetuar este passo, o que se faz é supor que a afirmação é verdadeira quando se substitui n por um certo natural p (*hipótese de indução*[32]) e demonstrar, usando essa hipótese, que a afirmação é verdadeira quando se substitui n pelo natural $p+1$.
Uma vez efetuados estes dois passos, conclui-se que a afirmação é válida para todos os valores de n.

É fácil compreender a razão por que o método de indução se pode aplicar. Com efeito, pelo passo 1, sabemos que a afirmação é válida para $n=1$. Mas então. pelo passo 2, a afirmação é válida para $n=2$, por ser válida para $n=1$. Seguidamente, de novo pelo passo 2, ela é válida para $n=3$, uma vez que já sabemos que ela é válida para $n=2$. Prosseguindo deste modo, constatamos que podemos chegar a provar a validade da afirmação para qualquer valor particular de n que nos seja dado o que, evitando questões ligadas aos Fundamentos da Matemática que, embora importantes, não parece oportuno estudar neste momento, é essencialmente o mesmo que afirmar a validade da afirmação para todos os valores de n.
Note-se que não pretendemos ter "demonstrado" a validade do método de indução matemática, apenas tentámos ajudar a compreender o que se está a passar quando o aplicamos (daí termos feito estas observações utilizando um "envergonhado" tipo de letra mais pequeno). Com efeito, voltámos a utilizar o não muito satisfatório "Prosseguindo deste modo…"[33] que já apareceu, por exemplo quando em I.1.6, tentámos justificar o facto de todo o conjunto finito e não vazio ter máximo e mínimo. Aliás, uma das vantagens do método de indução matemática (não a única) é permitir dispensar este tipo de raciocínios menos satisfatórios. Examinamos a seguir, a título de exemplo, uma justificação mais concisa do facto que acabámos de referir.

I.2.2 **(De novo a existência de máximo e mínimo para os conjuntos finitos não vazios)** A existência de máximo e mínimo para os conjuntos finitos não vazios, referida em I.1.6, pode ser enunciada do seguinte modo, especialmente adaptado à aplicação do método de indução: Se n é um número natural, então todo o conjunto A com n elementos tem máximo e mínimo. Provemos então esta afirmação por indução, reparando que a ideia é

[32]Quem não compreendeu ainda bem a estutura do método de indução fica por vezes chocado com esta hipótese de indução uma vez que a hipótese que se está a fazer parece-se singularmente com aquilo que se quer demonstrar. No entanto não é isso que se passa: O que se quer demonstrar é a validade da afirmação para todos os valores de n e a hipótese de indução é que ela é válida para um valor particular de n.
[33]Um raciocínio lógico deve consistir num número determinado de passos e a frase entre aspas aponta para um raciocínio que não é deste tipo.

a mesma que foi utilizada em I.1.6, embora o argumento fique mais conciso.
Dem: Como anteriormente vamos examinar apenas a existência de máximo, uma vez que o caso do mínimo pode ser tratado com uma adaptação evidente. No caso em que $n = 1$, o resultado é evidente, uma vez que o único elemento do conjunto A é automaticamente o máximo deste conjunto. Suponhamos (hipótese de indução) que p é um número natural tal que todos os conjuntos com p elementos tenham máximo. Provemos então que, se A é um conjunto com $p + 1$ elementos, então A tem máximo, o que terminará a demonstração por indução. Ora, podemos escolher um elemento $a \in A$ e considerar então o conjunto $A \setminus \{a\}$, que se obtém retirando de A o elemento escolhido, conjunto esse que tem p elementos. Pela hipótese de indução, o conjunto $A \setminus \{a\}$ tem um máximo b. Se $b > a$, então b é um elemento de A maior que todos os outros, portanto o máximo de A. Se $b < a$, então a é um elemento de A maior que todos os outros, portanto o máximo de A. Em qualquer caso, o conjunto A tem máximo. □

I.2.3 **(De novo o facto de todos os números naturais serem positivos)** Em I.1.3, depois de termos referido que $1 > 0$ e de sabermos que a soma de dois números maiores que 0 é maior que 0, concluímos que qualquer número natural é maior que 0, por ser soma de um número finito de parcelas iguais a 1. Este argumento, apesar de intuitivo, não era muito correto, uma vez que apenas tínhamos examinado o que se passava com a soma de dois números positivos e aqui tínhamos uma soma de mais parcelas. Mais uma vez o método de indução matemática permite dar uma justificação alternativa mais convincente e concisa.
Dem: Vamos provar, por indução que, para cada número natural n, tem-se $n > 0$. Em primeiro lugar, para $n = 1$ temos a afirmação $1 > 0$, que vimos ser verdadeira. Suponhamos (hipótese de indução) que, para um certo número natural p, tem-se $p > 0$. De se ter $p > 0$ e $1 > 0$ podemos então deduzir que $p + 1 > 0 + 0 = 0$, e portanto a afirmação é também verdadeira para $n = p + 1$. □

Apresentamos a seguida mais um exemplo de como o método de indução pode ser utilizado para demonstrar a validade uma fórmula que o estudante já encontrou anteriormente. O resultado correspondente para as progressões aritméticas será proposto como exercício no fim da secção (exercício I.2.1).

I.2.4 **(Soma de n termos de uma progressão geométrica)** Lembremos que uma *progressão geométrica* de *razão* r com n termos é uma sequência de n números tal que cada um, a partir do segundo, se obtenha a partir do anterior multiplicando-o pela razão r. Sendo a o primeiro termo da progressão geométrica, os termos desta progressão são assim

$$a\,,\; ar\,,\; ar^2\,,\ldots,\; ar^{n-1}.$$

Vamos justificar por indução a fórmula, que o estudante já encontrou, para a soma dos termos de uma tal progressão, válida apenas no caso em que $r \neq 1$:

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

Dem: Para $n = 1$ obtemos a igualdade $a = \frac{a(1-r)}{1-r}$, que é claramente verdadeira.[34] Suponhamos que a igualdade é verdadeira quando n toma um certo valor particular p, isto é, que

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{p-1} = \frac{a(1-r^p)}{1-r}.$$

Examinando então o caso em que $n = p + 1$, verificamos que

$$\begin{aligned} a + ar + ar^2 + \cdots + ar^p &= (a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{p-1}) + ar^p = \\ &= \frac{a(1-r^p)}{1-r} + \frac{ar^p(1-r)}{1-r} = \frac{a - ar^p + ar^p + ar^{p+1}}{1-r} = \\ &= \frac{a(1-r^{p+1})}{1-r}, \end{aligned}$$

o que mostra que a igualdade é também verdadeira para $n = p + 1$. □

É talvez oportuno fazer a observação de que o método de indução é um método de demonstração e não um método de descoberta. Basta, por exemplo, reparar no que aconteceria se não conhecêssemos a fórmula que acabámos de justificar e alguém nos propusesse: "Tente encontrar por indução uma fórmula para a soma dos termos de uma progressão geométrica"… Na prática o que se costuma passar é que se chega a uma *conjetura* (afirmação que não se tem a certeza que seja verdadeira) utilizando experiências ou raciocínios de validade duvidosa e posteriormente tenta-se provar que a conjetura é verdadeira utilizado o método de indução. Apresentamos a seguir mais um exemplo de aplicação do método de indução, para justificar uma desigualdade que será aplicada mais que uma vez mais adiante.

I.2.5 **(Desigualdade de Bernouilli)** Sejam n um número natural e x um número real tal que $x \geq -1$.[35] Tem-se então

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Dem: Para $n = 1$, a desigualdade toma a forma $1 + x \geq 1 + x$, que é verdadeira como igualdade. Suponhamos agora (hipótese de indução) que a

[34] Para $n = 0$ a fórmula também é válida se interpretarmos uma soma de zero parcelas como sendo 0.

[35] O número real pode assim ser estritamente positivo, nulo ou estritamente negativo, mas, neste último caso, sem "descer" abaixo de -1.

desigualdade é verdadeira quando n toma um valor particular p natural, isto é, que se tem

$$(1+x)^p \geq 1+px.$$

Podemos então escrever, reparando que $1+x \geq 0$ por ser $x \geq -1$,

$$\begin{aligned}(1+x)^{p+1} &= (1+x)^p \times (1+x) \geq (1+px) \times (1+x) = \\ &= 1+x+px+px^2 \geq 1+(p+1)x,\end{aligned}$$

em que, na última desigualdade, se atendeu ao facto de um quadrado de um número real ser sempre maior ou igual a 0. Concluímos assim que a desigualdade é também verdadeira quando n toma o valor $p+1$, o que termina a demonstração por indução. □

I.2.6 **(Variante do método de indução matemática)** O método de indução matemática, que estudámos nesta secção, é utilizado para justificar que certas afirmações que dependem de um número natural n são válidas para todos os valores naturais de n. Por vezes é cómodo utilizar uma pequena variante deste método em que o que se pretende é mostrar que, dado um inteiro n_0 (positivo ou não) uma propriedade é válida para todos os inteiros n tais que $n \geq n_0$. Para isso, como primeiro passo, mostra-se que a propriedade é válida quando n toma o valor n_0 e, como segundo passo, mostra-se que, sempre que a propriedade é válida quando n toma um certo valor $p \geq n_0$, então ela é também válida quando n toma o valor $p+1$. A diferença relativamente à formulação original é apenas que agora se "começa" em n_0 em vez de "começar" em 1. A justificação intuitiva desta variante é totalmente análoga à da formulação original (que corresponde, aliás ao caso $n_0 = 1$ da variante).

Apresentamos a seguir três exemplos de utilização desta variante do método de indução.

I.2.7 **(Desigualdade de Bernouilli estrita)** Sejam $n \geq 2$ um número natural e $x \neq 0$ um número real tal que $x \geq -1$. Tem-se então

$$(1+x)^n > 1+nx.$$

Dem: Para $n=2$, a desigualdade toma a forma $(1+x)^2 > 1+2x$ e resulta de se ter $(1+x)^2 = 1+2x+x^2$, onde $x^2 > 0$, por estarmos a supor $x \neq 0$. Suponhamos agora (hipótese de indução) que a desigualdade é verdadeira quando n toma um valor particular $p \geq 2$, isto é, que se tem

$$(1+x)^p > 1+px.$$

Podemos então escrever, reparando que $1+x \geq 0$ por ser $x \geq -1$,

$$\begin{aligned}(1+x)^{p+1} &= (1+x)^p \times (1+x) \geq (1+px) \times (1+x) = \\ &= 1+x+px+px^2 > 1+(p+1)x,\end{aligned}$$

em que, na última desigualdade, se atendeu ao facto de um quadrado de um número real $x \neq 0$ ser sempre maior que 0. Concluímos assim que a desigualdade é também verdadeira quando n toma o valor $p+1$, o que termina a demonstração por indução. □

I.2.8 Lembremos que o *fatorial* $n!$ de um número natural n é o produto de todos os números naturais desde 1 até n, tendo-se, em particular, $1! = 1$ e fazendo-se também a convenção $0! = 1$. Vamos mostrar que, para cada inteiro $n \geq 3$, é válida a desigualdade

$$\frac{3^n}{n!} \leq \frac{9}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}. \tag{1}$$

Dem: Como primeiro passo, reparamos que, para $n = 3$, tem-se

$$\frac{3^3}{3!} = \frac{3 \times 3 \times 3}{1 \times 2 \times 3} = \frac{9}{2} = \frac{9}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{3-3}$$

pelo que a desigualdade é válida, como igualdade. Suponhamos agora que a desigualdade enunciada é válida quando se substitui n por um certo $p \geq 3$. Podemos então escrever

$$\frac{3^{p+1}}{(p+1)!} = \frac{3^p}{p!} \times \frac{3}{p+1} \leq \frac{9}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{p-3} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{(p+1)-3},$$

o que mostra que a desigualdade é também válida quando se substitui n por $p+1$. Ficou assim demonstrado por indução que a desigualdade é verdadeira para todo o $n \geq 4$. □

I.2.9 A propriedade envolvendo o módulo do produto e da soma de dois números reais referida em I.1.19, pode ser estendida para o caso em que temos $n \geq 2$ números $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{aligned}|x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n| &= |x_1| \times |x_2| \times \cdots \times |x_n|,\\ |x_1 + x_2 + \cdots + x_n| &\leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.\end{aligned}$$

Dem: O caso em que $n = 2$ é a propriedade referida. Supondo a propriedade verdadeira no caso em que $n = p \geq 2$, vemos que, no caso em que $n = p+1$,

$$\begin{aligned}|x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_{p+1}| &= |x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_p| \times |x_{p+1}| = \\ &= |x_1| \times |x_2| \times \cdots \times |x_p| \times |x_{p+1}|,\\ |x_1 + x_2 + \cdots + x_{p+1}| &\leq |x_1 + x_2 + \cdots + x_p| + |x_{p+1}| \leq \\ &\leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_p| + |x_{p+1}|.\end{aligned}$$

□

Exercícios

Ex I.2.1 **(Soma de n termos de uma progressão aritmética)** Lembremos que uma *progressão aritmética* de *razão* r com n termos é uma sequência de n números tal que cada um, a partir do segundo, se obtenha a partir do anterior somando-lhe a razão r. Sendo a o primeiro termo da progressão aritmética, os termos desta progressão são assim

$$a\,,\, a+r\,,\, a+2r\,,\dots,\, a+(n-1)r.$$

Mostrar por indução a seguinte fórmula para a soma dos termos de uma tal progressão:

$$a+(a+r)+(a+2r)+\cdots+(a+(n-1)r)=na+\frac{n(n-1)}{2}r.$$ [36]

★ Ex I.2.2 Recordámos em I.1.2 a noção de potência de expoente natural assim como as propriedades básicas das potências. Demonstrar por indução cada uma das três primeiras propriedades enunciadas, verificando, em particular, onde intervieram as propriedades associativa e comutativa da multiplicação, e aproveitar para provar, a partir destas, as outras duas propriedades que foram enunciadas a seguir (esta última parte já não utiliza o método de indução). **Sugestão:** Nas propriedades em que intervêm dois naturais m e n, considerar m fixado e aplicar o método de indução à variável n.

Ex I.2.3 Mostrar que, para cada número natural n,

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}.$$

Ex I.2.4 Mostrar que, se $n\geq 0$ é inteiro, então $2^n\geq n+1$.

Ex I.2.5 Mostrar que, se $x\geq 0$ e n é um número natural, então

$$(1+x)^n\geq 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2.$$

[36] Reparar que a expressão no segundo membro é igual à soma do primeiro com o último termo, multiplicada por metade do número de termos. A caracterização da soma deste último modo é atribuída a Gauss que, com 7 anos de idade, a teria utilizado na escola para calcular a soma dos números naturais de 1 a 100.

Ex I.2.6 Mostrar que, para cada número natural n,

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \le 2 - \frac{1}{n}$$

e deduzir que se tem também

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \le 2.$$

Será que se consegue demonstrar diretamente, por indução, esta última desigualdade?

★ Ex I.2.7 **(Binómio de Newton)** Sendo x e y números reais, demonstrar por indução que, para cada natural n,

$$(x+y)^n = {}^nC_0\, x^n y^0 + {}^nC_1\, x^{n-1} y^1 + {}^nC_2\, x^{n-2} y^2 + \cdots + {}^nC_{n-2}\, x^2 y^{n-2} + \\ + {}^nC_{n-1}\, x^1 y^{n-1} + {}^nC_n\, x^0 y^n,$$

onde ${}^nC_p$ denota o número de combinações de n elementos tomados p a p,

$${}^nC_p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

§3. Os reais estendidos. Ordenação e noções topológicas.

O estudante já encontrou no ensino secundário, embora de forma superficial, a noção de limite de uma função num ponto e terá possivelmente reparado que, de facto, essa noção engloba uma enumeração de nove casos diferentes, conforme o limite seja um número real, $+\infty$ ou $-\infty$ e conforme o ponto relativamente ao qual se considera o limite seja um número real, $+\infty$ ou $-\infty$. Para evitarmos perder tempo a examinar separadamente todos esses casos e para descobrirmos o que há de comum a todos eles, convirá considerar um conjunto que contenha, além dos números reais, mais dois elementos designados por $+\infty$ e $-\infty$ e examinar quais as noções que estamos habituados a considerar no contexto dos números reais que podem ser tratadas de modo análogo neste contexto mais estendido.

I.3.1 Vamos notar $\overline{\mathbb{R}}$ um conjunto cujos elementos são os números reais e mais dois, que notamos $+\infty$ e $-\infty$ e chamamos respetivamente *mais infinito* e *menos infinito*. Aos elementos de $\overline{\mathbb{R}}$ chamamos *números reais estendidos* e a $\overline{\mathbb{R}}$ é frequente dar o nome de *reta estendida*. A relação de ordem $>$ pode ser naturalmente prolongada ao contexto dos números reais estendidos pondo, por definição $+\infty > -\infty$ e, para cada número real x, $+\infty > x$ e $x > -\infty$ como únicas relações envolvendo os infinitos. É muito fácil constatar que as propriedades transitiva e tricotómica (cf. I.1.3) continuam a ser válidas no contexto dos números reis estendidos. Tendo em conta a validade destas propriedades, faz todo o sentido adaptar trivialmente ao contexto de $\overline{\mathbb{R}}$ os conceitos ligados à ordenação que examinámos em I.1.6, I.1.7 e I.1.8 no contexto de $\mathbb{R}$, nomeadamente:

a) Os conceitos de máximo e de mínimo para um conjunto $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, máximos e mínimos que podem em cada caso existir ou não mas, quando existirem, são únicos. É claro que, quando $A \subset \mathbb{R}$, tem-se também $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ e ser máximo ou mínimo de A no contexto de $\mathbb{R}$ é exatamente o mesmo que ser máximo ou mínimo de A no contexto de $\overline{\mathbb{R}}$. Repare-se que o conjunto total $\overline{\mathbb{R}}$ tem $+\infty$ como máximo e $-\infty$ como mínimo.

b) Os conceitos de majorante e de minorante de um conjunto. É claro que, para um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ e um número real a, dizer que a é um majorante ou um minorante de A no contexto de $\overline{\mathbb{R}}$ é o mesmo que dizer que o é no contexto de $\mathbb{R}$. Como no contexto dos números reais, todo o real estendido maior que um majorante de A é também majorante de A e todo o real estendido menor que um minorante de A é ainda minorante de A. Note-se que, apesar de fazerem sentido, as noções de conjunto majorado e de conjunto minorado no contexto de $\overline{\mathbb{R}}$ são totalmente inúteis já que, para qualquer conjunto $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, $+\infty$ é um majorante de A e $-\infty$ é um minorante de A, em particular A é majorado e minorado no contexto de $\overline{\mathbb{R}}$. Por este motivo, quando nos referirmos a um conjunto como sendo majorado, minorado ou limitado, esse conjunto estará sempre contido em $\mathbb{R}$ e será no contexto de $\mathbb{R}$ que essa referência será implicitamente considerada.

c) Os conceitos de supremo e de ínfimo de um conjunto $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ continuam a fazer sentido, sendo, como antes, respetivamente o menor dos majorantes e o maior dos minorantes. Relativamente a estes conceitos poderíamos ser levados a pensar na necessidade de sermos mais cuidadosos, no caso dos subconjuntos de $\mathbb{R}$, quanto às relações com a correspondentes noções no contexto de $\mathbb{R}$, já que, no contexto de $\overline{\mathbb{R}}$, temos o elemento $+\infty$ como novo majorante e o elemento $-\infty$ como novo minorante. Vamos ver imediatamente a seguir que, não só não aparece nenhuma confusão, como se constata que o contexto de $\overline{\mathbb{R}}$ torna a situação muito mais simples de descrever.

I.3.2 **(O supremo e o ínfimo no contexto de $\overline{\mathbb{R}}$)** Lembremos que, no contexto de $\mathbb{R}$, os conjuntos que têm supremo são aqueles que são majorados e não vazios e os que têm ínfimo são aqueles que são minorados e não vazios. Vamos verificar que, quando nos colocamos no contexto de $\overline{\mathbb{R}}$, não há necessidade de admitir exceções e **todos** os subconjuntos de $\overline{\mathbb{R}}$ vão ter supremo e ínfimo, que poderão naturalmente ser infinitos.

a) Comecemos por examinar o caso do conjunto vazio $\emptyset$. Analogamente ao que referimos em I.1.9, todos os reais estendidos vão ser majorantes do conjunto vazio, mas agora já é possível considerar o menor dos majorantes que é $-\infty$. Podemos assim dizer que **o supremo do conjunto vazio é $-\infty$**. Do mesmo modo se verifica que **o ínfimo do conjunto vazio é $+\infty$**, já que todos os reais estendidos são minorantes do conjunto vazio, e portanto o maior deles é $+\infty$.[37]

b) Se $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ é um conjunto que não admita nenhum majorante finito (em particular, se $A \subset \mathbb{R}$ é um conjunto não majorado), então $+\infty$ é o único majorante de A e portanto o seu supremo. Do mesmo modo, se $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ é um conjunto que não admita nenhum minorante real (em particular, se $A \subset \mathbb{R}$ é um conjunto não minorado), então $-\infty$ é o único minorante de A e portanto o seu ínfimo.

c) Suponhamos agora que $A \subset \mathbb{R}$ é um conjunto majorado e não vazio, portanto que A admite um supremo, notado $\sup(A)$ no contexto dos números reais estendidos. Uma vez que os majorantes de A no contexto de $\overline{\mathbb{R}}$ são os majorantes de A no contexto de $\mathbb{R}$ e mais o $+\infty$, concluímos que $\sup(A)$ é também o menor dos majorantes de A no contexto de $\overline{\mathbb{R}}$, ou seja $\sup(A)$ é também supremo de A no contexto de $\overline{\mathbb{R}}$. Analogamente, se $A \subset \mathbb{R}$ é minorado e não vazio, o ínfimo $\inf(A)$ de A no contexto de $\mathbb{R}$ é também ínfimo de A no contexto de $\overline{\mathbb{R}}$.

d) Relativamente ao supremo, os únicos conjuntos A contidos em $\overline{\mathbb{R}}$ para os quais ainda não verificámos a sua existência são aqueles que, admitindo um majorante finito, não estão contidos em $\mathbb{R}$, em particular contêm $-\infty$ mas não contêm $+\infty$. Ora, para um tal conjunto A, podemos considerar o conjunto $A \setminus \{-\infty\}$, que se obtém retirando-lhe o $-\infty$, que já está contido em $\mathbb{R}$ e majorado. Uma vez que A e $A \setminus \{-\infty\}$ têm claramente os mesmos majorantes, vemos que o supremo de $A \setminus \{-\infty\}$ no contexto de $\overline{\mathbb{R}}$, que já sabemos existir, é também supremo de A. Analogamente, para um conjunto $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ que não está contido em $\mathbb{R}$ mas admite um minorante finito, em particular contém $+\infty$ mas não contém $-\infty$, o conjunto A também tem ínfimo, no contexto de $\overline{\mathbb{R}}$, o qual coincide com o ínfimo de $A \setminus \{+\infty\}$.

Tendo em conta o que referimos anteriormente, todos os subconjuntos A de $\overline{\mathbb{R}}$ admitem um supremo e um ínfimo, que tal como referimos em I.1.8, serão notados $\sup(A)$ e $\inf(A)$ respetivamente. Repare-se que não há lugar a confusão ligada à utilização da mesma notação nos dois contextos uma vez que, como foi referido, quando o supremo ou o ínfimo existem no contexto de $\mathbb{R}$, eles coincidem com o supremo e o ínfimo no contexto de $\overline{\mathbb{R}}$.

---

[37] Á primeira vista pode parecer um pouco chocante que o ínfimo do conjunto vazio seja maior que o respetivo supremo, quando a nossa intuição nos aponta para o supremo dum conjunto A ser necessariamente maior ou igual ao seu ínfimo. No entanto, se pensarmos um pouco, realizamos que o único modo que temos para justificar este último facto passa por fixar um elemento a em A e reparar que esse elemento tem que ser maior ou igual ao ínfimo e menor ou igual ao supremo. Este raciocínio não é evidentemente possível no caso do conjunto vazio.

I.3.3 Sejam $A \subset B \subset \overline{\mathbb{R}}$. Tem-se então:

$$\sup(A) \leq \sup(B), \quad \inf(A) \geq \inf(B).$$

Dem: Como $\sup(B)$ é um majorante de B, $\sup(B)$ é também um majorante de A. Tem-se assim $\sup(A) \leq \sup(B)$, por $\sup(A)$ ser o menor dos majorantes de A. A segunda desigualdade tem uma justificação análoga. □

I.3.4 O significado da expressão "estar entre" no contexto de $\overline{\mathbb{R}}$ é uma adptação evidente do significado desta expressão no contexto de $\mathbb{R}$, referido em I.1.4. Repare-se que continua a ser verdade que, se x e y são reais estendidos diferentes, então existe um número real z que está entre x e y. Com efeito, isso já foi verificado em I.1.4 no caso em que x e y são finitos (através da consideração da média aritmética de x e y) e para completar a validade da afirmação nos restantes casos basta reparar que 0 está entre $-\infty$ e $+\infty$ e que, dado x finito, o real $x+1$ está entre x e $+\infty$ e o real $x-1$ está entre x e $-\infty$.

Para além da importância que vão ter na unificação dos diferentes casos em que se pode considerar a noção de limite, a consideração do contexto dos reais estendidos permite simplificar o estudo dos intervalos, cuja definição na alínea e) de I.1.5 obrigava a considerar nove tipos distintos de intervalos.

I.3.5 Chamam-se *intervalos* de $\overline{\mathbb{R}}$ aos conjuntos de um dos tipos

$$\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\},\\
[a,b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\},\\
]a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\},\\
]a,b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},
\end{aligned}$$

onde a e b são reais estendidos (as *extremidades* esquerda e direita). Observe-se que, um intervalo do primeiro tipo é vazio se, e só se, $a > b$ e que um intervalo dos outros três tipos são vazios se, e só se, $a \geq b$. Observe-se também que os intervalos de $\mathbb{R}$, defnidos em I.1.5, são exatamente os intervalos de $\overline{\mathbb{R}}$ que estão contidos em $\mathbb{R}$. Como antes, um intervalo diz-se *não trivial* quando $a < b$, isto é, quando tem mais que um elemento.

I.3.6 **(Propriedade de convexidade dos intervalos)** Se um conjunto $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ for um intervalo de qualquer dos quatro tipos, então A tem claramente a seguinte *propriedade de convexidade*, que decorre da propriedade transitiva da relação de ordem:
Se os reais estendidos $x \neq y$ pertencem a A, então todos os reais que estão entre x e y também pertencem a A.

I.3.7 Para um intervalo de $\overline{\mathbb{R}}$ que não seja vazio é muito fácil identificar os seus supremo e ínfimo que vão ser respetivamente as extremidades direita e esquerda. Mais precisamente:

a) Se $a \le b$, o intervalo $[a, b]$ tem claramente máximo b e mínimo a que são, em particular, respetivamente o seu supremo e o seu ínfimo.

b) Se $a < b$, o intervalo $[a, b[$ tem claramente mínimo a, que é também, em particular, o seu ínfimo, e tem supremo b (que não é máximo). Com efeito, b é um majorante e o facto de b ser o menor dos majorantes resulta de que, se $b' < b$ tem-se $\max\{a, b'\} < b$ e portanto sabemos existir x entre $\max\{a, b'\}$ e b, real esse que vai ser assim um elemento de A maior que b', o que nos permite concluir que b' não é majorante de A.

c) De modo análogo, vemos que, se $a < b$, o intervalo $]a, b]$ tem máximo b, que é também, em particular, o seu supremo, e tem ínfimo a (que não é mínimo).

d) Ainda de modo análogo, vemos que, se $a < b$, o intervalo $]a, b[$ não tem máximo nem mínimo mas tem b como supremo e a como ínfimo.

I.3.8 **(A propriedade de convexidade caracteriza os intervalos)** Suponhamos que um conjunto $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ possui a propriedade de convexidade referida em I.3.6, isto é que, sempre que $x \ne y$ em A, todos os números reais entre x e y estão também em A. O conjunto A é então necessariamente um intervalo.

Dem: Sejam $b \in \overline{\mathbb{R}}$ e $a \in \overline{\mathbb{R}}$ respetivamente o supremo e o ínfimo do conjunto A. Uma vez que, para cada $x \in A$, tam-se $x \le b$ e $a \le x$, concluímos que $A \subset [a, b]$. Vamos agora verificar que se tem necessariamente $]a, b[\subset A$. Para isso consideramos $y \in]a, b[$ arbitrário. Uma vez que $y < b$, y não pode ser majorante de A e portanto existe $z \in A$ tal que $y < z$. Do mesmo modo, uma vez que $y > a$, y não pode ser minorante de A e portanto existe $x \in A$ tal que $x < y$. Verificámos assim que y está entre os elementos x e z de A pelo que, pela propriedade de convexidade, $y \in A$. Ficou assim provado que $]a, b[\subset A$. É agora imediato constatar que, por termos as inclusões

$$]a, b[\subset A \subset [a, b],$$

os únicos reais estendidos que não sabemos se pertencem ou não a A são a e b e, conforme cada um deles pertença ou não, A é necessariamente um dos intervalos $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$. □

Vamos agora examinar no contexto de $\overline{\mathbb{R}}$ a primeira noção topológica que será estudada neste curso, a de ponto aderente a um conjunto. Esta noção vai ser muito importante em várias situações, por exemplo quando estudarmos a noção de limite de uma função ou de uma sucessão (esta última também uma noção topológica). A palavra "topológica" possui a raiz "topo" de origem grega que está ligada à ideia de lugar e é utilizada em Matemática em situações em que intervém a noção de proximidade. Começamos por examinar a noção de proximidade de um número real e definimos em seguida o que significa estar próximo de $+\infty$ ou de $-\infty$.

I.3.9 Consideremos um número real $\delta > 0$. Diz-se que um número real x está δ-*próximo* de um número real a (ou que está *próximo* de a com δ como *critério de proximidade*) se a distância $d(x, a)$, definida em I.1.21, for menor que δ. Tendo em conta o que vimos em I.1.23, dizer que x é δ-próximo de a é o mesmo que dizer que

$$x \in V_\delta(a) =]a - \delta, a + \delta[,$$

onde $V_\delta(a)$ é o que chamámos a vizinhança-δ de a.

Devemos reparar que “estar próximo de” não é um conceito absoluto, mas que só faz sentido se se estiver a considerar um “critério de proximidade”, isto é um número real $\delta > 0$. Por exemplo, por mais que apeteça dizer que

$$1,0001 = 1 + \frac{1}{10000}$$

está próximo de 1, isso não será verdade se o critério de proximidade considerado corresponder a $\delta = 1/20000$, mas já será verdade se a escolha corresponder a $\delta = 1/100$. Analogamente, por mais que isso nos pareça falso, 7 está próximo de 1 se a escolha do critério de proximidade corresponder a $\delta = 20$.

I.3.10 **(Propriedades elementares da proximidade de um número real)**
a) Quanto menor for o real $\delta > 0$, mais exigente é o correspondente critério de proximidade de a, por outras palavras, se $0 < \varepsilon < \delta$, todo o número real ε-próximo de a também é δ-próximo de a, ou ainda $V_\varepsilon(a) \subset V_\delta(a)$.
b) Por mais exigentes que sejamos, isto é, por menor que seja o real $\delta > 0$, o próprio a está sempre próximo de a. Ou seja, para cada $\delta > 0$, $a \in V_\delta(a)$.
c) Nenhum número real x diferente de a está arbitrariamente próximo de a. Ou seja, se $x \neq a$, podemos considerar um critério de proximidade para o qual x não esteja próximo de a, ou ainda, existe $\delta > 0$ tal que $x \notin V_\delta(a)$. Para o constatarmos, basta reparar que, se $x > a$, podemos tomar $\delta = x - a$ e que, se $x < a$, podemos tomar $\delta = a - x$ visto que, no primeiro caso,

$$V_\delta(a) =]a - \delta, a + \delta[=]a - \delta, x[$$

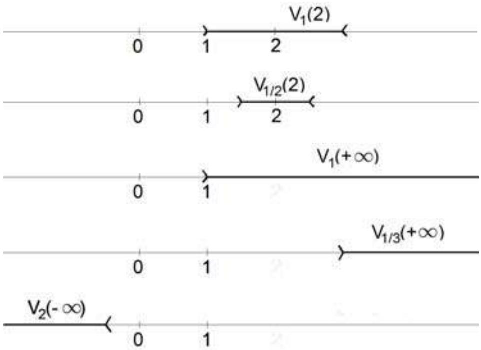
e, no segundo caso,

$$V_\delta(a) =]a - \delta, a + \delta[=]x, a + \delta[.$$

I.3.11 **(As vizinhanças-δ de $+\infty$ e de $-\infty$)** O facto de não sabermos que significado dar à distância de um número real a $+\infty$ ou a $-\infty$ impede-nos de definir o conceito de proximidade dos pontos infinitos em termos de distância. Fazemo-lo assim definindo diretamente as vizinhanças-δ, tendo como objetivo que as propriedades análogas às enunciadas nas alíneas a), b) e c) de I.3.10 continuem a ser verificadas.
Consideremos um número real $\delta > 0$. Definem-se então as *vizinhanças-δ* de

$+\infty$ e de $-\infty$ como sendo respetivamente os intervalos

$$V_\delta(+\infty) =]\frac{1}{\delta}, +\infty], \quad V_\delta(-\infty) = [-\infty, -\frac{1}{\delta}[,$$



e dizemos que $x \in \overline{\mathbb{R}}$ está *δ-próximo* de $+\infty$ (respetivamente, de $-\infty$), ou que x está próximo de $+\infty$ (respetivamente de $-\infty$) com δ como *critério de proximidade* quando se tem $x \in V_\delta(+\infty)$ (respetivamente $x \in V_\delta(-\infty)$).

Reparemos que, ao contrário do que sucede com a proximidade de um número real, situação em que dizer que x está δ-próximo de a é o mesmo que dizer que a está δ-próximo de x (em ambos os casos estamos a afirmar que a distância dos dois números reais é menor que δ), dizer que um número real x está δ-próximo de $+\infty$ ou de $-\infty$ não é o mesmo que dizer que $+\infty$ ou $-\infty$ está δ-próximo de x, situação esta que aliás nunca se verifica. Esta falta de simetria resulta de as vizinhanças dos pontos infinitos não terem sido definidas a partir da noção de distância.

I.3.12 **(Propriedades elementares da proximidade dos infinitos)**

a) Quanto menor for o número real $\delta > 0$, mais exigente são os correspondentes critérios de proximidade de de $+\infty$ e de $-\infty$, por outras palavras, se $0 < \varepsilon < \delta$, todo o real estendido ε-próximo de $+\infty$ (respetivamente de $-\infty$) é também é δ-próximo de $+\infty$ (respetivamente de $-\infty$), ou ainda

$$V_\varepsilon(+\infty) \subset V_\delta(+\infty), \quad V_\varepsilon(-\infty) \subset V_\delta(-\infty).$$

Basta, com efeito, repararmos que, sendo $\varepsilon < \delta$, vem $\frac{1}{\varepsilon} > \frac{1}{\delta}$ e $-\frac{1}{\varepsilon} < -\frac{1}{\delta}$.

b) Por mais exigentes que sejamos, isto é, por menor que seja o real $\delta > 0$, $+\infty$ está próximo de $+\infty$ e $-\infty$ está próximo de $-\infty$. Por outras palavras, para cada $\delta > 0$, $+\infty \in V_\delta(+\infty)$ e $-\infty \in V_\delta(-\infty)$.

c) Nenhum real estendido x diferente de $+\infty$ (respetivamente diferente de $-\infty$) está arbitrariamente próximo de $+\infty$ (respetivamente de $-\infty$). Por outras palavras, sempre que $x \neq +\infty$ (respetivamente $x \neq -\infty$), podemos considerar um critério de proximidade para o qual x não esteja próximo de

$+\infty$ (respetivamente de $-\infty$), ou ainda, existe $\delta > 0$ tal que $x \notin V_\delta(+\infty)$ (respetivamente $x \notin V_\delta(-\infty)$).
Para o constatarmos, reparamos que, por um lado, $-\infty$ e os reais menores ou iguais a 0 não pertencem a nenhuma vizinhança de $+\infty$ e $+\infty$ e os números reais maiores ou iguais a 0 não pertencem a nenhuma vizinhança de $-\infty$ e, por outro lado, que para cada real $x > 0$ podemos considerar $\delta = \frac{1}{x} > 0$, para o qual

$$x \notin \,]x, +\infty] = V_\delta(+\infty),$$

e que para cada $x < 0$ podemos considerar $\delta = -\frac{1}{x} > 0$, para o qual

$$x \notin [-\infty, x[\, = V_\delta(-\infty).$$

I.3.13 **(Propriedade de Hausdorff das vizinhanças)** Sejam $a < b$ dois reais estendidos, cada um deles finito ou infinito. Pode então fixar-se um critério de proximidade, isto é um real $\delta > 0$, tal que se tenha $x < y$, para cada $x \in V_\delta(a)$ e $y \in V_\delta(b)$, em particular tal que não exista nenhum real estendido simultaneamente δ-próximo de a e de b, ou seja tal que as vizinhanças $V_\delta(a)$ e $V_\delta(b)$ não tenham nenhum elemento comum.
Dem: Tendo em conta o que foi referido em I.3.4, podemos considerar um número real c tal que $a < c < b$. Pelo que vimos nas alíneas c) de I.3.10 ou I.3.12 (conforme o ponto seja finito ou infinito) podemos considerar critérios de proximidade δ' e δ'' tais que $c \notin V_{\delta'}(a)$ e $c \notin V_{\delta''}(b)$. Uma vez que as vizinhanças são sempre intervalos, a propriedade de convexidade dos intervalos referida em I.3.6 garante que todos os elementos x de $V_{\delta'}(a)$ são menores que c (senão c estaria entre a e x e portanto pertenceria a $V_{\delta'}(a)$) e que todos os elementos y de $V_{\delta''}(b)$ são maiores que c (senão c estaria entre y e b e portanto pertenceria a $V_{\delta''}(b)$). Concluímos daqui que $x < y$, para cada $x \in V_\delta(a)$ e $y \in V_\delta(b)$, em particular que $V_{\delta'}(a)$ e $V_{\delta''}(b)$ não podem ter elementos comuns. Uma vez que no enunciado referimos o mesmo critério de proximidade para a e para b, para terminar a demonstração basta reparar que, se chamarmos δ ao menor dos dois números δ' e δ'', tem-se $\delta > 0$ e as vizinhanças $V_\delta(a)$ e $V_\delta(b)$ verificam trivialmente as propriedades pedidas, por estarem contidas nas vizinhanças $V_{\delta'}(a)$ e $V_{\delta''}(b)$ (uma delas é mesmo igual). □

I.3.14 **(Pontos aderentes a um conjunto)** Consideremos um conjunto $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ e um real estendido $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Diz-se que a é um *ponto aderente* a A (ou simplesmente que a é *aderente* a A) se o conjunto A tiver elementos tão próximos quanto se queira de a, isto é, se, qualquer que seja o critério de proximidade $\delta > 0$, existe pelo menos um ponto $x \in A$ que esteja δ-próximo de a, por outras palavras, tal que $x \in V_\delta(a)$.[38]

[38]Repare-se que, em geral, o ponto $x \in A$ que conseguimos encontrar δ-próximo de a vai depender da exigência de proximidade δ. Não estamos, de modo nenhum, a exigir que

A noção de ponto aderente, como outras noções topológicas que serão estudadas adiante, pode ser olhada intuitivamente no contexto de um jogo: O primeiro jogador faz a sua jogada escolhendo um número real $\delta > 0$ e o segundo jogador responde escolhendo um elemento $x \in A$, ganhando o jogo se x estiver δ-próximo de a e perdendo-o caso contrário[39]. O ponto a é assim aderente a A no caso em que o segundo jogador tem uma estratégia que lhe permita ganhar seja qual for a jogada que o primeiro jogador tenha feito e não é aderente no caso em que o primeiro jogador tem uma possibilidade de jogar que não deixa o segundo jogador ganhar.

I.3.15 **(Propriedades elementares da noção de ponto aderente)**

a) O conjunto vazio $\emptyset$ não tem pontos aderentes.

b) Se $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ a $a \in A$, então a é aderente a A.

c) Se $A \subset B \subset \overline{\mathbb{R}}$ e $a \in \overline{\mathbb{R}}$ é aderente a A, então a é também aderente a B.

d) Dados dois conjuntos $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ e $B \subset \overline{\mathbb{R}}$, um ponto $a \in \overline{\mathbb{R}}$ é aderente à união $A \cup B$ se, e só se, a for aderente a pelo menos um daqueles dois conjuntos.

Dem: A conclusão de a) resulta de que o conjunto vazio, não tem elementos, em particular não pode ter elementos em nenhum vizinhança $V_\delta(a)$. A conclusão de b) resulta de que, se $a \in A$, para cada vizinhança $V_\delta(a)$ pode-se escolher o próprio a como ponto da vizinhança que pertence a A.[40] Quanto a c), sendo a aderente a A, então a é também aderente a B uma vez que, para cada $\delta > 0$, um elemento de A em $V_\delta(a)$ é, em particular, um elemento de B nesta vizinhança. Debrucemo-nos enfim sobre o que é afirmado em d). Em primeiro lugar, e uma vez que $A \cup B$ contém qualquer dos conjuntos A e B, resulta de c) que se a for aderente a algum destes dois conjuntos então a é também aderente a $A \cup B$. Resta-nos mostrar que, se a é aderente a $A \cup B$, então a tem que ser aderente a A ou aderente a B, o que é o mesmo que dizer que, se a não for aderente nem a A nem a B, então a também não é aderente a $A \cup B$.[41] Ora, se a não é aderente nem a A nem a B, quer dizer que se pode considerar critérios de proximidade $\delta' > 0$ e $\delta'' > 0$ (que *a priori* podem ser distintos) tais que em $V_{\delta'}(a)$ não existam elementos de A e em $V_{\delta''}(a)$ não existam elementos de B. Se chamarmos δ ao menor dos dois números δ' e δ'', número que é maior que 0 e menor ou igual tanto a δ' como

---

exista um elemento de A que esteja simultaneamente δ-próximo de a para todo o $\delta > 0$ (lembrando o que se referiu nas alíneas b) e c) de I.3.10 e de I.3.12, essa exigência só será possível no caso em que $a \in A$, caso em que podemos escolher para x o próprio a).

[39] A jogada do primeiro jogador é assim tanto melhor quanto menor for o $\delta > 0$ que ele escolhe mas o problema para ele é que não existe uma jogada que seja melhor que todas as outras.

[40] Na linguagem do jogo, referida atrás, este é um caso em que o segundo jogador consegue ganhar sem precisar sequer de conhecer a jogada do primeiro jogador.

[41] É o método de reciocínio a que se dá o nome de "passagem ao contrarrecíproco" que diz que, para mostrar que, se um proposição é verdadeira então uma segunda também o é, basta provar que, se a segunda é falsa, então a primeira é também falsa.

a δ'', o facto de a vizinhança $V_\delta(a)$ estar contida tanto em $V_{\delta'}(a)$ como em $V_{\delta''}(a)$ mostra que esta vizinhança não pode ter elementos de A nem de B, e portanto não pode ter elementos de $A \cup B$. Provámos assim que a não é aderente a $A \cup B$. □

I.3.16 **(Corolário)** Dado um número finito de conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ contidos em $\overline{\mathbb{R}}$, onde $n \in \mathbb{N}$, e sendo $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ o conjunto dos pontos $x \in \overline{\mathbb{R}}$ que pertencem a pelo menos um daqueles conjuntos, um ponto $a \in \overline{\mathbb{R}}$ é aderente a A se, e só se a for aderente a pelo menos um daqueles conjuntos.
Dem: Como antes, o facto de cada um dos conjuntos estar contido na união A implica que se a é aderente a pelo menos um dos conjuntos, então a é aderente a A. Justificamos a recíproca por indução em n, começando por reparar que, para $n = 1$ a afirmação resulta de se ter $A = A_1$. Suponhamos a afirmação verdadeira quando $n = p$ e vejamos o que se pode dizer quando $n = p + 1$, isto é, quando tivermos $A = A_1 \cup \cdots \cup A_p \cup A_{p+1}$ e a for aderente a A. Ora, uma vez que se tem também

$$A = (A_1 \cup \cdots \cup A_p) \cup A_{p+1},$$

deduzimos da alínea d) de I.3.15 que a é aderente a A_{p+1} ou a é aderente a $A_1 \cup \cdots \cup A_p$ e neste último caso, pela hipótese de indução, a é aderente a pelo menos um dos conjuntos $A_1, \dots, A_p$. □

I.3.17 **(Corolário)** Se $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ é um conjunto finito, então os únicos pontos aderentes a A são os elementos pertencentes a A.
Dem: Começamos por reparar que o resultado é verdadeiro no caso em que A tem um único elemento, portanto $A = \{b\}$.[42] Ora, se $a \notin \{b\}$, isto é, $a \neq b$, já verificámos nas alíneas c) de I.3.10 e de I.3.12 a existência de $\delta > 0$ tal que b não pertença a $V_\delta(a)$, e portanto $V_\delta(a)$ não tenha elementos de $\{b\}$, o que mostra que a não é aderente a $\{b\}$.[43] No caso em que A tem um número $n \geq 2$ de elementos, podemos escrever

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \cdots \{a_n\}$$

pelo que, se a é aderente a A, então a é aderente a um destes n conjuntos unitários, e portanto a é um dos elementos $a_1, a_2, \dots, a_n$. □

Pelo contrário, para um conjunto infinito já pode acontecer que existam pontos aderentes que não lhe pertençam. O próximo resultado mostra que se, por exemplo, ele não tiver máximo o supremo é um ponto nessas condições.

[42] Reparemos que o caso em que A é vazio já é conhecido da alínea a) de I.3.15.
[43] Utilizámos, mais uma vez, o método de passagem ao contrarrecíproco.

I.3.18 Seja $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ um conjunto não vazio. Tem-se então que o supremo $\sup(A)$ e o ínfimo $\inf(A)$ são pontos aderentes a A.[44]

Dem: Vamos provar apenas que $\sup(A)$ é aderente a A, uma vez que a prova de que o mesmo acontece com $\inf(A)$ é uma adaptação evidente da que vamos apresentar. Vamos dividir a prova em três partes, conforme o tipo de elemento de $\overline{\mathbb{R}}$ que o supremo é.

1) Se $\sup(A) = -\infty$, então A não pode ter nenhum elemento maior que $-\infty$ e portanto, por A não ser vazio, tem-se $-\infty \in A$, o que implica que $-\infty$ é aderente a A.

2) Suponhamos que $\sup(A) = +\infty$. Seja $\delta > 0$ um critério de proximidade arbitrário. Uma vez que $\frac{1}{\delta}$ é menor que o supremo de A, $\frac{1}{\delta}$ não pode ser majorante de A e portanto existe $x \in A$ tal que $x > \frac{1}{\delta}$, ou seja tal que $x \in]\frac{1}{\delta}, +\infty] = V_\delta(+\infty)$. Ficou assim provado que $+\infty$ é aderente a A.

3) Suponhamos enfim que $\sup(A) = b$ é finito. Seja $\delta > 0$ um critério de proximidade arbitrário. Uma vez que $b - \delta$ é menor que o supremo de A, $b - \delta$ não pode ser majorante de A e portanto existe $x \in A$ tal que $x > b - \delta$; uma vez que b é majorante de A vemos que, por outro lado, tem que ser $x \leq b < b + \delta$, donde $x \in]b - \delta, b + \delta[= V_\delta(b)$. Ficou assim provado que b é aderente a A. $\square$

Apesar de um conjunto não vazio A ter, em geral, outros pontos aderentes além do supremo e do ínfimo, vamos ver que estes têm uma propriedade especial: São respetivamente o maior e o menor dos pontos aderentes.

I.3.19 Seja $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ um conjunto não vazio. Para cada c aderente a A, tem-se então

$$\inf(A) \leq c \leq \sup(A).$$

Dem: Para provar o resultado bastará mostrarmos que se $b > \sup(A)$ então b não é aderente a A e que se $a < \inf(A)$ então a não é aderente a A. Como em casos anteriores, provaremos apenas a primeira afirmação, já que a prova da segunda pode ser obtida por uma adaptação simples da da primeira. Suponhamos então que $b > \sup(A)$. Pelo que vimos nas alíneas c) de I.3.10 ou I.3.12 (conforme o ponto b seja finito ou infinito) podemos considerar um critério de proximidade $\delta > 0$ tal que $\sup(A) \notin V_\delta(b)$ e, uma vez que as vizinhanças são intervalos, a propriedade de convexidade dos intervalos referida em I.3.6 garante que, para cada $x \in V_\delta(b)$, $x > \sup(A)$ (senão $\sup(A)$ estaria entre x e b) e portanto $x \notin A$. Provámos assim que $V_\delta(b)$ não tem nenhum elemento de A, o que mostra que efetivamente b não é aderente ao conjunto A. $\square$

[44] É claro que o supremo e o ínfimo do conjunto vazio não podem ser aderentes a este conjunto, uma vez que o conjunto vazio não tem pontos aderentes. lembrar que o supremo e o ínfimo do conjunto vazio existem e são respetivamente $-\infty$ e $+\infty$.

I.3.20 **(Pontos aderentes a um intervalo)** Seja $a < b$ em $\overline{\mathbb{R}}$ e seja A um dos intervalos $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ ou $]a,b[$. Tem-se então que os pontos aderentes a A são exatamente os elementos do intervalo fechado $[a,b]$. [45]
Dem: Que os elementos de $[a,b]$ são todos aderentes a A resulta de a extremidades a e b serem respetivamente o ínfimo e o supremo de A e de os restantes elementos de $[a,b]$ pertencerem a A. O facto de não existirem mais pontos aderentes resulta de qualquer elemento de $\overline{\mathbb{R}}$ que não pertença a $[a,b]$ ser maior que $b = \sup(A)$ ou menor que $a = \inf(A)$, em qualquer caso não ser aderente a A. □

I.3.21 **(Os infinitos como pontos aderentes)** Seja $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ um conjunto. Tem-se então que:
a) Dizer que $+\infty$ não é aderente a A é equivalente a dizer que A admite um majorante finito.
b) Dizer que $-\infty$ não é aderente a A é equivalente a dizer que A admite um minorante finito.
c) Dizer que nem $+\infty$ nem $-\infty$ são aderentes a A é equivalente a dizer que A é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$.
Dem: a) Suponhamos que $+\infty$ não é aderente a A. Existe assim $\delta > 0$ tal que a vizinhança $V_\delta(+\infty) =]\frac{1}{\delta}, +\infty]$ não tenha nenhum elemento de A. Ora, dizer que nenhum elemento de A é maior que $\frac{1}{\delta}$ é o mesmo que dizer que todos os elementos de A são menores ou iguais a $\frac{1}{\delta}$ e portanto A admite o majorante finito $\frac{1}{\delta}$. Suponhamos, reciprocamente, que o conjunto A admite um majorante finito. Uma vez que qualquer número real maior que um majorante de A é também majorante de A, concluímos que A admite um majorante b finito e maior que 0. Sendo $\delta = \frac{1}{b} > 0$ vem assim, para cada $x \in A$, $x \le b = \frac{1}{\delta}$, pelo que a vizinhança $V_\delta(+\infty) =]\frac{1}{\delta}, +\infty]$ não tem nenhum elemento de A, o que mostra que $+\infty$ não é aderente a A.
b) A demonstração de b) é uma adaptação evidente da demonstração que apresentámos para a) pelo que não a explicitamos.[46]
c) Se $A \subset \mathbb{R}$ é um conjunto limitado, então admite um majorante e um minorante finitos e portanto, como vimos em a) e b), nem $+\infty$ nem $-\infty$ são aderentes a A. Reciprocamente se nem $+\infty$ nem $-\infty$ são aderentes a A então estes elementos também não pertencem a A, ou seja $A \subset \mathbb{R}$ e, pelo que vimos em a) e b), A é majorado e minorado ou seja é limitado. □

I.3.22 **(Pontos de acumulação e pontos isolados)** Seja $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ um conjunto. Diz-se que $a \in \overline{\mathbb{R}}$ é um *ponto de acumulação* de A se a for aderente ao conjunto $A \setminus \{a\}$ dos elementos de A diferentes de a, por outras palavras, se

---

[45]No caso em que $a = b$, o conjunto dos pontos aderentes a $[a,a] = \{a\}$ é ainda $\{a\} = [a,a]$ mas os restantes intervalos com ambas as extremidades iguais a a são vazios, e portanto o conjunto dos respetivos pontos aderentes não é $[a,a] = \{a\}$.
[46]Pode ser interessante o estudante adaptar explicitamente a demonstração que fizémos para a) de forma a fazer a prova de b).

em qualquer vizinhança $V_\delta(a)$ existir pelo menos um elemento de A diferente de a. Diz-se que a é um *ponto isolado* de A se $a \in A$ mas a não é ponto de acumulação de A.

Como propriedades elementares destas noções, temos:

a) Se a é ponto de acumulação de A, então a é aderente a A (uma vez que $A \setminus \{a\} \subset A$).

b) Se $a \notin A$, então a é ponto de acumulação de A se, e só se, é ponto aderente a A (uma vez que $A \setminus \{a\} = A$).

c) Se A é um conjunto finito, então A não tem nenhum ponto de acumulação, em particular qualquer $a \in A$ é um ponto isolado de A (se $a \in \overline{\mathbb{R}}$, a não pertence a $A \setminus \{a\}$ que é finito, portanto a não pode ser aderente a $A \setminus \{a\}$, pelo que referimos em I.3.17).

I.3.23 **(Teorema de Bolzano-Weierstrass)** Seja $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ um conjunto infinito. Existe então pelo menos um ponto de acumulação $a \in \overline{\mathbb{R}}$ de A.

Dem: Consideremos um conjunto auxiliar B cujos elementos são os reais estendidos $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tais que o conjunto A tem infinitos elementos maiores ou iguais a b (por exemplo, $-\infty$ pertence a B mas $+\infty$ não pertence a B). Seja $a \in \overline{\mathbb{R}}$ o supremo do conjunto B. Vamos verificar que a é um ponto de acumulação de A para o que será cómodo separar três casos, consoante o tipo do real estendido a.

1) Suponhamos que $a \in \mathbb{R}$. Seja $\delta > 0$ arbitrário. Uma vez que a é o menor dos majorantes de B, $a - \delta$ não pode ser um majorante de B e portanto existe $b \in B$ com $b > a - \delta$. Pela definição de B, existem infinitos elementos de A maiores ou iguais a b, e portanto também infinitos elementos de A maiores que $a - \delta$. Mas estes infinitos elementos de A maiores que $a - \delta$ podem dividir-se em duas classes, a daqueles que são maiores ou iguais a $a + \delta$ e a daqueles que pertencem a $V_\delta(a) =]a - \delta, a + \delta[$ e a primeira dessas classes é necessariamente finita, senão, por definição, vinha $a + \delta \in B$, contrariando o facto de a ser um majorante de B. Podemos assim concluir que a classe dos elementos de A em $V_\delta(a) =]a - \delta, a + \delta[$ é necessariamente infinita, em particular esta vizinhança tem elementos distintos de a, o que prova que a é um ponto de acumulação de A.

2) Suponhamos que $a = -\infty$. Seja $\delta > 0$ arbitrário. Uma vez que $-\infty$ é um majorante de B, $-\frac{1}{\delta} \notin B$ e portanto só existe um número finito de elementos de A maiores ou iguais a $-\frac{1}{\delta}$. Como A é infinito, existem infinitos elementos de A menores que $-\frac{1}{\delta}$, em particular a vizinhança $V_\delta(-\infty) = [-\infty, -\frac{1}{\delta}[$ tem elementos de A diferentes de $-\infty$, o que prova que $-\infty$ é um ponto de acumulação de A.

3) Suponhamos que $a = +\infty$. Seja $\delta > 0$ arbitrário. Uma vez que $+\infty$ é o menor dos majorantes de B, $\frac{1}{\delta}$ não pode ser um majorante de B e portanto existe $b \in B$ com $b > \frac{1}{\delta}$. Pela definição de B, existem infinitos elementos de A maiores ou iguais a b, e portanto também infinitos elementos de A maiores que $\frac{1}{\delta}$. Em particular, concluímos que a vizinhança $V_\delta(+\infty) =]\frac{1}{\delta}, +\infty]$ tem elementos de A diferentes de $+\infty$, o que prova que $+\infty$ é um ponto de acumulação de A. □

Apesar de a noção de ponto aderente a um conjunto ter sido apresentada para elementos de $\overline{\mathbb{R}}$ que podem ser finitos ou infinitos e para conjuntos que podem conter ou não algum dos pontos infinitos, as definições que vamos apresentar a seguir serão, por uma questão de simplicidade, consideradas apenas no contexto dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ e tendo em conta apenas os pontos aderentes que são finitos. Esta simplificação revela-se suficiente para a aplicação mais adiante das noções que vamos introduzir.

I.3.24 Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto. Vamos notar $\overline{A}$ ou $\mathrm{ad}(A)$ o conjunto dos números reais que são aderentes a A, conjunto a que damos o nome de *aderência* de A.
Repare-se que o que referimos na alínea b) de I.3.15 implica que, para qualquer conjunto $A \subset \mathbb{R}$, tem-se sempre $A \subset \overline{A}$. Chamam-se *fechados* os conjuntos $A \subset \mathbb{R}$ para os quais se tem mesmo $A = \overline{A}$, por outras palavras, os conjuntos $A \subset \mathbb{R}$ tais que todo o número real aderente a A seja um elemento de A [47].
Diz-se que um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é *denso* se todo o número real for aderente a A, isto é, se $\overline{A} = \mathbb{R}$.

I.3.25 **(Propriedades dos conjuntos fechados) a)** Todo o conjunto finito $A \subset \mathbb{R}$ é fechado, em particular o conjunto vazio $\emptyset$ é fechado.
b) O próprio $\mathbb{R}$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$.
c) Se A e B são subconjuntos fechados de $\mathbb{R}$, então os conjuntos $A \cup B$ e $A \cap B$ são fechados.[48]
Dem: O facto de um conjunto finito ser fechado não é mais do que uma reformulação de I.3.17.
O facto de $\mathbb{R}$ ser um conjunto fechado resulta de todos os números reais, independentemente de serem ou não aderentes a $\mathbb{R}$, pertencerem a $\mathbb{R}$.
Suponhamos agora que A e B são dois conjuntos fechados. Se x for aderente a $A \cap B$, o facto de esta intersecção estar contida tanto em A como em B implica que x é aderente a A e a B, portanto que $x \in A$ e $x \in B$, por outras palavras, $x \in A \cap B$. Ficou assim provado que $A \cap B$ é fechado. Suponhamos agora que x é aderente a $A \cup B$. Tendo em conta o que verificámos na alínea d) de I.3.15, x é aderente a A ou é aderente a B, pelo que, no primeiro caso, $x \in A$ e, no segundo caso, $x \in B$. Em qualquer dos casos $x \in A \cup B$, o que mostra que $A \cup B$ é fechado. □

[47]Não excluímos assim que $+\infty$ ou $-\infty$ possa ser aderente a A, apesar de, por hipótese, não pertencerem a A. Por outras palavras, não exigimos que A seja um conjunto limitado.
[48]Relativamente à interseção vale mesmo uma propriedade mais forte, que envolve interseções de “muitos” conjuntos. Ver o exercício I.3.6 no fim de secção.

I.3.26 **(Exemplos) a)** Tendo em conta o que foi referido em I.3.20, sendo $a < b$ em $\mathbb{R}$, os intervalos

$$[a, b], \quad]-\infty, b], \quad [a, +\infty[, \quad]-\infty, +\infty[= \mathbb{R},$$

são conjuntos fechados mas já não o são os intervalos

$$[a, b[, \quad]a, b], \quad]a, b[, \quad]-\infty, b[, \quad]a, +\infty[,$$

uma vez que os três primeiros têm $[a, b]$ como aderência e os dois últimos têm respetivamente $]-\infty, b]$ e $[a, +\infty[$ como aderência.
Note-se que os três últimos exemplos,

$$]a, b[, \quad]-\infty, b[, \quad]a, +\infty[,$$

têm complementares que já são conjuntos fechados, respetivamente iguais a $]-\infty, a] \cup [b, +\infty[$, $[b, +\infty[$ e $]-\infty, a]$.
b) O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é um subconjunto denso de $\mathbb{R}$ (com efeito, se $x \in \mathbb{R}$, x é aderente a $\mathbb{Q}$, uma vez que em qualquer vizinhança $V_\delta(x) =]x - \delta, x + \delta[$ existem sempre números racionais de acordo com o referido I.1.14). Com um pouco mais de cuidado verificamos mesmo que qualquer $x \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de $\mathbb{Q}$ (para cada $\delta > 0$, considerar um número racional entre x e $x + \delta$).
c) O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é um conjunto fechado.
Dem: Dizer que todos os pontos aderentes a $\mathbb{Z}$ pertencem a $\mathbb{Z}$ é equivalente a dizer que, se $a \notin \mathbb{Z}$, então a não é aderente a $\mathbb{Z}$. Ora, considerando $p \in \mathbb{Z}$ tal que $a \in [p, p+1[$, e portanto $a \in]p, p+1[$ (cf. I.1.13), o facto de $\{p, p+1\}$ ser fechado (é finito) e portanto a não ser aderente a $\{p, p+1\}$ garante a existência de $\delta > 0$ tal que $V_\delta(a)$ não contenha nem p nem $p+1$ e portanto, pela propriedade de convexidade dos intervalos, $V_\delta(a)$ também não contém números menor que p nem números maiores que $p+1$, em particular não contém nenhum número inteiro. Ficou assim provado que a não é aderente ao conjunto $\mathbb{Z}$. □
d) Embora, em geral, um subconjunto de um conjunto fechado não tenha que ser fechado, no caso de $\mathbb{Z}$ é verdade que qualquer subconjunto $A \subset \mathbb{Z}$ é fechado.
Dem: Suponhamos que $a \notin A$. Se $a \notin \mathbb{Z}$, o que vimos em c) mostra que a não é aderente a $\mathbb{Z}$ e portanto também não é aderente a A (cf. a alínea c) de I.3.15). Se $a \in \mathbb{Z}$, então qualquer outro inteiro é maior ou igual a $a+1$ ou menor ou igual a $a-1$ e portanto a vizinhança $V_1(a) =]a-1, a+1[$ não contém qualquer elemento de A pelo que, mais uma vez, a não é aderente ao conjunto A. □
e) Se $A \subset \mathbb{Z}$, então qualquer elemento $p \in A$ é um ponto isolado de A (com efeito, como $A \setminus \{p\}$ é fechado, p não pode ser aderente a este conjunto).

I.3.27 **(A aderência é um conjunto fechado)** Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto arbitrário. Então:
a) A aderência $\overline{A}$ é um conjunto fechado.

b) Se $+\infty$ (respetivamente $-\infty$) é aderente a $\overline{A}$, então $+\infty$ (respetivamente $-\infty$) é aderente a A.

Dem: a) Temos que mostrar se $x \in \mathbb{R}$ é aderente $\overline{A}$ então $x \in \overline{A}$, o que é equivalente a mostrar que se $x \notin \overline{A}$ então x não é aderente a $\overline{A}$. Suponhamos então que $x \notin \overline{A}$, isto é, que x não é aderente a A. Podemos assim considerar $\delta > 0$ tal que a vizinhança $V_\delta(x) =]x-\delta, x+\delta[$ não tenha elementos de A, o que implica que A está contido no conjunto fechado

$$]-\infty, x-\delta] \cup [x+\delta, +\infty[$$

(união de dois intervalos que vimos na alínea a) de I.3.26 serem conjuntos fechados). Deduzimos daqui que a aderência $\overline{A}$ está contida na aderência desta união de intervalos, que coincide com esta união, o que implica que $V_\delta(x) =]x-\delta, x+\delta[$ não tem elementos de $\overline{A}$, e portanto x não é aderente ao conjunto $\overline{A}$.

b) Examinemos apenas o que se passa com $+\infty$, uma vez que o que se passa com $-\infty$ é análogo. Passando ao contrarrecíproco, suponhamos então que $+\infty$ não é aderente a A. Existe assim uma vizinhança $V_\delta(+\infty) =]\frac{1}{\delta}, +\infty]$ que não tenha elementos de A, o que implica que A está contido no conjunto fechado $]-\infty, \frac{1}{\delta}]$. Deduzimos daqui que a aderência $\overline{A}$ está contida na aderência deste intervalo, coincidente com o próprio intervalo, o que implica que $V_\delta(+\infty) =]\frac{1}{\delta}, +\infty]$ não tem elementos de $\overline{A}$, e portanto $+\infty$ não é aderente ao conjunto $\overline{A}$. □

Exercícios

Ex I.3.1 Justificar o facto de, para um conjunto não vazio $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, ser sempre $\inf(A) \leq \sup(A)$. Quais os conjuntos não vazios A para os quais se tem $\inf(A) = \sup(A)$?

Ex I.3.2 Verificar que a conclusão do exercício I.1.8 continua a valer no contexto de $\overline{\mathbb{R}}$, sem que seja necessário explicitar nenhuma hipótese sobre a existência de supremo e de ínfimo (no contexto de $\overline{\mathbb{R}}$ eles existem sempre).

Ex I.3.3 Verificar que qualquer intervalo aberto $]a, b[$, com $a < b$ em $\mathbb{R}$, é uma vizinhança $V_\delta(c)$, determinando quais os valores de $c \in \mathbb{R}$ e de $\delta > 0$.

Ex I.3.4 Dados $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ e $a \in \overline{\mathbb{R}}$, mostrar que a é ponto de acumulação de A se, e só se, em qualquer vizinhança $V_\delta(a)$ existir uma infinidade de elementos de A. **Sugestão:** Começar por supor que a é finito. Se nalguma vizinhança $V_\delta(a)$ houvesse só um número finito de elementos de A, considerar o mínimo δ' das distâncias de a aos elementos de A dessa vizinhança que são diferentes de a (se existirem) e reparar no que sucedia com a vizinhança $V_{\delta'}(a)$. Adapatar então esta ideia aos casos em que $a = +\infty$ ou $a = -\infty$.

★ Ex I.3.5 **(Interseções e uniões de famílias de conjuntos)** As noções bem conhecidas de união e de interseção de dois conjuntos admitem uma generalização simples ao caso em que, em vez de dois, podemos ter mais conjuntos, possivelmente até uma infinidade. Uma forma de enunciar essa generalização é considerar um conjunto não vazio arbitrário de índices J e supor que a cada índice $j \in J$ está associado um conjunto A_j (dizemos então que os A_j constituem uma *família de conjuntos* indexada em J); Define-se então a *interseção* e a *união* da família dos A_j (ou, abreviadamente, dos A_j) como sendo os conjuntos, notados respetivamente

$$\bigcap_{j\in J} A_j, \quad \bigcup_{j\in J} A_j,$$

cujos elementos são, no primeiro caso, aqueles que pertencem a todos os conjuntos A_j e, no segundo caso, aqueles que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A_j. Determinar, na forma de intervalo, cada uma das seguintes intersecções e uniões, todas elas indexadas no conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais.

a) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [\frac{1}{n}, n]$ **b)** $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\frac{1}{n}, n]$

c) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [n, n+1[$ **d)** $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [n, n+1[$

e) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [1+\frac{1}{n}, 3+\frac{1}{n}]$ **f)** $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [1+\frac{1}{n}, 3+\frac{1}{n}]$

★ Ex I.3.6 Seja J um conjunto não vazio de índices e, para cada $j \in J$, consideremos um conjunto fechado $A_j \subset \mathbb{R}$.

a) Verificar que a interseção $\bigcap_{j\in J} A_j$ é também um conjunto fechado.

b) Mostrar, por indução, que, no caso em que o conjunto de índices J é finito, a união $\bigcup_{j\in J} A_j$ é também um conjunto fechado. **Sugestão:** Reparar que, se $j_0 \in J$ e se $J \setminus \{j_0\}$ não for vazio, então

$$\bigcup_{j\in J} A_j = A_{j_0} \cup \Big(\bigcup_{j\in J\setminus\{j_0\}} A_j \Big).$$

c) Mostar, com um contrexemplo, que, no caso em que o conjunto de índices J é infinito, a união $\bigcup_{j\in J} A_j$ não é necessariamente um conjunto fechado.

Ex I.3.7 Encontrar um subconjunto de $\mathbb{Q}$, diferente de $\mathbb{Q}$, que ainda seja denso.

Ex I.3.8 Verificar que um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é denso se, e só se, quaisquer que sejam $a \neq b$ em $\mathbb{R}$, existe um elemento de A entre a e b (este facto explica a utilização da palavra “densidade” em I.1.14 e no exercício I.1.14).

★ Ex I.3.9 Dados $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$, mostrar que

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B},$$

e encontrar um contraexemplo que mostre que não se tem necessariamente $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Ex I.3.10 Verificar que, se $b \in \mathbb{R}$ é um majorante de um conjunto $A \subset \mathbb{R}$, então b é também um majorante da aderência $\overline{A}$. Enunciar e justificar o resultado correspondente para os minorantes. **Sugestão:** Reparar que, como se viu, os intervalos $]-\infty, b]$ e $[a, +\infty[$ são conjuntos fechados.

★ Ex I.3.11 Se $A \subset \mathbb{R}$, chama-se *conjunto derivado* de A ao conjunto A' dos números reais que são pontos de acumulação de A. Mostrar que, qualquer que seja $A \subset \mathbb{R}$, o conjunto derivado $A' \subset \mathbb{R}$ é sempre fechado.

Ex I.3.12 Determinar os pontos aderentes, de acumulação e isolados dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$ e indicar quais os que são fechados:

a) $\mathbb{N}$; **b)** $\mathbb{Q}$; **c)** $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

d) $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$; **e)** $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 4\}$; **f)** $\{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| > |x|\}$.

§4. Generalidades sobre funções e sucessões.

I.4.1 Tal como os conjuntos de números reais, as funções reais de variável real jogam um papel muito importante no estudo da Análise Matemática. Sem entrar em formalizações mais rigorosas, que o estudante terá ocasião de encontrar noutras disciplinas, uma *função real de variável real* (ou simplesmente *função*, se não houver risco de confusão) consiste num modo de transformar cada número real pertencente a um certo conjunto (chamado *domínio* da função) num número real que se obtém a partir daquele por aplicação de uma certa regra (por vezes dá-se o nome de *objeto* ao número real que vai ser transformado e ao resultado obtido costuma-se dar o nome da *valor* ou *imagem* da função no objeto). As regras que são permitidas podem ser muito variadas: Pode, por exemplo, ser uma expressão numa variável destinada a ser substituída pelo número real a ser transformado, mas também pode ser um conjunto de expressões com uma indicação de qual aquela que se aplica, dependendo do valor a ser transformado (são as chamadas funções definidas por ramos, que o estudante já encontrou no ensino secundário) e pode ainda ser uma regra de qualquer outro tipo. O que é importante é que a regra determine perfeitamente qual o número que se obtém quando se considera um dado valor a ser transformado.

É frequente utilizar-se uma letra, por exemplo f, para designar uma função e então $f(x)$ designa o valor da função no número real x do domínio. Para referir que f é uma função de domínio X, é usual escrever-se

$$f\colon X \to \mathbb{R}.$$

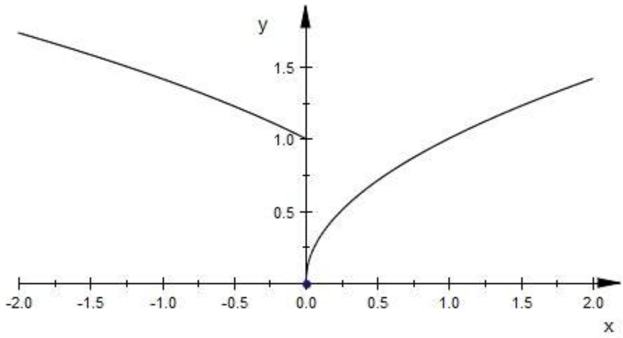
Uma observação importante é a de que, do mesmo modo que um conjunto fica perfeitamente definido se soubermos quais são exatamente os números reais que lher pertencem (o mesmo conjunto pode ser frequentemente definido por regras diferentes), uma função fica perfeitamente definida pelo seu domínio e pelo resultado que ela dá quando transforma um elemento arbitrário desse domínio (uma mesma função pode, por exemplo, ser definida por expressões diferentes).
Por vezes não se revela necessário utilizar uma letra para nomear uma função e referimo-nos a ela por uma expressão que determine a regra de transformação envolvida. Na ausência de informação explícita sobre o domínio está então implícito que este é constituído por todos os números reais para os quais a expressão faz sentido (é o que se chama o *domínio máximo de definição* da expressão). Por exemplo, quando se referir a função $\frac{x}{x-1}$ está-se a pensar na função de domínio $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ que a cada x associa $\frac{x}{x-1}$ e se quisermos identificar uma função definida pela mesma regra de transformação mas com um domínio mais pequeno, podemos referi-la como a função $\frac{x}{x-1}$, com $x \in \,]1, +\infty[$.

Em muitos casos, e como o estudante já constatou no ensino secundário, pode ser de grande utilidade para compreender intuitivamente o comportamento de uma função f, desenhar uma parte signifitiva do seu gráfico, conjunto dos pontos de um plano que, relativamente a um certo referencial, têm coordenadas da forma $(x, f(x))$, com x no domínio de f. É claro que, como já sublinhámos em situações análogas, o esboço do gráfico destina-se apenas a apoiar a noção intuição e qualquer justificação que seja apresentada deverá poder, do ponto de vista lógico, dispensar esse esboço. Repare-se que o gráfico de uma função nunca pode ter pontos distintos com a mesma abcissa (cada reta paralela ao eixo das ordenadas não pode ter mias que um ponto do gráfico).

I.4.2 **(Exemplos) a)** Pode-se definir uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ escrevendo

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{se } x \geq 0 \\ \sqrt{1-x}, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

(função definida por ramos).

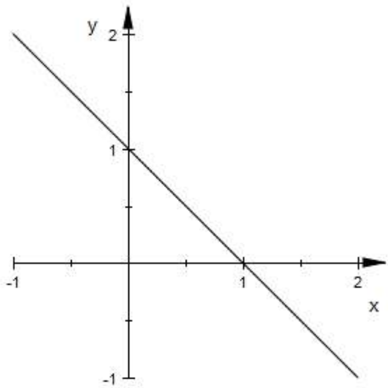


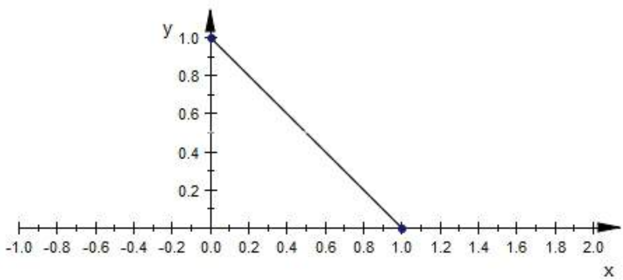
Com efeito, estamos a considerar uma regra que nos permite determinar sem ambiguidade qual o transformado que consideramos para cada valor real de x.

b) Podemos considerar funções $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = 1 - x, \quad g(x) = 1 - x.$$

Apesar de se tratar de funções definidas pela mesma expressão, são funções diferentes por terem domínios diferentes.

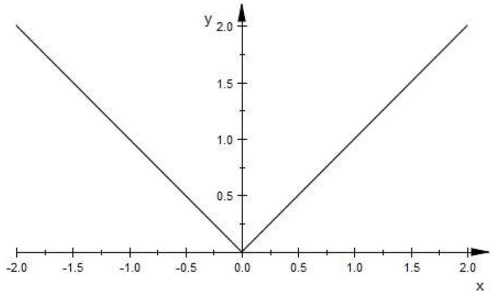




Outra observação que é oportuno fazer é que a letra x utilizada acima não é especialmente importante (é uma *variável muda*): A função f referida pode ser também definida por $f(y) = 1 - y$ ou mesmo, sem usar nenhum símbolo, podemos definir f como a função que transforma qualquer número no resultado de subtrair esse número de 1.

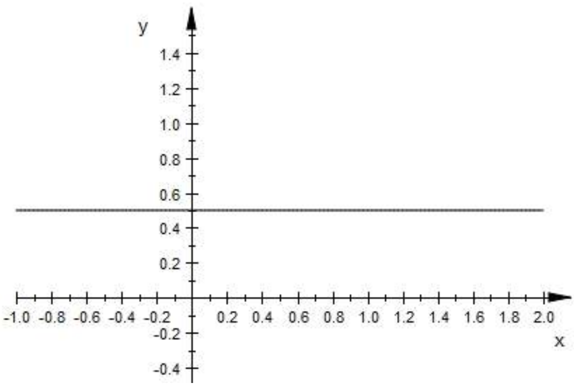
c) Podemos considerar funções $f, g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = |x|, \quad g(x) = \max\{x, -x\}, \quad h(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x > 0 \\ -x, & \text{se } x \leq 0 \end{cases},$$



e podemos escrever $f = g = h$ uma vez que, apesar de se tratar de definições dadas por regras diferentes, todas conduzem ao mesmo resultado qualquer que seja o valor dado a x.

d) Se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto e a é um número real fixado, podemos considerar uma função $f: X \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a$, para cada $x \in X$. A uma função deste tipo dá-se o nome de *função constante*.



I.4.3 **(Codomínios e o contradomínio)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto e $f: X \to \mathbb{R}$ uma função. Diz-se que um conjunto $Y \subset \mathbb{R}$ é **um** *codomínio* (ou um *espaço de chegada*) da função f se se tiver $f(x) \in Y$, para qualquer $x \in X$. Para se exprimir que o conjunto Y é um codomínio da função $f: X \to \mathbb{R}$, também se diz que f é uma função de X para Y e escreve-se

$$f: X \to Y.$$

É claro que o próprio $\mathbb{R}$ é sempre um codomínio de qualquer função e que, em geral, se $Y \subset \mathbb{R}$ é um codomínio da função f e $Y \subset Y' \subset \mathbb{R}$, então Y' é também um codomínio da função f. De entre todos os codomínios de uma dada função $f: X \to \mathbb{R}$ existe sempre um que está contido em todos os outros: Trata-se do conjunto dos números reais que se podem escrever na forma $f(x)$, para algum $x \in X$, conjunto a que se dá o nome de *contradomínio* da função f e que se nota $f(X)$.
Mais geralmente, se $f: X \to \mathbb{R}$ é uma função e se $A \subset X$ é um subconjunto do domínio, nota-se $f(A)$ o conjunto dos números reais que se podem escrever na forma $f(x)$, para algum $x \in A$, conjunto a que se dá o nome de *imagem direta* do conjunto A pela função f.

Uma imagem que pode porventura ajudar a compreender intuitivamente a ideia de função é encará-la como uma espécie de máquina que possui uma entrada por onde se introduzem números e uma saída por onde sai um número cada vez que algum foi introduzido na entrada. A entrada da máquina pode não aceitar qualquer número e o domínio da função é o conjunto dos números que a máquina aceita. O que nos interessa da máquina não é a forma como ela está construída por dentro mas apenas o que resulta de seu funcionamento, isto é quais os números que ela faz saír em resposta a cada entrada possível. Os codomínios da função que, ao contrário do respetivo domínio, não fazem parte desta, são os tabuleiros que podemos colocar à saída e que não deixam cair nenhum dos números que podem sair.

I.4.4 **(Restrição de uma função)** Seja $f: X \to \mathbb{R}$ uma função e seja $A \subset X$ um suconjunto do seu domínio. Pode então considerar-se uma nova função, agora de domínio A, que em cada ponto de A toma o mesmo valor que a função f nesse ponto. Diz-se que essa função, que se nota $f_{/A}$, é a *restrição* de f a A e que f é *um prolongamento* da função $f_{/A}$.[49] Pode assim escrever-se que $f_{/A}: A \to \mathbb{R}$ está definida por

$$f_{/A}(x) = f(x).$$ [50]

É claro que, se o conjunto Y é um codomínio da função f, este conjunto é também um codomínio da restrição de f: Se $f: X \to Y$, então $f_{/A}: A \to Y$.

[49]Em geral, uma função definida em A poderá ter vários prolongamentos a X, isto é, pode ser restrição de várias funções definidas em X.
[50]Tendo em conta esta igualdade, é muito raro utilizar na prática a notação $f_{/A}(x)$: Utiliza-se $f_{/A}$ para designar a restrição mas escreve-se $f(x)$ para designar o valor da restrição num ponto $x \in A$.

No contexto da imagem intuitiva da função como uma máquina, fazer uma restrição a um subconjunto do domínio corresponde a colocar um filtro à entrada da máquina que deixa entrar menos números, sem alterar nada do que está dentro da máquina.

I.4.5 **(A função composta)** Sejam $f: X \to Y$ e $g: Y \to \mathbb{R}$ duas funções, em que, conforme o indicado, o domínio da segunda é um dos codomínios da primeira. Pode então definir-se uma nova função $g \circ f: X \to \mathbb{R}$, dita *composta* de g com f (ou g *após* f), cujo domínio coincide com o domínio de f, por

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

É claro que, se Z for um codomínio da função g, então Z é também um codomínio da função composta $g \circ f$, por outras palavras, se temos funções $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$, então tem-se $g \circ f: Z \to Z$. [51]

Repare-se que, mais uma vez no contexto da imagem intuitiva das funções como máquinas, a função composta é a máquina que se obtém ligando a saída da primeira máquina diretamente à entrada da segunda.

I.4.6 **(Exemplo)** Sejam $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ as funções definidas por $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x^2$. Tem-se então que as funções compostas $g \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f \circ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estão definidas por

$$g \circ f(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1, \quad f \circ g(x) = x^2 + 1,$$

em particular trata-se de funções distintas (a composição de funções não goza da propriedade comutativa).

I.4.7 **(A função identidade)** Seja $X \subset \mathbb{R}$. Pode então definir-se uma função $I_X: X \to \mathbb{R}$, a que se dá o nome de *função identidade* do conjunto X, pela igualdade $I_X(x) = x$, para cada $x \in X$. O contradomínio desta função é o próprio X e portanto ela admite como codomínios todos os conjuntos que contêm X, em particular podemos também escrever $I_X: X \to X$. As funções identidade têm um comportamento interessante no contexto das funções compostas que resumimos em três propriedades, das quais as duas primeiras lhes atribuem um caráter semelhante ao dos elementos neutros das operações:
a) Se $f: X \to Y$ é uma função, então

[51] Por vezes define-se mais geralmente a composta de duas funções sem exigir que o domínio da segunda seja um codomínio da primeira mas paga-se um preço por isso, uma vez que o domínio da composta passa a ser em geral mais pequeno que o domínio da primeira. Preferimos não trabalhar nessa situação mais geral (que o estudante poderá ter encontrado no ensino secundário) por questões de simplicidade e porque, em caso de necessidade, pode sempre substituir-se a primeira função por uma restrição conveniente para ficarmos nas hipóteses com que estamos a trabalhar.

$$f \circ I_X = f: X \to Y.$$

b) Se $f: X \to Y$ é uma função, então

$$I_Y \circ f = f: X \to Y.$$

c) Se $f: X \to Y$ é uma função e $A \subset X$, então, considerando a função identidade $I_A: A \to X$, tem-se

$$f \circ I_A = f_{/A}: A \to Y.$$

I.4.8 **(Associatvidade da composição)** Consideremos três funções

$$f: X \to Y, \quad g: Y \to Z, \quad h: Z \to \mathbb{R},$$

em que o codomínio de cada uma coincide com o domínio da seguinte. Tem-se então

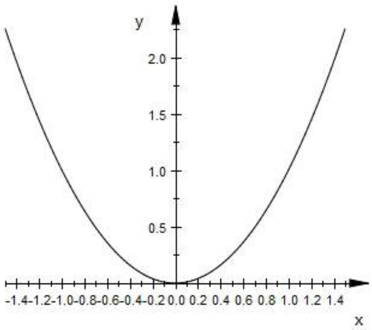
$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f): X \to \mathbb{R},$$

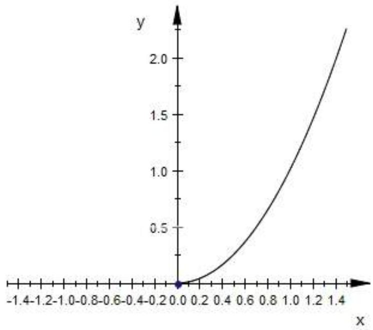
uma vez que ambos os membros transformam cada $x \in X$ em $h(g(f(x)))$. A função igual a ambos os membros da igualdade anterior é com frequência notada smplesmente $h \circ g \circ f: X \to \mathbb{R}$.

I.4.9 **(Funções injetivas)** Diz-se que uma função $f: X \to \mathbb{R}$ é *injetiva* se não existirem elementos diferentes do domínio que tenham a mesma imagem, ou seja, se quaisquer que sejam $x \neq a$ em X, tem-se $f(x) \neq f(a)$. Repare-se que, tendo em conta o método habitual de passagem ao contrarrecíproco, dizer que uma função $f: X \to \mathbb{R}$ é injetiva é equivalente a dizer que, sempre que $f(x) = f(a)$, tem-se necessariamente $x = a$.
Repare-se que é fácil intuir no gráfico duma função se ela é injetiva: Isso corresponde a verificar que não há pontos distintos do gráfico com a mesma ordenada, ou seja, que as retas paralelas ao eixo das abcissas nunca intersetam o gráfico em mais que um ponto.

O facto de uma função $f: X \to \mathbb{R}$ ser injetiva pode ser descrito simbolicamente pela implicação $f(x) = f(a) \Rightarrow x = a$. Ocasionalmente uma pessoa menos atenta usa, em vez daquela, a implicação contrária $x = a \Rightarrow f(x) = f(a)$. Repare-se que isso não faz qualquer sentido: Esta última implicação é válida para qualquer função, seja ela injetiva ou não, uma vez que um mesmo objeto não tem mais que uma imagem.

I.4.10 **(Exemplo)** A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ não é injetiva, como se reconhece recorrendo a um contraexemplo: Tem-se $f(-1) = f(1)$ apesar de se ter $-1 \neq 1$. No entanto, a restrição desta função ao subconjunto $[0, +\infty[$ do domínio, $f_{/[0,+\infty[}: [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, já é injetiva!





Com efeito, dados $x < a$ em $[0, +\infty[$ (reparar que, dados reais distintos, um deles é menor que o outro), tem-se, pelas relações bem conhecidas entre a multiplicação e a relação de ordem,

$$f(x) = x \times x < a \times a = f(a),$$

em particular $f(x) \neq f(a)$.

I.4.11 **(A função inversa)** Seja $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função injetiva e consideremos o respetivo contradomínio $f(X)$. Podemos definir, a partir de f, uma nova função $f^{-1}\colon f(X) \to X$, a que se dá o nome de *função inversa* da função f, cujo domínio é o contradomínio de f e cujo contradomínio é o domínio de f, do seguinte modo: Para cada $y \in f(X)$, o valor $f^{-1}(y)$ é o único elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$.
Repare-se que, dado $y \in f(X)$, a existência de pelo menos um x nestas condições resulta da definição de contradomínio e o facto de não haver mais do que um é uma consequência de estarmos a supor que f é injetiva.
Uma observação simples, mas importante, é que, se $f\colon X \to \mathbb{R}$ é injetiva, então a sua inversa $f^{-1}\colon f(X) \to X$ é também injetiva e tem como inversa a própria função f: Podemos escrever $(f^{-1})^{-1} = f$.

I.4.12 **(Exemplos) a)** Como vimos no exemplo I.4.10, podemos considerar uma função injetiva $g\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = x^2$. Uma vez que o quadrado de qualquer número real é sempre maior ou igual a 0, o contradomínio da função g está contido em $[0, +\infty[$ e, de facto, como verificámos em I.1.15, o contradomínio é mesmo igual a $[0, +\infty[$. A função inversa de g é a função $g^{-1}\colon [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ definida pela condição de, para cada $y \in [0, +\infty[$, $g^{-1}(y)$ ser o único $x \geq 0$ tal que $x^2 = y$ pelo que, lembrando a definição da raiz quadrada, tem-se $g^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

b) Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 1 - x$. O nosso objetivo é determinar o contradomínio de f, verificar se f é injetiva e, em caso afirmativo, clacular a função inversa. O método que vamos seguir, e que se aplica com frequência na prática, permite-nos fazer isto tudo de uma só vez. Comecemos por considerar $y \in \mathbb{R}$ arbitrário e determinar em que condições é

que y pertence ao contradomínio $f(\mathbb{R})$, isto é, quando é que a equação $y = f(x)$ admite solução. Ora esta equação é equivalente a $y = 1 - x$, e portanto também equivalente a $-y = x - 1$ e a $x = 1 - y$. Concluímos assim que existe sempre solução, ou seja, que o contradomínio de f é $\mathbb{R}$, mas também que essa solução é sempre única, o que quer dizer que a função f é injetiva, e, por fim, ficámos a saber calcular o valor de x tal que $f(x) = y$, que é a solução encontrada $x = 1 - y$. Podemos assim dizer que a função inversa $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por $f^{-1}(y) = 1 - y$.
Repare-se que, o que é de certo modo exececional, podemos dizer neste caso que se tem $f^{-1} = f$ (na definição duma função não é importante qual a letra que utilizamos como variável).
c) Seja agora $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x^2 - x$. Dado $y \in \mathbb{R}$, investiguemos as soluções de $f(x) = y$, isto é, de $x^2 - x = y$, ou ainda, de forma equivalente de $x^2 - x - y = 0$. Mas esta condição é uma equação do segundo grau em x, que sabemos ter duas soluções, nomeadamente

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4y}}{2},$$

se $1 + 4y > 0$, uma única solução se $1 + 4y = 0$ e nenhuma solução se $1 + 4y < 0$.[52] Podemos assm concluir que o contradomínio de f é o conjunto dos $y \in \mathbb{R}$ tais que $1 + 4y \geq 0$, portanto o intervalo $[-\frac{1}{4}, +\infty[$, e que a função f não é injetiva, e portanto não tem função inversa, por haver valores de y no contradomínio para os quais a equação tem mais que uma solução.

I.4.13 **(Exemplo elucidativo, embora mais delicado)** Consideremos agora a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

e tentemos determinar o contradomínio, averiguar a injetividade e, eventualmente, determinar a função inversa. Como anteriormente, dado $y \in \mathbb{R}$ tentamos resolver a equação $y = f(x)$, isto é,

(1) $$y = x + \sqrt{x^2 + 1}\,,$$

que é sucessivamente equivalente às condições (reparar no cuidado necessário, quando elevamos ambos os membros ao quadrado, para evitar introduzir falsas soluções)

(2) $$y - x = \sqrt{x^2 + 1}\,,$$

[52]Se o estudante tiver ocasião de rever o modo como se obtiveram no ensino secundário as soluções de uma equação do segundo grau constatará que nesse processo apenas foram necessárias as propriedades dos números reais revistas no início, para além da existência de raízes quadradas dos números reais maiores ou iguais a 0, que já justificámos atrás.

(3) $$y-x\geq 0\ \wedge\ (y-x)^2=x^2+1\,,$$

(4) $$y-x\geq 0\ \wedge\ y^2-2xy=1\,,$$

(5) $$y-x\geq 0\ \wedge\ y\neq 0\ \wedge\ x=\frac{y^2-1}{2y}\,,$$

(6) $$y\neq 0\ \wedge\ y-\frac{y^2-1}{2y}\geq 0\ \wedge\ x=\frac{y^2-1}{2y}\,,$$

(7) $$y\neq 0\ \wedge\ \frac{y^2+1}{2y}\geq 0\ \wedge\ x=\frac{y^2-1}{2y}\,,$$

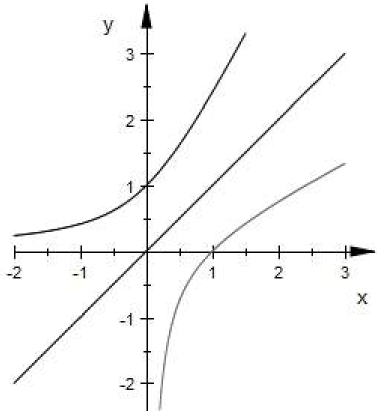
(8) $$y>0\ \wedge\ x=\frac{y^2-1}{2y}\,.$$

Desta última condição deduzimos que existe solução se, e só se, $y>0$ e que, nesse caso, a solução é única e dada a partir da última igualdade. Em conclusão, a função é injetiva, o contradomínio é o intervalo $]0,+\infty[$ e a função inversa é

$$f^{-1}\colon]0,+\infty[\,\to\mathbb{R},\quad f^{-1}(y)=\frac{y^2-1}{2y}.$$

Note-se que este exemplo permite ilustrar um erro que aparece frequentemente em soluções obtidas de forma apressada: Partindo da afirmação (verdadeira) de que o contradomínio da função f é o domínio da função inversa f^{-1} parte-se da expressão obtida para f^{-1} para afirmar erroneamente que o contradomínio de f seria $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, o domínio máximo de definição da expressão que caracteriza f^{-1}, esquecendo que o domínio de uma função não é necessariamente o domínio máximo de definição da expressão que a caracteriza.

I.4.14 Repare-se que, uma vez que, fixado um referencial, os pontos (x,y) e (y,x) são simétricos relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares, podemos concluir que os gráficos de uma função injetiva e da sua inversa obtêm-se um do outro por uma simetria relativamente a essa bissetriz. Na figura a seguir esboçamos os gráficos da função f examinada no exemplo I.4.13 e da sua inversa (este último em cinzento), representando também a bissetriz referida.



I.4.15 **(Funções sobrejetivas e funções bijetivas)** Ao contrário da noção de função injetiva, que tem apenas a ver com as propriedades da própria função, as noções que vamos agora definir dependem não só da função envolvida mas do codomínio desta que estamos a considerar. Dizemos que uma função $f: X \to Y$ é *sobrejetiva* (ou que a função f de domínio X é sobrejetiva quando se considera Y como codomínio) se $f(X) = Y$, isto é, se o codomínio considerado coincide com o contradomínio da função (em geral o contradomínio só tem que estar contido no codomínio que se considera). Quando se está a trabalhar com uma função $f: X \to Y$, para verificar que ela é sobrejetiva, o que é preciso é constatar que, para cada elemento $y \in Y$, existe pelo menos um $x \in X$ tal que $f(x) = y$.
Diz-se que uma função $f: X \to Y$ é *bijetiva* se for simultaneamente injetiva e sobrejetiva. A importância de uma função ser bijetiva é que ela tem inversa da forma $f^{-1}: Y \to X$.

I.4.16 Seja $f: X \to Y$ uma função bijetiva, com inversa $f^{-1}: Y \to X$. Tem-se então, como decorre diretamente da definição,

$$f^{-1} \circ f = I_X: X \to X, \quad f \circ f^{-1} = I_Y: Y \to Y.$$

I.4.17 Suponhamos, reciprocamente, que temos duas funções $f: X \to Y$ e $g: Y \to X$, tais que $g \circ f = I_X: X \to X$. Tem-se então que f é injetiva e a sua inversa é a restrição de g ao contradomínio de f:

$$f^{-1} = g_{/f(X)}: f(X) \to X.$$

Se, além disso, for também $f \circ g = I_Y: Y \to Y$, então $f: X \to Y$ é bijetiva e $f^{-1} = g: Y \to X$.
Dem: Para verificar que f é injetiva, basta reparar que, se $x, a \in X$ são tais que $f(x) = f(a)$, podemos concluir que

$$x = I_X(x) = g(f(x)) = g(f(a)) = I_X(a) = a.$$

Uma vez que f é injetiva, podemos considerar a sua inversa $f^{-1}: f(X) \to X$ e, para cada $y \in f(X)$, $f^{-1}(y)$ é, por definição, um elemento de X que verifica $f(f^{-1}(y)) = y$ e daqui deduzimos que

$$g(y) = g(f(f^{-1}(y))) = (g \circ f)(f^{-1}(y)) = I_X(f^{-1}(y)) = f^{-1}(y),$$

o que mostra que se tem efetivamente $f^{-1} = g_{/f(X)}: f(X) \to X$. Suponhamos agora que se tem também $f \circ g = I_Y: Y \to Y$. Para cada $y \in Y$, tem-se então $y = I_Y(y) = f(g(y))$, pelo que y é a imagem por f de um elemento de X, nomeadamente o elemento $g(y)$. Conclui-se assim que o contradomínio de f coincide com o codomínio Y pelo que a função inversa f^{-1} é igual à função g. □

I.4.18 **(Propriedades de monotonia)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f: X \to \mathbb{R}$ uma função.

a) Diz-se que f é *crescente* se, quaisquer que sejam $x < a$ em X, tem-se $f(x) \leq f(a)$. Diz-se que f é *estritamente crescente* se, quaisquer que sejam $x < a$ em X, tem-se $f(x) < f(a)$.

Repare-se que afirmar que f é estritamente crescente é equivalente a afirmar que f é crescente e injetiva. Repare-se também que a condição de f ser crescente pode ser enunciada, de modo equivalente, afirmando que, sempre que $x \leq a$ em X, tem-se $f(x) \leq f(a)$ (já que, quando $x = a$, tem-se sempre $f(x) = f(a)$, e portanto também $f(x) \leq f(a)$).

b) Diz-se que f é *decrescente* se, quaisquer que sejam $x < a$ em X, tem-se $f(x) \geq f(a)$. Diz-se que f é *estritamente decrescente* se, quaisquer que sejam $x < a$ em X, tem-se $f(x) > f(a)$.

Repare-se que afirmar que f é estritamente decrescente é equivalente a afirmar que f é decrescente e injetiva. Repare-se também que a condição de f ser decrescente pode ser enunciada, de modo equivalente, afirmando que, sempre que $x \leq a$ em X, tem-se $f(x) \geq f(a)$ (já que, quando $x = a$, tem-se sempre $f(x) = f(a)$, e portanto também $f(x) \geq f(a)$).

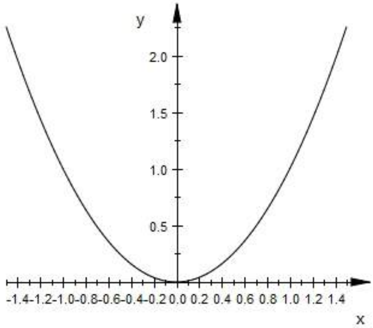
c) Diz-se que f é *monótona* se f for crescente ou decrescente e que f é *estritamente monótona* se f for estritamente crescente ou estritamente decrescente.

Repare-se que as propriedades de monotonia são facilmente intuidas a partir do gráfico da função. Por exemplo, quando uma função é estritamente crescente o gráfico sobe e quando a função é estritamente decrescente o gráfico desce (ou, o que é o mesmo, a secante definida por dois pontos arbitrários do gráfico sobre ou desce, respetivamente).

I.4.19 **(Exemplos) a)** Se $X \subset \mathbb{R}$, a função identidade $I_X: X \to \mathbb{R}$, definida por $I_X(x) = x$ é estritamente crescente e a função $-I_X: X \to \mathbb{R}$, que a cada $x \in X$ associa $-x$, é estritamente decrescente (se $x < a$, então $-x > -a$).

b) Se $b \in \mathbb{R}$ é um real fixado e $X \subset \mathbb{R}$, então a função constante $f: X \to \mathbb{R}$. definida por $f(x) = b$, é simultaneamente crescente e decrescente. No entanto, afastadas as situações triviais em que X tem um único elemento ou é

vazio, a função constante não é estritamente crescente nem estritamente decrescente.
c) Consideremos a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$.



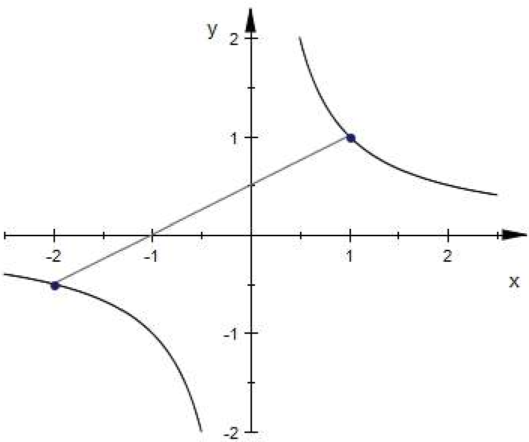
Esta função tem restrição estritamente crescente ao intervalo $[0, +\infty[$, uma vez que, se $0 \le x < a$, tem-se

$$x^2 = x \times x \le x \times a < a \times a = a^2.$$

No entanto, esta função não é monótona, uma vez que a sua restrição ao intervalo $]-\infty, 0]$ é estritamente decrescente, já que, se $x < a \le 0$, vem $0 \le -a < -x$, portanto

$$x^2 = (-x)^2 > (-a)^2 = a^2.$$

d) A função $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ tem uma restrição estritamente decrescente ao intervalo $]0, +\infty[$ uma vez que, se $0 < x < a$, tem-se $\frac{1}{x} > \frac{1}{a}$.



Esta função tem também uma restrição estritamente descrescente ao intervalo $]-\infty, 0[$, um vez que, se $x < a < 0$, tem-se $-x > -a > 0$, donde

$$-\frac{1}{x} = \frac{1}{-x} < \frac{1}{-a} = -\frac{1}{a},$$

e portanto $\frac{1}{x} > \frac{1}{a}$. No entanto, a função f não é estritamente decrescente, uma vez que, por exemplo, $-2 < 1$ e $f(-2) = -\frac{1}{2} < 1 = f(1)$.

e) A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

(conhecida como *função de Dirichlet*) não só não é monótona como não tem restrição monótona a nenhum intervalo $[a, b]$ com $a < b$. Repare-se, a propósito, que o contradomínio desta função é o conjunto $\{0, 1\}$, com dois elementos, e que não é possível esboçar um gráfico para ela (apesar de o gráfico ser um conjunto bem definido de pontos do plano).

I.4.20 **(Composição e monotonia)** Sejam $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to \mathbb{R}$ duas funções e consideremos a respetiva composta $g \circ f\colon X \to \mathbb{R}$. Tem-se então:

a) Se f é crescente (respetivamente estritamente crescente) e g é crescente (respetivamente estritamente crescente), então $g \circ f$ é crescente (respetivamente estritamente crescente).

b) Se f é crescente (respetivamente estritamente crescente) e g é decrescente (respetivamente estritamente decrescente), então $g \circ f$ é decrescente (respetivamente estritamente decrescente).

c) Se f é decrescente (respetivamente estritamente decrescente) e g é crescente (respetivamente estritamente crescente), então $g \circ f$ é decrescente (respetivamente estritamente decrescente).

d) Se f é decrescente (respetivamente estritamente decrescente) e g é decrescente (respetivamente estritamente decrescente), então $g \circ f$ é crescente (respetivamente estritamente crescente).

Dem: Todas as alíneas têm uma justificação semelhante pelo justificaremos apenas a alínea d). Ora, supondo que f e g são ambas decrescentes, vemos que, sempre que $x < a$ em X, vem, em primeiro lugar, $f(x) \geq f(a)$ e portanto $g(f(x)) \leq g(f(a))$, o que mostra que $g \circ f$ é crescente. Analogamente, supondo que f e g são ambas estritamente decrescentes, vemos que, sempre que $x < a$ em X, vem, em primeiro lugar, $f(x) > f(a)$ e portanto $g(f(x)) < g(f(a))$, o que mostra que $g \circ f$ é estritamente crescente. $\square$

I.4.21 **(Exemplos) a)** Se $f\colon X \to \mathbb{R}$ é uma função crescente, então a função $g = -f\colon X \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = -f(x)$, é decrescente, por ser a composta da função $f\colon X \to \mathbb{R}$ seguida da função decrescente $-I_{\mathbb{R}}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

b) Se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função estritamente decrescente, então a função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = -f(-x)$, é também estritamente decrescente, por ser a composta de três funções estritamente decrescentes, $-I_{\mathbb{R}}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, seguida da função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e seguida de novo da função $-I_{\mathbb{R}}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

c) Se $f\colon X \to]0, +\infty[$ é uma função estritamente crescente, então é estritamente decrescente a função de X para $]0,+\infty[$ que a x associa $\frac{1}{f(x)}$ (frequentemente descrita como $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$), uma vez se trata da composta da função estritamente decrescente de $]0,+\infty[$ para $]0,+\infty[$, $y \mapsto \frac{1}{y}$, com f.

I.4.22 **(Inversa de função monótona)** Seja $f\colon X \to Y$ uma função bijetiva crescente (respetivamente decrescente). Tem-se então que a função inversa $f^{-1}\colon Y \to X$ é também crescente (respetivamente decrescente).

Dem: Examinemos apenas o caso em que f é crescente, ou seja, estritamente crescente, uma vez que a demonstração do caso em que a função de partida é decrescente é análogo. Sejam então $y < b$ em Y. Temos que provar que se tem $f^{-1}(y) < f^{-1}(b)$ e isso resulta de que não pode ser $f^{-1}(y) > f^{-1}(b)$, senão tinha-se

$$y = f(f^{-1}(y)) > f(f^{-1}(b)) = b,$$

nem pode ser $f^{-1}(y) = f^{-1}(b)$, senão tinha-se

$$y = f(f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(b)) = b. \qquad \square$$

I.4.23 **(Exemplo)** A função $h\colon [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ definida por $h(y) = \sqrt{y}$ é estritamente crescente, uma vez que, como referido nos exemplos na alínea a) de I.4.12 e na alínea c) de I.4.19, ela é a inversa da função estritamente crescente $g\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2$.

O resultado a seguir tem um enunciado longo para examinar todas as hipóteses de aplicação. Para o estudante que possa ficar atemorizado, ou para aquele que queira simplesmente ficar com uma mnemónica das principais conclusões que vão ser enunciadas, podemos resumir dizendo que a soma de funções com o mesmo tipo de monotonia tem o mesmo tipo de monotonia, que o produto de uma função com um certo tipo de monotonia por uma constante $c > 0$ tem o mesmo tipo de monotonia e que o produto de uma função com um certo tipo de monotonia por uma constante $c < 0$ tem o tipo de monotonia oposto.

I.4.24 **(Soma de funções monótonas)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto, $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ duas funções e $c \in \mathbb{R}$ uma constante e consideremos a *função soma* $f + g\colon X \to \mathbb{R}$ e a função $cf\colon X \to \mathbb{R}$, definidas por

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (cf)(x) = cf(x).$$

Tem-se então:

a) Se f e g são crescentes, então $f + g$ é também crescente, sendo mesmo estritamente crescente no caso em que pelo menos uma das funções f e g seja mesmo estritamente crescente.

b) Se f e g são decrescentes, então $f + g$ é também decrescente, sendo mesmo estritamente decrescente no caso em que pelo menos uma das funções

f e g seja mesmo estritamente decrescente.
c) Se f é crescente e $c \geq 0$, então cf é crescente, sendo mesmo estritamente crescente no caso em que $c > 0$ e f seja estritamente crescente.
d) Se f é crescente e $c \leq 0$, então cf é decrescente, sendo mesmo estritamente decrescente no caso em que $c < 0$ e f seja estritamente crescente.
e) Se f é decrescente e $c \geq 0$, então cf é decrescente, sendo mesmo estritamente decrescente no caso em que $c > 0$ e f seja estritamente decrescente.
f) Se f é decrescente e $c \leq 0$, então cf é crescente, sendo mesmo estritamente crescente no caso em que $c < 0$ e f seja estritamente decrescente.
Dem: A conclusão de cada uma das alíneas resulta facilmente das propriedades de $\mathbb{R}$ como corpo ordenado que foram recordadas em I.1.3. A título de exemplo, justifiquemos a) no caso em que f é crescente e g é estritamente crescente. Podemos então dizer que, sempre que $x < a$ em X, vem $f(x) \leq f(a)$ e $g(x) < g(a)$, portanto

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \leq f(a) + g(x) < f(a) + g(a) = (f+g)(a),$$

o que mostra que $f+g$ é estritamente crescente. □

Para termos um resultado análogo para o produto de funções monótonas, temos que ser um pouco mais cuidadosos uma vez que, como sabemos, a multiplicação de ambos os membros de uma desigualdade por um real negativo inverte o sentido da desigualdade. Para obtermos um enunciado simples e uma vez que isso se revela suficiente para a maioria das aplicações, vamos restringir a nossa atenção ao caso das funções com $[0, +\infty[$ como codomínio. Com essa hipótese, o resultado a seguir vai-nos dizer que o produto de funções com o mesmo tipo de monotonia vai ter ainda esse tipo de monotonia.

I.4.25 **(Produto de funções monótonas positivas)** Em geral, se $X \subset \mathbb{R}$ e se $f, g: X \to \mathbb{R}$ são duas funções, define-se a *função produto* $f \times g: X \to \mathbb{R}$ pela condição de se ter

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x).$$

Tem-se então:
a) Se $f, g: X \to [0, +\infty[$ são crescentes (respetivamente estritamente crescentes) então $f \times g: X \to [0, +\infty[$ é crescente (respetivamente estritamente crescente).
b) Se $f, g: X \to [0, +\infty[$ são decrescentes (respetivamente estritamente decrescentes) então $f \times g: X \to [0, +\infty[$ é decrescente (respetivamente estritamente decrescente).
Dem: Como no resultado precedente, temos conclusões diretas das propriedades de $\mathbb{R}$ como corpo ordenado que foram recordadas em I.1.3. □

I.4.26 **(Corolário)** Para cada natural $k \geq 1$, tem lugar uma função estritamente crescente $f_k: [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ definida por $f_k(x) = x^k$ (a *função* *potência de expoente* k).

Dem: Trata-se de uma consequência de I.4.25, por indução em k, uma vez que f_1 é a função identidade e que $f_{k+1}(x) = f_k(x) \times x$. □

I.4.27 Existem ainda noções que são conhecidas no contexto dos conjuntos de números reais e que se aplicam às funções, através dos respetivos contradomínios. Nomeadamente:

a) Uma função $f: X \to \mathbb{R}$ diz-se *majorada*, *minorada* ou *limitada* quando o contradomínio $f(X)$ for majorado, minorado ou limitado, respetivamente.

b) Chamam-se *supremo* e *ínfimo* da função $f: X \to \mathbb{R}$ aos supremo e ínfimo do contradomínio $f(X)$, que podem ser finitos ou infinitos. O supremo de f é notado

$$\sup(f) \;\text{ ou }\; \sup_{x \in X} f(x)$$

e diz-se *máximo* da função no caso em que pertencer ao contradomínio e o ínfimo de f é notado

$$\inf(f) \;\text{ ou }\; \inf_{x \in X} f(x)$$

e diz-se *mínimo* da função no caso em que pertencer ao contradomínio. Quando $A \subset X$ é um subconjunto do domínio, o supremo $\sup(f_{/A})$ e o ínfimo $\inf(f_{/A})$ da restrição de f a A são também notados $\sup_{x \in A} f(x)$ e $\inf_{x \in A} f(x)$ respetivamente.

I.4.28 **(Observação sobre as funções trigonométricas)** As funções trigonométricas, que o estudante já conhece do ensino secundário, têm um caráter diferente das outras que temos encontrado neste curso, uma vez que a sua definição não se baseia apenas na Análise Matemática mas entronca profundamente nas relações dos números reais com a Geometria, nomeadamente na possibilidade de associar, fixado um referencial ortogonal e monométrico, a cada número real uma posição de uma semirreta partindo da origem, que é determinada pela rotação do semieixo positivo das abcissas, no "sentido direto" e medida em radianos, associada a esse número real. Conhecida essa semirreta, os valores das funções trigonométricas estão determinados pelas coordenadas do ponto desta que pertence ao círculo trigonométrico, $\cos(x)$ é a abcissa, $\mathrm{sen}(x)$ é a ordenada e $\tan(x) = \frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}$. Tendo em conta as considerações anteriores, as funções trigonométricas, enquanto estiverem dependentes da sua definição geométrica[53], serão apenas utilizadas, por um lado como apoio a exemplos, por outro como instrumento para a resolução de problemas no contexto da aplicação da Análise Matemática à Geometria ou a

[53]Existem definições puramente do âmbito da Análise Matemática de funções "gémeas" das funções trigonométricas que se prova, por métodos que recorrem à Geometria, coincidirem com estas. Na secção IV.3 adiante daremos o exemplo de um método de construção dessas funções "gémas".

outras Ciências. As observações que fizémos relativamente às funções trigonométricas aplicam-se do mesmo modo ao número π, cuja definição nos é dada neste momento apenas por métodos geométricos (área do círculo de raio 1 ou semiperímetro deste).

I.4.29 **(Sucessões)** Chama-se *sucessão* a uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, cujo domínio é o conjunto dos números naturais. Às sucessões pode assim aplicar-se tudo que estudámos sobre funções em geral. Há, no entanto algumas particularidades das sucessões relativamente às restantes funções:

Quando uma função é uma sucessão, os valores da função costumam ser chamados *termos* da sucessão e ter uma interpretação *ordinal*: $f(1)$ é o primeiro termo (ou termo de ordem 1), $f(2)$ é o segundo termo (ou termo de ordem 2) e assim sucessivamente. Também dizemos que $f(n+1)$ é o *termo seguinte* ao termo $f(n)$. Esta interpretação ordinal das sucessões conduz também à imagem intuitiva de uma sucessão como uma "fila infinita" de números escritos uns a seguir aos outros

$$f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n), f(n+1), \ldots\ .$$

Outra particularidade é a notação: Para nos referirmos ao termo de ordem n de uma sucessão, ou seja à imagem de $n \in \mathbb{N}$ pela função correspondente, costuma-se pôr o valor n em índice e escrever u_n no lugar de $u(n)$ (também é tradicional utilizar letras diferentes para as funções gerais e para as sucessões, embora isso não seja obrigatório: $f, g, h, \ldots$ costumam designar funções enquanto que para os termos das sucessões costuma escrever-se u_n, v_n, $x_n, \ldots$). Ainda outra característica da notação das sucessões é a de que não é costume (embora não seja proibido) chamar u à sucessão cujo termo de ordem n é u_n, descrevendo, em vez disso, esta sucessão como sendo a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou, ainda mais simplesmente, a sucessão (u_n) (os parênteses, neste último caso, destinam-se a distinguir a sucessão de um termo particular desta).

I.4.30 **(Caracterização alternativa da monotonia de uma sucessão)** Seja (u_n) uma sucessão. Os diferentes tipos de monotonia podem ser caracterizados por comparação de cada termo com o seguinte:

a) A sucessão é crescente (respetivamente estritamente crescente) se, e só se, para cada $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ (respetivamente $u_n < u_{n+1}$).

b) A sucessão é decrescente (respetivamente estritamente decrescente) se, e só se, para cada $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$ (respetivamente $u_n > u_{n+1}$).

Dem: Como já fizémos anteriormente justificamos apenas uma das quatro afirmações, por exemplo a da alínea a) relativa às sucessões crescentes, uma vez que as outras justificações são totalmente análogas. Uma das implicações é evidente: Se a sucessão é crescente, então, para cada $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$, uma vez que $n < n+1$. Suponhamos, reciprocamente, que, para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se $u_n \leq u_{n+1}$. Temos que provar que, sempre que $n < m$, tem-se $u_n \leq u_m$. Para isso, e tendo em visto uma tentativa de aplicar o método de indução matemática, começamos por reparar que os números naturais m tais que $n < m$ são exatamente os que se podem escrever na forma $n + k$ com $k \in \mathbb{N}$ pelo que ficamos reduzidos a mostrar que, fixado $n \in \mathbb{N}$, tem-se, para cada $k \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+k}$.[54] Ora, para $k = 1$ esta afirmação é verdadeira, por corresponder à hipótese que estamos a fazer e, supondo (hipótese de indução) que ela é verdadeira para $k = p$, vemos que, quando $k = p + 1$, podemos escrever, tendo em conta a hipótese de indução e, mais uma vez, a hipótese de cada termo ser menor ou igual ao seguinte,

$$u_n \leq u_{n+p} \leq u_{(n+p)+1} = u_{n+(p+1)},$$

o que mostra que a afirmação é verdadeira para $k = p + 1$. □

I.4.31 **(Construção de sucessões pelo método recursivo)** Para além dos métodos usuais que se utilizam para construir funções gerais, existe ainda um que é exclusivo das sucessões, o *método recursivo*. Este método tem alguma coisa a ver como o método de demonstração por indução matemática mas não se deve confundir com este.[55] O método consiste em definir qual vai ser o valor do primeiro termo u_1 e dar uma regra que diga o que deve ser o termo de ordem $n + 1$, u_{n+1}, para quem conheça o termo u_n de ordem n (o *passo recursivo*). A justificação intuitiva do método é que podemos determinar u_2, uma vez que já conhecemos u_1, seguidamente podemos determinar u_3 a partir de u_2, depois u_4 a partir de u_3 e assim sucessivamente, com tanto mais trabalho quanto maior for o valor de n, podemos chegar à determinação de u_n para qualquer valor particular de n, o que nos leva a considerar a sucessão como definida.

Tal como referimos nas observações a propósito do método de indução que fizémos a seguir a I.2.1, a considerações anteriores para justificar a validade do método recursivo devem ser encaradas como justificações meramente intuitivas e não como verdadeiras justificações. Num curso mais avançado de fundamentos da Matemática seria possível apresentar uma justificação correta da validade do método recursivo, baseada numa afirmação que se demonstra pelo método de indução matemática, mas apresentá-la aqui seria na nossa opinião demasiado abstrato.

I.4.32 **(Exemplos) a)** O fatorial $n!$ de um número natural n foi definido como o produto de todos os números naturais desde 1 até n. Uma forma alternativa, e de certa forma mais correta, de apresentar esta definição é dar uma definição recursiva da função de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{N}$ que a n associa $n!$ pondo

---

[54]Alternativamente podíamos substituir o “truque” de escrever m na forma $n + k$, por uma indução matemática na versão alternativa examinada em I.2.6.

[55]Trata-se de um método para definir uma sucessão e não de um método para justificar uma afirmação.

$$\begin{aligned}
&1! = 1,\\
&(n+1)! = (n+1) \times n!
\end{aligned}$$

(a primeira igualdade diz-nos qual é a imagem do natural 1 e a segunda qual é a imagem de $n+1$ desde que se conheça a imagem de n). Lembramos de novo que, apesar de 0 não ser um número natural, também se define $0! = 1$, o que é compatível com o passo rescursivo, uma vez que $1! = 1 = 1 \times 0!$.

b) Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais. A partir desta pode-se construir recursivamente uma nova sucessão $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dita *sucessão das somas parciais* da primeira, por

$$\begin{aligned}
&S_1 = u_1,\\
&S_{n+1} = S_n + u_{n+1}.
\end{aligned}$$

Tem-se assim $S_2 = u_1 + u_2$, $S_3 = u_1 + u_2 + u_3$ e, em geral,

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

(fórmula que, desde que devidamente compreendida, pode ser facilmente demonstrada por indução matemática[56]). Esta sucessão das somas parciais vai ser importante quando examinarmos adiante as séries de números reais.

I.4.33 **(Uma variante do método recursivo)** Há situações em que, sem entrar diretamente dentro do que foi explicado em I.4.31, se pode considerar construções de sucessões por métodos que se podem considerar recursivos. Sem tentar examinar a máxima generalidade, citamos apenas mais uma situação que aparece com frequência: Pode definir-se recursivamente uma sucessão definindo arbitrariamente quais os valores dos dois primeiros termos u_1 e u_2 e dando em seguida uma regra que defina o que deve ser o termo u_{n+2} para quem conheça os termos u_n e u_{n+1} (ficamos a conhecer u_3, por já conhecermos u_1 e u_2, em seguida u_4 fica determinado por já conhecermos u_2 e u_3 e assim sucessivamente). Um exemplo bem conhecido desta variante do método recursivo é a definição da *sucessão de Fibonacci*, definida por

$$\begin{aligned}
&u_1 = 1\\
&u_2 = 1\\
&u_{n+2} = u_n + u_{n+1}
\end{aligned}$$

e cujos primeiros termos são assim

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\ .$$

[56]Naturalmente o método de indução matemático é o método mais indicado para justificar afirmações envolvendo uma sucessão definida recursivamente.

Exercícios

Ex I.4.1 Determinar os domínios máximos onde se podem definir funções pelas expressões seguintes:

$$
\begin{aligned}
&\textbf{a)}\ f(x) = \frac{1}{x^3 - x}\ ;\\
&\textbf{b)}\ f(x) = \frac{x-1}{x^2 - \sqrt{x}}\ ;\\
&\textbf{c)}\ f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{1-3x+2x^2}}\ .
\end{aligned}
$$

Ex I.4.2 Determinar os contradomínios das seguintes funções:
a) $f\colon]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x + \frac{1}{x}$.
b) $f\colon X \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt{x(4-x)}$, onde X é o maior domínio de definição desta expressão.
c) $f\colon X \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \frac{x^2+2x-2}{x^2-x+1},$$

onde X é o maior domínio de definição desta expressão.
d) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x - \operatorname{int}(x)$, onde $\operatorname{int}(x)$ é a parte inteira de x, definida em I.1.13.
e) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x + \operatorname{int}(x)$.

Ex I.4.3 **a)** Sejam $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ as funções definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Determinar as compostas $g \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f \circ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
b) Mostrar que a função $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ admite $[-1,1]$ como codomínio e determinar a função composta

$$f \circ f\colon [-1,1] \to [-1,1].$$

c) Seja agora $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ (restrição da função considerada na alínea anterior). Mostrar que esta função admite $[0,1]$ como codomínio e caracterizar em seguida a função composta $f \circ f\colon [0,1] \to [0,1]$. O que poderá concluir sobre a função f a partir do resultado obtido?

Ex I.4.4 Determinar quais os números reais a e b para os quais a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$ é invertível e tem inversa $f^{-1} = f$.

Ex I.4.5 **a)** Determinar uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para cada $x \neq 0$,

$$f(\frac{1}{x}) = x^2 + 1.$$

b) Mostrar que não existe nenhuma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para cada x no domínio,

$$f(x^2) = 1 + x,$$

mas que já existe uma função $f\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ nestas condições.

Ex I.4.6 Para cada uma das funções seguintes, verificar se é invertível e, em caso afirmativo, determinar a respetiva inversa.
a) $f\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \sqrt{x}$.
b) $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.
c) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x}{x+1}.$$

★ **d)** $f\colon]-1, 1[\to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Ex I.4.7 Sejam $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ duas funções em que, como indicado, o codomínio considerado para a primeira coincide com o domínio da segunda. Mostrar que:
a) Se f e g são injetivas, também $g \circ f\colon X \to Z$ é injetiva.
b) Se $g \circ f\colon X \to Z$ for injetiva, então f é injetiva. Encontrar um exemplo em que $g \circ f\colon X \to Z$ seja injetiva, sem que g seja injetiva.
c) Se $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ são sobrejetivas, também $g \circ f\colon X \to Z$ é sobrejetiva.
d) Se $g \circ f\colon X \to Z$ for sobrejetiva, então $g\colon Y \to Z$ é sobrejetiva. Encontrar um exemplo em que $g \circ f\colon X \to Z$ seja sobrejetiva, sem que $f\colon X \to Y$ seja sobrejetiva.

Ex I.4.8 Mostrar que para cada número ímpar p a função $f_p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f_p(x) = x^p$, é estritamente crescente. **Sugestão:** Utilizar o facto, já verificado em I.4.26 de a restrição de f_p a $[0, +\infty[$ ser estritamente crescente).

Ex I.4.9 Generalizar uma parte do raciocínio feito na resolução do exercício I.4.8 para provar o seguinte facto geral.
Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in X$ um elemento fixado e notemos $X_{\leq a}$ e $X_{\geq a}$ os subconjuntos de X constituídos respetivamente pelos elementos de X que

são menores ou iguais a a e por aqueles que são maiores ou iguais a a. Se $f\colon X \to \mathbb{R}$ é uma função com restrição estritamente crescente (repetivamente, crescente, estritamente decrescente ou decrescente) a cada um dos conjuntos $X_{\le a}$ e $X_{\ge a}$, então f é uma função estritamente crescente (respetivamente, crescente, estritamente decrescente ou decrescente).
Por contraste, reparar no que sucedia no exemplo que examinámos na alínea d) de I.4.19, em que se tem uma decomposição do domínio análoga à anterior mas determinada por um ponto que não pertence ao domínio.

Ex I.4.10 Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função. Mostrar que

$$\inf_{x\in X} -f(x) = -\sup_{x\in X} f(x), \quad \sup_{x\in X} -f(x) = -\inf_{x\in X} f(x).$$

Ex I.4.11 **a)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ duas funções, cada uma com supremo finito. Mostrar que a função soma $f+g\colon X \to \mathbb{R}$ também tem supremo finito e que

$$\sup(f+g) \le \sup(f) + \sup(g).$$

Dar um exemplo de funções f e g em que os dois membos são iguais e outro em que a desigualdade seja estrita.
b) Enunciar e justificar um resultado análogo ao da alínea a) mas com o ínfimo no lugar do supremo.

Ex I.4.12 **a)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função com supremo finito e $c \ge 0$ um real fixado. Mostrar que

$$\sup_{x\in X} cf(x) = c\sup_{x\in X} f(x).$$

b) Enunciar e justificar um resultado análogo ao da alínea a) mas com o ínfimo no lugar do supremo.

★ Ex I.4.13 Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f\colon X \to [0, +\infty[$ uma função com supremo finito. Mostrar que

$$\sup_{x\in X} f(x)^2 = \left(\sup_{x\in X} f(x)\right)^2.$$

Ex I.4.14 Seja $b > 0$ um real fixado. Mostrar que a sucessão (u_n) definida por $u_n = b^n$ é estritamente crescente se $b > 1$ e estritamente decrescente se $b < 1$.

Ex I.4.15 Considerar a sucessão (x_n) de números reais definida recursivamente por

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n}.$$

Mostrar que esta sucessão é estritamente crescente e majorada. **Sugestão:**

Provar por indução matemática que se tem, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq x_{n+1}$ e $x_n \leq 4$.

Ex I.4.16 Considerar a sucessão (x_n) de números reais definida recursivamente por

$$x_1 = 5, \quad x_{n+1} = \frac{2}{3}\,x_n + 1.$$

Mostrar que esta sucessão é estritamente decrescente e minorada.

Ex I.4.17 Considerar a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida recursivamente por

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 1, \quad u_{n+2} = \frac{u_n + u_{n+1}}{2}$$

(a partir do terceiro, cada termo é a média dos dois anteriores).
a) Mostrar que esta sucessão não é crescente nem decrescente.
b) Mostrar que esta sucessão é limitada.

★★ Ex I.4.18 **(Uma caracterização das funções estritamente monótonas)** É uma consequência direta das definições que, se $X \subset \mathbb{R}$ e $f\colon X \to \mathbb{R}$ é uma função estritamente monótona (cf. I.4.18) então, sempre que $x, y, z \in X$ e y está entre x e z (cf. I.1.4), $f(y)$ está entre $f(x)$ e $f(z)$. O objetivo deste exercício é provar um recíproco, afastado o caso em que o domínio X tenha dois elementos ou menos.
Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto com pelo menos três elementos e seja $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função tal que, sempre que $x, y, z \in X$ e $x < y < z$, $f(y)$ está entre $f(x)$ e $f(z)$. Mostrar que f é estritamente monótona, seguindo o seguinte caminho:
a) Mostrar que f é uma função injetiva.[57] **Sugestão:** Dados três reais distintos há sempre um que está entre os outros dois.
b) Sejam $a < b$ em X tais que $f(a) < f(b)$ (respetivamente $f(a) > f(b)$). Mostrar que a restrição de f a $[a, b] \cap X$ é estritamente crescente (respetivamente estritamente decrescente).
c) Sejam $a < b$ em X tais que $f(a) < f(b)$ (respetivamente $f(a) > f(b)$). Mostrar que a função f é estritamente crescente (respetivamente estritamente decrescente). **Sugestão:** Dados $x < y$ em X, para provar que $f(x) < f(y)$ (respetivamente $f(x) > f(y)$) aplicar duas vezes a conclusão de b), com o menor dos quatro números a, b, x, y no lugar de a e o maior desses números no lugar de b.

[57] É para esta alínea que precisamos que X tenha pelo menos três elementos. Repare-se que, se X tivesse dois elementos, uma função constante não é estritamente monótona e verifica a condição referida.

§5. Limites de funções e de sucessões.

A noção de limite de uma função f num ponto a joga um papel central em toda a Análise Matemática intervindo, por exemplo, na definição da continuidade e da derivada. Intuitivamente, a função f tem limite b no ponto a (ou quando a variável tende para a) se, sempre que x é um elemento do domínio próximo de a, $f(x)$ está próximo de b. Por uma questão técnica, ligada á unicidade do limite, convirá que o ponto a esteja próximo do domínio da função, isto é, que seja aderente a esse domínio. No entanto, como já referimos a propósito da noção de ponto aderente a um conjunto, a noção de proximidade não é uma noção absoluta mas está sempre dependente de um critério de proximidade, que corresponde a fixar um número maior que 0. Para além disso, constata-se que, para obtermos uma definição útil, é necessário admitir que os critérios de proximidade para os pontos a e b não sejam necessariamente os mesmos e que o primeiro possa depender do segundo. Somos assim conduzidos à seguinte definição que, apesar de não coincidir com a utilizada habitualmente no ensino secundário, veremos mais tarde ser equivalente a esta.

I.5.1 Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função de domínio X e a um real estendido aderente ao domínio X.[58] Dado $b \in \overline{\mathbb{R}}$, diz-se que b é *limite* de f *no ponto* a (ou que b é limite de $f(x)$ quando x tende para a) e escreve-se simbolicamente

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b,$$

se, qualquer que seja o critério de proximidade $\delta > 0$ para b, é possível considerar um critério de proximidade $\varepsilon > 0$ para a (em geral dependente de δ) tal que, para todos os pontos $x \in X$ que estão ε-próximos de a (*i. e.* pertencem a $V_\varepsilon(a)$), as correspondentes imagens $f(x)$ estão δ-próximas de b (i. e. pertencem a $V_\delta(b)$).[59]

Tal como acontecia com a noção de ponto aderente a um conjunto, a noção de limite pode ser olhada intuitivamente no contexto de um jogo, só que agora com três jogadas e não duas, como acontecia então. O primeiro jogador faz o seu lance escolhendo $\delta > 0$. Em seguida, o segundo jogador escolhe $\varepsilon > 0$. Por fim, vota a jogar o primeiro jogador escolhendo $x \in X$ na vizinhança $V_\varepsilon(a)$ (a garantia que ele pode jogar resulta de supormos que a é aderente ao domínio X). Se nesta jogada o primeiro jogador conseguir que $f(x)$ não pertença a $V_\delta(b)$ ele ganha; caso contrário ganha o

[58] Reparar que a pode ser finito, $+\infty$ ou $-\infty$.

[59] Repare-se que, tal como acontecia com a, o limite b pode ser finito, $+\infty$ ou $-\infty$.

segundo jogador.[60] Dizer que b é limite de f no ponto a é dizer que o segundo jogador tem uma estratégia que lhe permita ganhar qualquer que seja a jogada inicial do primeiro e dizer que b não é limite é dizer que é o primeiro jogador que tem uma estratégia ganhadora.
Refira-se a propósito que não devemos confundir a existência de limite para uma função num ponto com a noção de função limitada (referida na alínea a) de I.4.27): A semelhança das raizes das duas palavras "limitada" e "limite" é um "acidente" da língua portuguesa, que não aparece, por exemplo, no inglês ("bounded" e "limit") nem no francês ("borné" e "limite").

I.5.2 **(Consequência de uma desigualdade estrita entre limites e unicidade do limite)** Sejam $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ duas funções, a um real estendido aderente a X e suponhamos que se tem

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b \in \overline{\mathbb{R}}, \quad g(x) \xrightarrow[x\to a]{} c \in \overline{\mathbb{R}},$$

com $b < c$. Existe então $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $x \in X$ na vizinhança $V_\varepsilon(a)$, $f(x) < g(x)$.
Em particular, dados uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ e um real estendido a aderente a X, não pode haver mais que um real estendido b que seja limite de $f(x)$ quando x tende para a.
Por esse motivo, quando existe limite, podemos referir-nos a ele como sendo **o** limite de f no ponto a (ou **o** limite de $f(x)$ quando x tende para a) e usar, para o designar, a notação

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

Têm assim o mesmo significado as expressões $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.[61]

Dem: Tendo em conta a propriedade de Hausdorff das vizinhanças, que examinámos em I.3.13, podemos considerar $\delta > 0$ tal que $y < z$, para cada $y \in V_\delta(b)$ e $z \in V_\delta(c)$. Por definição, podemos considerar $\varepsilon' > 0$ e $\varepsilon'' > 0$ tais que, para cada $x \in A$ que esteja ε'-próximo (respetivamente ε''-próximo) de a, $f(x) \in V_\delta(b)$ (respetivamente $g(x) \in V_\delta(c)$), em particular $f(x) < g(x)$. Sendo $\varepsilon > 0$ o menor dos dois números ε' e ε'', o facto de os elementos $x \in X \cap V_\varepsilon(a)$ estarem simultaneamente ε'-próximos e ε''-próximos de a implica que para esses elementos tem-se $f(x) < g(x)$.
Para concluir que uma dada função $f\colon X \to \mathbb{R}$ não pode ter mais que um limite quando x tende para a basta agora repararmos que se fosse simultanea-

[60] Como no "jogo do ponto aderente" a primeira jogada é tanto melhor quanto menor for o δ e a segunda jogada também é tanto melhor quanto menor for o ε.
[61] Tal como já aconteceu noutras situações a letra x pode ser substituída por outra (é uma variável muda): É indiferente escrever $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$ ou $f(y) \xrightarrow[y\to a]{} b$ assim como escrever $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ou $\lim\limits_{y\to a} f(y)$.

mente $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$ e $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} c$, com $b < c$, podíamos aplicar o que acabámos de mostrar, tomando para g a própria função f, para deduzir a existência de $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $x \in X$ na vizinhança $V_\varepsilon(a)$ (e existe x nestas condições por a ser aderente a X), $f(x) < f(x)$, o que era absurdo. □

I.5.3 **(Corolário — Passagem ao limite das desigualdades latas)** Sejam $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ duas funções com $f(x) \le g(x)$ para cada $x \in X$ e a um real estendido aderente a X e suponhamos que se tem

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b \in \overline{\mathbb{R}}, \quad g(x) \xrightarrow[x\to a]{} c \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Tem-se então $b \le c$. [62]

Dem: Supondo, por absurdo, que não era $b \le c$, portanto que $b > c$, podíamos concluir de I.5.2 a existência de $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $x \in X$ na vizinhança $V_\varepsilon(a)$ (pontos cuja existência resulta de a ser aderente a X) vinha $f(x) < g(x)$, o que contradizia a hipótese. □

I.5.4 **(Dois casos triviais de existência de limite)** Seja a um real estendido aderente a um conjunto $X \subset \mathbb{R}$. Tem-se então:

a) A função identidade $I_X\colon X \to \mathbb{R}$, definida por $I_X(x) = x$ tem limite a no ponto a, o que pode ser expresso simbolicamente por

$$\lim_{x\to a} x = a \quad \text{ou} \quad x \xrightarrow[x\to a]{} a.$$

b) Dado $b \in \mathbb{R}$, a função $f\colon X \to \mathbb{R}$ de valor constante b tem limite b no ponto a, o que pode ser expresso simbolicamente por

$$\lim_{x\to a} b = b \quad \text{ou} \quad b \xrightarrow[x\to a]{} b.$$

Dem: a) Dado $\delta > 0$, podemos tomar para ε o próprio δ, uma vez que, se $x \in X$ pertencer a $V_\delta(a)$, $I_X(x) = x \in V_\delta(a)$.

b) Dado $\delta > 0$, podemos escolher $\varepsilon > 0$ arbitrariamente[63]. Com efeito, qualquer que seja $x \in X$ na vizinhança-ε de a (ou não…), constata-se que $f(x) = b \in V_\delta(b)$. □

I.5.5 **(Sublimites)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, a um real estendido aderente a X e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função. Diz-se que um real estendido b é um *sublimite* de f *no ponto* a (ou um sublimite de $f(x)$ quando x tende para a) quando b for limite no ponto a de alguma restrição de f isto é, se existir algum subconjunto $A \subset X$ tal que a ainda seja aderente a A e que $b = \lim\limits_{x\to a} f_{/A}(x)$. Diz-se então, mais

---

[62]Um erro que é cometido com alguma frequência consiste em aplicar o análogo deste resultado com as desigualdades $\le$ substituídas pelas correspondentes desigualdades estritas $<$. Para constatar a falsidade do enunciado assim obtido ver o exercício I.5.2 no fim da secção.

[63]Na linguagem do jogo, o segundo jogador nem precisa de tomar conhecimento de qual foi a jogada do primeiro para ter a certeza de ganhar.

precisamente, que b é o *sublimite* de f no ponto a *determinado* pelo subconjunto A. Como alternativa às notações $\lim\limits_{x\to a} f_{/A}(x)$ ou $f_{/A}(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$ também se escreve respetivamente

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x), \quad f(x) \xrightarrow[\substack{x\to a\\ x\in A}]{} b,$$

assim como, nalguns casos particulares, notações alternativas evidentes como

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x), \quad f(x) \xrightarrow[\substack{x\to a\\ x\neq a}]{} b,$$

quando se considera $A = \{x \in X \mid x \neq a\}$ (supondo-se neste caso que a é aderente a este conjunto A, ou seja, que a é um ponto de acumulação de X).[64]

Por vezes também utilizamos a notação $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)$, ou as alternativas que referimos, sem estarmos em presença do limite de uma restrição, como forma de explicitar o domínio que se está a considerar para a função, quando esta é dada a partir de uma expressão analítica.

I.5.6 **(Dos limites para os sublimites)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função e a aderente a X tal que exista o limite $b = \lim\limits_{x\to a} f(x)$. Para cada subconjunto $A \subset X$ tal que a seja ainda aderente a A, tem-se então também $b = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)$.

Em particular b é o único sublimite de f no ponto a.

Dem: Seja $\delta > 0$ arbitrário. Sabemos então que existe $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $x \in X$ na vizinhança $V_\varepsilon(a)$ venha $f(x) \in V_\delta(b)$. Isto vai acontecer, em particular, para cada $x \in A$ na vizinhança $V_\varepsilon(a)$, o que mostra que b também é o limite no ponto a da restrição $f_{/A}$. O facto de b, além de limite, ser também um sublimite de f no ponto a resulta de que podemos sempre tomar para A o próprio X. Por fim, o facto de b ser o único sublimite de f no ponto a resulta da unicidade do limite, referida em I.5.2, que garante que nenhuma restrição de f pode ter um limite diferente de b no ponto a. $\square$

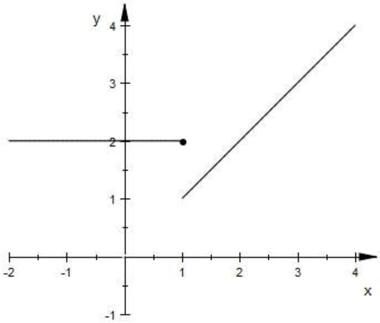
[64]Para alguns autores, a noção de limite de uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ num ponto a é apresentada de uma forma, não equivalente à que utilizámos em I.5.1, que ignora o valor que a função f possa ter no ponto a e que só faz sentido no caso em que a é ponto de acumulação de X (foi essa a noção que o estudante encontrou no ensino secundário). É claro que as duas formulações são equivalentes no caso em que $a \notin X$. A escolha que fizémos parece-nos apresentar algumas vantagens e, de qualquer modo, se quisermos significar a noção alternativa, podemos sempre escrever

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x),$$

nas notações que estamos a utilizar.

I.5.7 **(Exemplo)** Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x \leq 1, \\ x, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$



Tendo em conta I.5.6, podemos concluir que f não tem limite no ponto 1, já que ela admite os sublimites distintos 2 e 1 nesse ponto, determinados respetivamente pelos subconjuntos $]-\infty, 1]$ e $]1, +\infty[$ (a primeira restrição é uma função constante e a segunda é a função identidade).

Vamos agora examinar uma situação em que a existência de sublimites convenientes garante a existência de limite. Trata-se do caso em que o domínio X da função é união de dois subconjuntos A e B. O ponto a onde se considera o limite tem que ser aderente a X e portanto, como referimos na alínea d) de I.3.15, tem que ser aderente a pelo menos um dos conjuntos A e B. Duas situações são assim possíveis, ou a é aderente a ambos os conjuntos, e então faz sentido considerar os sublimites correspondentes, ou a é aderente a apenas um dos dois conjuntos, e apenas esse determina um sublimite.

I.5.8 **(Limites quando o domínio é uma união)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função, a um ponto aderente a X e $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Sejam $A \subset X$ e $B \subset X$ dois subconjuntos tais que $A \cup B = X$. Tem-se então que a a aderente a A ou a B e:

a) Se a for aderente tanto a A como a B e se tiver

$$\lim_{\substack{x\to a \\ x\in A}} f(x) = b, \quad \lim_{\substack{x\to a \\ x\in B}} f(x) = b,$$

então também $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

b) Se a for aderente a A e não for aderente a B e se se tiver $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\in A}} f(x) = b$

então também $\lim_{x\to a} f(x) = b$.[65]

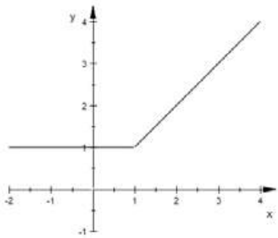
Dem: a) Seja $\delta > 0$ arbitrário. Tendo em conta a existência de limite b no ponto a para a restrição $f_{/A}$, podemos considerar $\varepsilon' > 0$ tal que, para cada $x \in A$ na vizinhança $V_{\varepsilon'}(a)$, $f(x) \in V_\delta(b)$. Analogamente, considerando a restrição $f_{/B}$, podemos também considerar $\varepsilon'' > 0$ tal que, para cada $x \in B$ na vizinhança $V_{\varepsilon''}(a)$, $f(x) \in V_\delta(b)$. Sendo $\varepsilon > 0$ o menor dos dois números ε' e ε'', vemos agora que, para cada $x \in X$ na vizinhança $V_\varepsilon(a)$, tem-se também $x \in V_{\varepsilon'}(a)$ e $x \in V_{\varepsilon''}(a)$ pelo que, quer no caso em que $x \in A$ quer naquele em que $x \in B$ (e uma destas condições tem que acontecer por ser $X = A \cup B$) vem $f(x) \in V_\delta(b)$. Ficou assim provado que $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

b) Seja $\delta > 0$ arbitrário. Tendo em conta a existência de limite b no ponto a para a restrição $f_{/A}$, podemos considerar $\varepsilon' > 0$ tal que, para cada $x \in A$ na vizinhança $V_{\varepsilon'}(a)$, $f(x) \in V_\delta(b)$. Apesar de agora não estarmos a fazer nenhuma hipótese sobre a restrição $f_{/B}$, o facto de a não ser aderente a B permite-nos considerar $\varepsilon'' > 0$ tal que na vizinhança $V_{\varepsilon''}(a)$ não exista nenhum elemento de B. Sendo $\varepsilon > 0$ o menor dos dois números ε' e ε'', vemos agora que, para cada $x \in X$ na vizinhança $V_\varepsilon(a)$, tem-se também $x \in V_{\varepsilon'}(a)$ e $x \in V_{\varepsilon''}(a)$ e portanto, pela segunda condição, $x \notin B$; o facto de se ter $X = A \cup B$ implica então que $x \in A$ e portanto $f(x) \in V_\delta(b)$. Provámos assim que $\lim_{x\to a} f(x) = b$. □

I.5.9 **(Exemplos) a)** Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \le 1, \\ x, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Tendo em conta I.5.8, podemos concluir que $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$, já que se tem $\mathbb{R} =]-\infty, 1] \cup]1, +\infty[$, com 1 aderente a ambos os conjuntos no segundo membro, e que cada uma das restrições de f a $]-\infty, 1]$ e $]1, +\infty[$ tem limite 1 no ponto 1 (a primeira restrição é uma função constante e a segunda é a função identidade).



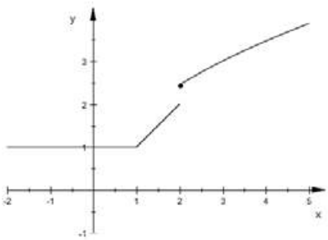
b) Considerando de novo a função f que examinámos em a), vemos que

[65]Portanto, se a não é aderente a B, só os valores de f nos pontos de A são importantes para a existência de limite b.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2$. Com efeito, como antes, $\mathbb{R} =]-\infty, 1] \cup]1, +\infty[$, mas agora 2 não é aderente a $]-\infty, 1]$ pelo que a nossa conclusão resulta de a restrição de f a $]1, +\infty[$ ter limite 2 no ponto 2 (trata-se da função identidade).

c) Consideremos agora a função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq 1 \\ x, & \text{se } 1 < x < 2 \\ \sqrt{3x}, & \text{se } 2 \leq x. \end{cases}$$



Tem-se $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 1$, como se pode concluir aplicando duas vezes I.5.8, a primeira para concluir que a restrição de g a $]-\infty, 2[$ tem limite 1 no ponto 1, por isso acontecer às suas restrições a $]-\infty, 1]$ e a $]1, 2[$, dois conjuntos com 1 como ponto aderente, e a segunda para obter o limite referido, por se ter $\mathbb{R} =]-\infty, 2[\cup [2, +\infty[$, onde 1 é aderente ao primeiro conjunto mas não ao segundo.

I.5.10 **(Os limites têm um caráter local)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função, a um ponto aderente a X e $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Dado $r > 0$, o ponto a também é aderente a $X \cap V_r(a)$ e tem-se

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \;\Leftrightarrow\; \lim_{\substack{x\to a \\ x\in X\cap V_r(a)}} f(x) = b.$$

Dem: Trata-se de consequências diretas de I.3.15, I.5.6 e I.5.8, uma vez que se pode escrever

$$X = (X \cap V_r(a)) \cup (X \setminus V_r(a)),$$

em que o ponto a não é aderente a $X \setminus V_r(a)$, por a vizinhança $V_r(a)$ não intersetar este conjunto. $\square$

I.5.11 **(Propriedades especiais dos limites num ponto pertencente ao domínio)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in X$.

a) A função f pode ter ou não limite no ponto a mas, se tiver, esse limite só pode ser $f(a)$.[66]

[66]Por este motivo, a procura do valor de um limite num ponto a só faz sentido no caso em que esse ponto não pertence ao domínio da função f, embora sendo evidentemente ade-

b) Se a é ponto isolado de X, então $f(a)$ é limite de f no ponto a.
c) Se a é ponto de acumulação de X, então

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \;\Leftrightarrow\; \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = f(a).$$

d) O real $f(a)$ é sublimite de f no ponto a.
Dem: a) Suponhamos que f tem limite b no ponto a. Tendo em conta I.5.6, a restrição $f_{/\{a\}}\colon \{a\} \to \mathbb{R}$ também tem limite b no ponto a. Mas essa restrição é constante, e portanto com limite $f(a)$ no ponto a. Pela unicidade do limite, tem-se assim $b = f(a)$.
b) Sendo a ponto isolado de X, podemos escrever $X = \{a\} \cup (X \setminus \{a\})$ onde a não é aderente a $X \setminus \{a\}$ pelo que, pela alínea b) de I.5.8, o facto de $f(a)$ ser limite da função constante $f_{/\{a\}}$ no ponto a, implica que f tem limite $f(a)$ no ponto a.
c) Sendo a ponto de acumulação de X, vem $X = \{a\} \cup (X \setminus \{a\})$ onde a é aderente a $\{a\}$ e a $X \setminus \{a\}$ pelo que, uma vez que a função constante $f_{/\{a\}}$ tem limite $f(a)$ no ponto a, resulta de I.5.6 e da alínea b) de I.5.8 que f tem limite $f(a)$ no ponto a se, e só se, isso acontece à sua restrição a $X \setminus \{a\}$.
d) A restrição de f ao conjunto $\{a\}$ é constante, e portanto tem $f(a)$ como limite no ponto a. □

I.5.12 **(Limites laterais)** Um exemplo de sublimites, muito utilizado na prática, é o constituído pelos *limites laterais*. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ e notemos $X_{<a}$ e $X_{>a}$ os subconjuntos de X definidos por

$$X_{<a} = \{x \in X \mid x < a\}, \quad X_{>a} = \{x \in X \mid x > a\}.$$

Dizemos que a é um *ponto de acumulação à esquerda* de X se a é aderente a $X_{<a}$ e que a é um *ponto de acumulação à direita* de X se a é aderente a $X_{>a}$. Se repararmos que $X \setminus \{a\}$ é a união dos subconjuntos $X_{<a}$ e $X_{>a}$, podemos dizer que a é ponto de acumulação de X se, e só se, a é ponto de acumulação à esquerda ou à direita de X (cf. I.3.15).
Suponhamos agora que $f\colon X \to \mathbb{R}$ é uma função. Quando a é ponto de acumulação à esquerda de X ao limite, se existir,

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in X_{<a}}} f(x),$$

que se nota também $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, dá-se o nome de *limite à esquerda* de $f(x)$ quando x tende para a, usando-se também a notação $f(x) \xrightarrow[x\to a^-]{} b$ para exprimir o facto de aquele limite ter o valor b. Analogamente, quando a é ponto de acumulação à direita de X ao limite, se existir,

rente a este. Quando o ponto a pertence ao domínio a única questão é saber se $f(a)$ é ou não limite.

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in X_{>a}}} f(x),$$

que se nota também $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, dá-se o nome de *limite à direita* de $f(x)$ quando x tende para a, usando-se também a notação $f(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} b$ para exprimir o facto de aquele limite ter o valor b. Repare-se que, como consequência de I.5.6 e I.5.8, valem as seguintes relações entre limites e limites laterais:

a) Se a é ponto de acumulação à esquerda e à direita de a, então

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = b \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to a^-} f(x) = b \text{ e } \lim_{x\to a^+} f(x) = b.$$

b) Se a é ponto de acumulação à esquerda de X mas não é ponto de acumulação à direita deste conjunto, então

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = b \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to a^-} f(x) = b\ .$$

c) Se a é ponto de acumulação à direita de X mas não é ponto de acumulação à esquerda deste conjunto, então

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = b \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to a^+} f(x) = b\ .$$

I.5.13 **(Exemplo)** Considerando o conjunto $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ dos números racionais, que já referimos em I.3.26 ser denso, podemos mesmo dizer que qualquer número real x é simultaneamente ponto de acumulação à esquerda e à direita de $\mathbb{Q}$. Com efeito, com o mesmo argumento então utilizado, dada uma vizinhança arbitrária $V_\delta(x) =]x-\delta, x+\delta[$ de x, existem números racionais entre $x-\delta$ e x, que são assim elementos de $V_\delta(x)\cap\mathbb{Q}_{<x}$, e números racionais entre x e $x+\delta$, que são assim elementos de $V_\delta(x)\cap\mathbb{Q}_{>x}$.

I.5.14 **(Os limites são aderentes ao contradomínio)** Sejam $X\subset\mathbb{R}$ um conjunto, $f\colon X\to Y\subset\mathbb{R}$ uma função a a um real estendido aderente a X tal que exista o limite $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b\in\overline{\mathbb{R}}$. Tem-se então que b é aderente a Y, em particular b é aderente ao contradomínio $f(X)$.

Dem: Seja $\delta>0$ arbitrário. Podemos considerar $\varepsilon>0$ tal que, para cada $x\in X$ na vizinhança $V_\varepsilon(a)$, $f(x)\in V_\delta(b)$. Escolhendo um $x\in X$ nestas condições, o que é possível por a ser aderente a X, vemos que $f(x)$ pertence a $Y\cap V_\delta(b)$, em particular esta interseção não é vazia. Fica assim provado que b é aderente a Y. A afirmação envolvendo o contradomínio resulta de que se pode sempre considerar f como função de X para $f(X)$. □

I.5.15 **(Limites de sucessões)** Uma vez que uma sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é mais do que uma função de domínio $\mathbb{N}$, não necessitamos apresentar uma definição autónoma de limite de uma sucessão. Observe-se, no entanto, que os reais estendidos aderentes a $\mathbb{N}$ são exatamente os números naturais e $+\infty$ ($\mathbb{N}$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$ minorado e não majorado) e que os números naturais são pontos isolados de $\mathbb{N}$, e portanto pontos onde o limite existe sempre e é igual ao termo correspondente da sucessão. Por esse motivo o único limite que é interessante considerar é o limite quando n tende para $+\infty$ e notamos simplemente $\lim_n u_n$ ou $\lim u_n$ o limite $\lim_{n\to+\infty} u_n$, quando existir, referindo-o simplemente como sendo o *limite da sucessão*. Refira-se a propósito que uma sucessão diz-se *convergente* quando tiver limite finito.

O limite de uma sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é habitualmente caracterizado de uma forma diferente, embora, naturalmente, equivalente à definição de limite de uma função, neste caso em $+\infty$. Nomeadamente, um real estendido b é limite de uma sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se, e só se, qualquer que seja $\delta > 0$, existe uma ordem a partir da qual os temos da sucessão pertencem a $V_\delta(b)$, isto é, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq n_0$ em $\mathbb{N}$, $u_n \in V_\delta(b)$.

Dem: Num dos sentidos temos uma implicação evidente: Se, para cada $\delta > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ nas condições referidas, então, tomando $\varepsilon = \frac{1}{n_0} > 0$, vemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ na vizinhança $V_\varepsilon(+\infty)$, tem-se $n > \frac{1}{\varepsilon} = n_0$, e portanto $u_n \in V_\delta(b)$, o que mostra que $\lim_{n\to+\infty} u_n = b$. A implicação contrária é semelhante mas temos que resolver um pequeno contratempo. Suponhamos, com efeito, que $\lim_{n\to+\infty} u_n = b$ e seja $\delta > 0$ arbitrário. Podemos então considerar $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$ na vizinhança $V_\varepsilon(+\infty)$, isto é, para cada $n > \frac{1}{\varepsilon}$ em $\mathbb{N}$, $x_n \in V_\delta(b)$. Seríamos assim, tentados a escolher para n_0 o número $\frac{1}{\varepsilon}$, mas isso apresenta duas dificuldades: por um lado $\frac{1}{\varepsilon}$ não tem que ser um número natural, por outro, mesmo que o fosse ficaríamos a saber o que sucede para $n > n_0$ mas não para $n = n_0$. Para tornear estas dificuldades basta, no entanto, notar que, pela propriedade arquimediana referida em I.1.11, podemos considerar um número natural $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ e então, para cada número natural $n \geq n_0$ tem-se $n > \frac{1}{\varepsilon}$, e portanto $u_n \in V_\delta(b)$. □

I.5.16 **(Sucessões parciais)** Para além das sucessões, é útil em certas situações considerar também *sucessões parcialmente definidas*, ou *sucessões parciais*. Daremos esse nome a funções cujo domínio é um subconjunto J de $\mathbb{N}$ que seja infinito, tendo ainda assim $+\infty$ como ponto aderente. Tal como acontece com as sucessões, é usual utilizar uma notação do tipo $(u_n)_{n\in J}$, ou outra com um significado equivalente, para designar uma sucessão parcial. Por exemplo, a expressão $\frac{1}{n-6}$ não define uma sucessão mas já faz sentido pensar na sucessão parcial $(\frac{1}{n-6})_{n\geq 7}$.

Tal como acontece com as sucessões, quando se fala de limite de uma sucessão parcial está subentendido que se trata do limite quando $n \to +\infty$ e para este limites vale uma caracterização análoga à referida em I.5.15 para as sucessões.

Até agora, apesar de tudo o que já estudámos sobre limites, estamos muito limitados quanto aos limites que sabemos calcular: Para além de algumas variações triviais, são essencialmente apenas os limites das funções constantes e das funções identidade. Para aumentar o leque desses limites vamos agora estabelecer as chamadas *propriedades algébricas dos limites*, que permitem determinar limites de funções obtidas por soma, produto ou outras operações algébricas a partir de outras cujos limites sejam conhecidos. Repare-se que, ao contrário do que acontecia nos resultados que estabelecemos atrás, em que apenas as propriedades gerais das vizinhanças, comuns às dos diferentes tipos de pontos de $\overline{\mathbb{R}}$, eram usadas, vamos agora ter necessidade de utilizar as caracterizações explícitas das vizinhanças dos pontos finitos. Lembremos que, em geral, se $b \in \mathbb{R}$, a vizinhança $V_\delta(b) =]b-\delta, b+\delta[$ é o conjunto dos $y \in \mathbb{R}$ tais que $d(y,b) < \delta$, onde $d(y,b) = |y-b|$.

I.5.17 **(Limites da soma, do módulo e do produto)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ aderente a X e $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ duas funções tais que

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \quad \lim_{x\to a} g(x) = c,$$

com b, c finitos. Tem-se então:

a) $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x)) = b + c$

b) $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |b|$

c) $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \times g(x)) = b \times c$.

Dem: a) Seja $\delta > 0$ arbitrário. Aplicando a definição do limite das funções f e g, com o número $\frac{\delta}{2} > 0$ como dado à partida[67], podemos considerar dois números $\varepsilon' > 0$ e $\varepsilon'' > 0$ tais que, para cada $x \in X$ na vizinhança $V_{\varepsilon'}(a)$, se tenha $f(x) \in V_{\delta/2}(b)$, isto é, $|f(x) - b| < \frac{\delta}{2}$, e que, para cada $x \in X$ na vizinhança $V_{\varepsilon''}(a)$, se tenha $g(x) \in V_{\delta/2}(c)$, isto é, $|g(x) - c| < \frac{\delta}{2}$. Escolhamos agora para $\varepsilon > 0$ o menor dos dois números ε' e ε'' e vejamos o que sucede com cada $x \in X$ na vizinhança $V_\varepsilon(a)$. Ora, uma vez que se tem simultaneamente $x \in V_{\varepsilon'}(a)$ e $x \in V_{\varepsilon''}(a)$, vem ao mesmo tempo $|f(x) - b| < \frac{\delta}{2}$ e $|g(x) - c| < \frac{\delta}{2}$, pelo que

[67] A razão por que escolhemos aplicar a definição com o número $\delta/2$ dado à partida, e não outro, não será naturalmente clara para quem esteja a acompanhar a demonstração pela ordem pela qual ela é apresentada. Qualquer número maior que 0 podia ter sido considerado e o que se passa é que se verificou, eventualmente depois de alguma tentativa não totalmente conseguida, que, com esta escolha, no fim as “contas davam” o que necessitávamos. Uma questão análoga levanta-se, com ainda maior evidência, na demonstração da alínea c) que apresentaremos adiante.

$$\begin{aligned}|(f(x)+g(x))-(b+c)| &= |(f(x)-b)+(g(x)-c)| \leq \\ &\leq |(f(x)-b)|+|(g(x)-c)| < \\ &< \frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\delta,\end{aligned}$$

ou seja $f(x)+g(x) \in V_\delta(b+c)$. Ficou assim provado que $b+c$ é efetivamente o limite de $f(x)+g(x)$ quando x tende para a.

b) A justificação é agora bastante mais direta que a dada em a). Seja, com efeito, $\delta > 0$ arbitrário. Consideremos $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $x \in X$ na vizinhança $V_\varepsilon(a)$ se tenha $f(x) \in V_\delta(b)$, ou seja $d(f(x), b) < \delta$. Tendo em conta I.1.22, vemos que, para cada $x \in X$ nessa mesma vizinhança $V_\varepsilon(a)$,

$$d(|f(x)|, |b|) \leq d(f(x), b) < \delta,$$

ou seja, $|f(x)| \in V_\delta(|b|)$. Concluímos assim que $|f(x)| \xrightarrow[x\to a]{} |b|$.

c) Seja $\delta > 0$ arbitrário. Uma vez que $|f(x)| \xrightarrow[x\to a]{} |b|$, podemos considerar $\varepsilon' > 0$ tal que, para cada $x \in X$ na vizinhança $V_{\varepsilon'}(a)$, $|f(x)| \in V_1(|b|)$, em particular

$$|f(x)| < |b|+1.$$

Considerando o número $\frac{\delta}{2(|c|+1)} > 0$ na definição do limite de $f(x)$ e o número $\frac{\delta}{2(|b|+1)} > 0$ na do limite de $g(x)$, podemos considerar $\varepsilon'' > 0$ e $\varepsilon''' > 0$ tais que, para cada $x \in X \cap V_{\varepsilon''}(a)$,

$$|f(x)-b| < \frac{\delta}{2(|c|+1)}$$

e, para cada $x \in X \cap V_{\varepsilon'''}(a)$,

$$|g(x)-c| < \frac{\delta}{2(|b|+1)}.$$

Seja $\varepsilon > 0$ o menor dos três números ε', ε'' e ε'''. Para cada $x \in X \cap V_\varepsilon(a)$ tem-se então

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-bc| &= |f(x)(g(x)-c)+(f(x)-b)c| \leq \\ &\leq |f(x)|\,|(g(x)-c)|+|(f(x)-b)|\,|c| < \\ &< (|b|+1)\frac{\delta}{2(|b|+1)}+\frac{\delta}{2(|c|+1)}(|c|+1)=\delta,\end{aligned}$$

isto é, $f(x)g(x) \in V_\delta(bc)$. Ficou assim provado que $f(x)g(x) \to bc$ quando $x \to a$. □

I.5.18 **(Corolário)** De I.5.17 podemos concluir, sem precisar de novas demonstrações, que, sendo $X \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ aderente a X e $f, g \colon X \to \mathbb{R}$ duas funções tais que

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \quad \lim_{x\to a} g(x) = c,$$

com b, c finitos, então

$$\lim_{x\to a} -g(x) = -c, \quad \lim_{x\to a} (f(x) - g(x)) = b - c.$$

Basta, com efeito, reparar que $-g(x) = (-1) \times g(x)$ e que $f(x) - g(x) = f(x) + (-g(x))$.

I.5.19 **(Corolário)** Das propriedades envolvendo os limites da soma e do produto de duas funções estabelecidas em I.5.17 resultam facilmente por indução matemática propriedades análogas para as somas e os produtos de um número finito de funções, nomeadamente:
Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ aderente a X e $f_1, f_2, \ldots, f_k \colon X \to \mathbb{R}$ funções admitindo limites finitos

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = b_1, \quad \lim_{x\to a} f_2(x) = b_2, \quad \ldots \quad \lim_{x\to a} f_k(x) = b_k.$$

Tem-se então

$$\lim_{x\to a} (f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_k(x)) = b_1 + b_2 + \cdots + b_k,$$
$$\lim_{x\to a} (f_1(x) \times f_2(x) \times \cdots \times f_k(x)) = b_1 \times b_2 \times \cdots \times b_k.$$

Em particular, considerando k vezes a mesma função, vemos que, se $f \colon X \to \mathbb{R}$ tem limite finito b quando x tende para a, então, para cada inteiro $k \geq 0$,

$$\lim_{x\to a} f(x)^k = b^k$$

(o caso $k = 0$ é trivialmente verdadeiro).

I.5.20 **(Exemplo)** Utilizando os resultados precedentes, já ficamos com um leque mais alargado de funções cujo limite sabemos determinar. Por exemplo

$$\lim_{x\to -1} (x^4 + 2x + 3) = (-1)^4 + 2 \times (-1) + 3 = 2.$$

I.5.21 **(Limite do inverso[68])** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f \colon X \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ uma função e $a \in \overline{\mathbb{R}}$ aderente a X tal que $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tem-se então

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{b}.$$

[68]Não confundir o inverso da função f, que é a função que a x associa o inverso $\frac{1}{f(x)}$ de $f(x)$, com a função inversa da função f, que definimos em I.4.11, no caso em que f é injetiva.

Dem: Seja $\delta > 0$ arbitrário. Uma vez que $|f(x)| \to |b| > 0$, podemos considerar $\varepsilon' > 0$ tal que, para cada $x \in X$ na vizinhança $V_{\varepsilon'}(a)$,

$$|f(x)| \in V_{|b|/2}(|b|) = \left]\frac{|b|}{2}, \frac{3|b|}{2}\right[,$$

em particular $|f(x)| > |b|/2$. Considerando o número

$$\delta' = \frac{\delta\,|b|^2}{2} > 0$$

podemos considerar $\varepsilon'' > 0$ tal que, para cada $x \in X$ na vizinhança $V_{\varepsilon''}(a)$, $f(x) \in V_{\delta'}(b)$, isto é $|f(x) - b| < \delta'$. Sendo $\varepsilon > 0$ o menor dos dois números ε' e ε'', vemos agora que, para cada $x \in X \cap V_\varepsilon(a)$,

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b - f(x)|}{|f(x)|\,|b|} < \frac{2\delta'}{|b|^2} = \delta,$$

isto é $\frac{1}{f(x)} \in V_\delta(\frac{1}{b})$. □

I.5.22 **(Corolário)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ e $g\colon X \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ duas funções e $a \in \overline{\mathbb{R}}$ aderente a X tal que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tem-se então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}.$$

Basta. com efeito, reparar que $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \frac{1}{g(x)}$.

O estudo, neste momento, da propriedade que apresentamos em seguida pode ser considerado, de certo modo, um “luxo”, uma vez que o resultado poderá ser obtido com muito menos trabalho depois de estudarmos, como faremos numa secção adiante, as propriedades das inversas de funções contínuas. O mesmo se pode dizer aliás do resultado I.1.15 que garante a existência de raizes quadradas. Fazemo-lo com o objetivo de podermos resolver no fim deste secção alguns exercícios sobre a determinação de limites envolvendo raizes quadradas e também porque a demonstração que apresentaremos ilustra uma ideia (multiplicação pelo “conjugado”) que é utilizada com frequência nalguns levantamentos de indeterminação.

I.5.23 **(Limite da raiz quadrada)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to [0, +\infty[$ uma função e $a \in \overline{\mathbb{R}}$ aderente a X tal que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b \in \mathbb{R}$. Tem-se então $b \geq 0$ e

$$\lim_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{b}.$$

Dem: O facto de se ter $b \geq 0$ é uma consequência de I.5.3 (ou, alternativamente, de I.5.14 e do facto de $[0, +\infty[$ ser um conjunto fechado). Vamos tratar separadamente os casos em que $b = 0$ e em que $b > 0$.

1) Suponhamos que $b = 0$. Dado $\delta > 0$ arbitrário, podemos, partindo do número $\delta^2 > 0$, considerar $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $x \in X \cap V_\varepsilon(0)$, $f(x) \in V_{\delta^2}(0)$, portanto $0 \leq f(x) < \delta^2$. Tendo em conta a monotonia da raiz quadrada (cf. I.4.23) tem-se, para cada x nessas condições $0 \leq \sqrt{f(x)} < \delta$, em particular $\sqrt{f(x)} \in V_\delta(0)$, o que mostra que se tem efetivamente

$$\sqrt{f(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 0 = \sqrt{0}.$$

2) Suponhamos que $b > 0$. Dado $\delta > 0$ arbitrário, podemos, partindo do número $\delta\sqrt{b} > 0$, considerar $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $x \in X \cap V_\varepsilon(0)$, $f(x) \in V_{\delta\sqrt{b}}(b)$, isto é, $|f(x) - b| < \delta\sqrt{b}$. Para cada x nessas condições tem-se então

$$|\sqrt{f(x)} - \sqrt{b}| = \left| \frac{(\sqrt{f(x)} - \sqrt{b})(\sqrt{f(x)} + \sqrt{b})}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{b}} \right| \leq$$
$$\leq \frac{|f(x) - b|}{\sqrt{b}} < \frac{\delta\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \delta$$

ou seja, $\sqrt{f(x)} \in V_\delta(\sqrt{b})$, o que mostra que se tem efetivamente

$$\sqrt{f(x)} \xrightarrow[x \to a]{} \sqrt{b}.$$ □

Faltam-nos neste momento resultados que permitam estabelecer a existência de limites quando se consideram também limites infinitos. Esses resultados costumam ser enunciados na forma de mnemónicas que o estudante decerto já encontrou.

I.5.24 **(As mnemónicas**

$$-(+\infty) = -\infty, \quad -(-\infty) = +\infty,$$
$$|+\infty| = +\infty, \quad |-\infty| = +\infty \text{)}$$

Sejam a um real estendido aderente a um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função.

a) Se $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$, então $-f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$ e $|f(x)| \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$.

b) Se $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$, então $-f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$ e $|f(x)| \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$.

Dem: Trata-se de consequências diretas das definições, se repararmos que, dado $\delta > 0$, tem-se

$f(x) \in V_\delta(+\infty) \Rightarrow -f(x) \in V_\delta(-\infty)$ e $|f(x)| = f(x) \in V_\delta(+\infty)$,
$f(x) \in V_\delta(-\infty) \Rightarrow -f(x) \in V_\delta(+\infty)$ e $|f(x)| = -f(x) \in V_\delta(+\infty)$. □

I.5.25 **(Caracterização alternativa dos limites infinitos)** Sejam a um real estendido aderente a um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função. Tem-se então:

a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ se, e só se, qualquer que seja $M \in \mathbb{R}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $x \in X$ na vizinhança $V_\varepsilon(a)$, $f(x) > M$.

b) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ se, e só se, qualquer que seja $M \in \mathbb{R}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $x \in X$ na vizinhança $V_\varepsilon(a)$, $f(x) < M$.

Dem: Vamos justificar apenas a), uma vez que a conclusão de b) resulta de aplicar a) à função que a x associa $-f(x)$ ($x \mapsto -f(x)$). Comecemos por supor que, qualquer que seja $M \in \mathbb{R}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $x \in X$ na vizinhança $V_\varepsilon(a)$, $f(x) > M$. Dado $\delta > 0$ arbitrário, podemos aplicar a nossa hipótese tomando $M = \frac{1}{\delta}$, considerando $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $x \in X \cap V_\varepsilon(a)$, $f(x) > \frac{1}{\delta}$, ou seja, $f(x) \in V_\delta(+\infty)$. Ficou assim provado que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$. Suponhamos reciprocamente que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$. Seja $M \in \mathbb{R}$ arbitrário. Não podemos aplicar diretamente a definição tomando $\delta = \frac{1}{M}$ uma vez que não estamos a supor $M > 0$. No entanto podemos considerar, por exemplo $M' = \max\{M, 1\}$ e, considerando $\delta = \frac{1}{M'} > 0$, podemos considerar $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $x \in X \cap V_\varepsilon(a)$, $f(x) \in V_\delta(+\infty)$, portanto $f(x) > \frac{1}{\delta} = M' \geq M$. □

I.5.26 **(As mnemónicas**

$$\begin{aligned}
&(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \quad (+\infty) + b = +\infty,\\
&(-\infty) + (-\infty) = -\infty, \quad (-\infty) + b = -\infty\ )
\end{aligned}$$

Sejam a um real estendido aderente a um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ e $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ duas funções.

a) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, então $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = +\infty$.

b) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b \in \mathbb{R}$, então $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = +\infty$.

c) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, então $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = -\infty$.

b) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b \in \mathbb{R}$, então $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = -\infty$.

Dem: a) Seja $\delta > 0$ arbitrário. Consideremos $\varepsilon' > 0$ e $\varepsilon'' > 0$ tais que, para cada $x \in X \cap V_{\varepsilon'}(a)$, $f(x) \in V_\delta(+\infty)$ e que, para cada $x \in X \cap V_{\varepsilon''}(a)$, $g(x) \in V_\delta(+\infty)$. Sendo $\varepsilon > 0$ o menor dos dois números ε' e ε'', vemos que, para cada $x \in X \cap V_\varepsilon(a)$, tem-se $f(x) > \frac{1}{\delta}$ e $g(x) > \frac{1}{\delta}$, donde

$$f(x) + g(x) > \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta} > \frac{1}{\delta},$$

ou seja, $f(x) + g(x) \in V_\delta(+\infty)$. Tem-se assim $f(x) + g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$.

b) Seja $\delta > 0$ arbitrário. Consideremos $\varepsilon'' > 0$ tal que, para cada $x \in X$ em $V_{\varepsilon''}(a)$, $g(x) \in V_1(b)$, em particular $g(x) > b - 1$. Aplicando I.5.25 com $M = \frac{1}{\delta} - (b - 1)$, podemos considerar $\varepsilon' > 0$ tal que, para cada $x \in X$ em

$V_{\varepsilon'}(a)$, $f(x) > \frac{1}{\delta} - (b-1)$. Sendo $\varepsilon > 0$ o menor dos dois números ε' e ε'', vemos que, para cada $x \in X \cap V_\varepsilon(a)$, tem-se

$$f(x) + g(x) > \frac{1}{\delta} - (b-1) + (b-1) = \frac{1}{\delta},$$

ou seja, $f(x) + g(x) \in V_\delta(+\infty)$. Tem-se assim $f(x) + g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$.

c) Em vez de fazer uma demonstração análoga à de a), é mais fácil aplicar I.5.24 e o que se viu em a), reparando que se tem então $\lim\limits_{x \to a} -f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to a} -g(x) = +\infty$ e portanto

$$-(f(x) + g(x)) = (-f(x)) + (-g(x)) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty,$$

donde, para o seu simétrico, $f(x) + g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$.

d) Analogamente ao que se fez em c), aplicamos I.5.24 e o que se viu em b), reparando que se tem então $\lim\limits_{x \to a} -f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to a} -g(x) = -b \in \mathbb{R}$ e portanto

$$-(f(x) + g(x)) = (-f(x)) + (-g(x)) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty,$$

donde, para o seu simétrico, $f(x) + g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$. □

I.5.27 **(As mnemónicas**

$$\boldsymbol{(+\infty) \times (+\infty) = +\infty, \quad (+\infty) \times pos = +\infty}\ \textbf{)}$$

Sejam a um real estendido aderente a um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ e $f, g \colon X \to \mathbb{R}$ duas funções.

a) Se $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$ e $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$, então $f(x) \times g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$.

b) Se $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$ e $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b \in \left]0, +\infty\right[$ então $f(x) \times g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$.

Dem: a) Seja $\delta > 0$ arbitrário. Consideremos $\varepsilon' > 0$ e $\varepsilon'' > 0$ tais que, para cada $x \in X \cap V_{\varepsilon'}(a)$, $f(x) \in V_\delta(+\infty)$ e que, para cada $x \in X \cap V_{\varepsilon''}(a)$, $g(x) \in V_1(+\infty)$. Sendo $\varepsilon > 0$ o menor dos dois números ε' e ε'', vemos que, para cada $x \in X \cap V_\varepsilon(a)$, tem-se $f(x) > \frac{1}{\delta}$ e $g(x) > 1$, donde

$$f(x) \times g(x) > \frac{1}{\delta} \times 1 = \frac{1}{\delta},$$

ou seja, $f(x) + g(x) \in V_\delta(+\infty)$. Tem-se assim $f(x) + g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$.

b) Seja $\delta > 0$ arbitrário. Consideremos os números $\delta' > 0$ e $\delta'' > 0$ definidos por $\delta' = \frac{b\delta}{2}$ e $\delta'' = \frac{b}{2}$ e, a partir destes, $\varepsilon' > 0$ e $\varepsilon'' > 0$ tais que, para cada $x \in X \cap V_{\varepsilon'}(a)$, $f(x) \in V_{\delta'}(+\infty)$, isto é, $f(x) > \frac{2}{b\delta}$, e que, para cada $x \in X \cap V_{\varepsilon''}(a)$, $g(x) \in V_{\delta''}(b) = \left]\frac{b}{2}, \frac{3b}{2}\right[$, em particular $g(x) > \frac{b}{2}$. Sendo $\varepsilon > 0$ o menor dos dois números ε' e ε'', vemos que, para cada $x \in X \cap V_\varepsilon(a)$, tem-se $f(x) > \frac{2}{b\delta}$ e $g(x) > \frac{b}{2}$, donde

$$f(x)\times g(x) > \frac{2}{b\delta}\times\frac{b}{2} = \frac{1}{\delta},$$

ou seja, $f(x)\times g(x) \in V_\delta(+\infty)$. Tem-se assim $f(x)\times g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$. □

I.5.28 **(Nota)** Ao contrário do que fizémos em I.5.26, e com o objetivo de não tornar o texto desnecessariamente pesado, abstivémo-nos de enunciar em I.5.27 as conclusões que se deduzem diretamente das enunciadas em a) e b) por utilização da propriedade I.5.24. Como exemplo, se $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ e $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$, então $f(x)\times g(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$, uma vez que se tem

$$-(f(x)\times g(x)) = f(x)\times(-g(x)) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty,$$

por ser também $-g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$. Como outro exemplo, se $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$ e $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} b \in\ ]-\infty,0[$, então $f(x)\times g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$, uma vez que se tem

$$f(x)\times g(x) = (-f(x))\times(-g(x)) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty,$$

por ser $-f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ e $-g(x) \xrightarrow[x\to a]{} -b \in\ ]0,+\infty[$. Limitamo-nos assim a destacar, juntamente com aquelas, as mnemónicas que se somam às referidas em I.5.27 e onde pos e neg significam respetivamente um número real maior que 0 e um número real menor que 0:

$$\begin{array}{ll}
\boldsymbol{(+\infty)\times(+\infty) = +\infty,} & \boldsymbol{(+\infty)\times pos = +\infty,}\\
\boldsymbol{(+\infty)\times(-\infty) = -\infty,} & \boldsymbol{(+\infty)\times neg = -\infty,}\\
\boldsymbol{(-\infty)\times(+\infty) = -\infty,} & \boldsymbol{(-\infty)\times pos = -\infty,}\\
\boldsymbol{(-\infty)\times(-\infty) = +\infty,} & \boldsymbol{(-\infty)\times neg = +\infty.}
\end{array}$$

Note-se também que no contexto de I.5.26 e I.5.27 há “candidatos a mnemónicas” que não conduzem a resultado e que constituem o que se costuma designar por *indeterminações*, nomeadamente

$$\boldsymbol{(+\infty)+(-\infty), \quad \infty\times 0.}$$

Classificar a primeira como uma indeterminação corresponde a afirmar que, de se saber que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, não se pode concluir, por si só, a existência ou não de limite quando x tende para a de $f(x)+g(x)$ nem, em caso de existência, o valor desse limite. Quanto à segunda, o que queremos significar é que, de se saber que $\lim_{x\to a} f(x)$ é igual a $+\infty$ ou a $-\infty$ e que $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ não se pode concluir nada sobre a existência ou o valor do limite quando x tende para a de $f(x)\times g(x)$. Existem técnicas, algumas das quais o estudante já conhece do ensino secundário, para *levantar indeterminações*, isto é, para determinar os limites de funções nalguns casos em que a aplicação direta das regras algébricas dos limites e das mnemónicas que examinámos conduzia a uma das indeterminações referidas.

I.5.29 **(Exemplo)** Suponhamos que se pretende calcular o limite $\lim_{x\to+\infty} x^2 - x$. Se repararmos que, pelas mnemónicas do produto, x^2 e $-x$ têm respetivamente limites $+\infty$ e $-\infty$ quando x tende para $+\infty$, verificamos que estamos na presença de uma indeterminação do tipo $(+\infty) + (-\infty)$. No entanto, conseguimos levantar a indeterminação substituindo a expressão $x^2 - x$ noutra equivalente. Tem-se assim, uma vez que

$$\lim_{x\to+\infty} x - 1 = (+\infty) + (-1) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 - x = \lim_{x\to+\infty} x(x-1) = (+\infty) \times (+\infty) = +\infty.$$

I.5.30 **(As mnemónicas $(+\infty)^k = +\infty$ e $(-\infty)^k = \pm\infty$, com k natural)** Sejam a um real estendido aderente a um conjunto $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função e $k \in \mathbb{N}$.

a) Se $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, então $\lim_{x\to a} f(x)^k = +\infty$.

b) Se $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, então $\lim_{x\to a} f(x)^k = +\infty$ se k par e $\lim_{x\to a} f(x)^k = -\infty$ se k ímpar.

Dem: Estas conclusões resultam facilmente por indução em k a partir da propriedade na alínea a) de I.5.27 e das respetivas variantes referidas na nota I.5.28, se repararmos que se pode escrever $f(x)^{p+1} = f(x)^p \times f(x)$. □

I.5.31 **(As mnemónicas**

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\pm\infty}} = \mathbf{0}, \quad \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0}^+} = \boldsymbol{+\infty}, \quad \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0}^-} = \boldsymbol{-\infty}\ \mathbf{)}$$

Sejam a um real estendido aderente a um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ e $f\colon X \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ uma função.

a) Se $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, então $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

b) Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $f(X) \subset]0, +\infty[$, então $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

c) Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $f(X) \subset]-\infty, 0[$, então $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

Dem: a) Comecemos por supor que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$. Seja $\delta > 0$ arbitrário. Escolhamos $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $x \in X \cap V_\varepsilon(a)$, $f(x) \in V_\delta(+\infty)$. Sendo $x \in X$ na vizinhança $V_\varepsilon(a)$ tem-se $f(x) > \frac{1}{\delta}$, donde $0 < \frac{1}{f(x)} < \delta$ e portanto $\frac{1}{f(x)} \in V_\delta(0)$. Provámos assim que $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$. O caso em que $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ reduz-se ao já examinado pelo método habitual de utilizar I.5.24: Tem-se $\lim_{x\to a} -f(x) = +\infty$ donde, como já vimos

$$-\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{-f(x)} \to 0$$

o que implica que $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = -0 = 0$.

b) Seja $\delta > 0$ arbitrário. Podemos escolher $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $x \in X$ na vizinhança $V_\varepsilon(a)$, $f(x) \in V_\delta(0)$ e portanto, como $f(x) \in]0, +\infty[$, tem-se $0 < f(x) < \delta$. Para um tal x tem-se assim $\frac{1}{f(x)} > \frac{1}{\delta}$, isto é, $\frac{1}{f(x)} \in V_\delta(+\infty)$, o que mostra que $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

c) Uma vez que $-f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -0 = 0$, agora com $-f(x) \in]0, +\infty[$, o que vimos em b) garante que $-\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{-f(x)} \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$, donde $\frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$. □

I.5.32 **(Mnemónicas envolvendo o quociente)** Analogamente ao que fizémos em I.5.22 para obter uma propriedade algébrica do limite do quociente a partir das propriedades sobre o limite dum produto e o limite do inverso, também agora podemos obter mnemónicas envolvendo limites infinitos a tendo em conta as mnemónicas referidas em I.5.28 e I.5.31.

Por exemplo, a mnemónica

$$\boldsymbol{\frac{b}{\pm\infty} = 0}$$

significa que, dadas funções $f: X \to \mathbb{R}$ e $g: X \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e um real estendido a aderente a X e tal que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, então $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ e pode ser simplesmente explicada com a observação que se tem então $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \frac{1}{g(x)}$, onde $\frac{1}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0$. Destacamos em seguida outras mnemónicas do mesmo tipo, cujos significados e demonstrações são análogos e onde os símbolos pos e neg se referirâo, como atrás a números reais maiores que 0 e menores que 0 respetivamente:

$$\boldsymbol{\begin{array}{lll}
\frac{+\infty}{0^+} = +\infty, & \frac{+\infty}{pos} = +\infty, & \frac{pos}{0^+} = +\infty, \\
\frac{+\infty}{0^-} = -\infty, & \frac{+\infty}{neg} = -\infty, & \frac{neg}{0^+} = -\infty, \\
\frac{-\infty}{0^+} = -\infty, & \frac{-\infty}{pos} = -\infty, & \frac{pos}{0^-} = -\infty, \\
\frac{-\infty}{0^-} = +\infty, & \frac{-\infty}{neg} = +\infty, & \frac{neg}{0^-} = +\infty.
\end{array}}$$

Costuma-se também classificar, com significado análogo ao referido em I.5.28, os quocientes

$$\boldsymbol{\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0},}$$

como indeterminações.

I.5.33 **(Exemplo)** Vamos apresentar mais um exemplo de levantamento de indeterminação. Apesar de se tratar de um tipo de indeterminação com que certamente o estudante já trabalhava no ensino secundário, apresentamo-lo com o convite para que seja examinado o modo como algumas das propriedades atrás sistematizadas são aplicadas. Trata-se de determinar o limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4-1}{2x^4+x^2+5}.$$

Se calcularmos separadamente os limites do numerador e do denominador constatamos que são ambos iguais a $+\infty$, e portanto estamos em presença de uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. No entanto, transformando a expressão noutra equivalente, depois de reparar que $\mathbb{R} = \{0\} \cup (\mathbb{R} \setminus \{0\})$, onde $+\infty$ não é aderente a $\{0\}$, para aplicar a alínea b) de I.5.8, vemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4-1}{2x^4+x^2+5} &= \lim_{\substack{x\to+\infty\\ x\neq 0}} \frac{3x^4-1}{2x^4+x^2+5} = \\ &= \lim_{\substack{x\to+\infty\\ x\neq 0}} \frac{3-\frac{1}{x^4}}{2+\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^4}} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

I.5.34 **(A mnemónica $\sqrt{+\infty} = +\infty$)** Sejam a um real estendido aderente a $X \subset \mathbb{R}$ e $f: X \to [0, +\infty[$ uma função tal que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$. Tem-se então $\lim_{x\to a} \sqrt{f(x)} = +\infty$.

Dem: Seja $\delta > 0$ arbitrário. Partindo do número $\delta^2 > 0$, podemos considerar $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $x \in X \cap V_\varepsilon(a)$, $f(x) \in V_{\delta^2}(+\infty)$, isto é $f(x) > \frac{1}{\delta^2}$. Para $x \in X \cap V_\varepsilon(a)$, vem então $\sqrt{f(x)} > \frac{1}{\delta}$, isto é, $\sqrt{f(x)} \in V_\delta(+\infty)$, o que mostra que $\sqrt{f(x)} \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$. □

I.5.35 **(Exemplo)** Tentemos determinar o limite da sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Uma vez que $\sqrt{n+1} \longrightarrow +\infty$ e $\sqrt{n} \longrightarrow +\infty$, uma tentativa direta de determinar o limite conduzia a uma indeterminação do tipo $(+\infty) + (-\infty)$. No entanto, utilizando uma ideia que o estudante possivelmente já encontrou, conseguimos levantar a indeterminação:

$$\begin{aligned}\lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) &= \lim \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \\ &= \lim \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{+\infty} = 0.\end{aligned}$$

I.5.36 **(Limite da função composta)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $Y \subset \mathbb{R}$ dois conjuntos e $f: X \to Y$ e $g: Y \to \mathbb{R}$ duas funções e consideremos a função composta $g \circ f: X \to \mathbb{R}$. Sejam $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$, com a aderente a X e b aderente a Y, tais que $\lim_{x\to a} f(x) = b$ e $\lim_{y\to b} g(y) = c$.[69] Tem-se então que $g \circ f$ tem limite c quando x tende para a, isto é, $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$.

Com uma notação porventura mais sugestiva, podemos assim escrever

$$\text{Se } f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b \text{ e } g(y) \xrightarrow[y\to b]{} c, \text{ então } g(f(x)) \xrightarrow[x\to a]{} c.$$

Dem: Seja $\rho > 0$ arbitrário. Tendo em conta a existência de limite para a função g, podemos considerar $\delta > 0$ tal que, para cada $y \in Y$ na vizinhança $V_\delta(b)$, $g(y) \in V_\rho(c)$. Tendo em conta agora a existência de limite para a função f, consideramos $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $x \in X$ na vizinhança $V_\varepsilon(a)$, $f(x) \in V_\delta(b)$ donde, por ser $f(x) \in Y$, podemos tomar $y = f(x)$ na conclusão acima para concluir que $g(f(x)) \in V_\rho(c)$. Ficou assim provado que $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ tem limite c quando x tende para a. □

I.5.37 **(Exemplo)** Uma noção que será estudada adiante mas que o estudante já encontrou no ensino secundário é a de derivada de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ num ponto $a \in \mathbb{R}$. [70] Trata-se do limite, se existir

$$f'(a) = \lim_{\substack{x\to a \\ x\neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Considerando a função $\varphi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{a\}$, definida por $\varphi(h) = a + h$, para a qual se tem $\varphi(h) \xrightarrow[h\to 0]{} a$, vemos que, no caso em que f tem derivada no ponto a, tem-se também

$$f'(a) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ h\neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Repare-se que por um processo análogo, que o estudante é convidado a explicitar, pode-se verificar que, reciprocamente, a existência deste último limite implica a existência do limite que define a derivada de f no ponto a.

I.5.38 **(Limites laterais de funções monótonas)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função crescente (respetivamente decrescente). Tem-se então:

a) Se $+\infty$ é aderente a X, então existe o limite $\lim_{x\to +\infty} f(x)$, que é igual ao supremo (respetivamente ínfimo) do contradomínio $f(X)$.

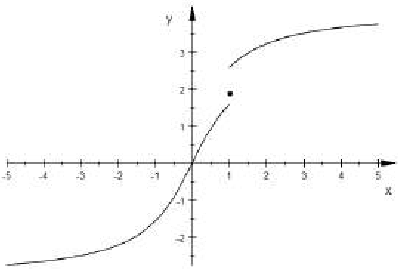
b) Se $-\infty$ é aderente a X, então existe o limite $\lim_{x\to -\infty} f(x)$, que é igual ao ínfimo (respetivamente supremo) do contradomínio $f(X)$.

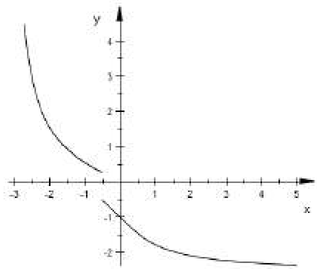
---

[69] A utilização da variável y na função g, distinta da variável x utilizada para a função f, não é evidentemente obrigatória, podendo utilizar-se a mesma variável nos dois contextos. É, no entanto, comummente considerado que o uso de duas variáveis diferentes no contexto de uma função composta (tal como no duma função inversa) facilita a intuição.

[70] Para simplificar a apresentação do exemplo estamos a supor que o domínio é a totalidade de $\mathbb{R}$, o que não é evidentemente necessário).

c) Se $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação à esquerda de X, então existe o limite à esquerda $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, que é igual ao supremo (respetivamente ínfimo) do conjunto $f(X_{<a})$ dos $f(x)$ com $x \in X$ e $x < a$.
d) Se $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação à direita de X, então existe o limite à direita $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, que é igual ao ínfimo (respetivamente supremo) do conjunto $f(X_{>a})$ dos $f(x)$ com $x \in X$ e $x > a$.





Dem: a) Seja $b \in \overline{\mathbb{R}}$ o supremo (respetivamente ínfimo) de $f(X)$. Seja $\delta > 0$ arbitrário. Tendo em conta I.3.18, b é aderente a $f(X)$ pelo que existe $c \in X$ tal que $f(c) \in V_\delta(b)$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $c \notin V_\varepsilon(+\infty)$. Como $V_\varepsilon(+\infty)$ é um intervalo, para cada $x \in X$ em $V_\varepsilon(+\infty)$, tem-se então $x > c$ donde $b \geq f(x) \geq f(c)$ (respetivamente $b \leq f(x) \leq f(c)$) e portanto, por $V_\delta(b)$ ser um intervalo, $f(x) \in V_\delta(b)$. Provámos assim que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} b$.
b) Seja $b \in \overline{\mathbb{R}}$ o ínfimo (respetivamente supremo) de $f(X)$. Seja $\delta > 0$ arbitrário. Tendo em conta I.3.18, b é aderente a $f(X)$ pelo que existe $c \in X$ tal que $f(c) \in V_\delta(b)$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $c \notin V_\varepsilon(-\infty)$. Como $V_\varepsilon(-\infty)$ é um intervalo, para cada $x \in X$ em $V_\varepsilon(-\infty)$, tem-se então $x < c$ donde $b \leq f(x) \leq f(c)$ (respetivamente $b \geq f(x) \geq f(c)$) e portanto, por $V_\delta(b)$ ser um intervalo, $f(x) \in V_\delta(b)$. Provámos assim que $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} b$.
c) Seja $b \in \overline{\mathbb{R}}$ o supremo (respetivamente ínfimo) de $f(X_{<a})$. Seja $\delta > 0$ arbitrário. Tendo em conta I.3.18, b é aderente a $f(X_{<a})$ pelo que existe $c \in X_{<a}$ tal que $f(c) \in V_\delta(b)$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $c \notin V_\varepsilon(a)$. Como $V_\varepsilon(a)$ é um intervalo, para cada $x \in X_{<a}$ em $V_\varepsilon(a)$, tem-se então $x > c$ donde $b \geq f(x) \geq f(c)$ (respetivamente $b \leq f(x) \leq f(c)$) e portanto, por $V_\delta(b)$ ser um intervalo, $f(x) \in V_\delta(b)$. Provámos assim que $f(x) \xrightarrow[x \to a^-]{} b$.
d) Seja $b \in \overline{\mathbb{R}}$ o ínfimo (respetivamente supremo) de $f(X_{>a})$. Seja $\delta > 0$ arbitrário. Tendo em conta I.3.18, b é aderente a $f(X_{>a})$ pelo que existe $c \in X_{>a}$ tal que $f(c) \in V_\delta(b)$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $c \notin V_\varepsilon(a)$. Como $V_\varepsilon(a)$ é um intervalo, para cada $x \in X_{>a}$ em $V_\varepsilon(a)$, tem-se então $x < c$ donde $b \leq f(x) \leq f(c)$ (respetivamente $b \geq f(x) \geq f(c)$) e portanto, por $V_\delta(b)$ ser um intervalo, $f(x) \in V_\delta(b)$. Provámos assim que $f(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} b$. $\square$

I.5.39 **(Corolário)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função crescente (respetivamente decrescente). Tem-se então:

a) Se $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação à esquerda de X, então, para cada $y \in X$ com $y \geq a$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \leq f(y)$ (respetivamente $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \geq f(y)$), em particular, se a não for máximo de X, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ é finito.

b) Se $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação à direita de X, então, para cada $y \in X$ com $y \leq a$, $f(y) \leq \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ (respetivamente $f(y) \geq \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$), em particular, se a não for mínimo de X, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ é finito.

c) Se $a \in \mathbb{R}$ é simultaneamente ponto de acumulação à esquerda e à direita de X, então $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \leq \lim\limits_{y \to a^+} f(y)$ (respetivamente $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \geq \lim\limits_{y \to a^+} f(y)$), onde ambos os limites laterais são finitos.

Dem: A alínea a) resulta de $f(y)$ ser então um majorante (respetivamente minorante) do conjunto $f(X_{<a})$ e portanto ser necessariamente maior ou igual (respetivamente menor ou igual) ao seu supremo (respetivamente ínfimo). A alínea b) tem uma justificação análoga. A alínea c) resulta de a) uma vez que, por esta, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ é um minorante (respetivamente majorante) do conjunto $f(X_{>a})$ e portanto menor ou igual (respetivamente menor ou igual) ao seu ínfimo (respetivamente supremo). □

I.5.40 **(Limites por enquadramento)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ aderente a X e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função.

a) Se existirem funções $g, h\colon X \to \mathbb{R}$ com $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = b \in \mathbb{R}$ e, para cada $x \in X$,

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \text{ ou } h(x) \leq f(x) \leq g(x),$$

então também $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

b) Se existir uma função $g\colon X \to \mathbb{R}$ com $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$ e, para cada $x \in X$, $g(x) \leq f(x)$, então também $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

c) Se existir uma função $h\colon X \to \mathbb{R}$ com $\lim\limits_{x \to a} h(x) = -\infty$ e, para cada $x \in X$, $f(x) \leq h(x)$, então também $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Dem: a) Seja $\delta > 0$ arbitrário. Podemos então considerar $\varepsilon' > 0$ e $\varepsilon'' > 0$ tais que, para cada $x \in X \cap V_{\varepsilon'}(a)$, $g(x) \in V_\delta(b)$ e, para cada $x \in X \cap V_{\varepsilon''}(a)$, $h(x) \in V_\delta(b)$. Sendo $\varepsilon > 0$ o menor dos dois números ε' e ε'', vemos agora que, para cada $x \in X \cap V_\varepsilon(a)$, $g(x)$ e $h(x)$ pertencem simultaneamente a $V_\delta(b)$ e portanto, por esta vizinhança ser um intervalo, também $f(x)$, que é um daqueles dois reais ou está entre eles, pertence a $V_\delta(b)$. Ficou assim provado que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$.

b) Seja $\delta > 0$ arbitrário. Existe então $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $x \in X \cap V_\varepsilon(a)$, $g(x) \in V_\delta(+\infty) =]\frac{1}{\delta}, +\infty]$ e portanto, por ser $g(x) \leq f(x)$, também $f(x) \in]\frac{1}{\delta}, +\infty] = V_\delta(+\infty)$. Provámos assim que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$.

c) Podíamos dar uma justificação análoga à dada em b), mas também podemos reduzir-nos à conclusão já obtida reparando que $-h(x) \le -f(x)$ e que $-h(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$, donde $-f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ e $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$. □

I.5.41 **(Exemplos) a)** Seja $f\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$. Sabemos que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$, mas não sabemos nada sobre o limite da função $\operatorname{sen}(x)$ pelo que não podemos aplicar nenhuma das propriedades algébricas dos limites para determinar o limite da função. No entanto, como um seno está sempre entre -1 e 1, podemos escrever $-\frac{1}{x} \le f(x) \le \frac{1}{x}$, onde $-\frac{1}{x} \to 0$ e $\frac{1}{x} \to 0$. Podemos assim concluir, por enquadramento, que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

b) Consideremos a função $\operatorname{int}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, onde $\operatorname{int}(x)$ é a parte inteira de x, definida em I.1.13, portanto $\operatorname{int}(x) = p$, para $x \in [p, p+1[$, com $p \in \mathbb{Z}$. Uma vez que, para cada $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{int}(x) \le x < \operatorname{int}(x) + 1$, vem

$$x - 1 < \operatorname{int}(x) \le x,$$

o que nos permite concluir, por enquadramento, que

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{int}(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{int}(x) = +\infty.$$

Vamos agora examinar outros exemplos de aplicação da determinação de limites por enquadramento que têm um caráter mais geral e que serão utilizados frequentemente.

I.5.42 **(Caracterização alternativa dos limites finitos)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ aderente a X e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função. Tem-se então:

a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ se, e só se, $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0$.

b) Mais geralmente, para cada $b \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ se, e só se,

$$\lim_{x\to a} d(f(x), b) = \lim_{x\to a} |f(x) - b| = 0.$$

Dem: a) Já vimos na alínea b) de I.5.17 que, se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ então também $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0$. Supondo, reciprocamente, que $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0$, tem-se também $\lim\limits_{x\to a} -|f(x)| = 0$ e portanto, pelo enquadramento

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|,$$

concluímos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

b) Como consequência da alínea a) de I.5.17, vemos que, se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, então

$$\lim_{x \to a} (f(x) - b) = \lim_{x \to a} f(x) + (-b) = 0,$$

e portanto $\lim_{x \to a} |f(x) - b| = 0$. Reciprocamente, se $\lim_{x \to a} |f(x) - b| = 0$, vem $\lim_{x \to a} (f(x) - b) = 0$ e portanto

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} ((f(x) - b) + b) = 0 + b = b. \qquad \square$$

I.5.43 **(Mnemónica limitado × 0)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ aderente a X e $f, g \colon X \to \mathbb{R}$ duas funções. Se f é uma função limitada e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, então $\lim_{x \to a} f(x) \times g(x) = 0$.

Dem: Tendo em conta I.1.20, seja $M \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, para cada $x \in X$. Tem-se então, para cada $x \in X$,

$$0 \leq |f(x) \times g(x)| = |f(x)| \times |g(x)| \leq M|g(x)|,$$

onde $\lim_{x \to a} M|g(x)| = M \times 0 = 0$ pelo que deduzimos, por enquadramento, que $\lim_{x \to a} |f(x) \times g(x)| = 0$, donde, por I.5.42, $\lim_{x \to a} f(x) \times g(x) = 0$. $\square$

Nos próximos resultados os limites envolvidos serão limites de sucessões. O importância do primeiro acaba por ser maior do que o enunciado talvez fizesse prever.

I.5.44 **(O limite de $\frac{x_n}{n}$)** Sejam $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais e $a \in \overline{\mathbb{R}}$ um real estendido tal que $x_{n+1} - x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$. Tem-se então

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x_n}{n} = a.$$

Dem: Vamos tratar separadamente os casos em que $a \in \mathbb{R}$, $a = +\infty$ e $a = -\infty$, começando, no primeiro caso, por examinar o caso em que $a = 0$.

1) Suponhamos que $x_{n+1} - x_n \to 0$. Seja $\delta > 0$ arbitrário. Comecemos por considerar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq n_0$, $x_{n+1} - x_n \in V_{\delta/2}(0)$, ou seja

$$|x_{n+1} - x_n| < \frac{\delta}{2}.$$

Uma vez que a sucessão $n \mapsto \frac{x_{n_0}}{n}$ também tem limite 0, podemos, do mesmo modo, considerar $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq n_1$,

$$\left|\frac{x_{n_0}}{n}\right| < \frac{\delta}{2}.$$

Sendo n_2 o maior dos dois números naturais n_0 e n_1, vemos agora que, para cada $n \geq n_2$, vem, em particular, $n \geq n_0$ e $n \geq n_1$ donde

$$\begin{aligned}|\frac{x_n}{n}| &= |\frac{x_{n_0} + (x_{n_0+1} - x_{n_0}) + (x_{n_0+2} - x_{n_0+1}) + \cdots + (x_n - x_{n-1})}{n}| \leq \\ &\leq |\frac{x_{n_0}}{n}| + \frac{|x_{n_0+1} - x_{n_0}| + |x_{n_0+2} - x_{n_0+1}| + \cdots + |x_n - x_{n-1}|}{n} < \\ &< \frac{\delta}{2} + \frac{(n-n_0)\frac{\delta}{2}}{n} < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,\end{aligned}$$

ou seja $\frac{x_n}{n} \in V_\delta(0)$, o que mostra que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n} = 0.$$

2) Suponhamos agora, mais geralmente, que $x_{n+1} - x_n \to a \in \mathbb{R}$. Consideremos uma nova sucessão $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $y_n = x_n - an$ e reparemos que se tem

$$\begin{aligned}y_{n+1} - y_n &= (x_{n+1} - a(n+1)) - (x_n - an) = \\ &= (x_{n+1} - x_n) - a \to a - a = 0.\end{aligned}$$

Aplicando a conclusão de a) a esta nova sucessão, concluímos que $\lim \frac{y_n}{n} = 0$ e portanto tem-se

$$\frac{x_n}{n} = \frac{y_n + an}{n} = \frac{y_n}{n} + a \to 0 + a = a.$$

3) Suponhamos que $x_{n+1} - x_n \to +\infty$. Seja $\delta > 0$ arbitrário. Comecemos por considerar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq n_0$, $x_{n+1} - x_n \in V_{\delta/2}(+\infty)$, ou seja

$$x_{n+1} - x_n > \frac{2}{\delta}.$$

Uma vez que a sucessão $n \mapsto \frac{x_{n_0}}{n}$ tem limite 0, podemos considerar $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq n_1$, $\frac{x_{n_0}}{n} \in V_{1/\delta}(0) =]-\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta}[$, em particular,

$$\frac{x_{n_0}}{n} > -\frac{1}{\delta}.$$

Sendo n_2 o maior dos dois números naturais n_0 e n_1, vemos agora que, para cada $n \geq n_2$, vem, em particular, $n \geq n_0$ e $n \geq n_1$ donde

$$\begin{aligned}\frac{x_n}{n} &= \frac{x_{n_0} + (x_{n_0+1} - x_{n_0}) + (x_{n_0+2} - x_{n_0+1}) + \cdots + (x_n - x_{n-1})}{n} \geq \\ &> -\frac{1}{\delta} + \frac{(x_{n_0+1} - x_{n_0}) + (x_{n_0+2} - x_{n_0+1}) + \cdots + (x_n - x_{n-1})}{n} > \\ &> -\frac{1}{\delta} + \frac{(n-n_0)\times\frac{2}{\delta}}{n} > -\frac{1}{\delta} + \frac{2}{\delta} = \frac{1}{\delta}\end{aligned}$$

ou seja $\frac{x_n}{n} \in V_\delta(+\infty)$, o que mostra que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n} = +\infty.$$

4) Suponhamos enfim que $x_{n+1} - x_n \to -\infty$. Consideremos uma nova sucessão $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $y_n = -x_n$ e reparemos que se tem

$$y_{n+1} - y_n = -(x_{n+1} - x_n) \to +\infty.$$

Aplicando a conclusão de a) a esta nova sucessão, vemos que $\lim \frac{y_n}{n} = +\infty$ e portanto tem-se

$$\frac{x_n}{n} = -\frac{y_n}{n} \to +\infty. \qquad \square$$

I.5.45 **(Sucessão exponencial de base maior que 1)** Seja $b > 1$ um real fixado e consideremos a sucessão de números reais que a $n \in \mathbb{N}$ associa b^n, a que se dá o nome de *sucessão exponencial* de base b. [71] Tem-se então:

a) A sucessão b^n é estritamente crescente e tem limite $+\infty$. Em particular $b^n > 1$.

b) De facto pode-se afirmar mais: Para cada número inteiro $k \geq 0$, tem-se

$$\frac{b^n}{n^k} \xrightarrow[n]{} +\infty.$$ [72]

Dem: a) Temos uma sucessão de números maiores que 0 e o facto de ela ser estritamente crescente resulta de se ter

$$b^{n+1} = b^n \times b > b^n \times 1 = b^n.$$

O facto de se ter $b^n > 1$ resulta de termos uma sucessão estritamente crescente com $b^1 = b > 1$. Para provarmos que ela tem limite $+\infty$ vamos utilizar a desigualdade de Bernouilli (cf. I.2.5), pondo $b = 1 + x$, onde $x = b - 1 > 0$. Então, pela desigualdade referida, $b^n \geq 1 + nx$ e portanto, uma vez que $1 + nx \to +\infty$, segue-se, por enquadramento, que $b^n \to +\infty$.

b) Vamos provar a afirmação de b) por indução em k, começando por reparar que o caso em que $k = 0$ é simplesmente a conclusão de a). Suponhamos a conclusão de b) verdadeira para um certo valor $p \geq 0$ de k (e para toda a base maior que 1) e tentemos prová-lo quando $k = p + 1$. Como $\sqrt{b} > 1$, podemos, como antes, escrever $\sqrt{b} = 1 + y$, com $y > 0$ e vem, pela desigualdade de Bernouilli,

---

[71] Não confundir a sucessão exponencial com a função potência: Na primeira o expoente está fixo e o que varia é a base; na segunda é a base que está fixa e o que varia é o expoente (de momento apenas em $\mathbb{N}$, daí o nome "sucessão exponencial" e não "função exponencial", uma vez que, apesar de o estudante trabalhar informalmente com elas no ensino secundário, não definimos ainda potências de expoente não natural).

[72] Repare-se que, para k ≥ 1, este quociente conduzia a uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\frac{(\sqrt{b})^n}{n} = \frac{(1+y)^n}{n} \geq \frac{1+ny}{n} \geq y$$

e portanto, por ser

$$\frac{b^n}{n^{p+1}} = \frac{(\sqrt{b})^n}{n} \times \frac{(\sqrt{b})^n}{n^p} \geq y \times \frac{(\sqrt{b})^n}{n^p} \to +\infty$$

(pela hipótese de indução com a base $\sqrt{b}$), concluímos por enquadramento que se tem também

$$\lim_n \frac{b^n}{n^{p+1}} = +\infty. \qquad \square$$

I.5.46 **(Sucessão exponencial de base menor que 1)** Seja $0 < b < 1$ um real fixado e consideremos a *sucessão exponencial* de base b, $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto b^n$.
a) A sucessão b^n é estritamente decrescente e tem limite 0. Em particular $b^n < 1$.
b) De facto pode-se afirmar mais: Para cada número inteiro $k \geq 0$, tem-se

$$b^n \times n^k \xrightarrow[n]{} 0.$$ [73]

Dem: Notando $c = \frac{1}{b} > 1$, tem-se que a sucessão $n \mapsto c^n$ é estritamente crescente, com os termos maiores que 1 e com limite $+\infty$ e, para cada natural k, $\frac{c^n}{n^k} \xrightarrow[n]{} +\infty$. Uma vez que $b = \frac{1}{c}$, e portanto $b^n = \frac{1}{c^n}$, concluímos que a sucessão $n \mapsto b^n$ é estritamente decrescente, com os termos menores que 1 e com limite $\frac{1}{+\infty} = 0$ e que

$$b^n \times n^k = \frac{1}{\frac{c^n}{n^k}} \xrightarrow[n]{} \frac{1}{+\infty} = 0. \qquad \square$$

As conclusões nas alíneas b) de I.5.45 e de I.5.46 podem ser traduzidas intuitivamente pelas afirmações que, se $b > 1$, b^n tende para $+\infty$ "com mais força" que qualquer potência n^k e que, se $b < 1$, b^n tende para 0 "com mais força" do que qualquer potência n^k tende para $+\infty$. O resultado a seguir, que terá aplicações adiante, vai exibir, dentro do mesmo ponto de vista, uma sucessão que tende para $+\infty$ "ainda com mais força" que b^n. Recordemos que, se $n \in \mathbb{N}$, o fatorial de n, $n!$ é o produto de todos os números naturais de 1 até n:

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n.$$

[73] Note-se que, para $k \geq 1$, este produto conduzia a uma indeterminação do tipo $\infty \times 0$.

I.5.47 Se $b > 0$, tem-se

$$\lim_n \frac{n!}{b^n} = +\infty,$$

e portanto também

$$\lim_n \frac{b^n}{n!} = 0.$$

Dem: A segunda afirmação resulta da primeira uma vez que se tem

$$\frac{b^n}{n!} = \frac{1}{\frac{n!}{b^n}}.$$

Fixemos um natural k tal que $k > b$. Tendo em conta I.5.10, para verificar que a função $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto \frac{n!}{b^n}$ tem limite $+\infty$ quando n tende para $+\infty$, basta verificar que isso sucede à sua restrição a

$$\mathbb{N} \cap V_{\frac{1}{k}}(+\infty) = \mathbb{N}_{>k} = \{n \in \mathbb{N} \mid n > k\}.$$

Ora, sendo $n > k$, tem-se

$$\frac{n!}{b^n} = \frac{k!}{b^k} \times \frac{(k+1) \times \cdots \times n}{b^{n-k}} \geq \frac{k!}{b^k} \times \left(\frac{k}{b}\right)^{n-k}$$

onde, por ser $\frac{k}{b} > 1$ e $n - k \xrightarrow[n]{} +\infty$, deduzimos de I.5.45 e do resultado I.5.36 sobre o limite da função composta que

$$\frac{k!}{b^k} \times \left(\frac{k}{b}\right)^{n-k} \xrightarrow[n]{} +\infty.$$

O facto de a função $\mathbb{N}_{>k} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto \frac{n!}{b^n}$ ter limite $+\infty$ em $+\infty$ resulta agora por enquadramento. $\square$

Vamos agora examinar o modo como os limites de sucessões permitem apresentar caracterizações alternativas dos pontos aderentes a um subconjunto de $\mathbb{R}$ e dos limites de funções em pontos aderentes ao domínio, a segunda das quais foi possivelmente a que estudante encontrou no ensino secundário como definição. Começamos com um lema que permite unificar uma parte comum das demonstrações dos dois resultados.

I.5.48 **(Lema)** Sejam $a \in \overline{\mathbb{R}}$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in V_{1/n}(a)$. Tem-se então $x_n \to a$.

Dem: No caso em que a é finito, o facto de se ter

$$x_n \in V_{1/n}(a) =]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}[,$$

e portanto $a-\frac{1}{n}<x_n<a+\frac{1}{n}$, com $a-\frac{1}{n}\to a$ e $a+\frac{1}{n}\to a$, implica, por enquadramento, que $x_n\to a$. No caso em que $a=+\infty$, o facto de se ter $x_n\in V_{1/n}(+\infty)=]n,+\infty]$, e portanto $n<x_n$, com $n\to+\infty$, implica, por enquadramento, que $x_n\to+\infty$. No caso em que $a=-\infty$, o facto de se ter $x_n\in V_{1/n}(-\infty)=[-\infty,-n[$, e portanto $x_n<-n$, com $-n\to-\infty$, implica, por enquadramento, que $x_n\to-\infty$. □

I.5.49 **(Caracterização segundo Heine dos pontos aderentes)** Sejam $A\subset\mathbb{R}$ um conjunto e $a\in\overline{\mathbb{R}}$. Tem-se então que a é aderente a A se, e só se, existe uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A tal que $a=\lim x_n$.

Dem: Lembrando que uma sucessão não é mais do que uma função de domínio $\mathbb{N}$, já sabemos, por I.5.14, que, se existir uma sucessão de elementos de A com limite a, então a é aderente a A. Suponhamos, reciprocamente, que a é aderente a A. Para cada natural n existem então elementos de A na vizinhança $V_{1/n}(a)$ pelo que, escolhendo $x_n\in A\cap V_{1/n}(a)$, obtemos uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A, que, pelo lema I.5.48 tem limite a. □

I.5.50 **(Caracterização segundo Heine dos limites das funções)** Sejam $X\subset\mathbb{R}$ um conjunto, $f\colon X\to\mathbb{R}$ uma função e a um real estendido aderente a X. A função f tem limite $b\in\overline{\mathbb{R}}$ no ponto a se, e só se, qualquer que seja a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de X tal que $x_n\to a$, tem-se $f(x_n)\to b$.

Dem: Lembrando que uma sucessão não é mais do que uma função de domínio $\mathbb{N}$, já sabemos, por I.5.36, que, se $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ e $x_n\to a$, com $x_n\in X$, então $f(x_n)\to b$.[74] Provemos agora, pelo método do contrarrecíproco, que, se para toda a sucessão (x_n) de elementos de X, com $x_n\to a$, $f(x_n)\to b$, então $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$. Para isso, vamos supor que b **não** é limite de $f(x)$ no ponto a e tentamos mostrar a existência de uma sucessão (x_n) de elementos de X com $x_n\to a$ tal que a sucessão $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ não tenha limite b. Ora, negando a condição de b ser limite da função, concluímos que existe $\delta>0$ tal que, qualquer que seja $\varepsilon>0$, não é verdade que todos os elementos $f(x)$ com $x\in X\cap V_\varepsilon(a)$ pertençam a $V_\delta(b)$. Fixado um tal δ, podemos, para cada natural n, aplicar a afirmação precedente com $\varepsilon=\frac{1}{n}$ para deduzir a existência de algum $x_n\in X\cap V_{1/n}(a)$ tal que $f(x_n)\notin V_\delta(b)$. Pelo lema I.5.48, a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de X assim considerada tem limite a e, no entanto, a correspondente sucessão $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ não tem certamente limite b, por ter todos os elementos fora da vizinhança $V_\delta(b)$ de b. □

[74]Reparar que a função que a n associa $f(x_n)$ é a composta da função f com a função que a n associa x_n.

Exercícios

Ex I.5.1 Provar diretamente, isto é, sem recorrer a nenhum dos teoremas sobre limites que examinámos, que, se $X \subset \mathbb{R}$, a é aderente a X e $f\colon X \to \mathbb{R}$ é uma função para a qual exista $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$, então, para cada constante $c \in \mathbb{R}$, tem-se $\lim_{x\to a} cf(x) = cb$.

Ex I.5.2 Sejam $f, g\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ as funções definidas por $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = \frac{2}{x}$. Verificar que $f(x) < g(x)$, para cada x no domínio, que ambas têm limite quando x tende para $+\infty$ e que, no entanto **não** se tem

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) < \lim_{x\to+\infty} g(x)$$

(os dois limites são iguais). Notar que este exemplo mostra que o corolário I.5.3 deixa de ser válido se substituirmos as desigualdades latas $\leq$ pelas correspondentes desigualdades estritas $<$.

Ex I.5.3 Utilizar diretamente a definição de limite para mostrar que a sucessão cujo termo de ordem n é $x_n = \frac{2n-1}{n+1}$ tem limite 2.

Ex I.5.4 Sendo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \mathrm{sen}(x)$, mostrar que os sublimites de $f(x)$ quando x tende para $+\infty$ são exatamente os números reais do intervalo $[-1, 1]$ e deduzir, em particular, que a função não tem limite quando x tende para $+\infty$.

Ex I.5.5 Para cada uma das sucessões com os termos de ordem n a seguir indicados, averiguar a existência de limite e, em caso afirmativo, determiná-lo.

a) $x_n = \dfrac{1}{n}\sqrt{n^2 - 1}$;

b) $y_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{n+2}$;

c) $z_n = \Big[(-1)^n + \dfrac{1}{n}\Big]^2$.

Ex I.5.6 Determinar os limites

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x}) \times \sqrt{x+1}\,;$$
$$\textbf{b)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}\,;$$
$$\text{c)}\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 + \sqrt{x^2+x}} - x\,.$$

Ex I.5.7 Dar exemplos de funções $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tais que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) \in \mathbb{R}$$

e que:

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1;$$
$$\textbf{b)}\ \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0;$$
$$\textbf{c)}\ \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty;$$
$$\textbf{d)}\ \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 7;$$
$$\textbf{e)}\ \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ não existe;}$$

Ex I.5.8 Dar exemplo de duas sucessões $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, nenhuma das quais admitindo 0 como limite, mas tais que $\lim(x_n \times y_n) = 0$.

Ex I.5.9 Sejam x_n o termo de ordem n de uma sucessão monótona e y_n o termo de ordem n de uma sucessão limitada e suponhamos verificada a condição

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n},$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Provar, em primeiro lugar, que (x_n) é limitada e depois que as duas sucessões têm um mesmo limite e que este é real.

Ex I.5.10 **(Tender para infinito sem sinal determinado)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, a um real estendido aderente a X e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função. Diz-se que f *tende para* ∞ *no ponto* a (ou quando x tende para a) se se tem $|f(x)| \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ e escreve-se então $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \infty$.

a) Verificar que, quer no caso em que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ como naquele em que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$, tem-se também $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \infty$.

b) Mostrar que, se existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$, então f não tende para

∞ no ponto a.

c) Considerando a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$, verificar que se tem $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \infty$, embora não se tenha nem $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$ nem $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$.

★ Ex I.5.11 Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in \overline{\mathbb{R}}$ aderente a X. Diz-se que f é *localmente limitada* em a se existir $r > 0$ tal que a restrição de f a $X \cap V_r(a)$ seja uma função limitada, isto é, tal que $f(X \cap V_r(a))$ seja um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$.

a) Verificar que se f é uma função limitada, então f é localmente limitada em qualquer ponto aderente ao domínio.

b) Verificar que, se existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$, então f é localmente limitada em a.

c) Verificar que, se $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \infty$ (cf. o exercício I.5.10), então f não é localmente limitada em a.

d) Mostrar que, se uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem limite $b \in \mathbb{R}$, então ela é limitada (e não só localmente limitada em $+\infty$). **Sugestão:** Lembrar que uma sucessão é uma função de domínio $\mathbb{N}$ e reparar que, para cada $r > 0$, $\mathbb{N} \setminus V_r(+\infty)$ é necessariamente um conjunto finito.

Ex I.5.12 Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções e $a \in \overline{\mathbb{R}}$ aderente a X,

a) Mostrar, por enquadramento, que, se $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$ e g é uma função majorada, então $f(x) + g(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$.

b) Mostrar, por enquadramento, que, se $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ e g é uma função minorada, então $f(x) + g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$.

Ex I.5.13 Determinar, por enquadramento, os limites das sucessões cujos termos de ordem n são os seguintes:

a) $\dfrac{n!}{(n+4)!}$;

b) $\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(2n)^2}$;

c) $\dfrac{n - \cos(n)}{n + \cos(n)}$;

d) $\dfrac{n!}{n^n}$;

e) $\left(\dfrac{\sqrt{17}}{n}\right)^n$.

Ex I.5.14 Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ x, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Verificar quais os elementos $a \in \overline{\mathbb{R}}$ nos quais a função f tem limite em $\overline{\mathbb{R}}$.

Ex I.5.15 Determinar os limites em $+\infty$ e em $-\infty$ da função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x + \frac{x}{2}\,\mathrm{sen}(x).$$

Ex I.5.16 Determinar o limite em 0 da função $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x\,\mathrm{sen}(\frac{1}{x}).$$

Ex I.5.17 Verificámos no exercício I.4.15 que se pode definir recursivamente uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n}$$

e que esta sucessão é estritamente crescente e majorada. Mostrar que a sucessão tem limite finito x e determinar o valor desse limite. **Sugestão:** Utilizar os teoremas sobre limites para mostrar que $x = 1 + \sqrt{x}$.

Ex I.5.18 Verificámos no exercício I.4.16 que se pode definir recursivamente uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por

$$x_1 = 5, \quad x_{n+1} = \frac{2}{3}\,x_n + 1$$

e que esta sucessão é estritamente decrescente e minorada. Mostrar que a sucessão tem limite finito x e determinar o valor desse limite.

★ Ex I.5.19 Dado $t \in [0,1]$, consideremos uma sucessão de números reais $f_n(t)$ definida pelas condições

$$f_1(t) = 0, \quad f_{n+1}(t) = f_n(t) + \frac{1}{2}(t - f_n(t)^2).$$

a) Verificar, por indução, que, para cada natural $n \geq 1$,

$$0 \leq f_n(t) \leq \sqrt{t}.$$

Sugestão: Supondo a desigualdade verdadeira para $n = p$, reparar que $t - f_p(t)^2 = (\sqrt{t} + f_p(t))(\sqrt{t} - f_p(t))$, onde o segundo factor é maior ou igual a 0 e o primeiro é menor ou igual a 2.

b) Verificar que a sucessão $(f_n(t))$ é crescente e deduzir, primeiro, que ela é convergente e, seguidamente, que $f_n(t) \to \sqrt{t}$.

c) Reparar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, ficou definida uma função $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Verificar, por indução, que se $n \geq 2$ a função f_n é uma função polinomial de grau 2^{n-2}.
d) Seja agora $a > 0$ fixado. Encontrar funções polinomiais $g_n\colon [0,a] \to \mathbb{R}$ tais que, para cada $s \in [0,a]$, a sucessão $(g_n(s))_{n\in\mathbb{N}}$ seja crescente e tenha limite $\sqrt{s}$. **Sugestão:** Reparar que para cada $s \in [0,a]$ tem-se $\frac{s}{a} \in [0,1]$ e considerar a sucessão dos números reais $f_n(\frac{s}{a})$.

★ Ex I.5.20 Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto.
a) Mostrar que, se $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação à esquerda (respetivamente à direita) de A, então existe uma sucessão estritamente crescente (respetivamente estritamente decrescente) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A com limite a. **Sugestão:** Examinando, para fixar ideias o caso em que a é ponto de acumulação à esquerda, construir recursivamente a sucessão (x_n) de elementos de $A_{<a}$, tomando $x_1 \in A_{<a} \cap V_1(a)$ e, supondo x_n já escolhido, verificar que se pode escolher $x_{n+1} \in A_{<a} \cap V_{n+1}(a)$ com $x_{n+1} > x_n$.
b) Mostrar que, se A não é majorado (isto é, se $+\infty$ é aderente a A), então existe uma sucessão estritamente crescente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A com $x_n \to +\infty$.
c) Mostrar que, se A não é minorado (isto é, se $-\infty$ é aderente a A), então existe uma sucessão estritamente decrescente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A com $x_n \to -\infty$.
d) Concluir das alíneas anteriores que, se o conjunto A é não vazio e não tem máximo (respetivamente não tem mínimo) então $\sup(A)$ (respetivamente $\inf(A)$) é limite de uma sucessão estritamente crescente (respetivamente estritamente decrescente) de elementos de A.

§6. Sublimites e aplicações.

I.6.1 Recordemos a definição dos sublimites de uma função num ponto, apresentada em I.5.5: Se $X \subset \mathbb{R}$, a é aderente a X e $f\colon X \to \mathbb{R}$ é uma função, os *sublimites* de f *no ponto* a são os reais estendidos $b \in \overline{\mathbb{R}}$ que são limite de alguma restrição $f_{/A}\colon A \to \mathbb{R}$, com $A \subset X$ e a aderente a A.
Recordemos também que, como referido em I.5.6, se b é limite de $f\colon X \to \mathbb{R}$ no ponto a, então b também é sublimite de f no ponto a, sendo, de facto o único sublimite de f nesse ponto.
Recordemos ainda que, como referido na alínea d) de I.5.13, no caso em que $a \in X$, $f(a)$ é um dos sublimites de $f\colon X \to \mathbb{R}$ no ponto a, que pode ser obtido a partir do subconjunto $A = \{a\}$.

I.6.2 **(Caracterização alternativa dos sublimites)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, a aderente a X e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função. Tem-se então que um real estendido $b \in \overline{\mathbb{R}}$ é um sublimite de f no ponto a se, e só se, quaisquer que sejam $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ na vizinhança $V_\varepsilon(a)$ tal que $f(x) \in V_\delta(b)$.[75]

Dem: Comecemos por supor que b é sublimite de f no ponto a, isto é, que existe $A \subset X$, com a ainda aderente a A tal que a restrição $f_{/A}\colon A \to \mathbb{R}$ tenha limite b quando x tende para a. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, sabemos que a ainda é aderente a $A \cap V_\varepsilon(a)$ e que b é também limite no ponto a da restrição de f a $A \cap V_\varepsilon(a)$ (cf. I.5.10) pelo que b é aderente ao respetivo contradomínio $f(A \cap V_\varepsilon(a))$ (cf. I.5.14) e portanto, dado também $\delta > 0$, existe um ponto deste contradomínio em $V_\delta(b)$ ou seja existe $x \in A \subset X$ em $V_\varepsilon(a)$ tal que $f(x) \in V_\delta(b)$.

Suponhamos agora, reciprocamente, que, quaisquer que sejam $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ na vizinhança $V_\varepsilon(a)$ tal que $f(x) \in V_\delta(b)$. Queremos provar que b é sublimite de $f\colon X \to \mathbb{R}$ no ponto a e, para isso, podemos já afastar o caso em que $a \in X$ e $b = f(a)$, caso em que a conclusão já é conhecida.

Para cada natural n, escolhamos $x_n \in X \cap V_{1/n}(a)$, com $x_n \neq a$ e $f(x_n) \in V_{1/n}(b)$: Se $a \notin X$ a possibilidade de escolher um tal x_n resulta de aplicar a hipótese que estamos a fazer com $\delta = \varepsilon = \frac{1}{n}$; Se $a \in X$, e portanto $b \neq f(a)$, temos que ser mais cuidadosos mas começamos por considerar $\delta' > 0$ tal que $f(a) \notin V_{\delta'}(b)$ e aplicamos então a hipótese com $\varepsilon = \frac{1}{n}$ e δ igual ao mínimo entre δ' e $\frac{1}{n}$. Consideremos agora o conjunto $A \subset X$ cujos elementos são os x_n que foram escolhidos. Uma vez que, pelo lema I.5.48, $x_n \to a$, resulta de I.5.14 que a é aderente a A. Mostremos agora que a restrição $f_{/A}\colon A \to \mathbb{R}$ tem limite b no ponto a, com o que ficará atingido o obetivo de mostrar que b é sublimite de f no ponto a. Seja então $\delta > 0$ arbitrário. Fixemos um natural n_0 tal que $\frac{1}{n_0} < \delta$. Uma vez que o subconjunto de $\mathbb{R}$

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}\}$$

é finito, e portanto fechado, e não contém a, podemos considerar $\varepsilon > 0$ tal que a vizinhança $V_\varepsilon(a)$ não contenha nenhum dos seus elementos. Para cada $x \in A$ na vizinhança $V_\varepsilon(a)$, tem-se $x = x_n$ para um certo $n > n_0$ donde, por ser $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \delta$, $f(x) \in V_{1/n}(b) \subset V_\delta(b)$. □

I.6.3 **(Reformulação da caracterização dos sublimites)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, a aderente a X e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função. Tem-se então que um real estendido $b \in \overline{\mathbb{R}}$ é um sublimite de f no ponto a se, e só se, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, b é aderente ao conjunto $f(X \cap V_\varepsilon(a))$. Em particular, se b é sublimite de $f\colon X \to Y \subset \mathbb{R}$ no ponto a, então b é aderente ao contradomínio $f(X)$, e portanto também aderente a Y.

Dem: Basta reparar que afirmar que b é aderente a $f(X \cap V_\varepsilon(a))$ é equiva-

[75]Na linguagem da proximidade, esta condição afirma que, quaisquer que sejam as exigências de proximidade que se considerem, para a e para b, existe $x \in X$ próximo de a tal que $f(x)$ esteja próximo de b.

lente a afirmar que, para cada $\delta > 0$, $V_\delta(b)$ tem algum elemento deste conjunto, isto é, que existe $x \in X \cap V_\varepsilon(a)$ com $f(x) \in V_\delta(b)$. $\square$

I.6.4 **(Corolário — os sublimites infinitos)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, a aderente a X e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função. Tem-se então:

a) $+\infty$ é sublimite de f no ponto a se, e só se, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, o conjunto $f(X \cap V_\varepsilon(a))$ não é majorado.

b) $-\infty$ é sublimite de f no ponto a se, e só se, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, o conjunto $f(X \cap V_\varepsilon(a))$ não é minorado.

Dem: Trata-se de um caso particular de I.6.3, lembrando a condição em I.3.21 para $+\infty$ ou $-\infty$ ser aderente a um conjunto. $\square$

I.6.5 **(Sublimites duma restrição)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, a aderente a X e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função. Seja $A \subset X$ tal que a ainda seja aderente a A e que a restrição $f_{/A}\colon A \to \mathbb{R}$ admita $b \in \overline{\mathbb{R}}$ como sublimite no ponto a. Então b é também sublimite de $f\colon X \to \mathbb{R}$ no ponto a (comparar com I.5.6, reparando que a “passagem” se faz agora em sentido contrário).

Dem: Basta reparar que, se $B \subset A$ é tal que a ainda seja aderente a B e que $f_{/B}\colon B \to \mathbb{R}$ tenha limite b no ponto a, então B também é um subconjunto de X. $\square$

I.6.6 **(Sublimites quando o domínio é uma união)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função, a um ponto aderente a X e $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Sejam $A \subset X$ e $B \subset X$ dois subconjuntos tais que $A \cup B = X$. Tem-se então (comparar com I.5.8, reparando que a “passagem” se faz agora em sentido contrário):

a) Se a for aderente tanto a A como a B, então todo o sublimite $b \in \overline{\mathbb{R}}$ de $f\colon X \to \mathbb{R}$ no ponto a é sublimite de pelo menos uma das restrições $f_{/A}$ e $f_{/B}$ nesse ponto.

b) Se a for aderente a A e não for aderente a B, então todo o sublimite $b \in \overline{\mathbb{R}}$ de $f\colon X \to \mathbb{R}$ no ponto a é também sublimite de $f_{/A}\colon A \to \mathbb{R}$ nesse ponto.

Dem: a) Seja $C \subset X$, com a aderente a C, tal que $f_{/C}\colon C \to \mathbb{R}$ tenha limite b no ponto a. Tem-se então $C = (C \cap A) \cup (C \cap B)$ e, tendo em conta I.3.15, a é aderente a pelo menos um dos conjuntos $C \cap A$ e $C \cap B$. Se a é aderente a $C \cap A$, então a restrição de f a $C \cap A$, sendo uma restrição de $f_{/C}$, tem limite b no ponto a o que, por ser $C \cap A \subset A$, implica que $f_{/A}$ tem b como sublimite no ponto a. Analogamente se verifica que, se a é aderente a $C \cap B$, então $f_{/B}$ tem b como sublimite no ponto a.

b) Seja $C \subset X$, com a aderente a C, tal que $f_{/C}\colon C \to \mathbb{R}$ tenha limite b no ponto a. Tem-se então $C = (C \cap A) \cup (C \cap B)$, onde, por ser $C \cap B \subset B$, a não é aderente a $C \cap B$. Podemos então concluir por I.3.15 que a é aderente a $C \cap A$. Como a restrição de f a $C \cap A$, sendo uma restrição de $f_{/C}$, tem limite b no ponto a, o facto de se ter $C \cap A \subset A$, implica que $f_{/A}$ tem b como sublimite no ponto a. $\square$

I.6.7 **(Os sublimites têm um carácter local)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, a aderente a X e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função. Dado $r > 0$, a é ainda aderente ao conjunto

$X \cap V_r(a)$ e os sublimites de f no ponto a coincidem com os sublimites no ponto a da restrição de f a $X \cap V_r(a)$.

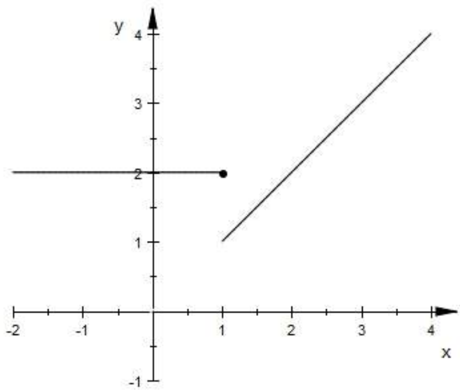
Dem: Trata-se de uma consequência dos resultados precedentes uma vez que se pode escrever

$$X = (X \cap V_r(a)) \cup (X \setminus V_r(a)),$$

em que o ponto a não é aderente a $X \setminus V_r(a)$, por a vizinhança $V_r(a)$ não intersetar este conjunto. □

I.6.8 **(Exemplos) a)** Reexaminemos o exemplo em I.5.7, constituído pela função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x \leq 1, \\ x, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

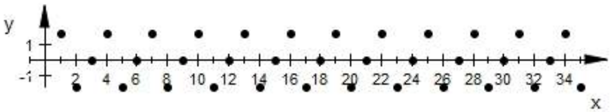


Concluímos então que f não tem limite no ponto 1, já que esta função admite os sublimites distintos 2 e 1 nesse ponto, determinados respetivamente pelos subconjuntos $]-\infty, 1]$ e $]1, +\infty[$. Utilizando I.6.6, podemos agora concluir que 2 e 1 são os **únicos** sublimites de f no ponto 1, uma vez que as restrições aos subconjuntos referidos tendo 2 e 1 como limites no ponto 1, têm estes como únicos sublimites nesse ponto.

b) Consideremos a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$x_n = 2\,\text{sen}(\frac{2n\pi}{3}),$$

cujo gráfico sugerimos a seguir (lembrar que uma sucessão é uma função de domínio $\mathbb{N}$).



Tal como acontecia com a noção de limite, quando falamos simplesmente de sublimite de uma sucessão está implícito que é $+\infty$ o ponto em que se considera esse sublimite. Aplicando I.6.5 e duas vezes I.6.6 podemos concluir que esta sucessão tem como sublimites exatamente os números reais $-\sqrt{3}$, 0 e $\sqrt{3}$ como sublimites. Com efeito, $\mathbb{N}$ é a união de três subconjuntos, que notaremos $\mathbb{N}'$, $\mathbb{N}''$ e $\mathbb{N}'''$, cujos elementos são respetivamente os múltiplos de 3, os múltiplos de 3 somados com 1 e os múltiplos de 3 somados com 2, e as restrições da sucessão àqueles três subconjuntos são funções constantes com os valores 0, $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$, respetivamente; Uma primeira aplicação de I.6.6 garante-nos que a restrição a $\mathbb{N}' \cup \mathbb{N}''$ tem 0 e $\sqrt{3}$ como únicos sublimites e uma segunda identifica-nos por fim os sublimites da sucessão original.

I.6.9 **(Teorema de Bolzano-Weierstrass[76])** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ aderente a X e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função. Tem-se então que f admite pelo menos um sublimite $b \in \overline{\mathbb{R}}$ no ponto a. Mais precisamente:

a) De entre os sublimites de f no ponto a, existe um que é maior que todos os outros e que será notado $\limsup\limits_{x \to a} f(x)$ ou $\overline{\lim\limits_{x \to a}} f(x)$. Este limite, a que se dá o nome de *sublimite máximo*[77] de f *no ponto* a, pode ser obtido do seguinte modo: Notando, para cada $\varepsilon > 0$, $d_\varepsilon \in \,]-\infty, +\infty]$ o supremo do conjunto não vazio $f(X \cap V_\varepsilon(a))$, $\limsup\limits_{x \to a} f(x)$ é o ínfimo do conjunto dos d_ε.

b) De entre os sublimites de f no ponto a, existe um que é menor que todos os outros e que será notado $\liminf\limits_{x \to a} f(x)$ ou $\underline{\lim\limits_{x \to a}} f(x)$. Este limite, a que se dá o nome de *sublimite mínimo*[78] de f *no ponto* a, pode ser obtido do seguinte modo: Notando, para cada $\varepsilon > 0$, $c_\varepsilon \in [-\infty, +\infty[$ o ínfimo do conjunto não vazio $f(X \cap V_\varepsilon(a))$, $\liminf\limits_{x \to a} f(x)$ é o supremo do conjunto dos c_ε.

Dem: Provaremos apenas as afirmações em a), uma vez que a prova de b) pode ser obtida como uma adaptação simples da de a), que o estudante

[76]Este teorema é associado aos mesmos dois matemáticos que o teorema referido em I.3.23, sobre a existência de pontos de acumulação para os conjuntos infinitos, com o qual não parece ter nada em comum. A razão desta coincidência é que o resultado tratado atrás foi o instrumento fundamental para a prova da primeira versão do resultado sobre a existência de sublimites, nessa altura apenas no contexto das sucessões.

[77]Ou, em calão frequentemente utilizado, embora não assumido, *limessupe*.

[78]Ou, no calão correspondente, *liminfe*.

facilmente encontrará[79]. Para o fazermos procederemos do seguinte modo: Chamamos d ao real estendido que é ínfimo do conjunto dos reais estendidos d_ε referidos no enunciado. Provaremos então, primeiro que d é um sublimite de f no ponto a, depois que, qualquer que seja o sublimite b de f no ponto a, tem-se $b \le d$.

1) Vamos utilizar I.6.2 para mostrar que d é sublimite de f no ponto a. Sejam $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$ arbitrários. Temos que mostrar a existência de $x \in X \cap V_\varepsilon(a)$ tal que $f(x) \in V_\delta(d)$. Separamos essa verificação em três casos, conforme d seja finito, $-\infty$ ou $+\infty$:

1.1) Suponhamos que $d \in \mathbb{R}$, e portanto $V_\delta(d) =]d-\delta, d+\delta[$. Tendo em conta o facto de d ser definido como um ínfimo, seja $\varepsilon' > 0$ tal que $d_{\varepsilon'} < d+\delta$. Seja $\varepsilon'' > 0$ o menor dos dois números ε e ε' e reparemos que $X \cap V_{\varepsilon''}(a) \subset X \cap V_\varepsilon(a)$ e $f(X \cap V_{\varepsilon''}(a)) \subset f(X \cap V_{\varepsilon'}(a))$ e que a segunda inclusão implica que $d_{\varepsilon''} \le d_{\varepsilon'} < d+\delta$. Uma vez que $d-\delta < d \le d_{\varepsilon''}$, a definição de $d_{\varepsilon''}$ como um supremo garante a existência de

$$x \in X \cap V_{\varepsilon''}(a) \subset X \cap V_\varepsilon(a)$$

tal que $f(x) > d-\delta$ e como, por outro lado, $f(x) \le d_{\varepsilon''} < d+\delta$, concluímos que se tem $f(x) \in]d-\delta, d+\sigma[= V_\delta(d)$.

1.2) Suponhamos que $d = -\infty$, e portanto $V_\delta(d) = [-\infty, -\frac{1}{\delta}[$. Tendo em conta o facto de d ser definido como um ínfimo, seja $\varepsilon' > 0$ tal que $d_{\varepsilon'} < -\frac{1}{\delta}$. Seja $\varepsilon'' > 0$ o menor dos dois números ε e ε' e reparemos que $X \cap V_{\varepsilon''}(a) \subset X \cap V_\varepsilon(a)$ e $f(X \cap V_{\varepsilon''}(a)) \subset f(X \cap V_{\varepsilon'}(a))$ e que a segunda inclusão implica que $d_{\varepsilon''} \le d_{\varepsilon'} < -\frac{1}{\delta}$. Escolhendo então

$$x \in X \cap V_{\varepsilon''}(a) \subset X \cap V_\varepsilon(a),$$

a caracterização de $d_{\varepsilon''}$ como um supremo garante que $f(x) \le d_{\varepsilon''} < -\frac{1}{\delta}$, ou seja, $f(x) \in [-\infty, -\frac{1}{\delta}[= V_\delta(d)$.

1.3) Suponhamos que $d = +\infty$, e portanto $V_\delta(d) =]\frac{1}{\delta}, +\infty]$. Tem-se então $d_\varepsilon = +\infty$ e portanto pela definição de d_ε como supremo, existe $x \in X \cap V_\varepsilon(a)$ tal que $f(x) > \frac{1}{\delta}$, ou seja, tal que $f(x) \in V_\delta(d)$.

2) Seja agora $b \in \overline{\mathbb{R}}$ um sublimite arbitrário de f no ponto a. Tendo em conta a caracterização dos sublimites em I.6.3, para cada $\varepsilon > 0$, b é aderente ao conjunto $f(X \cap V_\varepsilon(a))$ e portanto, como referido em I.3.19, b é menor ou igual ao supremo d_ε deste conjunto. Verificámos assim que b é um minorante do conjunto dos d_ε e portanto, por d ser o ínfimo deste conjunto, $b \le d$. □

I.6.10 **(O caso particular das sucessões)** Tal como acontecia com os limites, no caso de uma sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, isto é, de uma função de domínio $\mathbb{N}$, quando falamos simplesmente de sublimites está implícito que $+\infty$ é o ponto onde estes são considerados e, do mesmo modo, as designações $\liminf u_n$ e

[79]Alternativamente, também se poderia provar b) por aplicação das conclusões de a) à função $x \mapsto -f(x)$. É o que propomos no exercício I.6.3 no fim da secção.

$\limsup u_n$ referem-se aos sublimites mínimo e máximo em $+\infty$. As caracterizações dos sublimites máximo e mínimo referidas em I.6.9 podem, no caso das sucessões, ser dadas de um modo equivalente:
a) Sendo, para cada $n \in \mathbb{N}$, $w_n \in \overline{\mathbb{R}}$ definido por

$$w_n = \sup\{u_p\}_{p\geq n} = \sup\{u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots\},$$

tem-se $w_n \geq w_{n+1}$ para cada n e $\limsup u_n$ é o ínfimo do conjunto dos w_n.
b) Sendo, para cada $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in \overline{\mathbb{R}}$ definido por

$$v_n = \inf\{u_p\}_{p\geq n} = \inf\{u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots\},$$

tem-se $v_n \leq v_{n+1}$ para cada n e $\liminf u_n$ é o supremo do conjunto dos v_n.
Dem: Como anteriormente, examinamos apenas o caso do sublimite máximo uma vez que a prova do outro caso é análoga. O facto de se ter $w_n \geq w_{n+1}$ resulta de o conjunto cujo supremo define o segundo membro estar contido no conjunto cujo supremo define o primeiro. O sublimite máximo $\limsup u_n$ foi caracterizado em I.6.9 como o ínfimo do conjunto dos reais estendidos d_ε, cada um dos quais definido como o supremo do conjunto dos u_p com $p \in \mathbb{N} \cap V_\varepsilon(+\infty)$, conjunto esse que também pode ser caracterizado como o conjunto dos u_p com $p \in \mathbb{N}$ e $p > \frac{1}{\varepsilon}$, ou seja $p \geq n$ com n o menor dos naturais maiores que $\frac{1}{\varepsilon}$. Por outras palavras, tem-se $d_\varepsilon = w_n$ para o natural n acima referido e como qualquer w_n é da forma d_ε para um $\varepsilon > 0$ conveniente (tomar, por exemplo, $\varepsilon = 2$ se $n = 1$ e $\varepsilon = \frac{1}{n-1}$ se $n \geq 2$) vemos que o conjunto dos d_ε coincide com o conjunto dos w_n e portanto $\limsup u_n$ é efetivamente o ínfimo do conjunto dos w_n. □

Aproveitamos para definir os conjuntos compactos que, apesar de poderem ter sido definidos em secções anteriores, admitem uma caracterização equivalente que utiliza os sublimites das sucessões.

I.6.11 **(Subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$)** Um subconjunto $Y \subset \mathbb{R}$ diz-se *compacto* se for simultaneamente fechado e limitado. Um conjunto $Y \subset \mathbb{R}$ é compacto se, e só se, qualquer sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de Y, admite pelo menos um sublimite $b \in Y$.
Dem: **1)** Comecemos por supor que Y é compacto. Sendo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão arbitrária de elementos de Y, podemos considerar um sublimite b desta sucessão o qual, como referido em I.6.3, é aderente a Y, O facto de Y ser limitado, ou seja, não ter $+\infty$ nem $-\infty$ como ponto aderentes (cf. I.3.21) implica que $b \in \mathbb{R}$ e portanto, por Y ser fechado, $b \in Y$.
2) Suponhamos agora que Y não é compacto. Tem-se então que ou Y não é fechado, e portanto existe $b \in \mathbb{R}$ aderente a Y com $b \notin Y$, ou Y não é limitado e portanto um dos reais estendidos $-\infty$ e $+\infty$ é aderente a Y; em qualquer caso, existe $b \in \overline{\mathbb{R}}$ aderente a Y com $b \notin Y$. Tendo em conta I.5.49, podemos então considerar uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de Y com

$x_n \to b$ e então o facto de b ser o único sublimite desta sucessão implica que ela não tem nenhum sublimite pertencente a Y. $\square$

I.6.12 **(Máximos e mínimos dos compactos)** Seja $Y \subset \mathbb{R}$ um conjunto compacto e não vazio. Tem-se então que Y tem um elemento máximo e um elemento mínimo.[80]

Dem: O facto de Y ser limitado e não vazio implica que $\sup(A)$ e $\inf(A)$ são finitos. Uma vez que o supremo e o ínfimo de A são aderentes a A, o facto de A ser fechado implica que o supremo e o ínfimo pertencem a A e portanto são respetivamente o máximo e o mínimo de A. $\square$

Voltemos de novo ao estudo dos sublimites das funções num ponto, em particular dos respetivos sublimites mínimo e máximo.

I.6.13 **(Os sublimites únicos são limites)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ aderente a X e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função. Já sabemos que, se $b \in \overline{\mathbb{R}}$ é limite de f no ponto a, então b é o único sublimite de f nesse ponto. Vamos agora mostrar que, reciprocamente, se b for o único sublimite de f no ponto a, então $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$.

Dem: Vamos mostrar que, se b não fosse limite de f no ponto a, então f admitia no ponto a algum sublimite $c \neq b$. Ora, negando a condição de b ser limite de f no ponto a, concluímos que se pode fixar $\delta > 0$ tal que, qualquer que seja $\varepsilon > 0$ existe algum $x \in X \cap V_\varepsilon(a)$ com $f(x) \notin V_\delta(b)$. Resulta daqui que, sendo

$$A = \{x \in X \mid f(x) \notin V_\delta(b)\},$$

o ponto a é aderente a A. Podemos assim considerar, tendo em conta I.6.9, um sublimite c de $f_{/A}\colon A \to \mathbb{R}$ no ponto a e este sublimite não pode ser igual a b por b não ser aderente ao contradomínio $f(A)$ desta restrição (a vizinhança $V_\delta(b)$ não tem nenhum ponto em $f(A)$). Mas c, sendo sublimite de $f_{/A}$, é também sublimite de $f\colon X \to \mathbb{R}$, pelo que chegámos à conclusão pretendida. $\square$

I.6.14 **(Corolário)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ aderente a X e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função. Tem-se então que f tem limite no ponto a se, e só se

$$\liminf_{x\to a} f(x) = \limsup_{x\to a} f(x)$$

e, nesse caso

[80] Lembrar que há subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$ que não têm máximo ou não têm mínimo, como, por exemplo, o intervalo $[0,1[$ (é limitado mas não é fechado) ou o intervalo $]-\infty,0]$ (é fechado mas não é limitado).

$$\lim_{x\to a} f(x) = \liminf_{x\to a} f(x) = \limsup_{x\to a} f(x).$$

Dem: Se f tem limite no ponto a, então esse limite é o único sublimite nesse ponto, e portanto coincide tanto com o sublimite máximo como com o sublimite mínimo, que, em particular, têm que ser iguais. Reciprocamente, se os sublimites máximo e mínimo coincidem, qualquer sublimite, que sabemos estar entre eles, tem que coincidir com ambos e portanto, havendo um único sublimite, esse sublimite é limite de f no ponto a. □

I.6.15 **(Condição de Cauchy para a existência de limite finito)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, a um real estendido aderente a X e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função. Diz-se que f verifica a *condição de Cauchy no ponto* a se, qualquer que seja $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que, quaisquer que sejam x e x' em $X \cap V_\varepsilon(a)$,

$$d(f(x), f(x')) = |f(x) - f(x')| < \delta.$$ [81]

Tem-se então que a função f tem limite **finito** no ponto a se, e só se, verifica a condição de Cauchy nesse ponto.[82]

Dem: Comecemos por supor que existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$. Dado $\delta > 0$, podemos aplicar a definição de limite, partindo do número $\frac{\delta}{2} > 0$, para considerar $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $x \in X \cap V_\varepsilon(a)$, $f(x) \in V_{\delta/2}(b)$. Em consequência, dados $x, x' \in X \cap V_\varepsilon(a)$, tem-se que $f(x)$ e $f(x')$ pertencem ambos a $V_{\delta/2}(b)$ donde, pela desigualdade triangular (cf. I.1.21),

$$d(f(x), f(x')) \leq d(f(x), b) + d(b, f(x')) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

o que mostra que f verifica a condição de Cauchy.

Suponhamos, reciprocamente, que f verifica a condição de Cauchy. Seja b um sublimite de f no ponto a, cuja existência decorre do teorema de Bolzano-Weierstrass. Vamos provar que b é finito e que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$, o que terminará a demonstração. Seja $\delta > 0$ arbitrário. Pela condição de Cauchy, considerando o número $\frac{\delta}{2} > 0$, podemos considerar $\varepsilon > 0$ tal que, quaisquer que sejam $x, x' \in X \cap V_\varepsilon(a)$, $d(f(x), f(x')) < \frac{\delta}{2}$. Em particular, tomando para x' um elemento x_0 fixado em $X \cap V_\varepsilon(a)$, vemos que, para cada $x \in X \cap V_\varepsilon(a)$, $d(f(x), f(x_0)) < \frac{\delta}{2}$, ou seja

$$f(x) \in \left] f(x_0) - \frac{\delta}{2}, f(x_0) + \frac{\delta}{2} \right[.$$

Em particular $f(X \cap V_\varepsilon(a))$ é majorado e minorado pelo que, tendo em

[81]Intuitivamente, os valores de f em dois pontos do domínio X suficientemente próximos de a estão próximos um do outro.

[82]A razão da importância deste resultado é que ele permite garantir a existência de limite finito mesmo em casos em que não se sabe qual é o valor desse limite.

conta I.6.4, nem $-\infty$ nem $+\infty$ são sublimites de f no ponto a, e portanto b é efetivamente finito. Seja agora $x \in X \cap V_\varepsilon(a)$ arbitrário. Pela caracterização dos sublimites em I.6.2, podemos considerar $x' \in X \cap V_\varepsilon(a)$ tal que $f(x') \in V_{\delta/2}(b)$, isto é, $d(f(x'), b) < \frac{\delta}{2}$. Uma vez que, como referimos acima, tem-se necessariamente $d(f(x), f(x')) < \frac{\delta}{2}$, obtemos, pela desigualdade triangular,

$$d(f(x), b) \leq d(f(x), f(x')) + d(f(x'), b) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

ou seja $f(x) \in V_\delta(b)$. Ficou assim provado que b é efetivamente limite de $f\colon X \to \mathbb{R}$ no ponto a. □

I.6.16 **(Sucessões de Cauchy)** Lembremos que uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é mais do que uma função de domínio $\mathbb{N}$ e que, no que diz respeito a limites são os limites em $+\infty$ da sucessão que são implicitamente considerados. Chamam-se *sucessões de Cauchy* às sucessões que verificam a condição de Cauchy em $+\infty$. O que vimos em I.6.15 mostra-nos que uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente (isto é, tem limite finito) se, e só se, for uma sucessão de Cauchy.

Analogamente ao que foi referido em I.5.15, a condição de Cauchy para uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é habitualmente enunciada de uma forma diferente, embora, naturalmente, equivalente à definição geral da condição de Cauchy duma função, neste caso em $+\infty$. Nomeadamente, a sucessão é de Cauchy se, e só se, qualquer que seja $\delta > 0$, existe uma ordem $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n, n' \geq n_0$ em $\mathbb{N}$, $d(x_n, x_{n'}) < \delta$.

Dem: Num dos sentidos temos uma implicação evidente: Se, para cada $\delta > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ nas condições referidas, então, tomando $\varepsilon = \frac{1}{n_0} > 0$, vemos que para $n, n' \in \mathbb{N}$ na vizinhança $V_\varepsilon(+\infty)$, tem-se $n, n' > \frac{1}{\varepsilon} = n_0$, e portanto $d(x_n, x_{n'}) < \delta$, o que mostra que temos uma sucessão de Cauchy. A implicação contrária é semelhante mas temos que resolver um pequeno contratempo. Suponhamos, com efeito, que temos uma sucessão de Cauchy e seja $\delta > 0$ arbitrário. Podemos então considerar $\varepsilon > 0$ tal que, sempre que $n, n' \in \mathbb{N}$ estão na vizinhança $V_\varepsilon(+\infty)$, isto é, quando $n, n' > \frac{1}{\varepsilon}$ em $\mathbb{N}$, $d(x_n, x_{n'}) < \delta$. Seríamos assim, tentados a escolher para n_0 o número $\frac{1}{\varepsilon}$, mas isso apresenta duas dificuldades: por um lado $\frac{1}{\varepsilon}$ não tem que ser um número natural, por outro, mesmo que o fosse ficaríamos a saber o que sucede para $n, n' > n_0$ mas não se algum deles for n_0. Para tornear estas dificuldades basta notar, no entanto, que podemos considerar um número natural $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ e então, para $n, n' \in \mathbb{N}$ com $n, n' \geq n_0$ tem-se $n, n' > \frac{1}{\varepsilon}$, e portanto $d(x_n, x_{n'}) < \delta$. □

Vamos agora estabelecer algumas propriedades simples dos sublimites máximo e mínimo usando nas suas demonstrações as caracterizações destes como máximo e mínimo do conjunto dos sublimites e tirando partido do facto de existir sempre sublimite em qualquer ponto aderente ao domínio.

I.6.17 **(Simétrica duma função)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ aderente a X e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função. Tem-se então (com as convenções $-(+\infty) = -\infty$ e $-(-\infty) = +\infty$):
a) Se $b \in \overline{\mathbb{R}}$ é um sublimite de f no ponto a, então $-b$ é um sublimite no ponto a da função $-f\colon X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -f(x)$.
b) Em consequência,

$$\limsup_{x\to a} -f(x) = -\liminf_{x\to a} f(x),$$
$$\liminf_{x\to a} -f(x) = -\limsup_{x\to a} f(x).$$

Dem: a) Basta atender a que, sendo $A \subset X$, com a aderente a A, tal que $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = b$, tem-se, aplicando I.5.17 e I.5.24, que $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} -f(x) = -b$.
b) Notando $b = \liminf\limits_{x\to a} f(x)$ e $c = \limsup\limits_{x\to a} f(x)$, b e c são sublimites de f no ponto a donde, por a), $-b$ e $-c$ são sublimites no ponto a de $-f$ o que implica que

$$\textbf{(1)}\qquad \begin{aligned} -\liminf_{x\to a} f(x) = -b \le \limsup_{x\to a} -f(x),\\ \liminf_{x\to a} -f(x) \le -c = -\limsup_{x\to a} f(x). \end{aligned}$$

Aplicando estas desigualdades com a função $-f$ no lugar de f, obtemos

$$-\liminf_{x\to a} -f(x) \le \limsup_{x\to a} f(x),$$
$$\liminf_{x\to a} f(x) \le -\limsup_{x\to a} -f(x),$$

e portanto

$$\textbf{(2)}\qquad \begin{aligned} \liminf_{x\to a} -f(x) \ge -\limsup_{x\to a} f(x),\\ -\liminf_{x\to a} f(x) \ge \limsup_{x\to a} -f(x). \end{aligned}$$

Combinando as desigualdades em (1) e (2), obtemos as igualdades enunciadas. □

I.6.18 **(Restrição de uma função)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ aderente a X e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função. Sendo $A \subset X$ tal que a seja aderente a A, tem-se então

$$\liminf_{x\to a} f_{/A}(x) \ge \liminf_{x\to a} f(x), \quad \limsup_{x\to a} f_{/A}(x) \le \limsup_{x\to a} f(x).$$

Dem: Uma vez que $\liminf_{x\to a} f_{/A}(x)$ é um sublimite de $f_{/A}$ no ponto a, é também um sublimite de f nesse ponto e portanto, por definição, é maior ou igual que o sublimite mínimo $\liminf_{x\to a} f(x)$. A justificação da segunda desigualdade é análoga. □

I.6.19 **(Monotonia)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ aderente a X e $f, g: X \to \mathbb{R}$ duas funções tais que, para cada $x \in X$, $f(x) \le g(x)$. Tem-se então:

$$\liminf_{x\to a} f(x) \le \liminf_{x\to a} g(x), \quad \limsup_{x\to a} f(x) \le \limsup_{x\to a} g(x).$$

Dem: Seja $c = \liminf_{x\to a} g(x)$ e consideremos $A \subset X$, com a aderente a A tal que $g_{/A}(x) \xrightarrow[x\to a]{} c$. Se considerarmos a restrição $f_{/A}: A \to \mathbb{R}$, ela vai admitir um sublimite b, existindo assim $B \subset A$, com a aderente a B tal que $f_{/B}(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$. Uma vez que se tem também $g_{/B}(x) \xrightarrow[x\to a]{} c$, a propriedade de monotonia dos limites garante que $b \le c$ e portanto, por b ser também um sublimite de $f: X \to \mathbb{R}$ no ponto a,

$$\liminf_{x\to a} f(x) \le b \le c = \liminf_{x\to a} g(x).$$

A demonstração da segunda desigualdade, envolvendo os sublimites máximos, pode ser feita de modo análogo ou, alternativamente,, tendo em conta a primeira desigualdade para as funções $-f$ e $-g$, que verificam $-g(x) \le -f(x)$, para cada $x \in X$: Tem-se

$$-\limsup_{x\to a} g(x) = \liminf_{x\to a} -g(x) \le \liminf_{x\to a} -f(x) = -\limsup_{x\to a} f(x),$$

o que implica a segunda desigualdade no enunciado. □

I.6.20 **(Soma de funções)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ aderente a X e $f, g: X \to \mathbb{R}$ duas funções. Tem-se então, com as convenções correspondentes às mnemónicas em I.5.26 e supondo, em cada caso, que o segundo membro não é $(+\infty) + (-\infty)$ nem $(-\infty) + (+\infty)$:

a) $\liminf_{x\to a} (f(x) + g(x)) \ge \liminf_{x\to a} f(x) + \liminf_{x\to a} g(x)$;

b) $\liminf_{x\to a} (f(x) + g(x)) \le \liminf_{x\to a} f(x) + \limsup_{x\to a} g(x)$;

c) $\limsup_{x\to a} (f(x) + g(x)) \le \limsup_{x\to a} f(x) + \limsup_{x\to a} g(x)$;

d) $\limsup_{x\to a} (f(x) + g(x)) \ge \limsup_{x\to a} f(x) + \liminf_{x\to a} g(x)$.

Em particular, no caso em que existe $\lim_{x\to a} g(x)$,

e) $\liminf_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \liminf_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$;

f) $\limsup_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \limsup_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$.

Dem: a) Podemos já supor que as duas parcelas do segundo membro são diferentes de $-\infty$, sem o que a desigualdade era trivial. Seja $A \subset X$, com a aderente a A, tal que

$$\lim_{x\to a}\,(f_{/A}(x)+g_{/A}(x)) = \liminf_{x\to a}\,(f(x)+g(x)).$$

Considerando a restrição $f_{/A}\colon A\to\mathbb{R}$, vai existir $B\subset A$, com a aderente a B, tal que

$$\lim_{x\to a} f_{/B}(x) = \liminf_{x\to a} f_{/A}(x) \geq \liminf_{x\to a} f(x).$$

Considerando a restrição $g_{/B}\colon B\to\mathbb{R}$, vai existir $C\subset B$, com a aderente a C, tal que

$$\lim_{x\to a} g_{/C}(x) = \liminf_{x\to a} g_{/B}(x) \geq \liminf_{x\to a} g(x).$$

Em particular $\lim\limits_{x\to a} g_{/C}(x) > -\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} f_{/C}(x) = \lim\limits_{x\to a} f_{/B}(x) > -\infty$ pelo que, aplicando I.5.17 e I.5.26, obtemos

$$\begin{aligned}
\liminf_{x\to a}\,(f(x)+g(x)) &= \lim_{x\to a}\,(f_{/A}(x)+g_{/A}(x)) = \\
&= \lim_{x\to a}\,(f_{/C}(x)+g_{/C}(x)) = \\
&= \lim_{x\to a} f_{/C}(x) + \lim_{x\to a} g_{/C}(x) \geq \\
&\geq \lim_{x\to a} f_{/B}(x) + \liminf_{x\to a} g(x) \geq \\
&\geq \liminf_{x\to a} f(x) + \liminf_{x\to a} g(x).
\end{aligned}$$

b) Podemos já supor que as duas parcelas do segundo membro são diferentes de $+\infty$, sem o que a desigualdade era trivial. Seja $A\subset X$, com a aderente a A, tal que $\lim\limits_{x\to a} f_{/A}(x) = \liminf\limits_{x\to a} f(x)$. Considerando a restrição $g_{/A}\colon A\to\mathbb{R}$, vai existir $B\subset A$, com a aderente a B, tal que

$$\lim_{x\to a} g_{/B}(x) = \limsup_{x\to a} g_{/A}(x) \leq \limsup_{x\to a} g(x).$$

Em particular $\lim\limits_{x\to a} g_{/B}(x) < +\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} f_{/B}(x) = \lim\limits_{x\to a} f_{/A}(x) < +\infty$ pelo que, aplicando I.5.17 e I.5.26, obtemos

$$\begin{aligned}
\liminf_{x\to a}\,(f(x)+g(x)) &\leq \lim_{x\to a}\,(f_{/B}(x)+g_{/B}(x)) = \\
&= \lim_{x\to a} f_{/B}(x) + \lim_{x\to a} g_{/B}(x) \leq \\
&\leq \lim_{x\to a} f_{/A}(x) + \limsup_{x\to a} g(x) = \\
&= \liminf_{x\to a} f(x) + \limsup_{x\to a} g(x).
\end{aligned}$$

c) e d) As demonstrações destas desigualdades podem ser obtidas por adaptação natural das apresentadas para a) e b).[83]

e) e f) Temos consequências diretas de a) e b), no primeiro caso, e de c) e d), no segundo, uma vez que, $g\colon X \to \mathbb{R}$ tendo limite no ponto a, tem-se

$$\lim_{x \to a} g(x) = \liminf_{x \to a} g(x) = \limsup_{x \to a} g(x). \qquad \square$$

I.6.21 **(Inverso duma função positiva)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ aderente a X e $f\colon X \to]0, +\infty[$ uma função. Tem-se então (com as convenções $\frac{1}{+\infty} = 0$ e $\frac{1}{0} = +\infty$):

a) Se $b \in [0, +\infty]$ é um sublimite de f no ponto a, então $\frac{1}{b}$ é um sublimite no ponto a da função $\frac{1}{f}\colon X \to]0, +\infty[$, $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$.

b) Em consequência,

$$\limsup_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\liminf\limits_{x \to a} f(x)},$$
$$\liminf_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\limsup\limits_{x \to a} f(x)}.$$

Dem: a) Basta atender a que, sendo $A \subset X$, com a aderente a A, tal que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = b$, tem-se, aplicando I.5.21 e I.5.31, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{b}$.

b) Notando $b = \liminf\limits_{x \to a} f(x)$ e $c = \limsup\limits_{x \to a} f(x)$, b e c são sublimites de f no ponto a donde, por a), $\frac{1}{b}$ e $\frac{1}{c}$ são sublimites no ponto a de $\frac{1}{f}$ o que implica que

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} \frac{1}{\liminf\limits_{x \to a} f(x)} &= \frac{1}{b} \le \limsup_{x \to a} \frac{1}{f(x)}, \\ \liminf_{x \to a} \frac{1}{f(x)} &\le \frac{1}{c} = \frac{1}{\limsup\limits_{x \to a} f(x)}. \end{aligned}$$

Aplicando estas desigualdades com a função $\frac{1}{f}$ no lugar de f, obtemos

$$\frac{1}{\liminf\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)}} \le \limsup_{x \to a} f(x),$$
$$\liminf_{x \to a} f(x) \le \frac{1}{\limsup\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)}},$$

e portanto

[83] Ou, alternativamente, aplicando as conclusões de a) e b) às funções $-f$ e $-g$.

$$\textbf{(2)} \qquad \begin{aligned} &\liminf_{x\to a} \frac{1}{f(x)} \geq \frac{1}{\limsup\limits_{x\to a} f(x)},\\ &\frac{1}{\liminf\limits_{x\to a} f(x)} \geq \limsup_{x\to a} \frac{1}{f(x)}. \end{aligned}$$

Combinando as desigualdades em (1) e (2), obtemos as igualdades. □

I.6.22 **(Produto de funções positivas)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ aderente a X e $f, g\colon X \to [0, +\infty[$ duas funções. Tem-se então, com as convenções correspondentes às mnemónicas em I.5.27 e supondo, em cada caso, que o segundo membro não é $(+\infty) \times 0$ nem $0 \times (+\infty)$:

a) $\liminf\limits_{x\to a} (f(x) \times g(x)) \geq \liminf\limits_{x\to a} f(x) \times \liminf\limits_{x\to a} g(x)$;

b) $\liminf\limits_{x\to a} (f(x) \times g(x)) \leq \liminf\limits_{x\to a} f(x) \times \limsup\limits_{x\to a} g(x)$;

c) $\limsup\limits_{x\to a} (f(x) \times g(x)) \leq \limsup\limits_{x\to a} f(x) \times \limsup\limits_{x\to a} g(x)$;

d) $\limsup\limits_{x\to a} (f(x) \times g(x)) \geq \limsup\limits_{x\to a} f(x) \times \liminf\limits_{x\to a} g(x)$.

Em particular, no caso em que existe $\lim\limits_{x\to a} g(x)$,

e) $\liminf\limits_{x\to a} (f(x) \times g(x)) = \liminf\limits_{x\to a} f(x) \times \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

f) $\limsup\limits_{x\to a} (f(x) \times g(x)) = \limsup\limits_{x\to a} f(x) \times \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Repare-se que todos os sublimites envolvidos pertencem a $[0, +\infty]$.

Dem: Comecemos por observar que, tendo em conta I.6.3 e o facto de $[0, +\infty[$ ser um conjunto fechado ao qual $-\infty$ não é aderente, todos os sublimites envolvidos no enunciado pertencem a $[0, +\infty]$.

a) Podemos já supor que as duas parcelas do segundo membro não são 0, sem o que a desigualdade era trivial. Seja $A \subset X$, com a aderente a A e

$$\lim_{x\to a} (f_{/A}(x) \times g_{/A}(x)) = \liminf_{x\to a} (f(x) \times g(x)).$$

Considerando a restrição $f_{/A}\colon A \to \mathbb{R}$, vai existir $B \subset A$, com a aderente a B, tal que

$$\lim_{x\to a} f_{/B}(x) = \liminf_{x\to a} f_{/A}(x) \geq \liminf_{x\to a} f(x).$$

Considerando a restrição $g_{/B}\colon B \to \mathbb{R}$, vai existir $C \subset B$, com a aderente a C, tal que

$$\lim_{x\to a} g_{/C}(x) = \liminf_{x\to a} g_{/B}(x) \geq \liminf_{x\to a} g(x).$$

Em particular $\lim\limits_{x\to a} g_{/C}(x) > 0$ e $\lim\limits_{x\to a} f_{/C}(x) = \lim\limits_{x\to a} f_{/B}(x) > 0$ pelo que, aplicando I.5.17 e I.5.27, obtemos

$$\begin{aligned}\liminf_{x\to a}\,(f(x)\times g(x)) &= \lim_{x\to a}\,(f_{/A}(x)\times g_{/A}(x)) =\\ &= \lim_{x\to a}\,(f_{/C}(x)\times g_{/C}(x)) =\\ &= \lim_{x\to a} f_{/C}(x)\times \lim_{x\to a} g_{/C}(x) \geq\\ &\geq \lim_{x\to a} f_{/B}(x)\times \liminf_{x\to a} g(x) \geq\\ &\geq \liminf_{x\to a} f(x)\times \liminf_{x\to a} g(x).\end{aligned}$$

b) Podemos já supor que as duas parcelas do segundo membro são diferentes de $+\infty$, sem o que a desigualdade era trivial. Seja $A \subset X$, com a aderente a A, tal que $\lim\limits_{x\to a} f_{/A}(x) = \liminf\limits_{x\to a} f(x)$. Considerando a restrição $g_{/A}\colon A \to \mathbb{R}$, vai existir $B \subset A$, com a aderente a B, tal que

$$\lim_{x\to a} g_{/B}(x) = \limsup_{x\to a} g_{/A}(x) \leq \limsup_{x\to a} g(x).$$

Em particular $\lim\limits_{x\to a} g_{/B}(x) < +\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} f_{/B}(x) = \lim\limits_{x\to a} f_{/A}(x) < +\infty$ pelo que, aplicando I.5.17 e I.5.27, obtemos

$$\begin{aligned}\liminf_{x\to a}\,(f(x)\times g(x)) &\leq \lim_{x\to a}\,(f_{/B}(x)\times g_{/B}(x)) =\\ &= \lim_{x\to a} f_{/B}(x)\times \lim_{x\to a} g_{/B}(x) \leq\\ &\leq \lim_{x\to a} f_{/A}(x)\times \limsup_{x\to a} g(x) =\\ &= \liminf_{x\to a} f(x)\times \limsup_{x\to a} g(x).\end{aligned}$$

c) e d) As demonstrações destas desigualdades podem ser obtidas por adaptação natural das apresentadas para a) e b).
e) e f) Temos consequências diretas de a) e b), no primeiro caso, e de c) e d), no segundo, uma vez que, $g\colon X \to \mathbb{R}$ tendo limite no ponto a, tem-se

$$\lim_{x\to a} g(x) = \liminf_{x\to a} g(x) = \limsup_{x\to a} g(x). \qquad \square$$

Exercícios

★ Ex I.6.1 **(Caracterização dos sublimites segundo Heine)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ aderente a X e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função. Mostrar que um real estendido $b \in \overline{\mathbb{R}}$ é sublimite de f no ponto a se, e só se, existir uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de X tal que $x_n \to a$ e $f(x_n) \to b$. **Sugestão:** Para uma das implicações utilizar as caracterizações dos pontos aderentes e dos limites através de sucessões (cf. I.5.49 e I.5.50) e para a outra a caracterização dos sublimites em I.6.2.

★ Ex I.6.2 **(Sublimites e funções compostas)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ aderente a X e $f: X \to \mathbb{R}$ uma função. Suponhamos que existe $Y \subset \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ aderente a Y e $g: Y \to X$ uma função tal que $\lim\limits_{y \to b} g(y) = a$ e que a composta $f \circ g: Y \to \mathbb{R}$ admita $c \in \overline{\mathbb{R}}$ como sublimite no ponto b. Mostrar que c é sublimite de $f: X \to \mathbb{R}$ no ponto a. **Sugestão:** Utilizar a caracterização dos sublimites em I.6.2.

★ Ex I.6.3 Verificar que a conclusão da alínea b) de I.6.9, pode ser obtida a partir da conclusão da respetiva alínea a), aplicada à função $x \mapsto -f(x)$. Poderá ser conveniente lembrar a conclusão do exercício I.1.9.

★ Ex I.6.4 Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ aderente a X e $f: X \to \mathbb{R}$ uma função. Sendo S_a o conjuntos dos sublimites finitos de f no ponto a, mostrar que:
a) S_a é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$. **Sugestão:** Utilizar a caracterização dos sublimites em I.6.3 e lembrar que a aderência de um subconjunto arbitrário de $\mathbb{R}$ é sempre fechada (cf. I.3.27) e que uma intersecção de uma família arbitrária de conjuntos fechados é fechada (cf. o exercício I.3.6).
b) Se $+\infty$ (respetivamente $-\infty$) é aderente a S_a então $+\infty$ (respetivamente $-\infty$) é sublimite de f no ponto a. **Sugestão:** Lembrar I.6.4 para verificar o que sucede se $+\infty$ ou $-\infty$ não for sublimite de f no ponto a.

★★ Ex I.6.5 Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão, seja A o conjunto dos seus termos e seja S o conjunto dos seus sublimites finitos.
a) Mostrar que $A \cup S$ coincide com a aderência do conjunto A e concluir que $A \cup S$ é um conjunto fechado. **Sugestão:** Lembrar a alínea d) de I.3.15 e o facto de os pontos aderentes a um conjunto finito pertencerem a este (cf. I.3.17).
b) Mostrar que $+\infty$ (respetivamente $-\infty$) é sublimite da sucessão se, e só se, $+\infty$ (respetivamente $-\infty$) é aderente a A. **Sugestão:** A mesma que para a alínea precedente.
c) Concluir que, se nem $+\infty$ nem $-\infty$ forem sublimites da sucessão, então $A \cup S$ é um conjunto compacto (isto é, fechado e limitado), em particular a sucessão é limitada.
d) Deduzir, em particular, que, se $x_n \to b \in \mathbb{R}$, então $A \cup \{b\}$ é um conjunto compacto, em particular a sucessão é limitada.

★ Ex I.6.6 **(Teorema do encaixe) a)** Seja, para cada $n \in \mathbb{N}$, A_n um subconjunto compacto e não vazio de $\mathbb{R}$ e suponhamos que, para cada n, $A_n \supset A_{n+1}$ (temos uma sucessão decrescente de conjuntos). Mostrar que existe $x \in \mathbb{R}$ que pertence simultaneamente a todos os conjuntos A_n.
Sugestão: Escolher, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A_n$ e tomar para x um sublimite, necessariamente finito, da sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
b) Verificar que, sendo $B_n =]0, \frac{1}{n}]$, tem-se $B_n \supset B_{n+1}$ com B_n limitado e não vazio (mas não fechado) mas não existe nenhum número real pertencente

simultaneamente a todos os B_n.
c) Verificar que, sendo $C_n = [n, +\infty[$, tem-se $C_n \supset C_{n+1}$ com C_n fechado e não vazio (mas não limitado) mas não existe nenhum número real pertencente simultaneamente a todos os C_n.

Ex I.6.7 Determinar os sublimites máximo e mínimo da função $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{sen}(\frac{1}{x})$ no ponto 0.

Ex I.6.8 Determinar os sublimites máximo e mínimo das sucessões $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas por:

a) $x_n = \cos(\frac{n\pi}{6})$;

b) $x_n = \dfrac{n^{(-1)^n+2}}{2n^3+n+1}$;

c) $x_n = \sqrt{n} + (-1)^n\sqrt{n} - 1$.

★ Ex I.6.9 **(Exemplo de utilização da condição de Cauchy) a)** Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais verificando a seguinte condição: Para cada $n \geq 1$, x_{n+2} está entre x_n e x_{n+1} (cada termo a partir do terceiro está entre os dois anteriores). Verificar que a sucessão tem limite finito se, e só se, $x_{n+1} - x_n$ tem limite 0. **Sugestão:** Uma das implicações resulta dos teoremas algébricos sobre os limites. Para a outra, começar por mostrar que, para cada $p \geq n+2$, x_p está entre x_n e x_{n+1} e deduzir daqui que a sucessão é de Cauchy.[84]
b) Utilizar a conclusão de a) para mostrar que a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ referida no exercício I.4.17 é convergente. **Sugestão:** Reparar que

$$u_{n+2} - u_{n+1} = -\frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n).$$

c) Repare-se que, como é característico da utilização da condição de Cauchy para provar a existência de limite, a conclusão de b) não nos diz nada sobre o valor do limite da sucessão. Mostrar, independentemente de b), que a sucessão tem limite $\frac{2}{3}$, verificando, por indução matemática, que se tem

$$u_{n+1} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}(u_n - \frac{2}{3}).$$

★ Ex I.6.10 Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.
a) Verificar que $x_{n+1} - x_n \longrightarrow 0$ mas que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é uma sucessão de Cauchy, uma vez que, para cada n, $x_{2n} - x_n \geq \frac{1}{2}$.

---

[84]Note-se que, sem a hipótese feita no início, a condição de se ter $x_{n+1} - x_n \to 0$ não é suficiente para garantir que temos uma sucessão de Cauchy (ver o exercício I.6.10 adiante).

b) Reparando que a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente, o que se poderá dizer sobre o seu limite, tendo em conta a conclusão de a)?

Ex I.6.11 Sejam $f,g\colon\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ as funções (sucessões) definidas por $f(n)=(-1)^n$ e $g(n)=(-1)^{n+1}$. Verificar que:
a) Uma soma de um sublimite de f em $+\infty$ com um sublimite de g em $+\infty$ não é necessariamente um sublimite de $f+g$ em $+\infty$.
b) Tem-se

$$\limsup\,(f(n)+g(n)) < \limsup f(n) + \limsup g(n),$$
$$\liminf\,(f(n)+g(n)) > \liminf f(n) + \liminf g(n).$$

★ Ex I.6.12 **(Caracterização alternativa dos sublimites mínimo e máximo)** Sejam $X\subset\mathbb{R}$, $a\in\overline{\mathbb{R}}$ aderente a X e $f\colon X\to\mathbb{R}$ uma função. Diz-se que $c\in\overline{\mathbb{R}}$ é um *majorante local* (respetivamente *minorante local*) de f no ponto a se existir $\varepsilon>0$ tal que c seja um majorante (respetivamente minorante) de $f(X\cap V_\varepsilon(a))$.
a) Verificar que, se $c\in\overline{\mathbb{R}}$ é um majorante local, então $\limsup\limits_{x\to a} f(x)\le c$ e que, se $\limsup\limits_{x\to a} f(x) < c\in\overline{\mathbb{R}}$, então c é um majorante local. Concluir que $\limsup\limits_{x\to a} f(x)$ é o ínfimo do conjunto dos majorantes locais de f no ponto a.
b) Verificar que, se $c\in\overline{\mathbb{R}}$ é um minorante local, então $\liminf\limits_{x\to a} f(x)\ge c$ e que, se $\liminf\limits_{x\to a} f(x) > c\in\overline{\mathbb{R}}$, então c é minorante local. Concluir que $\limsup\limits_{x\to a} f(x)$ é o supremo do conjunto dos minorantes locais de f no ponto a.

★ Ex I.6.13 Sejam $f,g\colon X\to\mathbb{R}$ duas funções, a um real estendido aderente a X e suponhamos que se tem

$$\limsup_{x\to a} f(x) < \liminf_{x\in A} g(x).$$

Mostrar que existe então $\varepsilon>0$ tal que, para cada $x\in X$ na vizinhança $V_\varepsilon(a)$, $f(x)<g(x)$ (comparar com I.5.2). **Sugestão:** Aplicar a conclusão do exercício I.6.12, depois de escolher $c,d\in\mathbb{R}$ com

$$\limsup_{x\to a} f(x) < c < d < \liminf_{x\in A} g(x).$$

CAPÍTULO II
Funções contínuas e aplicações

§1. Definições e propriedades básicas.

II.1.1 Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função. Diz-se que f é *contínua num ponto* $a \in X$ se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ ou, o que é o mesmo, se f tem limite no ponto a (cf. I.5.11). Diz-se que f é uma *função contínua* se f for contínua em todos os pontos do domínio X.

> Para além de resultados importantes sobre funções contínuas que estudaremos mais adiante, muitas propriedades destas são meras reformulações de propriedades dos limites já estudadas na secção I.5. Poderá ser útil, mesmo assim, explicitar essas reformulações mas substituiremos a sua demonstração por uma referência, sem mais comentários, às propriedades que estão na sua origem.

II.1.2 **(Exemplos básicos de funções contínuas)** Se $X \subset \mathbb{R}$, são contínuas a função identidade $I_X\colon X \to \mathbb{R}$, definida por $I_X(x) = x$, e, para cada $b \in \mathbb{R}$, a função $X \to \mathbb{R}$ de valor constante b (cf. I.5.4).

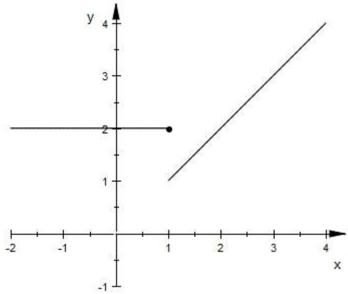
II.1.3 **(Restrição de função contínua)** Se $f\colon X \to \mathbb{R}$ é contínua num ponto $a \in X$ e se $a \in A \subset X$, então a restrição $f_{/A}\colon A \to \mathbb{R}$ também é contínua no ponto a. Em consequência, se $A \subset X$ e $f\colon X \to \mathbb{R}$ é contínua em todos os pontos de A, então $f_{/A}\colon A \to \mathbb{R}$ é contínua, em particular, se $f\colon X \to \mathbb{R}$ é contínua, também $f_{/A}\colon A \to \mathbb{R}$ é contínua (cf. I.5.6).

II.1.4 **(Continuidade e pontos isolados)** Se a é um ponto isolado de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$, então qualquer função $f\colon X \to \mathbb{R}$ é contínua em a (cf. a alínea b) de I.5.11). Se $a \in X$ não é ponto isolado de X (ou seja, é ponto de acumulação de X) então uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ é contínua em a se, e só se,

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = f(a)$$

(cf. a alínea c) de I.5.11).

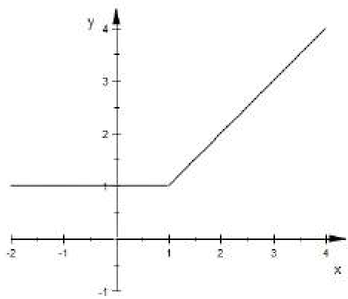
II.1.5 **(Nota)** Se $f\colon X \to \mathbb{R}$ é uma função e $A \subset X$ é um subconjunto tal que $f_{/A}\colon A \to \mathbb{R}$ seja contínua num certo ponto $a \in A$, não podemos concluir que f seja contínua no ponto a. Como exemplo típico podemos pensar no referido em I.5.7 em que a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não é contínua no ponto 1 mas a sua restrição ao subconjunto $]-\infty, 1]$ já é contínua nesse ponto.



Afirmar que uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ é contínua em todos os pontos de $A \subset X$ é assim "mais forte" do que afirmar que a restrição $f_{/A}\colon A \to \mathbb{R}$ é contínua.O melhor que conseguimos para tirar conclusões sobre a continuidade num ponto de uma função a partir da continuidade nesse ponto de uma ou mais restrições é:

II.1.6 **(Das restrições para as funções)** Sejam $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in X$.
a) Se $a \in A \subset X$ é tal que $f_{/A}\colon A \to \mathbb{R}$ seja contínua no ponto a e a não é aderente a $X \setminus A$, então $f\colon X \to \mathbb{R}$ é contínua em a (cf. a alínea b) de I.5.8, com $B = X \setminus A$).
b) Se $X = A \cup B$, com $a \in A \cap B$ e com ambas as restrições $f_{/A}\colon A \to \mathbb{R}$ e $f_{/B}\colon B \to \mathbb{R}$ contínuas em a, então $f\colon X \to \mathbb{R}$ é contínua em a (cf. a alínea a) de I.5.8).

II.1.7 **(Exemplos) a)** Como aplicação da alínea a) de II.1.6, podemos concluir que a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que serviu de exemplo na nota II.1.5 já é contínua em todos os pontos do domínio distintos de 1: Nos pontos de $]-\infty, 1[$ por se tratar de pontos não aderentes a $[1, +\infty[$ onde a restrição de f a $]-\infty, 1[$ é contínua; Nos pontos de $]1, +\infty[$ por se tratar de pontos não aderentes a $]-\infty, 1]$ onde a restrição de f a $]1, +\infty[$ é contínua.
b) Consideremos a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ referida no exemplo I.5.9



Como aplicação da alínea b) de II.1.6, podemos concluir que esta função é contínua no ponto 1, por isso acontecer às suas restrições a cada um dos conjuntos $]-\infty, 1]$ e $[1, +\infty[$. Que ela é contínua nos restantes pontos do domínio pode ser concluído por aplicação da alínea a) de II.1.6, como na alínea a).

II.1.8 **(Somas produtos e módulos de funções contínuas)** Sejam $f, g: X \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas num ponto $a \in X$. São então também contínuas em a as funções $f+g: X \to \mathbb{R}$, $f \times g: X \to \mathbb{R}$ e $|f|: X \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\begin{aligned}
&(f+g)(x) = f(x) + g(x),\\
&(f \times g)(x) = f(x) \times g(x),\\
&|f|(x) = |f(x)|
\end{aligned}$$

(cf. I.5.17) e, consquentemente, também $-g = (-1) \times g: X \to \mathbb{R}$ e $f - g = f + (-g): X \to \mathbb{R}$ são contínuas em a. Mais geralmente, por indução em k, se $f_1, \ldots, f_k: X \to \mathbb{R}$ são contínuas no ponto a, o mesmo acontece a $f_1 + \cdots + f_k: X \to \mathbb{R}$ e a $f_1 \times \cdots \times f_k: X \to \mathbb{R}$.
Em particular, para cada inteiro $p \geq 0$, é contínua a função potência de expoente p, $f_p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f_p(x) = x^p$ (o caso $p = 0$ resulta de termos uma função constante).

II.1.9 **(Quociente de funções contínuas)** Sejam $f: X \to \mathbb{R}$ e $g: X \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ funções contínuas num ponto $a \in X$. São então contínuas em a a função $\frac{1}{g}: X \to \mathbb{R}$ definida por $\frac{1}{g}(x) = \frac{1}{g(x)}$ (cf. I.5.21), e, consequentemente, também a função $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}: X \to \mathbb{R}$.

II.1.10 **(Composta de funções contínuas)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$ e $f: X \to Y$ e $g: Y \to \mathbb{R}$ duas funções.
a) Se f for contínua num ponto $a \in X$ e g for contínua no ponto $f(a)$, então a composta $g \circ f: X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto a. Em particular, se f e g são funções contínuas, também $g \circ f$ é uma função contínua (cf. I.5.36).
b) Se a é aderente a X, se f tem limite no ponto a, com $b = \lim_{x \to a} f(x) \in Y$ e se g é contínua no ponto b, então

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = g(b)$$

(cf. I.5.36).

Passamos agora a examinar alguns resultados, de utilização frequente, que têm como hipótese a continuidade em todos os pontos do domínio.

II.1.11 **(Teorema de Weierstrass)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto fechado e limitado e $f: X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Tem-se então que $f(X) \subset \mathbb{R}$ é também fechado e limitado e portanto, se $X \neq \emptyset$, a função f tem máximo e mínimo.

Dem: Lembremos que os conjuntos fechados e limitados, também chamados compactos, podem ser caracterizados pela propriedade de qualquer sucessão de reais a eles pertencentes ter pelo menos um sublimite a eles pertencente (cf. I.6.11). Seja então $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão arbitrária de elementos de $f(X)$ e seja, para cada $n\in\mathbb{N}$, $x_n\in X$ tal que $f(x_n)=y_n$. O facto de X ser compacto implica a existência de um sublimite $a\in X$ da sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, portanto de um conjunto $J\subset\mathbb{N}$ tendo $+\infty$ como ponto aderente[85] tal que $\lim\limits_{n\in J} x_n = a$. Tendo em conta a continuidade de f no ponto a, deduzimos então que

$$\lim_{n\in J} y_n = \lim_{n\in J} f(x_n) = f(a)\in f(X),$$

o que mostra que a sucessão $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite o sublimite $f(a)\in f(X)$. Provámos assim que $f(X)$ é compacto e portanto, no caso em que $X\neq\emptyset$, e portanto $f(X)\neq\emptyset$, tem máximo e mínimo (cf. I.6.12) os quais são, por definição, o máximo e o mínimo da função. $\square$

II.1.12 **(Corolário)** Sejam $X\subset\mathbb{R}$ e $f\colon X\to\mathbb{R}$ uma função contínua. Se $A\subset X$ é um conjunto fechado e limitado, então $f(A)$ é também um conjunto fechado e limitado e portanto, no caso em que $A\neq\emptyset$, tem máximo e mínimo.
Dem: Basta aplicar o teorema de Weierstrass à restrição $f_{/A}\colon A\to\mathbb{R}$, que é ainda contínua e tem $f(A)$ como contradomínio. $\square$

II.1.13 **(Nota)** Acabamos de verificar que a imagem por uma função contínua de um conjunto simultaneamente fechado e limitado é um conjunto simultaneamente fechado e limitado. Poderíamos conjeturar se a imagem de um conjunto fechado terá que ser um conjunto fechado e se a imagem de um conjunto limitado terá que ser um conjunto limitado. Tal não é o caso: Pensando, por exemplo, na função contínua $f\colon]0,+\infty[\,\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{1}{x}$, constatamos que a imagem do conjunto fechado $[1,+\infty[$ (que não é limitado) é o conjunto $]0,1]$, que não é fechado, e que a imagem do conjunto limitado $]0,1]$ (que não é fechado) é o conjunto $[1,+\infty[$, que não é limitado.

II.1.14 **(Imagem reciproca dum fechado)** Sejam $X\subset\mathbb{R}$ e $Y\subset\mathbb{R}$ dois conjuntos fechados e $f\colon X\to\mathbb{R}$ uma função contínua. É então fechado o conjunto

$$A=\{x\in X\mid f(x)\in Y\},$$

a que se costuma dar o nome de *imagem recíproca* de Y por meio de f.
Dem: Seja $a\in\mathbb{R}$ aderente a A. Em particular, por ser $A\subset X$, a é também aderente a X donde, por X ser fechado, $a\in X$. Tendo em conta I.5.49, podemos considerar uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A, em particular de X, com $x_n\to a$. Pela continuidade de f no ponto a, vem $f(x_n)\to f(a)$,

[85] Ou seja, neste caso, um subconjunto infinito.

onde, pela definição de A, $f(x_n) \in Y$. Podemos assim concluir que $f(a)$ é aderente a Y, donde, por Y ser fechado, $f(a) \in Y$, o que mostra que $a \in A$. Provámos assim que A é um conjunto fechado. □

II.1.15 **(Teorema de Cauchy-Bolzano[86])** Sejam $a < b$ em $\mathbb{R}$ e $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $d \in \mathbb{R}$ está entre $f(a)$ e $f(b)$ (cf. I.1.4), então existe $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = d$ (a função contínua f toma todos os valores intermédios).

Dem: Se d está entre $f(a)$ e $f(b)$, duas situações são possíveis: Ou $f(a) < d < f(b)$ ou $f(b) < d < f(a)$.

Vamos começar por examinar o caso em que $f(a) < d < f(b)$. Seja $A \subset [a,b]$,

$$A = \{x \in [a,b] \mid f(x) \le d\} = \{x \in [a,b] \mid f(x) \in]-\infty, d]\},$$

conjunto que, tendo em conta II.1.14, é fechado e, naturalmente, limitado, portanto compacto. Uma vez que $a \in A$ e $b \notin A$, por ser $f(a) < d < f(b)$, em particular A não é vazio, podemos aplicar I.6.12 para garantir que o conjunto A admite um elemento máximo $c \in [a,b[$. Provemos que $f(c) = d$, com o que ficará atingido o nosso objetivo, já que então $c \neq a$. Suponhamos, por absurdo, que isso não acontecia, e portanto que $f(c) < d$ ($c \in A$). Uma vez que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$, podemos aplicar I.5.2, com a constante d como segunda função, para garantir a existência de $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $x \in [a,b]$ na vizinhança $V_\varepsilon(c) =]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$, $f(x) < d$, em particular $x \in A$. Mas isto conduz-nos a um absurdo, visto que, escolhendo x entre c e o menor dos dois números b e $c+\varepsilon$, maiores que c, obtínhamos um elemento de A maior que c, contrariando o facto de c ser um majorante de A.

O caso em que $f(b) < d < f(a)$ admite uma justificação análoga, mas também se pode reduzir ao que já demonstrámos, considerando a função contínua $-f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, para a qual se tem $-f(a) < -d < -f(b)$, e deduzindo a existência de $c \in]a,b[$ tal que $-f(c) = -d$, portanto tal que $f(c) = d$. □

II.1.16 **(Corolário)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Tem-se então que o contradomínio $f(X)$ é também um intervalo.

Dem: Vamos utilizar a caracterização dos intervalos em I.3.8. Consideremos então $y \neq z$ em $f(X)$ e seja d entre y e z. Existem assim $a \neq b$ em X tais que $y = f(a)$ e $z = f(b)$, podendo já supor-se, para fixar ideias, que $a < b$ (senão trocava-se os papéis de y e z). Aplicando II.1.15 à restrição de f ao intervalo $[a,b] \subset X$, que é ainda uma função contínua, deduzimos a existência de $c \in]a,b[\subset X$ tal que $f(c) = d$, o que implica que se tem também $d \in f(X)$. □

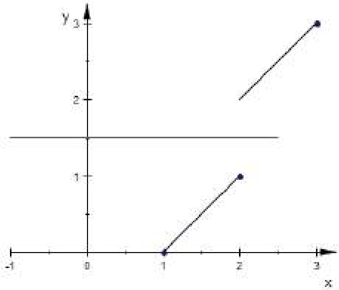
II.1.17 **(Nota)** Repare-se que, para a validade do teorema de Cauchy-Bolzano, tal como do seu corolário, é essencial tanto a continuidade da função f como

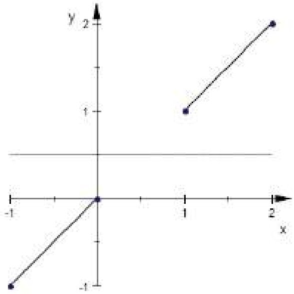
[86]Que o estudante já encontrou, embora sem justificação, no ensino secundário)

o facto de o domínio ser um intervalo: Para o constarmos, podemos pensar na função $g\colon [1,3] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} x-1, & \text{se } x \le 2 \\ x, & \text{se } x > 2 \end{cases},$$

a qual está definida num intervalo mas não é contínua no ponto 2 e nunca toma o valor $\frac{3}{2}$, que está entre $0 = g(1)$ e $3 = g(3)$, assim como na função contínua $h\colon [-1,0] \cup [1,2] \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = x$, a qual não tem um intervalo como domínio, que nunca toma o valor $\frac{1}{2}$, que está entre $-1 = h(-1)$ e $2 = h(2)$.





Como primeira aplicação do teorema de Cauchy-Bolzano ou, mais precisamente, do seu corolário, temos a possibilidade de definir as raizes de índice k dos reais maiores ou iguais a 0, generalizando o que foi feito em I.1.15 para as raizes quadradas. De facto, se examinarmos a demonstração então feita, constatamos que ela seguia um caminho análogo ao utilizado na demonstração do teorema de Cauchy-Bolzano, a demonstração deste último acabando por ser mais simples por já dispormos de instrumentos que então não estavam ao nosso alcance.

II.1.18 **(A função raiz de índice $\boldsymbol{k}$)** Seja $k \ge 1$ um número natural. Para cada número real $y \ge 0$ existe então um, e um só, número real $x \ge 0$ tal que $x^k = y$, número real esse que é notado $\sqrt[k]{y}$ e a que se dá o nome de *raiz de índice* k de y.

Repare-se que $\sqrt[2]{y}$ não é mais do que a raiz quadrada $\sqrt{y}$ de y, definida em I.1.15 e que $\sqrt[1]{y} = y$.

Dem: Tendo em conta I.4.26 e II.1.8, sabemos que tem lugar uma função contínua e estritamente crescente $f_k\colon [0,+\infty[\to [0,+\infty[$, definida por $f_k(x) = x^k$, a qual vai, em particular, ser injetiva. Para justificar a afirmação no enunciado resta mostrar que a função $f_k\colon [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ é sobrejetiva. Pelo corolário II.1.16 do teorema de Cauchy-Bolzano, $f_k([0,+\infty[)$ é um intervalo e o facto de f_k ser crescente implica que $0 = f_k(0)$ é o mínimo desse intervalo e, tendo em conta I.5.30 e a alínea a) de I.5.38, que o supremo do intervalo é igual a $\lim_{x\to+\infty} x^k = +\infty$. Concluímos assim que o contradomínio é efetivamente $[0, +\infty[$. □

II.1.19 Para cada natural $k \geq 1$, ficou definida uma função estritamente crescente $[0, +\infty[\to [0, +\infty[$, que a y associa $\sqrt[k]{y}$, que não é mais do que a função inversa da função bijetiva $f_k\colon [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ definida por $f_k(x) = x^k$ (lembrar que, como referido em I.4.22, a função inversa de uma função estritamente crescente é estritamente crescente).

O próximo resultado, que é muitas vezes cómodo para provar a continuidade de uma função, diz-nos que uma função monótona cujo contradomínio seja um intervalo é necessariamente contínua.

II.1.20 **(Condição suficiente de continuidade)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função monótona cujo contradomínio $f(X)$ seja um intervalo. Tem-se então que a função f é contínua.

Dem: Vamos começar por supor que a função f é crescente. Provemos a continuidade de f num ponto $a \in X$. Lembrando II.1.4, essa continuidade é sempre verificada quando a é um ponto isolado e, caso contrário, é equivalente ao facto de se ter

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = f(a).$$

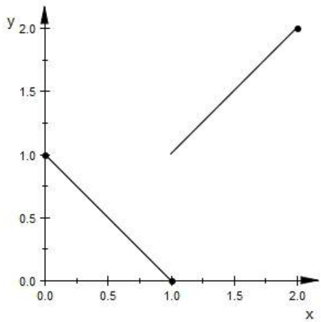
Tendo em conta o que foi referido em I.5.12, para mostrarmos que f é contínua em a, bastará mostrar que, se a é ponto de acumulação à esquerda de X, então $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$ e que, se a é ponto de acumulação à direita de X, então $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$. No caso em que a é ponto de acumulação à esquerda de X, vimos na alínea c) de I.5.38 que o limite à esquerda existe e é o supremo do conjunto $f(X_{<a})$, dos $f(x)$ com $x \in X$ e $x < a$, pelo que, supondo, por absurdo, que não se tinha $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$, concluíamos que $\lim_{x\to a^-} f(x) < f(a)$ e portanto, escolhendo $y \in \mathbb{R}$ entre $\lim_{x\to a^-} f(x)$ e $f(a)$, obtínhamos um real não pertencente a $f(X)$ (menor que os $f(x)$ com $x \geq a$ e maior que os $f(x)$ com $x < a$) e que, no entanto, estava entre dois elementos de $f(X)$ ($f(a)$ e qualquer elemento $f(x)$ com $x < a$), contrariando a hipótese de $f(X)$ ser um intervalo. Analogamente, no caso em que a é ponto de acumulação à direita de X, o limite à direita existe e é o ínfimo do conjunto $f(X_{>a})$, dos $f(x)$ com $x \in X$ e $x > a$, pelo que, supondo, por absurdo, que não se tinha $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$, vinha $\lim_{x\to a^+} f(x) > f(a)$ e portanto, escolhendo $y \in \mathbb{R}$ entre $\lim_{x\to a^+} f(x)$ e $f(a)$, obtínhamos um real não pertencente a $f(X)$ (maior que os $f(x)$ com $x \leq a$ e menor que os $f(x)$ com $x > a$) e que, no entanto, estava entre dois elementos de $f(X)$ ($f(a)$ e

qualquer elemento $f(x)$ com $x > a$), contrariando, mais uma vez, a hipótese de $f(X)$ ser um intervalo.
Resta-nos examinar o caso em que a função f é decrescente. Nesse caso poderíamos fazer uma demonstração análoga mas é mais simples reduzirmo-nos ao caso anterior, considerando o conjunto $-X$ dos reais $-x$, com $x \in X$, e a função crescente $g: -X \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(-x)$, cujo contradomínio coincide com o de f e é portanto um intervalo. Podemos assim concluir do que já provámos que g é contínua e portanto, pela igualdade $f(x) = g(-x)$, a função f é também contínua. □

II.1.21 **(Nota)** Repare-se que a hipótese de monotonia é essencial para podermos concluir a continuidade de f. Por exemplo, a função $f: [0,2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{se } x \le 1 \\ x, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

não é contínua no ponto 1 e, no entanto, $f([0,2])$ é o intervalo $[0,2]$.



II.1.22 **(Continuidade da função raiz de índice *k*)** Para cada natural $k \ge 1$ é contínua a função estritamente crescente $g_k: [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ definida por $g_k(y) = \sqrt[k]{y}$ e tem-se

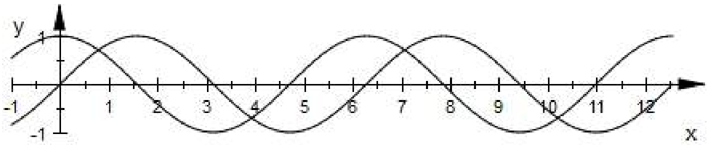
$$\lim_{y \to +\infty} \sqrt[k]{y} = +\infty.$$ [87]

Dem: Já referimos em II.1.19 que esta função é estritamente crescente e é a inversa da função bijetiva $f_k: [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ definida por $f_k(x) = x^k$. Como tal, o seu contradomínio é o intervalo $[0,+\infty[$ o que, por II.1.20, implica a continuidade de g_k. Quanto ao limite da função quando $y \to +\infty$, temos uma consequência direta da alínea a) de I.5.38 que nos garante que esse limite é o supremo do contradomínio $[0,+\infty[$ de g_k. □

[87] Repare-se que as conclusões no caso em que $k = 2$ podiam ser obtidas a partir de I.5.23 e I.5.34 e que, reciprocamente esses resultados podiam ter sido obtidos como consequências do que agora enunciamos, se isso já fosse conhecido na altura.

II.1.23 **(Continuidade das funções trigonométricas[88])** As funções seno e cosseno,

$$\operatorname{sen}\colon \mathbb{R} \to [-1,1] \subset \mathbb{R}, \quad \cos\colon \mathbb{R} \to [-1,1] \subset \mathbb{R},$$

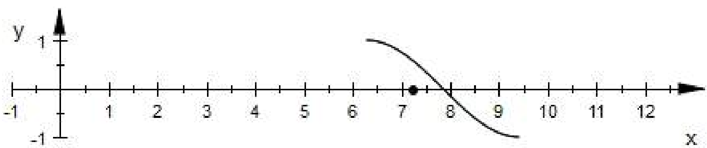


são contínuas.

Dem: Tendo em conta o resultado II.1.10, sobre a composição de funções contínuas, e a relação $\operatorname{sen}(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$, válida para todo o $x \in \mathbb{R}$, é suficiente mostrar que a função $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua num ponto arbitrário $a \in \mathbb{R}$. Aplicando I.1.13 ao real $\frac{a}{2\pi}$, vemos que existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{a}{2\pi}$ pertença ao intervalo $[p, p+1[$, ou seja $a \in [2p\pi, 2p\pi{+}2\pi[$. Vamos provar a continuidade no ponto a distinguindo quatro situações:

1) Suponhamos que $a \in]2p\pi, 2p\pi + \pi[$. Neste caso, reparamos que a restrição do cosseno a este intervalo é decrescente e tem como contradomínio o intervalo $]-1,1[$ [89] e portanto, por aplicação de II.1.20, é contínua. Deduzimos então da alínea a) de II.1.6 que $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto a, já que a não é aderente ao conjunto fechado

$$\mathbb{R} \setminus]2p\pi, 2p\pi + \pi[\;=\;]-\infty, 2p\pi] \cup [2p\pi + \pi, +\infty[.$$



2) Suponhamos que $a \in]2p\pi + \pi, 2p\pi + 2\pi[$. Neste caso, reparamos que a restrição do cosseno a este intervalo é crescente e tem como contradomínio o intervalo $]-1,1[$ e portanto, por aplicação de II.1.20, é contínua. Deduzimos

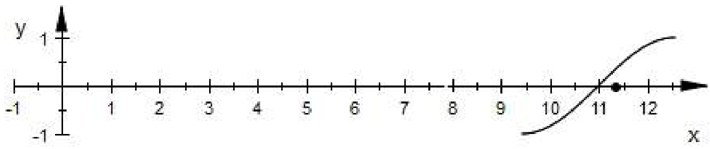
---

[88]Lembrar que, como referido em I.4.28, as funções trigonométricas têm um caráter diferente das outras que temos encontrados, uma vez que a sua definição tem raízes na Geometria e não se baseia apenas nas propriedades dos números reais. Por essa razão, é legítimo usar argumentos geométricos para justificar propriedades destas funções.

[89]Cuidado! Ao contrário do que fizémos para mostrar a existência de raízes de índice p dos números em $[0, +\infty[$, não é por aplicação de II.1.16 que concluímos que o contradomínio é este intervalo, uma vez que ainda não conhecemos a continuidade das funções trigonométricas. A explicação é um argumento geométrico, envolvendo o círculo trigonométrico que mostra que, para cada valor entre -1 e 1, é possível encontrar um ângulo no intervalo considerado que tem esse valor como cosseno.

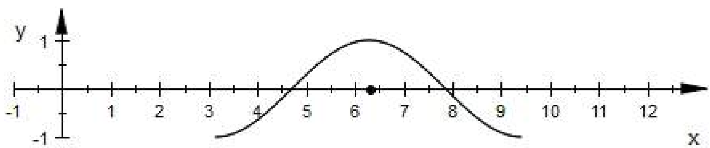
então da alínea a) de II.1.6 que $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto a, já que a não é aderente ao conjunto fechado

$$\mathbb{R} \setminus]2p\pi + \pi, 2p\pi + 2\pi[=]-\infty, 2p\pi + \pi] \cup [2p\pi + 2\pi, +\infty[.$$



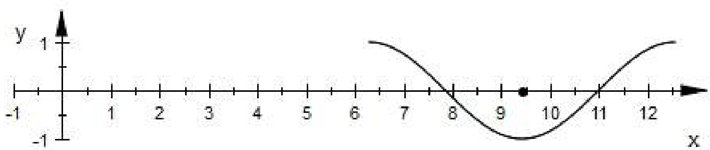
3) Suponhamos que $a = 2p\pi$. Neste caso, por aplicação de II.1.20, concluímos que são contínuas as restrições do cosseno aos intervalos $]2p\pi - \pi, 2p\pi]$ e $[2p\pi, 2p\pi + \pi[$ (a primeira crescente, a segunda decrescente e ambas com o intervalo $]-1, 1]$ como contradomínio) e portanto, pela alínea b) de II.1.6, a restrição do cosseno a $]2p\pi - \pi, 2p\pi + \pi[$ é contínua em a. Daqui deduzimos, pela alínea a) de II.1.6, que $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto a, já que a não é aderente ao conjunto fechado

$$\mathbb{R} \setminus]2p\pi - \pi, 2p\pi + \pi[=]-\infty, 2p\pi - \pi] \cup [2p\pi + \pi, +\infty[.$$



4) Suponhamos que $a = 2p\pi + \pi$. Neste caso, por aplicação de II.1.20, concluímos que são contínuas as restrições do cosseno aos intervalos $]2p\pi, 2p\pi + \pi]$ e $[2p\pi + \pi, 2p\pi + 2\pi[$ (a primeira decrescente, a segunda crescente e ambas com o intervalo $[-1, 1[$ como contradomínio) e portanto, pela alínea b) de II.1.6, a restrição do cosseno a $]2p\pi, 2p\pi + 2\pi[$ é contínua em a. Daqui deduzimos, pela alínea a) de II.1.6, que $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto a, já que a não é aderente ao conjunto fechado

$$\mathbb{R} \setminus]2p\pi, 2p\pi + 2\pi[=]-\infty, 2p\pi] \cup [2p\pi + 2\pi, +\infty[.$$



II.1.24 A outra função trigonométrica cuja utilização é mais frequente é a função tangente que, como sabemos já não tem como domínio $\mathbb{R}$ mas sim o comple-

mentar do conjunto

$$X=\frac{\pi}{2}+\mathbb{Z}\pi=\left\{\frac{\pi}{2}+p\pi\right\}_{p\in\mathbb{Z}}$$

dos zeros da função cosseno. A função $\tan\colon \mathbb{R}\setminus X\to\mathbb{R}$, que admite a caracterização

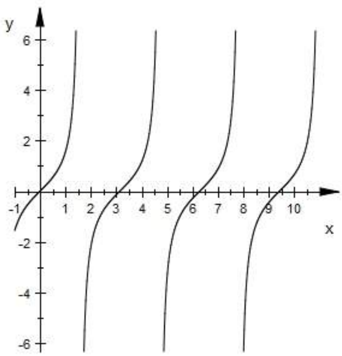
$$\tan(x)=\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)},$$

vai também ser contínua, enquanto quociente de funções contínuas. Recordemos que o estudo geométrico desta função diz-nos que ela não é monótona, mas tem restrição estritamente crescente a cada um dos intervalos do tipo

$$\left]\frac{\pi}{2}+p\pi,\frac{\pi}{2}+(p+1)\pi\right[$$

e que o contradomínio de cada uma destas restrições é $\mathbb{R}$. Em particular, por aplicação das alíneas c) e d) de I.5.38 (e, mais uma vez, da alínea a) de II.1.6) concluímos que nos pontos $a=\frac{\pi}{2}+p\pi$ que não pertencem ao domínio, tem-se

$$\lim_{x\to a^-}\tan(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to a^+}\tan(x)=-\infty.$$



II.1.25 **(As funções trigonométricas inversas)** Apesar de as funções trigonométricas $\operatorname{sen}\colon\mathbb{R}\to[-1,1]$, $\cos\colon\mathbb{R}\to[-1,1]$ e $\tan\colon\mathbb{R}\setminus(\frac{\pi}{2}+\mathbb{Z}\pi)\to\mathbb{R}$ não serem injetivas, e portanto não terem funções inversas, é possível restringir cada uma delas a um intervalo conveniente de forma a obter uma função injetiva e com o mesmo contradomínio. São as inversas dessas restrições que são conhecidas como funções trigonométricas inversas e que são implementadas (através de valores aproximados) em muitas calculadoras com as teclas

$$\boxed{\sin^{-1}} \quad \boxed{\cos^{-1}} \quad \boxed{\tan^{-1}}.$$

É claro que, tal como as funções trigonométricas, estas funções inversas têm também um carácter geométrico, e não estritamente do âmbito da Análise Matemática. Concretizando:

a) A restrição da função seno ao intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ é estritamente crescente, em particular injetiva, e tem $[-1,1]$ como contradomínio. Notamos

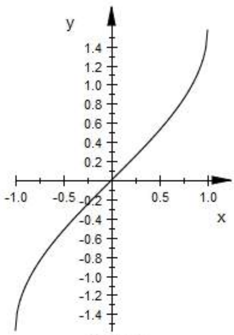
$$\text{arcsen}\colon [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

(ou sen^{-1})[90] a função inversa desta restrição, que é assim bijetiva e estritamente crescente e portanto contínua (cf. II.1.20).

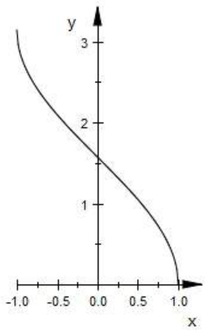
b) A restrição da função cosseno ao intervalo $[0,\pi]$ é estritamente decrescente, em particular injetiva, e tem $[-1,1]$ como contradomínio. Notamos

$$\text{arccos}\colon [-1,1] \to [0,\pi]$$

(ou $\cos^{-1}$) a função inversa desta restrição, que é assim bijetiva e estritamente decrescente e portanto contínua.



arcsen



arccos

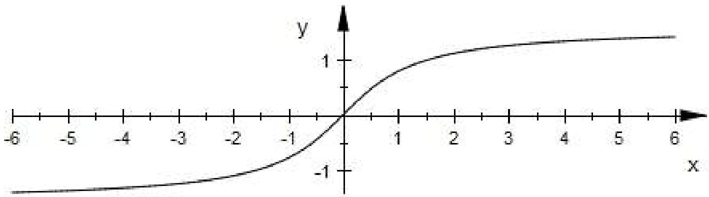
c) A restrição da função tangente ao intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ é estritamente crescente, em particular injetiva, e tem $\mathbb{R}$ como contradomínio. Notamos

$$\text{arctan}\colon \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

(ou $\tan^{-1}$) a função inversa desta restrição, que é assim bijetiva e estritamente crescente e portanto contínua. Note-se que, por aplicação das alíneas a) e b) de I.5.38, tem-se

[90]Mas línguas francesa e inglesa as traduções de "seno" são respetivamente "sinus" e "sine" e essa é a razão para que se utilize frequentemente "sin", "arcsin" e "$\sin^{-1}$" em vez de "sen", "arcsen" e "sen^{-1}".

$$\lim_{x \to -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$$



No contexto dos limites de funções (ou, em particular, de sucessões) a palavra “uniforme” faz sentido sempre que estejamos a considerar vários limites ao mesmo tempo. Nessa situação, quando é dado $\delta > 0$, destinado a definir as vizinhanças no espaço de chegada, podemos, para cada um dos limites considerados, considerar $\varepsilon > 0$, destinado a definir as vizinhanças do ponto onde esse limite é considerado, de modo que se verifique a condição na definição do limite. Em geral, o valor de ε que se consegue determinar depende, além do valor de δ, também do limite que se considera. Quando, para cada $\delta > 0$, for possível determinar $\varepsilon > 0$ que sirva, ao mesmo tempo, para todos os limites considerados, falamos de limite uniforme. Repare-se que, quando os limites considerados forem em número finito, temos sempre um limite uniforme, uma vez que, considerando $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, \ldots, \varepsilon_n > 0$ que sirvam para cada um dos limites, o número $\varepsilon > 0$ igual ao mínimo daqueles n números serve ao mesmo tempo para todos. A definição a seguir ilustra uma das situações em que a questão da uniformidade se coloca.

II.1.26 **(Continuidade uniforme)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Dado $A \subset X$, dizemos que f é *uniformemente contínua nos pontos de* A se, qualquer que seja $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $a \in A$ e $x \in X$ com $x \in V_\varepsilon(a)$, tem-se $f(x) \in V_\delta(f(a))$. Dizemos que f é *uniformemente contínua* se for uniformemente contínua nos pontos de X.

Repare-se que, se f é uniformemente contínua nos pontos de A, então, em particular, para cada $a \in A$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, isto é, f é contínua em todos os pontos de A. Em particular, considerando $A = X$, se $f : X \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua, então também é contínua.

II.1.27 **(Exemplos) 1)** Como ressalta das observações feitas para justificar I.5.4, dados $X \subset \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, são uniformemente contínuas a função identidade $I_X : X \to \mathbb{R}$ e a função $X \to \mathbb{R}$ de valor constante b (Dado $\delta > 0$, escolher $\varepsilon = \delta$, no primeiro caso, e $\varepsilon > 0$ arbitrário, no segundo caso).

2) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$, apesar de contínua, não é uniformemente contínua. Para o mostrarmos vamos verificar que, por exemplo, para $\delta = 1$, não é possível escolher $\varepsilon > 0$ nas condição da definição. O caminho resulta de considerar a sucessão que a cada n associa

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}},$$

cujo limite sabemos ser 0. Qualquer que fosse o candidato $\varepsilon > 0$ para verificar a condição de continuidade uniforme, podíamos então escolher um natural n tal que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \varepsilon$ e então, tomando $a = \sqrt{n}$ e $x = \sqrt{n+1}$, constatávamos que $x \in V_\varepsilon(a)$ e, no entanto, por ser $f(a) = n$ e $f(x) = n + 1$, $f(x) \notin V_1(f(a))$ ou seja, o candidato não servia.

II.1.28 **(Teorema de Heine-Cantor)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $A \subset X$ um conjunto compacto (isto é, fechado e limitado) e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua em todos os pontos de A. A função f é então uniformemente contínua nos pontos de A.

Dem: Suponhamos, por absurdo, que f não era uniformemente contínua nos pontos de A, isto é, que se podia considerar $\delta > 0$ para o qual não havia nenhuma escolha possível de $\varepsilon > 0$ nas condições da definição. Em particular, se escolhêssemos $\varepsilon = \frac{1}{n}$, não teríamos êxito, ou seja, existiam dois pontos $a_n \in A$ e $x_n \in X$ tais que $x_n \in V_{1/n}(a_n)$, ou seja $d(a_n, x_n) < \frac{1}{n}$, e, no entanto, $f(x_n) \notin V_\delta(f(a_n))$, ou seja $d\big(f(a_n), f(x_n)\big) \geq \delta$. Reparemos que, uma vez que $\frac{1}{n} \to 0$, as desigualdades $0 \leq d(a_n, x_n) < \frac{1}{n}$ implicam que $d(a_n, x_n) \to 0$. Pensando agora na sucessão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de A, o facto de A ser compacto (cf. II.1.11) implica que existe um sublimite $a \in A$ para esta sucessão, portanto que existe uma parte infinita $J \subset \mathbb{N}$ (isto é, com $+\infty$ como ponto aderente) tal que $a_n \xrightarrow[n \in J]{} a$, ou seja $d(a, a_n) \xrightarrow[n \in J]{} 0$ (cf. a alínea b) de I.5.42). De se ter

$$0 \leq d(a, x_n) \leq d(a, a_n) + d(a_n, x_n),$$

com o membro da direita a tender para 0, para $n \in J$, resulta por enquadramento que $d(a, x_n) \xrightarrow[n \in J]{} 0$, portanto $x_n \xrightarrow[n \in J]{} a$. Tendo em conta agora a continuidade de f no ponto a, tem-se $f(a_n) \xrightarrow[n \in J]{} f(a)$ e $f(x_n) \xrightarrow[n \in J]{} f(a)$, donde

$$d\big(f(a_n), f(a)\big) \xrightarrow[n \in J]{} 0, \quad d\big(f(a), f(x_n)\big) \xrightarrow[n \in J]{} 0.$$

Das desigualdades

$$0 \leq d\big(f(a_n), f(x_n)\big) \leq d\big(f(a_n), f(a)\big) + d\big(f(a), f(x_n)\big),$$

com o membro da direita a tender para 0, para $n \in J$, resulta por enquadramento que $d\big(f(a_n), f(x_n)\big) \xrightarrow[n \in J]{} 0$. Mas isto é absurdo, uma vez que, por construção, para todo o $n \in \mathbb{N}$, em particular, para todo o $n \in J$,

$$d\big(f(a_n), f(x_n)\big) \geq \delta. \qquad \square$$

Exercícios

Ex II.1.1 Lembrar que, para cada $x \in \mathbb{R}$, define-se a sua parte inteira $\mathrm{int}(x) \in \mathbb{Z}$ como sendo o único inteiro p tal que $x \in [p, p+1[$ (cf. I.1.13). Determinar quais os pontos $a \in \mathbb{R}$ onde a função $\mathrm{int}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ é contínua.

Ex II.1.2 Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f\colon X \to \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ uma função contínua, que só toma valores racionais. Mostrar que f é necessariamente uma função constante.

Ex II.1.3 Sejam $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas tais que $f(1) = g(0)$. Mostrar que é contínua a função $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ g(2x-1) & \text{se } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}.$$

Ex II.1.4 Mostrar que a equação

$$(x-1)^7 + x(x-2) = 0$$

tem pelo menos uma solução no intervalo $]0, 2[$.

Ex II.1.5 Seja $f : [a,b] \to [a,b]$ uma função contínua, cujo domínio e espaço de chegada são ambos o intervalo limitado e fechado $[a,b] \subset \mathbb{R}$, com $a \leq b$. Mostrar que f tem pelo menos um *ponto fixo*, isto é existe pelo menos um $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = c$. **Sugestão:** Aplicar o terema de Cauchy-Bolzano à função $f(x) - x$.

Ex II.1.6 **a)** Seja $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(0) = f(2\pi)$. Mostrar que existe algum $c \in [0, \pi[$ para o qual $f(c) = f(c+\pi)$.
Sugestão: Considerar a função g definida em $[0, \pi]$ por

$$g(x) = f(x) - f(x+\pi).$$

b) Com base na conclusão de a), concluir que num dado meridiano terrestre existem, em cada momento, dois pontos antípodas cuja temperatura é exactamente igual.

★ Ex II.1.7 Seja $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um polinómio de grau n ímpar,

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,$$

onde $a_n > 0$.

a) Mostrar que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $P(x) = 0$. **Sugestão:** Utilizar o teorema de Bolzano e ter em conta os limites de $P(x)$ quando x tende para $+\infty$ e para $-\infty$.
b) Utilizar a conclusão de a) para determinar o contradomínio $P(\mathbb{R})$.

★ Ex II.1.8 Seja $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um polinómio de grau n par,

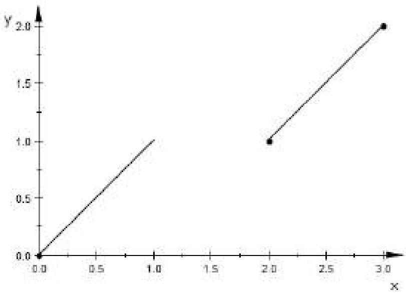
$$P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n,$$

onde $a_n > 0$. Mostrar que P tem um mínimo em $\mathbb{R}$, isto é, existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $P(x_0) \leq P(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}$. **Sugestão:** Reparar quais os limites de $P(x)$ quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$, deduzindo que existem $a < 0$ e $b > 0$ tais que, para x no complementar de $[a, b]$, $P(x) > P(0)$. Aplicar o teorema de Weierstrass à restrição de P ao intervalo $[a, b]$.

★ Ex II.1.9 **(Continuidade da função inversa)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função contínua e injetiva.
a) Mostrar que f é estritamente monótona.
Sugestão: Tendo em conta o exercício I.4.18, basta mostrar que, para $a < b < c$ em X, $f(b)$ está entre $f(a)$ e $f(c)$. Reparando que, de $f(a)$, $f(b)$ e $f(c)$, um está entre os outros dois, aplicar o teorema de Bolzano-Cauchy para contradizer a injetividade, tanto no caso em que $f(a)$ está entre $f(b)$ e $f(c)$ (existe x entre b e c tal que $f(x) = f(a)$) como naquele em que $f(c)$ está entre $f(a)$ e $f(b)$ (argumento análogo).
b) Como aplicação de II.1.20, deduzir que a função inversa $f^{-1}\colon f(X) \to X$ é também contínua.

Ex II.1.10 **(Contraexemplo quando o domínio não é um intervalo)** Seja

$$f\colon [0,1[\, \cup [2,3] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in [0,1[\\ x-1, & \text{se } x \in [2,3] \end{cases}.$$



a) Mostrar que a função f é contínua e estritamente crescente, em particular injetiva.
b) Mostrar que $f([0,1[\, \cup [2,3]) = [0,2]$ e que a função inversa

$$f^{-1}: [0,2] \to [0,1[\cup [2,3]$$

não é contínua.

★ Ex II.1.11 **(Outro caso de continuidade da função inversa)** Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto compacto, ou seja, fechado e limitado (não necessariamente um intervalo), e seja $f: X \to \mathbb{R}$ uma função contínua e injetiva. Mostrar que a função inversa $f^{-1}: f(X) \to X$ é também contínua.[91] **Sugestão:** Tendo em conta a caracterização dos limites segundo Heine em I.5.50, basta mostrar que, para cada $b \in f(X)$ e cada sucessão de elementos $y_n \in f(X)$ com $y_n \to b$, tem-se $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(b)$. Para isso utilizar I.6.13, mostrando que a sucessão $(f^{-1}(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$, que tem necessariamente sublimite, não admite nenhum sublimite distinto de $f^{-1}(b)$.

★ Ex II.1.12 **a)** Reexaminando a demonstração da alínea a) de I.5.17, mostrar que, se $A \subset X \subset \mathbb{R}$ e se $f, g: X \to \mathbb{R}$ são duas funções uniformemente contínuas nos pontos de A, então a soma $f + g: X \to \mathbb{R}$ é também uniformemente contínua nos pontos de A.
b) Arranjar o contrexemplo que mostre que o análogo da alínea a), com a soma substituída pela multiplicação, já não é verdadeiro. **Sugestão:** Pensar no exemplo na alínea 2) de II.1.27.
c) Reexaminando a demonstração da alínea c) de I.5.17, encontrar hipóteses suplementares sobre duas funções $f, g: X \to \mathbb{R}$ uniformemente contínuas nos pontos de um certo $A \subset X$, que permitam garantir que $f \times g: X \to \mathbb{R}$ é também uniformemente contínua.

★ Ex II.1.13 Verificar que a função $f:]0,1] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x}$, apesar de contínua, não é uniformemente contínua. reparar que este exemplo, juntamente com o examinado na alínea 2) de II.1.27, mostra que para a validade do teorema de Heine-Cantor (cf. II.1.28), é essencial tanto o facto de o conjunto A ser fechado como o de ser limitado.

★ Ex II.1.14 **a)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$ uma função e $A \subset X$ e $B \subset X$ dois subconjuntos tais que f seja uniformemente contínua nos pontos de A e uniformemente contínua nos pontos de B. Mostrar que f é uniformemente contínua nos pontos de $A \cup B$.
b) Utilizar a conclusão de a), com a decomposição

$$[0,+\infty[= [0,1] \cup [1,+\infty[$$

para mostrar que é uniformemente contínua a função $f: [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$. **Sugestão:** Para a continuidade uniforme nos pontos de $[0,1]$ utilizar o teorema de Heine-Cantor e para a continuidade uniforme nos

[91] Naturalmente, no contraexemplo do exercício II.1.10 o domínio da função f, apesar de limitado, não é fechado.

pontos de $[1, +\infty[$ reparar que, se a pertence a este intervalo e $x \in [0, +\infty[$,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \le |x-a|.$$

§2. As exponenciais de variável real e os logaritmos.

Lembremos as propriedades das potências de base real e expoente inteiro maior ou igual a 0 que referimos em I.1.2, nomeadamente que se tem

$$(x \times y)^n = x^n \times y^n, \quad x^{m+n} = x^m \times x^n, \quad x^{m \times n} = (x^m)^n,$$

e, consequentemente, se $y \neq 0$ e $m \ge n$,

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}, \quad y^{m-n} = \frac{y^m}{y^n}.$$

O nosso objetivo nesta secção é, limitando agora a nossa atenção ao caso em que a base da potência é um real maior que 0, caso em que as potências são ainda reais maiores que 0, extender sucessivamente a definição de potência de modo a permitir que o expoente seja primeiro um inteiro arbitrário, depois um número racional e, por fim, um número real, tendo como linha orientadora o objetivo de as propriedades atrás referidas continuarem a ser válidas depois de cada extensão. Para a primeira extensão basta exigir que a base seja diferente de 0.

II.2.1 **(Potências de expoente inteiro)** Vamos definir as potências de base $b \neq 0$ e expoente inteiro arbitrário, partindo da observação trivial que qualquer inteiro p pode ser sempre representado, embora não de maneira única, como diferença de dois inteiros maiores ou iguais a 0. Nomeadamente, se $p \ge 0$ podemos escrever $p = p - 0$ (ou $p = (p+1) - 1$, ou $p = (p+2) - 2$, ou $\dots$) e se $p < 0$ podemos escrever $p = 0 - (-p)$ (ou $p = 1 - (1-p)$ ou …).
Seja $b \neq 0$ um número real. Para cada $p \in \mathbb{Z}$ pode então definir-se um real $b^p \neq 0$ pela condição de se ter, quaisquer que sejam os inteiros m e n maiores ou iguais a 0 com $p = m - n$,

$$b^p = \frac{b^m}{b^n},$$

vindo $b^p > 0$, sempre que $b > 0$. Para $p \ge 0$, esta definição conduz ao mesmo resultado que a definição original de potência referida em I.1.2[92] e tem-se

[92]Sem isso a notação que estamos a utilizar seria ambígua.

$$b^{-p} = \frac{1}{b^p}.$$ [93]

Em particular, não há incompatibilidade com a notação usual b^{-1}, para designar o inverso de um número real $b \neq 0$.

Dem: A possibilidade de definir b^p pelo método indicado resume-se a verificar que, se um mesmo inteiro admitir duas decomposições

$$p = m - n = m' - n'$$

como diferenças de inteiros maiores ou iguais a 0, então tem-se

$$\frac{b^m}{b^n} = \frac{b^{m'}}{b^{n'}},$$

o que é equivalente a $b^m \times b^{n'} = b^{m'} \times b^n$ ou seja, pelas propriedades conhecidas das potências de expoentemaior ou igual a 0, a $b^{m+n'} = b^{m'+n}$. Mas esta última igualdade é uma consequência de se ter $m + n' = m' + n$, como consequência de $m - n = m' - n'$. No caso em que $p \geq 0$, o facto de esta definição conduzir ao mesmo resultado que a conhecida anteriormente é uma consequência direta da propriedade das potências de expoente natural que afirma que, sendo $p = m - n$, em particular $m \geq n$, tem-se

$$b^{m-n} = \frac{b^m}{b^n}.$$

Por outro lado, reparando que se $p \geq 0$ se pode escrever $-p = 0 - p$ concluímos que então

$$b^{-p} = \frac{b^0}{b^p} = \frac{1}{b^p},$$

e esta igualdade também vale se $p < 0$ por ser uma consequência de

$$b^p = b^{-(-p)} = \frac{1}{b^{-p}}.$$ □

II.2.2 **(Manutenção das propriedades algébricas das potências)** Quando as bases são reais diferentes de 0 e os expentes são inteiros arbitrários, continuam a ser válidas as propriedades

$$(b \times c)^p = b^p \times c^p, \quad b^{p+q} = b^p \times b^q, \quad b^{p \times q} = (b^p)^q,$$

e, consequentemente

[93]Por vezes utiliza-se esta igualdade como definição, aparentemente mais simples, das potências de expoente inteiro negativo, mas a definição, aparentemente menos direta, que estamos a utilizar vai-nos permitir simplificar as demonstrações das propriedades das potências de expoente inteiro.

$$\left(\frac{b}{c}\right)^p = \frac{b^p}{c^p}, \quad c^{p-q} = \frac{c^p}{c^q}, \quad c^{-q} = \frac{1}{c^q}.$$

Dem: Para provar as três primeiras igualdades, ponhamos $p = m - n$ e $q = m' - n'$ (diferenças de inteiros maiores ou iguais a 0). Tem-se então, como $p + q = (m + m') - (n + n')$ e $pq = (mm' + nn') - (mn' + nm')$,

$$(b \times c)^p = \frac{(b \times c)^m}{(b \times c)^n} = \frac{b^m \times c^m}{b^n \times c^n} = \frac{b^m}{b^n} \times \frac{c^m}{c^n} = b^p \times c^p,$$

$$b^{p+q} = \frac{b^{m+m'}}{b^{n+n'}} = \frac{b^m \times b^{m'}}{b^n \times b^{n'}} = \frac{b^m}{b^n} \times \frac{b^{m'}}{b^{n'}} = b^p \times b^q,$$

$$b^{pq} = \frac{b^{mm'+nn'}}{b^{mn'+nm'}} = \frac{b^{mm'} \times b^{nn'}}{b^{mn'} \times b^{nm'}} = \frac{\frac{b^{mm'}}{b^{nm'}}}{\frac{b^{mn'}}{b^{nn'}}} = \frac{\frac{(b^m)^{m'}}{(b^n)^{m'}}}{\frac{(b^m)^{n'}}{(b^n)^{n'}}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{b^m}{b^n}\right)^{m'}}{\left(\frac{b^m}{b^n}\right)^{n'}} = \left(\frac{b^m}{b^n}\right)^q = (b^p)^q.$$ [94]

Tal como já acontecia no casos das potências de expoente natural, as três últimas igualdades resultam das primeiras, que permitem escrever

$$\left(\frac{b}{c}\right)^p \times c^p = \left(\frac{b}{c} \times c\right)^p = b^p,$$
$$c^{p-q} \times c^q = c^{(p-q)+q} = c^p,$$

e do facto de se ter, em particular,

$$c^{-q} = c^{0-q} = \frac{c^0}{c^q} = \frac{1}{c^q}.$$ □

II.2.3 **(Potências de expoente racional)** Para definir em geral as potências de expoente racional, suporemos sempre que temos uma base $b > 0$. Partimos da observação trivial de que qualquer inteiro r pode ser sempre representado, embora não de maneira única, como quociente $\frac{p}{n}$ de un número inteiro p por um número natural n. Por exemplo, $0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{5}$, $-\frac{1}{2} = \frac{-1}{2} = \frac{-3}{6}$, $\frac{3}{9} = \frac{2}{6}$.

Seja $b > 0$ um número real. Para cada $r \in \mathbb{Q}$ pode então definir-se um real $b^r > 0$ pela condição de se ter, quaisquer que sejam $p \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{N}$ com $r = \frac{p}{m}$,

[94] Seria instrutivo o estudante tentar demonstrar estas três propriedades no caso em que se tivesse optado por dar a definição alternativa mais simples das potências de expoente negativo referida na nota de pé de página 93. Cedo verificará que, principalmente na segunda propriedade, a simplificação se "paga bem caro" com a necessidade de tratar separadamente os casos em que cada expoente é positivo ou negativo e, no caso em que são de sinais diferentes, se são do mesmo valor absoluto ou, senão, qual dos dois é maior em valor absoluto.

$$b^r = \sqrt[m]{b^p} = \left(\sqrt[m]{b}\right)^p.$$

Para $r \in \mathbb{Z}$, esta definição conduz ao mesmo resultado que a definição em II.2.1.

Dem: Comecemos por mostrar que, para cada $p \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{N}$, tem-se $\sqrt[m]{b^p} = \left(\sqrt[m]{b}\right)^p$. Ora, tendo em conta a definição da raiz de índice m e o facto de o segundo membro ser maior que 0, isso resulta de se ter

$$\left(\left(\sqrt[m]{b}\right)^p\right)^m = \left(\sqrt[m]{b}\right)^{pm} = \left(\left(\sqrt[m]{b}\right)^m\right)^p = b^p.$$

A possibilidade de definir b^r pelo método indicado resume-se a verificar que, se um mesmo racional admitir duas decomposições

$$r = \frac{p}{m} = \frac{q}{n},$$

com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $m, n \in \mathbb{N}$, então tem-se

$$\sqrt[m]{b^p} = \sqrt[n]{b^q}.$$

Ora, tendo em conta o facto de, por I.4.26, a função $]0, +\infty[\, \to\,]0, +\infty[$, $x \mapsto x^{mn}$ ser estritamente crescente, e portanto injetiva, isso resulta de se ter $pn = qm$, e portanto

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[m]{b^p}\right)^{mn} &= \left(\left(\sqrt[m]{b^p}\right)^m\right)^n = (b^p)^n = b^{pn} = b^{qm} = \\ &= (b^q)^m = \left(\left(\sqrt[n]{b^q}\right)^n\right)^m = \left(\sqrt[n]{b^q}\right)^{mn}.\end{aligned}$$

No caso em que $r \in \mathbb{Z}$, o facto de esta definição conduzir ao mesmo resultado que a definição em II.2.1 resulta de que se pode escrever $r = \frac{r}{1}$ e de se ter $(\sqrt[1]{b})^r = b^r$. □

II.2.4 **(Manutenção das propriedades algébricas das potências)** Quando as bases são reais maiores que 0 e os expoentes são racionais arbitrários, continuam a ser válidas as propriedades

$$(b \times c)^r = b^r \times c^r, \quad b^{r+s} = b^r \times b^s, \quad b^{r \times s} = (b^r)^s,$$

e, consequentemente

$$\left(\frac{b}{c}\right)^r = \frac{b^r}{c^r}, \quad b^{r-s} = \frac{b^r}{b^s}, \quad b^{-r} = \frac{1}{b^r},$$

e, para $n \in \mathbb{N}$,

$$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}.$$

Dem: Para provar as três primeiras igualdades, ponhamos $r = \frac{p}{m}$ e $s = \frac{q}{n}$ e lembremos que, por I.4.26, para cada natural k, é estritamente crescente, e portanto injetiva, a função $]0,+\infty[\to[0,+\infty[$, $x\mapsto x^k$. Assim, a primeira igualdade resulta de se ter

$$\begin{aligned}\big((b\times c)^r\big)^m &= \big(\sqrt[m]{(b\times c)^p}\big)^m = (b\times c)^p = b^p\times c^p =\\ &= \big(\sqrt[m]{b^p}\big)^m\times\big(\sqrt[m]{c^p}\big)^m = \big(\sqrt[m]{b^p}\times\sqrt[m]{c^p}\big)^m =\\ &= (b^r\times c^r)^m,\end{aligned}$$

a segunda de se ter $r+s=\frac{pn+qm}{mn}$, e portanto

$$\begin{aligned}(b^{r+s})^{mn} &= \big(\sqrt[mn]{b^{pn+qm}}\big)^{mn} = b^{pn+qm} = b^{pn}\times b^{qm} =\\ &= (b^p)^n\times(b^q)^m = \big((\sqrt[m]{b^p})^m\big)^n\times\big((\sqrt[n]{b^q})^n\big)^m =\\ &= (b^r)^{mn}\times(b^s)^{mn} = (b^r\times b^s)^{mn},\end{aligned}$$

e a terceira de se ter $r\times s=\frac{pq}{mn}$, e portanto

$$\begin{aligned}(b^{r\times s})^{mn} &= \big(\sqrt[mn]{b^{p\times q}}\big)^{mn} = b^{p\times q} = (b^p)^q = \Big(\big(\sqrt[m]{b^p}\big)^m\Big)^q =\\ &= \big(b^r\big)^{mq} = \big((b^r)^q\big)^m = \Big(\big(\sqrt[n]{(b^r)^q}\big)^n\Big)^m = \big((b^r)^s\big)^{mn}.\end{aligned}$$

Como no caso das potências de expoente inteiro, as três igualdades seguintes resultam das primeiras, que permitem escrever

$$\begin{aligned}\left(\frac{b}{c}\right)^r\times c^r &= \left(\frac{b}{c}\times c\right)^r = b^r,\\ b^{r-s}\times b^s &= b^{(r-s)+s} = b^r,\end{aligned}$$

e do facto de se ter, em particular,

$$b^{-r} = b^{0-r} = \frac{b^0}{b^r} = \frac{1}{b^r}$$

e a última igualdade vem de que, por definição, $b^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{b^1}=\sqrt[n]{b}$. □

Como instrumentos auxiliares para definir as potências de base maior que 0 e expoente real arbitrário e estudar as suas propriedades, vamos agora examinar dois lemas envolvendo as funções potência de expoente racional e as funções exponenciais de variável racional. Tratando-se de resultados auxiliares, que serão implicados por resultados mais fortes a ser estudados posteriormente, enunciamos apenas as propriedades que teremos necessidade de utilizar, em particular examinamos, no primeiro caso, apenas as funções potência de expoente racional $r>0$ e, no segundo, apenas as funções exponenciais de base $b>1$.

II.2.5 **(Lema sobre a potência de expoente $r>0$ em $\mathbb{Q}$)** Seja $r>0$ um racional fixado. Tem-se então que a função $]0,+\infty[\to]0,+\infty[$, que a x associa x^r é contínua e estritamente crescente e verifica $1^r=1$.

Dem: Podemos escrever $r = \frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{N}$, e sabemos que se tem então

$$x^r = \sqrt[n]{x^m},$$

em parrticular $1^r = \sqrt[n]{1} = 1$, pelo que as conclusões do enunciado resultam de a função $]0, +\infty[\to]0, +\infty[$, $x \mapsto x^m$, ser contínua e estritamente crescente (cf. II.1.8 e I.4.26) e de a função $]0, +\infty[\to]0, +\infty[$, $y \mapsto \sqrt[m]{y}$, ser contínua e estritamente crescente (cf. II.1.22 e II.1.19). □

II.2.6 **(Lema sobre a exponencial de base $b > 1$)** Seja $b > 1$ um real fixado. Tem-se então que a função $\mathbb{Q} \to]0, +\infty[$, que a r associa b^r é contínua e estritamente crescente.[95]

Dem: Vamos dividir a prova em várias partes:

1) Mostremos que a função é estritamente crescente, isto é, que se $r < s$ em $\mathbb{Q}$, tem-se $b^r < b^s$.

Subdem: Tem-se $s - r > 0$, donde, por II.2.5, $b^{s-r} > 1^{s-r} = 1$ o que implica que

$$b^r < b^r \times b^{s-r} = b^s.$$

2) Vamos mostrar que $\lim\limits_{r \to 0^+} b^r = 1$.

Subdem: Tendo em conta I.5.38, sabemos que existe este limite lateral e é igual ao ínfimo c dos b^r, com $r \in \mathbb{Q}$ e $r > 0$. Uma vez que, para cada $r \in \mathbb{Q}$ com $r > 0$, $b^r > b^0 = 1$, tem-se $c \geq 1$. Suponhamos, por absurdo, que se tinha $c > 1$. Para cada natural n tinha-se $c \leq b^{\frac{1}{n}}$, donde $c^n \leq (b^{\frac{1}{n}})^n = b$ e isto é absurdo, uma vez que a sucessão c^n tem limite $+\infty$ (cf. I.5.45), que não é aderente ao conjunto majorado $]-\infty, b]$.

3) Vamos mostrar que se tem também $\lim\limits_{r \to 0^-} b^r = 1$.

Subdem: Vamos aplicar o resultado I.5.36 sobre o limite da função composta, considerando a função $\mathbb{Q}_{<0} \to \mathbb{Q}_{>0}$, que a r associa $-r$, a qual tem limite 0 quando $r \to 0$. Tem-se então

$$\lim_{r \to 0^-} \frac{1}{b^r} = \lim_{r \to 0^-} b^{-r} = \lim_{s \to 0^+} b^s = 1,$$

donde

$$\lim_{r \to 0^-} b^r = \lim_{r \to 0^-} \frac{1}{\frac{1}{b^r}} = \frac{1}{1} = 1.$$

4) Vamos demonstrar a continuidade da função num ponto $a \in \mathbb{Q}$ arbitrário.

Subdem: Tendo em conta o que vimos em I.5.11 e I.5.12 e o facto de se ter $b^0 = 1$, tem-se mesmo $\lim\limits_{r \to 0} b^r = 1$. O facto de se ter $r - a \xrightarrow[r \to a]{} 0$ implica, pelo

[95] Repare-se que, enquanto nos limitávamos à variável natural ou inteira, não referimos a continuidade uma vez que, sendo o domínio constituído apenas por pontos isolados, a continuidade era trivial.

resultado sobre o limite da função composta, que

$$\lim_{r\to a} b^{r-a} = \lim_{s\to 0} b^s = 1$$

e portanto

$$\lim_{r\to a} b^r = \lim_{r\to a} (b^{r-a} \times b^a) = 1 \times b^a = b^a. \qquad \square$$

II.2.7 **(Potências de expoente real)** Seja $b > 0$ um número real. Pode então definir-se, para cada $x \in \mathbb{R}$, $b^x \in \,]0, +\infty[$ pela condição de se ter

$$b^x = \lim_{\substack{r\to x \\ r\in\mathbb{Q}}} b^r$$ [96]

e, no caso em que $x \in \mathbb{Q}$, esta definição conduz ao mesmo resultado que a definição em II.2.3. Além disso:
a) No caso em que $b > 1$, b^x é também o ínfimo dos b^r, com $r > x$ e $r \in \mathbb{Q}$, e o supremo dos b^r, com $r < x$ e $r \in \mathbb{Q}$.
b) No caso em que $b = 1$, tem-se $1^x = 1$, para cada $x \in \mathbb{R}$.
c) No caso em que $0 < b < 1$, e portanto $\frac{1}{b} > 1$, tem-se

$$b^x = \frac{1}{\left(\frac{1}{b}\right)^x}.$$

Dem: Vamos dividir a demonstração em três partes, conforme se tenha $b > 1$, $b = 1$ ou $0 < b < 1$.
1) Suponhamos que $b > 1$. Uma vez que a função $\mathbb{Q} \to \,]0, +\infty[$, $r \mapsto b^r$, é crescente, e que cada $x \in \mathbb{R}$ é simultaneamente ponto de acumulação à esquerda e à direita de $\mathbb{Q}$, resulta de I.5.38 e de I.5.39 que os limites laterais $\lim\limits_{r\to x^+} b^r$ e $\lim\limits_{r\to x^-} b^r$ existem, são respetivamente o ínfimo dos b^r, com $r > x$ e $r \in \mathbb{Q}$, e o supremo dos b^r, com $r < x$ e $r \in \mathbb{Q}$, e verificam

$$0 < \lim_{r\to x^-} b^r \le \lim_{r\to x^+} b^r < +\infty.$$

No caso em que $x \in \mathbb{Q}$ o que vimos em II.2.6 mostra-nos que b^x, no sentido da definição em II.2.3, é o limite de b^r quando $r \to x$, $r \in \mathbb{Q}$ e portanto é também igual a cada um dos limites laterais referidos. Resta-nos assim mostrar que, no caso em que $x \notin \mathbb{Q}$, os dois limites laterais referidos são iguais, visto que isso implicará que o valor comum é o limite desejado. Consideremos então duas sucessões de elementos $r_n \in \mathbb{Q}_{<x}$ e $s_n \in \mathbb{Q}_{>x}$ com $r_n \to x$ e $s_n \to x$ e reparemos que os $s_n - r_n$ constituem uma sucessão de racionais com limite $x - x = 0$, e portanto, mais uma vez por II.2.6, que

[96] A restrição $r \in \mathbb{Q}$ é feita naturalmente só para sublinhar o que se está a considerar, uma vez que, antes desta definição, b^r só esta definido para $r \in \mathbb{Q}$.

$$b^{(s_n-r_n)} \longrightarrow b^0 = 1.$$

Vemos agora que

$$\frac{\lim\limits_{r\to x^+} b^r}{\lim\limits_{r\to x^-} b^r} = \frac{\lim b^{s_n}}{\lim b^{r_n}} = \lim \frac{b^{s_n}}{b^{r_n}} = \lim b^{(s_n-r_n)} = 1$$

pelo que, como tínhamos que justificar,

$$\lim_{r\to x^-} b^r = \lim_{r\to x^+} b^r \in]0,+\infty[.$$

2) Suponhamos que $b = 1$. Neste caso a afirmação do enunciado é trivial, por se reduzir ao facto de o limite da função constante de valor 1 em cada ponto aderente ao domínio existir e ser igual a 1.

3) Suponhamos que $0 < b < 1$. Neste caso, tem-se $\frac{1}{b} > 1$ pelo que, pelo caso já estudado em 1), existe o limite

$$\lim_{r\to x} \left(\frac{1}{b}\right)^r = \left(\frac{1}{b}\right)^x$$

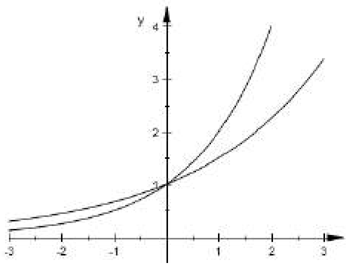
e daqui concluímos a existência do limite

$$\lim_{r\to x} b^r = \lim_{r\to x} \frac{1}{\frac{1}{b^r}} = \lim_{r\to x} \frac{1}{\left(\frac{1}{b}\right)^r} = \frac{1}{\left(\frac{1}{b}\right)^x}$$

assim como o facto de, no caso em que $x \in \mathbb{Q}$, vir $\left(\frac{1}{b}\right)^x = \frac{1}{b^x}$ (no sentido da definição em II.2.3) e portanto o limite referido ser igual a b^x (no sentido dessa definição). □

II.2.8 **(Monotonia e continuidade da função exponencial)** Para cada $b > 0$, a *função exponencial* $\exp_b\colon \mathbb{R} \to]0,+\infty[$, definida por $\exp_b(x) = b^x$ é contínua[97]. Além disso:

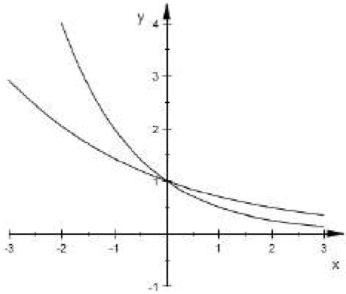
a) Se $b > 1$, esta função é estritamente crescente e verifica



[97]A continuidade desta função não resulta trivialmente da definição de b^x como limite de b^r quando $r \to x$, uma vez que aí o limite considerado é um limite em que $r \in \mathbb{Q}$, enquanto que, para a continuidade, no limite que intervém deve-se considerar $r \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to+\infty} b^x = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} b^x = 0.$$

b) Se $0 < b < 1$, esta função é estritamente decrescente e verifica



$$\lim_{x\to+\infty} b^x = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} b^x = +\infty.$$

Dem: Examinemos separadamente os casos em que $b > 1$, $b = 1$ e $b < 1$:
1) Suponhamos que $b > 1$. Se $x < y$ em $\mathbb{R}$, podemos escolher racionais r, s com $x < r < s < y$ e então a caracterização de b^x como um ínfimo e a de b^y como um supremo implicam que $b^x \le b^r < b^s \le b^y$. Provámos assim que a função $\exp_b\colon \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ é estritamente crescente. Tendo em conta I.5.38, podemos concluir a existência dos limites $\lim\limits_{x\to+\infty} b^x$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} b^x$ assim como, para cada $a \in \mathbb{R}$, dos limites laterais $\lim\limits_{x\to a^-} b^x$ e $\lim\limits_{x\to a^+} b^x$ e o que nos resta provar é que os dois primeiros são respetivamente iguais a $+\infty$ e a 0 e que os dois últimos são ambos iguais a b^a e para isso vamos ter em conta I.5.6 e I.5.36. Em primeiro lugar, lembrando I.5.45,

$$\lim_{x\to+\infty} b^x = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ n\in\mathbb{N}}} b^n = +\infty,$$

em segundo lugar

$$\lim_{x\to-\infty} b^x = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ n\in\mathbb{N}}} b^{-n} = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ n\in\mathbb{N}}} \frac{1}{b^n} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

e, quanto aos limites laterais,

$$\lim_{x\to a^-} b^x = \lim_{\substack{r\to a^- \\ r\in\mathbb{Q}}} b^r = \lim_{\substack{r\to a \\ r\in\mathbb{Q}}} b^r = b^a,$$
$$\lim_{x\to a^+} b^x = \lim_{\substack{r\to a^+ \\ r\in\mathbb{Q}}} b^r = \lim_{\substack{r\to a \\ r\in\mathbb{Q}}} b^r = b^a.$$

2) O caso em que $b = 1$ é trivial visto que então a função $\exp_b$ é a função constante de valor 1.

3) Suponhamos que $0 < b < 1$. Tem-se então $\frac{1}{b} > 1$ pelo que, por ser, pela alínea c) de II.2.7,

$$\exp_b(x) = b^x = \frac{1}{\left(\frac{1}{b}\right)^x} = \frac{1}{\exp_{1/b}(x)},$$

a continuidade da função $\exp_b$ resulta da continuidade de $\exp_{1/b}$, o facto de $\exp_{1/b}$ ser estritamente crescente implica que $\exp_b$ é estritamente decrescente e

$$\lim_{x\to+\infty} b^x = \frac{1}{+\infty} = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} b^x = \frac{1}{0^+} = +\infty. \qquad \square$$

II.2.9 **(Corolário)** Para cada $b \neq 1$ em $]0,+\infty[$, a função $\exp_b\colon \mathbb{R} \to]0,+\infty[$ é bijetiva.

Dem: Suponhamos que $b > 1$. A função é injetiva, por ser estritamente crescente, e, tendo em conta II.1.16, o contradomínio $\exp_b(\mathbb{R})$ é um intervalo contido em $]0,+\infty[$. Uma vez que a extremidades desse intervalo são iguais aos respetivos ínfimo e supremo, isto é, ao ínfimo e ao supremo dos b^x com $x \in \mathbb{R}$, constatamos que esse ínfimo e esse supremo, iguais aos limites da função em $-\infty$ e em $+\infty$ respetivamente (cf. I.5.38), são 0 e $+\infty$. O contradomínio é assim o intervalo $]0,+\infty[$.

O caso em que $0 < b < 1$ admite uma justificação análoga, mas também pode resultar de se ter então $\frac{1}{b} > 1$ e da fórmula

$$\exp_b(x) = \frac{1}{\exp_{1/b}(x)},$$

que mostra que $\exp_b$ é a composta da bijeção $\exp_{1/b}\colon \mathbb{R} \to]0,+\infty[$ com a bijecção $]0,+\infty[\to]0,+\infty[$, $y \mapsto \frac{1}{y}$. $\square$

II.2.10 **(Manutenção das propriedades algébricas das potências)** Quando as bases são reais maiores que 0 e os expoentes são números reais arbitrários, continuam a ser válidas as propriedades

$$(b \times c)^x = b^x \times c^x, \quad b^{x+y} = b^x \times b^y, \quad b^{x\times y} = (b^x)^y,$$

e, consequentemente

$$\left(\frac{b}{c}\right)^x = \frac{b^x}{c^x}, \quad b^{x-y} = \frac{b^x}{b^y}, \quad b^{-x} = \frac{1}{b^x}.$$

Dem: As duas primeiras propriedades têm justificações naturais, a partir das propriedades correspondentes em II.2.4: Considerando sucessões de números racionais $r_n \to x$ e $s_n \to y$, tem-se $b^{r_n} \to b^x$ e $c^{r_n} \to c^x$, donde

$$(b \times c)^x = \lim (b \times c)^{r_n} = \lim (b^{r_n} \times c^{r_n}) = b^x \times c^x$$

e, por ser $r_n + s_n \to x + y$,

$$b^{x+y} = \lim b^{r_n+s_n} = \lim (b^{r_n} \times b^{s_n}) = b^x \times b^y.$$

Como no caso das potências de expoente racional, as três últimas igualdades resultam das duas primeiras, que permitem escrever

$$\left(\frac{b}{c}\right)^x \times c^x = \left(\frac{b}{c} \times c\right)^x = b^x,$$
$$b^{x-y} \times b^y = b^{(x-y)+y} = b^x,$$

e do facto de se ter, em particular,

$$b^{-x} = b^{0-x} = \frac{b^0}{b^x} = \frac{1}{b^x}.$$

Relativamente à terceira de entre as primeiras, já temos que ser um pouco mais cuidadosos[98].
Vamos começar por provar o caso particular em que o segundo expoente é racional, ou seja, que, se $x \in \mathbb{R}$ e $s \in \mathbb{Q}$, tem-se $b^{x\times s} = (b^x)^s$. Esta igualdade é trivial no caso em que $s = 0$, por ambos os membros serem iguais a 1, e, no caso em que $s > 0$, ela resulta do lema em II.2.5, visto que, considerando uma sucessão de racionais $r_n \to x$, vem $b^{r_n} \to b^x$ e $r_n \times s \to x \times s$, donde

$$(b^x)^s = \lim (b^{r_n})^s = \lim b^{r_n\times s} = b^{x\times s}.$$

Enfim, o caso em que $s < 0$ reduz-se ao que acabamos de tratar, visto que, por ser $-s > 0$, vem

$$(b^x)^s = \frac{1}{(b^x)^{-s}} = \frac{1}{b^{-x\times s}} = b^{x\times s}.$$

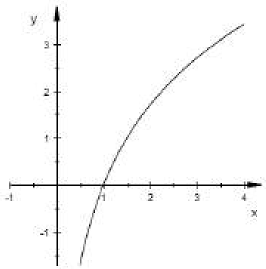
Provado este caso particular, podemos passar ao caso geral em que $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$. Consideramos então uma sucessão de racionais $s_n \to y$ e, aplicando o caso particular já examinado, vemos que, por ser $x \times s_n \to x \times y$,

$$b^{x\times y} = \lim b^{x\times s_n} = \lim (b^x)^{s_n} = (b^x)^y. \qquad \square$$

II.2.11 **(A função logaritmo)** Para cada $b \neq 1$ em $]0, +\infty[$, define-se a *função logaritmo de base* b, $\log_b\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ como sendo a inversa da função bijetiva $\exp_b\colon \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ (cf. o corolário II.2.9).
Tem-se então que $\log_b\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ é bijetiva e contínua e, além disso:
a) Se $b > 1$, a função é estritamente crescente e verifica

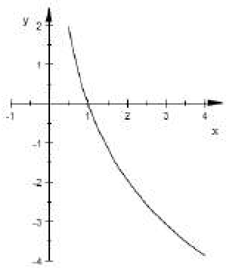
$$\lim_{y\to 0} \log_b(y) = -\infty, \quad \lim_{y\to +\infty} \log_b(y) = +\infty.$$

[98]O problema é que nos falta uma propriedade que garanta que, se $b_n \to b$ e $r_n \to x$, então tenha que ser $b_n^{r_n} \to b^x$. Esta propriedade, apesar de verdadeira, só será justificada adiante em II.2.15.



a) Se $0 < b < 1$, a função é estritamente decrescente e verifica

$$\lim_{y \to 0} \log_b(y) = +\infty, \quad \lim_{y \to +\infty} \log_b(y) = -\infty.$$



Dem: A função é bijetiva, por ser a inversa de uma função bijetiva e é estritamente crescente ou estritamente decrescente, conforme $b > 1$ ou $0 < b < 1$, por se tratar da inversa de um função com a mesma propriedade. O facto de a função ser contínua é uma consequência de ser monótona e ter um intervalo como contradomínio (cf. II.1.20). No caso em que $b > 1$ (respetivamente, $0 < b < 1$) o facto de termos uma função crescente (respetivamente, decrescente) implica que os limites em 0 e em $+\infty$ são o ínfimo $-\infty$ (respetivamente, o supremo $+\infty$) e o supremo $+\infty$ (respetivamente, o ínfimo $-\infty$) do contradomínio (cf. I.5.38). □

II.2.12 **(Propriedades algébricas dos logaritmos)** Seja $b \neq 1$ em $]0, +\infty[$. Tem-se então

$$\log_b(1) = 0, \quad \log_b(b) = 1,$$

e, para $x, y \in]0, +\infty[$ e $z \in \mathbb{R}$,

$$\log_b(x \times y) = \log_b(x) + \log_b(y), \quad \log_b(x^z) = z \times \log_b(x),$$

e, consequentemente,

$$\log_b(\frac{x}{y}) = \log_b(x) - \log_b(y), \quad \log_b(\frac{1}{y}) = -\log_b(y).$$

Dem: As duas primeira igualdades resultam de se ter $b^0 = 1$ e $b^1 = b$. Notando que $x = b^{\log_b(x)}$ e $y = b^{\log_b(y)}$, vem, pelas propriedades algébricas das potências em II.2.10,

$$x \times y = b^{\log_b(x)} \times b^{\log_b(y)} = b^{\log_b(x)+\log_b(y)},$$

donde

$$\log_b(x \times y) = \log_b(x) + \log_b(y),$$

e

$$x^z = (b^{\log_b(x)})^z = b^{\log_b(x)\times z},$$

donde

$$\log_b(x^z) = z \times \log_b(x).$$

Por último, o terceiro par de igualdades resulta de se ter

$$\log_b(x) = \log_b(\frac{x}{y} \times y) = \log_b(\frac{x}{y}) + \log_b(y)$$

e portanto

$$\log_b(\frac{1}{y}) = \log_b(1) - \log_b(y) = 0 - \log_b(y).$$ □

II.2.13 **(Mudança de base nos logaritmos)** Sejam $b \neq 1$ e $c \neq 1$ em $]0, +\infty[$. Tem-se então

$$\log_c(b) = \frac{1}{\log_b(c)}$$

e, para cada $x \in\,]0, +\infty[$,

$$\log_c(x) = \log_c(b) \times \log_b(x).$$

Dem: Uma vez que se pode escrever

$$x = b^{\log_b(x)} = \left(c^{\log_c(b)}\right)^{\log_b(x)} = c^{\log_c(b)\times\log_b(x)},$$

concluímos que $\log_c(x) = \log_c(b) \times \log_b(x)$. Em particular, tomando $x = c$, vem

$$1 = \log_c(c) = \log_c(b) \times \log_b(c),$$

o que implica a primeira igualdade. □

II.2.14 **(A função potência de expoente real)** Seja $d \in \mathbb{R}$ e consideremos a função potência de expoente d, $f_d\colon]0, +\infty[\, \to\,]0, +\infty[$, definida por

$f_d(x) = x^d$. Tem-se então que esta função é contínua[99] e:
a) Se $d > 0$, a função é estritamente crescente e verifica

$$\lim_{x\to 0} x^d = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} x^d = +\infty.$$

b) Se $d = 0$, a função é constante de valor 1.
c) Se $d < 0$, a função é estritamente decrescente e verifica

$$\lim_{x\to 0} x^d = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} x^d = 0.$$

Dem: Fixermos uma base $b > 1$. Tem-se então

$$f_d(x) = \exp_b(\log_b(x^d)) = \exp_b(d \log_b(x))$$

pelo que as conclusões resultam de as funções $\exp_b\colon \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ e $\log_b\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ serem contínuas e estritamente crescentes e do conhecimento dos limites destas funções nas extremidades dos seus domínios. □

II.2.15 **(Limite da potência)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ aderente a X e $g\colon X \to \mathbb{R}$ $f\colon X \to]0, +\infty[$ duas funções tais que

$$\lim_{x\to a} f(x) = c, \quad \lim_{x\to a} g(x) = d,$$

com $c \in]0, +\infty[$ e $d \in \mathbb{R}$. Tem-se então[100]

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = c^d.$$

Dem: Fixemos uma base auxiliar $b \in]0, +\infty[$, com $b \neq 1$. Tendo em conta a continuidade da função $\log_b\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, tem-se

$$\lim_{x\to a} \log_b(f(x)) = \log_b(c)$$

e portanto

$$\lim_{x\to a} \log_b\left(f(x)^{g(x)}\right) = \lim_{x\to a} \left(g(x) \times \log_b(f(x))\right) = d \times \log_b(c).$$

Daqui resulta, tendo em conta a continuidade da função $\exp_b\colon \mathbb{R} \to]0, +\infty[$,

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} b^{\log_b\left(f(x)^{g(x)}\right)} = b^{d\times\log_b(c)} = \left(b^{\log_b(c)}\right)^d = c^d. \qquad \square$$

[99]Lembrar que, no caso em que o expoente d é um inteiro com $d \geq 0$ sabemos mais que isto: Vimos em II.1.8 que a função é restrição de um função contínua definida pela mesma fórmula em $\mathbb{R}$.
[100]Comparar com I.5.17.

II.2.16 **(Nota)** Repare-se que, para a validade do resultado precedente, foi essencial supor que $c > 0$. Se se tivesse $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, não podíamos aplicar o resultado para concluir a existência ou o valor do limite para $f(x)^{g(x)}$, até porque 0^d não está em geral definido. De certo modo, pode-se pensar que o 0, relativamente à base de uma potência, joga um papel análogo ao dos infinitos, relativamente à multiplicação, e que, conforme o valor de d, 0^d pode ser encarado seja como uma mnemónica (análoga às consideradas, para a multiplicação em I.5.27 e I.5.28), seja como uma indeterminação (análoga ao $\infty \times 0$ no contexto da multiplicação). Mais do que listar todas as mnemónicas e indeterminações que se podem considerar no contexto das potências, o que é talvez mais importante é notar que, em cada caso, para investigar o que se pode dizer sobre o limite de uma potência $f(x)^{g(x)}$, quando se conhecem os limites, finitos ou infinitos de $f(x)$ e de $g(x)$, o melhor método é utilizar a mesma ideia que apareceu na demonstração do resultado precedente, tirando partido do conhecimento da continuidade e dos limites nas extremidades dos domínios das funções $\log_b$ e $\exp_b$. Para explicar o que queremos dizer, apresentamos os próximos exemplos, deixando como exercícios propostos no fim da secção o convite ao exame de resultados análogos (que, insistimos, não parece importante conhecer de cor[101]).

II.2.17 **(Exemplos: A mnemónica $\mathbf{0^{pos} = 0}$ e as indeterminações $\mathbf{0^0}$ e $\mathbf{1^{+\infty}}$)**[102] Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ aderente a X e $g\colon X \to \mathbb{R}$ $f\colon X \to]0,+\infty[$ duas funções. Tem-se então:

a) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = d > 0$, então $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 0$;

b) De se ter $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ nada se pode concluir sobre a existência ou o valor do limite de $f(x)^{g(x)}$.

c) De se ter $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, nada se pode concluir sobre a existência ou o valor do limite de $f(x)^{g(x)}$.

Dem: Fixemos uma base auxiliar $b > 1$ em $\mathbb{R}$.

a) Tendo em conta o conhecimento do limite $\lim\limits_{y\to 0} \log_b(y) = -\infty$ e o resultado sobre o limite da função composta, sabemos que

$$\lim_{x\to a} \log_b(f(x)) = -\infty$$

e daqui deduzimos que

$$\lim_{x\to a} \log_b\big(f(x)^{g(x)}\big) = \lim_{x\to a} \big(g(x) \times \log_b(f(x))\big) = pos \times (-\infty) = -\infty.$$

[101]Embora não seja proíbido…

[102]As mnemónicas das indetermin̄ções que encontrámos até aqui correspondiam a operações, como $\frac{0}{0}$ que não faziam sentido. Não é o caso desta: Tem-se, algébricamente, $0^0 = 1$ no contexto das potências de base real e expoente inteiro maior ou igual a 0.

Tendo em conta o conhecimento do limite $\lim\limits_{y\to-\infty} \exp_b(y) = 0$ e o resultado sobre o limite da função composta, concluímos agora que

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} b^{\log_b\left(f(x)^{g(x)}\right)} = 0.$$

b) Como em a), tem-se

$$\lim_{x\to a} \log_b(f(x)) = -\infty$$

pelo que, por ser

$$\log_b\left(f(x)^{g(x)}\right) = g(x) \times \log_b(f(x)),$$

estamos em presença de uma indeterminação do tipo $0 \times (-\infty)$ e portanto nada sabemos afirmar sobre o limite de $\log_b\left(f(x)^{g(x)}\right)$ o mesmo acontecendo com o limite de $f(x)^{g(x)}$.
c) Como anteriormente, tem-se

$$\lim_{x\to a} \log_b(f(x)) = 0$$

pelo que, por ser

$$\log_b\left(f(x)^{g(x)}\right) = g(x) \times \log_b(f(x)),$$

estamos em presença de uma indeterminação do tipo $(+\infty) \times 0$ e portanto nada sabemos afirmar sobre o limite de $\log_b\left(f(x)^{g(x)}\right)$ o mesmo acontecendo com o limite de $f(x)^{g(x)}$. □

II.2.18 **(Um limite notável)** Sejam $b > 1$ em $\mathbb{R}$ e $k \geq 0$ em $\mathbb{Z}$ fixados. Tem-se então

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ x\in]0,+\infty[}} \frac{b^x}{x^k} = +\infty.$$

Dem: Lembremos que, como se verificou em I.5.45, tem-se

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ n\in\mathbb{N}}} \frac{b^n}{n^k} = +\infty.$$

Uma vez que, como foi referido no exemplo na alínea b) de I.5.41, a função $\mathrm{int}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ tem limite $+\infty$ em $+\infty$, tem-se, como limite da função composta,

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ x\in]0,+\infty[}} \frac{b^{\mathrm{int}(x)+1}}{(\mathrm{int}(x)+1)^k} = +\infty$$

e então de se ter $b^x \geq b^{\mathrm{int}(x)}$ e $x^k \leq (\mathrm{int}(x)+1)^k$, concluímos que

$$\frac{b^x}{x^k} \geq \frac{b^{\mathrm{int}(x)}}{(\mathrm{int}(x)+1)^k} = \frac{1}{b} \times \frac{b^{\mathrm{int}(x)+1}}{(\mathrm{int}(x)+1)^k}$$

donde, por enquadramento, também

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ x\in]0,+\infty[}} \frac{b^x}{x^k} = +\infty. \qquad \square$$

II.2.19 **(O limite de $\sqrt[n]{x_n}$)** Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais em $]0,+\infty[$ e $a \in [0,+\infty]$ um real estendido tal que $\frac{x_{n+1}}{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$. Tem-se então

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = a.$$ [103]

Dem: Consideremos uma base auxiliar $b > 1$. Tem-se então que a sucessão

$$n \mapsto \log_b(x_{n+1}) - \log_b(x_n) = \log_b(\frac{x_{n+1}}{x_n})$$

tem limite $\log_b(a)$ se $a \in]0,+\infty[$, $-\infty$ se $a = 0$ e $+\infty$ se $a = +\infty$. Tendo em conta I.5.44 assim como a continuidade e os limites nas extremidades do domínio da função $\log_b$, concluímos que a sucessão

$$n \mapsto \frac{\log_b(x_n)}{n} = \log_b(\sqrt[n]{x_n})$$

tem limite $\log_b(a)$ se $a \in]0,+\infty[$, $-\infty$ se $a = 0$ e $+\infty$ se $a = +\infty$ e portanto, tendo em conta a continuidade e os limites nas extremidades do domínio da função $\exp_b$, a sucessão

$$n \mapsto \sqrt[n]{x_n} = \exp_b\big(\log_b(\sqrt[n]{x_n})\big)$$

tem limite $\exp_b\big(\log_b(a)\big) = a$ se $a \in]0,+\infty[$, 0 se $a = 0$ e $+\infty$ se $a = +\infty$, em qualquer dos casos tem limite a. $\square$

Exercícios

Ex II.2.1 Completar e justificar os segundos membros das seguintes mnemónicas, envolvendo limites de potências (a quarta já apareceu como exemplo

[103]Reparar na analogia com I.5.44, resultado que vai, aliás, ser utilizado na justificação deste.

em II.2.17):

$$\begin{array}{llll} 0^{-\infty} = , & 0^{neg} = , & 0^{+\infty} = , & 0^{pos} = \\ (+\infty)^{-\infty} = , & (+\infty)^{neg} = , & (+\infty)^{pos} = , & (+\infty)^{+\infty}, \\ (>1)^{-\infty}, & (>1)^{+\infty} = , & (<1)^{-\infty} = , & (<1)^{+\infty} = . \end{array}$$

Ex II.2.2 Encontrar outras indeterminações envolvendo potências, para além das referidas nas alíneas b) e c) de II.2.17.

Ex II.2.3 Determinar o limite da sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $x_n = \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}}$.

Ex II.2.4 Determinar o limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x - 1}{3^x + 2}.$$

Ex II.2.5 Deduzir da conclusão do limite notável em II.2.18 que, dados $0 < b < 1$ em $\mathbb{R}$ e $k \geq 0$ em $\mathbb{Z}$ fixados, tem-se

$$\lim_{x\to+\infty} x^k \times b^x = 0.$$

Ex II.2.6 Utilizar o limite notável em II.2.18 para determinar o limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^8 + 7x^5 + 1}{2^x}.$$

Ex II.2.7 **a)** Deduzir da conclusão do limite notável em II.2.18 que, dados $b > 1$ em $\mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$ fixados, tem-se

$$\lim_{\substack{y\to+\infty \\ y>1}} \frac{y}{\log_b(y)^k} = +\infty.$$

b) Utilizar a conclusão de a) para mostrar que $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{n} = 1$.

Ex II.2.8 Utilizar II.2.19 para:

a) Obter de novo o limite $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{n} = 1$.

b) Verificar que $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

§3. A exponencial e o logaritmo neperianos.

II.3.1 **(A constante de Neper)** Consideremos as sucessões $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais em $]1, +\infty[$ definidas por

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = x_n \times \left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Tem-se então que a primeira é estritamente crescente, a segunda é estritamente decrescente e ambas têm um mesmo limite real, a que se dá o nome de *constante de Neper*, que é notada com o símbolo e e que verifica as desigualdades

$$2 < e < 3.$$ [104]

Dem: Vamos começar por mostrar que a primeira sucessão é crescente e que a segunda é decrescente, para o que bastará verificar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq x_{n+1}$ e $y_n \geq y_{n+1}$ ou, o que é equivalente,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1, \quad \frac{y_n}{y_{n+1}} \geq 1.$$

Para o fazermos vamos utilizar duas vezes a desigualdade de Bernouilli estrita em I.2.7, no primeiro caso com $x = -\frac{1}{(n+1)^2}$ e no segundo caso com $x = \frac{1}{n(n+2)}$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \times \frac{n+1}{n} = \\
&= \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \times \frac{n+1}{n} > \left(1-\frac{1}{n+1}\right) \times \frac{n+1}{n} = 1,\\
\frac{y_n}{y_{n+1}} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} \times \frac{n}{n+1} = \\
&= \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \times \frac{n}{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right) \times \frac{n}{n+1} = 1,
\end{aligned}$$

como queríamos. Da igualdade $y_n = x_n \times \left(1+\frac{1}{n}\right)$ deduzimos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq y_n \leq y_1$, pelo que a sucessão (x_n), além de crescente, é majorada, tendo assim um limite finito e, igual ao supremo do conjunto dos seus termos. Mais uma vez a igualdade $y_n = x_n \times \left(1+\frac{1}{n}\right)$, com $1+\frac{1}{n} \to 1$, implica que a sucessão decrescente (y_n) tem também limite e, que é assim também igual ao ínfimo do conjunto dos seus termos. O facto de se ter $2 < e$ resulta de se ter

[104] É claro que é possível encontrar intervalos mais reduzidos onde se encontra e, mas citamos este neste momento apenas a título de exemplo que pode ser útil. O estudante já encontrou este número anteriormente, embora sem preocupações de rigor e viu referida uma aproximação decimal do tipo $e = 2,718281828459\ldots$, a qual não é mais do que uma afirmação não justificada (embora justificável...) de que e pertence a um certo intervalo muito mais pequeno.

$$e \geq x_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > 2$$

e o facto de se ter $e < 3$ resulta de se ter

$$e \leq y_5 = (1 + \frac{1}{5})^6 = \frac{46656}{15625} < 3.$$ [105]

II.3.2 A constante de Neper e joga um papel fundamental em toda a Análise Matemática, em particular, e por razões que serão mais claras em breve (cf. II.3.4), constituem uma base privilegiada para a exponencial e o logaritmo. Por esse motivo, é usual em Matemática notar simplesmente

$$\exp\colon \mathbb{R} \to]0, +\infty[, \quad \log\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R},$$

as funções $\exp_e$ e $\log_e$ respetivamente. No entanto, e uma vez que nas máquinas de calcular é comum utilizar o símbolo log com o sentido de $\log_{10}$, usaremos a notação alternativa, já encontrada no ensino secundário,

$$\ln\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad \ln(x) = \log_e(x)$$

para designar o logaritmo na base e (também chamado *logaritmo neperiano*).[106]

> Apesar de o número e ter sido definido como o limite de uma sucessão, é útil verificar que ele pode ser também obtido como limite em $+\infty$ e em $-\infty$ de um prolongamento natural dessa sucessão como função definida numa união de intervalos de $\mathbb{R}$. O método de obter este resultado mais forte, no caso do limite em $+\infty$ é semelhante ao utilizado em II.2.18 para obter o limite em $+\infty$ de $x \mapsto \frac{b^x}{x^k}$ a partir do correspondente resultado para as sucessões.

II.3.3 **(A constante de Neper como limite de uma função)** Reparemos que, para $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tem-se $1 + \frac{1}{y} > 0$ se, e só se, $y \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$ e consideremos a função

$$]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[\to]0, +\infty[, \quad y \mapsto \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y.$$

Tem-se então:

---

[105]A fração poderá ser feia mas este cálculo tem a vantagem de, pelo menos em princípio, não estarmos dependentes de uma calculadora para obter o resultado.

[106]Antes da generalização do uso das calculadoras, os logaritmos de base 10 eram utilizados como auxiliares para efetuar aproximadamente multiplicações de números. Por esse motivo, a notação log era utilizada no lugar de $\log_{10}$ e usava-se, como faremos, ln no lugar de $\log_e$. Hoje, no entanto, a importância dos logaritmos de base 10 é muito limitada.

$$\lim_{y\to+\infty}\bigl(1+\frac{1}{y}\bigr)^y = e, \quad \lim_{y\to-\infty}\bigl(1+\frac{1}{y}\bigr)^y = e.$$

Dem: Vamos começar por justificar o primeiro dos dois limites referidos, começando por notar que, uma vez que $+\infty$ não é aderente ao complementar $]-\infty,-1[\,\cup\,]0,1[$ de $[1,+\infty[$ no domínio, será suficiente provar que

(1)
$$\lim_{\substack{y\to+\infty\\ y\in[1,+\infty[}}\bigl(1+\frac{1}{y}\bigr)^y = e.$$

Em primeiro lugar, pelo resultado sobre o limite da função composta, e tendo em conta o limite em $+\infty$ da função $\mathrm{int}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ (cf. a alínea b) de I.5.41), vem

$$\lim_{\substack{y\to+\infty\\ y\in[1,+\infty[}}\bigl(1+\frac{1}{\mathrm{int}(y)}\bigr)^{\mathrm{int}(y)} = e,$$
$$\lim_{\substack{y\to+\infty\\ y\in[1,+\infty[}}\bigl(1+\frac{1}{\mathrm{int}(y)+1}\bigr)^{\mathrm{int}(y)+1} = e,$$

e portanto, por ser $\lim_{\substack{y\to+\infty\\ y\in[1,+\infty[}}\bigl(1+\frac{1}{\mathrm{int}(y)}\bigr) = 1$ e $\lim_{\substack{y\to+\infty\\ y\in[1,+\infty[}}\bigl(1+\frac{1}{\mathrm{int}(y)+1}\bigr)^{-1} = 1$, também, por multiplicação,

(2)
$$\lim_{\substack{y\to+\infty\\ y\in[1,+\infty[}}\bigl(1+\frac{1}{\mathrm{int}(y)}\bigr)^{\mathrm{int}(y)+1} = e,$$
$$\lim_{\substack{y\to+\infty\\ y\in[1,+\infty[}}\bigl(1+\frac{1}{\mathrm{int}(y)+1}\bigr)^{\mathrm{int}(y)} = e.$$

Reparemos agora que, de se ter $\mathrm{int}(y)\le y<\mathrm{int}(y)+1$, deduzimos que, para cada $y\in[1,+\infty[$,

$$\bigl(1+\frac{1}{y}\bigr)^y \le \bigl(1+\frac{1}{\mathrm{int}(y)}\bigr)^y \le \bigl(1+\frac{1}{\mathrm{int}(y)}\bigr)^{\mathrm{int}(y)+1},$$
$$\bigl(1+\frac{1}{y}\bigr)^y \ge \bigl(1+\frac{1}{\mathrm{int}(y)+1}\bigr)^y \ge \bigl(1+\frac{1}{\mathrm{int}(y)+1}\bigr)^{\mathrm{int}(y)},$$

e destas duas desigualdades e dos limites em (2) resulta, como queríamos, o limite em (1).

Passemos agora ao segundo dos limites no enunciado. Ora, considerando a composta com a função

$$]-\infty,-1[\,\cup\,]0,+\infty[\;\to\;]-\infty,-1[\,\cup\,]0,+\infty[, \quad y\mapsto -y-1,$$

vemos que

$$\begin{aligned}\lim_{y\to-\infty}\big(1+\frac{1}{y}\big)^y &= \lim_{z\to+\infty}\big(1+\frac{1}{-z-1}\big)^{-z-1} = \lim_{z\to+\infty}\big(\frac{-z}{-z-1}\big)^{-z-1} = \\ &= \lim_{z\to+\infty}\big(\frac{z+1}{z}\big)^{z+1} = \lim_{z\to+\infty}\Big(\big(1+\frac{1}{z}\big)^z\times\big(1+\frac{1}{z}\big)\Big) = \\ &= \lim_{z\to+\infty}\big(1+\frac{1}{z}\big)^z = e.\end{aligned}$$

□

II.3.4 **(Dois limites notáveis)** Considerando as funções $\ln\colon]0,+\infty[\,\to\mathbb{R}$ e $\exp\colon\mathbb{R}\to\,]0,+\infty[$, ambas de base e, tem-se

$$\lim_{\substack{x\to1\\x\neq1}}\frac{\ln(x)}{x-1}=1,\quad \lim_{\substack{x\to0\\x\neq0}}\frac{e^x-1}{x}=1.$$ [107]

Dem: Tendo em conta a continuidade da função ln, deduzimos de II.3.3 que, com $y\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]0,+\infty[$, tem-se

$$\begin{aligned}\lim_{y\to+\infty} y\ln\big(1+\frac{1}{y}\big) &= \lim_{y\to+\infty}\ln\big(1+\frac{1}{y}\big)^y = \ln(e)=1,\\ \lim_{y\to-\infty} y\ln\big(1+\frac{1}{y}\big) &= \lim_{y\to-\infty}\ln\big(1+\frac{1}{y}\big)^y = \ln(e)=1.\end{aligned}$$

Por composição com as funções

$$\begin{aligned}&]1,+\infty[\,\to\,]-\infty,-1[\,\cup\,]0,+\infty[,\\ &]0,1[\,\to\,]-\infty,-1[\,\cup\,]0,+\infty[,\end{aligned}$$

ambas definidas por $x\mapsto\frac{1}{x-1}$, cujos limites em 1 são respetivamente $+\infty$ e $-\infty$, vemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^+}\frac{\ln(x)}{x-1} &= \lim_{x\to1^+}\frac{1}{x-1}\ln\Big(1+\frac{1}{\frac{1}{x-1}}\Big) = \lim_{y\to+\infty} y\ln\big(1+\frac{1}{y}\big)=1,\\ \lim_{x\to1^-}\frac{\ln(x)}{x-1} &= \lim_{x\to1^-}\frac{1}{x-1}\ln\Big(1+\frac{1}{\frac{1}{x-1}}\Big) = \lim_{y\to-\infty} y\ln\big(1+\frac{1}{y}\big)=1,\end{aligned}$$

e portanto, os limites laterais sendo iguais, tem-se $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\neq1}}\frac{\ln(x)}{x-1}=1$.

A partir do limite que acabámos de estabelecer, e por composição com a restrição a $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ da função $\exp\colon\mathbb{R}\to\,]0,+\infty[$, que toma valores em $]0,+\infty[\,\setminus\{1\}$ e tem limite 1 no ponto 0, obtemos

[107]Reparar que estes dois limites correspondem a indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$.

$$1 = \lim_{\substack{y \to 0 \\ y \neq 0}} \frac{\ln(e^y)}{e^y - 1} = \lim_{\substack{y \to 0 \\ y \neq 0}} \frac{y}{e^y - 1},$$

donde finalmente

$$\lim_{\substack{y \to 0 \\ y \neq 0}} \frac{e^y - 1}{y} = \lim_{\substack{y \to 0 \\ y \neq 0}} \frac{1}{\frac{y}{e^y - 1}} = \frac{1}{\lim\limits_{\substack{y \to 0 \\ y \neq 0}} \frac{y}{e^y - 1}} = 1. \qquad \square$$

A função exponencial de base e intervém na definição de duas funções importantes, o seno e o cosseno hiperbólicos, que jogam um papel de certo modo paralelo ao do seno e do cosseno trigonométricos. Esse paralelismo poderá não ser muito evidente de início mas tornar-se-á progressivamente mais claro ao estabelecermos algumas das suas propriedades.

II.3.5 **(As funções hiperbólicas)** Dá-se o nome de *seno hiperbólico* e de *cosseno hiperbólico* às funções $\operatorname{senh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

II.3.6 **(Primeiras propriedadades das funções hiperbólicas)** As funções $\operatorname{senh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas e têm os seguintes limites em $+\infty$ e em $-\infty$:

(1)
$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{senh}(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} \operatorname{senh}(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x \to +\infty} \cosh(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} \cosh(x) = +\infty.$$

Tem-se além disso, para cada $x \in \mathbb{R}$,

(2)
$$\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$$ [108]

e $\cosh(x) > 0$ e portanto

(3)
$$\cosh(x) = \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2(x)}.$$

Tem-se ainda que a função senh é *ímpar* e a função cosh é *par*[109], isto é, para cada $x \in \mathbb{R}$,

---

[108] comparar com a identidade conhecida para as funções trigonométricas

$$\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1.$$

[109] Mais uma semelhança com as funções trigonométricas usuais.

(4) $$\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh}(x), \quad \cosh(-x) = \cosh(x)$$

e que, para cada $x \in \mathbb{R}$,

(5) $$\operatorname{senh}(x) + \cosh(x) = e^x.$$

Dem: A continuidade das funções hiperbólicas e os limites referidos resultam trivialmente da continuidade e dos limites em $+\infty$ e em $-\infty$ da exponencial de base e e a desigualdade $\cosh(x) > 0$ resulta de a exponencial só tomar valores estritamente positivos. Reparamos enfim que

$$\begin{aligned}
&\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = \\
&\qquad = \frac{(e^x)^2 + (e^{-x})^2 + 2e^x e^{-x}}{4} - \frac{(e^x)^2 + (e^{-x})^2 - 2e^x e^{-x}}{4} = \\
&\qquad = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} = 1.
\end{aligned}$$

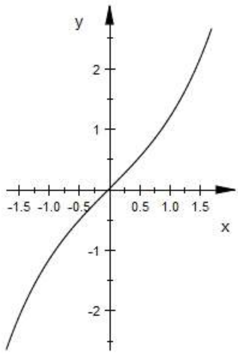
que

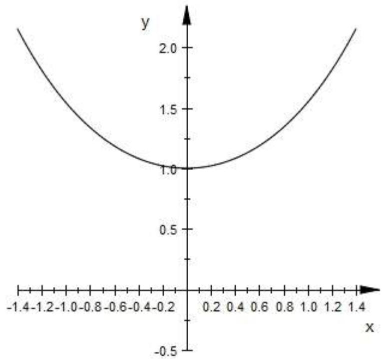
$$\begin{aligned}
\operatorname{senh}(-x) &= \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\operatorname{senh}(x),\\
\cosh(-x) &= \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)
\end{aligned}$$

e que

$$\operatorname{senh}(x) + \cosh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} = e^x. \qquad \square$$

II.3.7 **(Monotonia e contradomínio das funções hiperbólicas) a)** A função $\operatorname{senh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é estritamente crescente e bijetiva e verifica $\operatorname{senh}(0) = 0$.
b) A função $\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem restrições estritamente decrescente a $]-\infty, 0]$ e estritamente crescente a $[0, +\infty[$ e verifica $\cosh(0) = 1$. Consequentemente o contradomínio desta função é $[1, +\infty[$, igual ao contradomínio de cada uma das restrições referidas.





Dem: a) Sabemos que a função $x \mapsto e^x$ é estritamente crescente e daqui resulta que é também estritamente crescente a função $x \mapsto -e^{-x}$ (composta daquela à esquerda e à direita com duas funções estritamente decrescentes), de onde deduzimos que é estritamente crescente a função

$$x \mapsto \operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Em particular esta função é injetiva e o contradomínio é um intervalo tendo os limites $+\infty$ e $-\infty$ como supremo e ínfimo, respetivamente, por outras palavras o contradomínio é $\mathbb{R}$. Enfim, tem-se $\operatorname{senh}(0) = \frac{e^0 - e^0}{2} = 0$.

b) Tem-se $\cosh(0) = \frac{e^0 + e^0}{2} = 1$. Uma vez que $\operatorname{senh}(x) \leq \operatorname{senh}(0) = 0$ para $x \leq 0$ e $\operatorname{senh}(x) \geq \operatorname{senh}(0) = 0$ para $x \geq 0$, as propriedades de monotonia da função $y \mapsto y^2$ (cf. o exemplo c) em I.4.19) garantem que a função $x \mapsto \operatorname{senh}^2(x)$ tem restrições estritamente decrescente a $]-\infty, 0]$ e estritamente crescente a $[0, +\infty[$ e deduzimos daqui e da igualdade

$$\cosh(x) = \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2(x)}$$

que o mesmo acontece à função $\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Concluímos daqui, tendo em conta o conhecimentos dos limites desta função, que o contradomínio da restrição de cosh ao intervalo $]-\infty, 0]$ é um intervalo com $1 = \cosh(0)$ como mínimo e $+\infty$ como supremo, portanto é $[1, +\infty[$ e, analogamente, que o contradomínio da restrição de cosh ao intervalo $[0, +\infty[$ é um intervalo com $1 = \cosh(0)$ como mínimo e $+\infty$ como supremo, portanto é também $[1, +\infty[$. O facto de estas duas restrições terem ambas o contradomínio $[1, +\infty[$ implica trivialmente que $\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ também tem esse contradomínio. $\square$

II.3.8 **(As funções hiperbólicas inversas)** Tendo em conta o referido em II.3.7, a função $\operatorname{senh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é bijetiva e estritamente crescente e, embora a função $\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não o seja, a sua restrição já é uma função bijetiva e estritamente crescente $[0, +\infty[\to [1, +\infty[$. As inversas destas funções bijetivas são notadas

$$\text{arcsenh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \text{arccosh}\colon [1, +\infty[\,\to [0, +\infty[$$

e são assim também bijetivas e estritamente crescentes.[110] Estas funções admitem as seguintes caracterizações alternativas, que constituem também justificações alternativas da sua continuidade:

$$\begin{aligned} \text{arcsenh}(y) &= \ln(y + \sqrt{y^2+1}), \\ \text{arccosh}(y) &= \ln(y + \sqrt{y^2-1}). \end{aligned}$$

Dem: Dado $y \in \mathbb{R}$, seja $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = \text{senh}(x)$. Tendo em conta a relação (3) em II.3.6, tem-se $\cosh(x) = \sqrt{y^2+1}$ e portanto

$$e^x = \text{senh}(x) + \cosh(x) = y + \sqrt{y^2+1},$$

donde

$$\text{arcsenh}(y) = x = \ln(y + \sqrt{y^2+1}).$$

Seja agora $y \geq 1$ e consideremos $x \geq 0$ tal que $y = \cosh(x)$. Da relação (2) em II.3.6. e uma vez que $\text{senh}(x) \geq 0$, vem

$$\text{senh}(x) = \sqrt{\cosh^2(x) - 1} = \sqrt{y^2-1}$$

donde

$$\begin{aligned} \text{arccosh}(y) = x &= \text{arcsenh}(\sqrt{y^2-1}) = \\ &= \ln\Big(\sqrt{y^2-1} + \sqrt{(\sqrt{y^2-1})^2+1}\Big) \\ &= \ln(y + \sqrt{y^2-1}). \end{aligned}$$

□

II.3.9 **(Funções hiperbólicas no argumento duplo[111])** Para cada $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{aligned} \text{senh}(2x) &= 2\,\text{senh}(x)\cosh(x), \\ \cosh(2x) &= \text{senh}^2(x) + \cosh^2(x) = \\ &= 2\,\text{senh}^2(x) + 1 = \\ &= 2\cosh^2(x) - 1. \end{aligned}$$

Dem: Das definições $\text{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ e $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, obtemos, por um lado,

$$\text{senh}(x)\cosh(x) = \frac{(e^x)^2 - (e^{-x})^2}{4} = \frac{1}{2}\,\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \frac{1}{2}\,\text{senh}(2x)$$

e, por outro lado,

[110] Reparar no paralelo com as funções trigonométricas inversas examinadas em II.1.25.
[111] Reparar no paralelismo com as fórmulas conhecidas para o seno e o cosseno do argumento duplo.

$$\operatorname{senh}^2(x) + \cosh^2(x) = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} + \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} =$$
$$= \frac{2e^{2x} + 2e^{-2x}}{4} = \cosh(2x).$$

As duas restantes caracterizações de $\cosh(2x)$ resultam desta e das fórmulas

$$\cosh^2(x) = \operatorname{senh}^2(x) + 1, \quad \operatorname{senh}^2(x) = \cosh^2(x) - 1. \qquad \square$$

Exercícios

Ex II.3.1 Utilizar II.3.3 para determinar os limites das sucessões $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas por:

$$\textbf{a)}\ x_n = \big(1 + \frac{1}{2n}\big)^n,$$
$$\textbf{b)}\ x_n = \big(\frac{n}{n+1}\big)^n.$$

Ex II.3.2 **a)** Mostrar que para cada $x \geq 0$

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \big(1 + \frac{x}{n}\big)^n = e^x.$$

b) Mostrar que para cada $x < 0$ tem-se também

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \big(1 + \frac{x}{n}\big)^n = e^x.$$

Ex II.3.3 Seja $b \neq 1$ em $]0, +\infty[$ uma base fixada. Verificar que os limites notáveis análogos aos de II.3.4 têm uns valores menos naturais, nomeadamente:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \frac{\log_b(x)}{x-1} = \frac{1}{\ln(b)}, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{b^x - 1}{x} = \ln(b).$$

Ex II.3.4 Justificar as fórmulas para as funções hiperbólicas aplicadas a uma soma de dois argumentos:

$$\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh}(x)\cosh(y) + \cosh(x)\operatorname{senh}(y),$$
$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y).$$

Reparar no paralelo com as fórmulas do mesmo tipo para as funções trigonométricas e no facto de estas fórmulas implicarem trivialmente as referidas em II.3.9.

CAPÍTULO III
Derivadas e aplicações

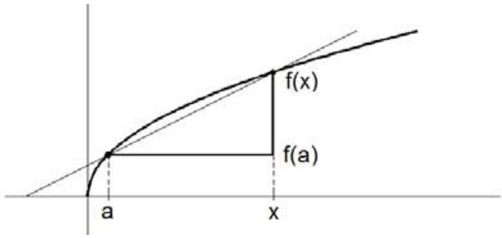
§1. Definições e propriedades básicas.

III.1.1 Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in X$ ponto de acumulação de X. Retomando a definição que o estudante já encontrou decerto no ensino secundário[112], dizemos que f é *derivável* (ou *diferenciável*) *em* a se existir e for finito o limite

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

limite esse que é notado $f'(a)$ e a que se dá o nome de *derivada* de f no ponto a. Se o limite referido existir mas for $+\infty$ ou $-\infty$, definimos ainda $f'(a) = +\infty$ ou $f'(a) = -\infty$, respetivamente, dando a este valor o nome de *derivada* de f no ponto a, embora **não** consideremos f derivável em a.

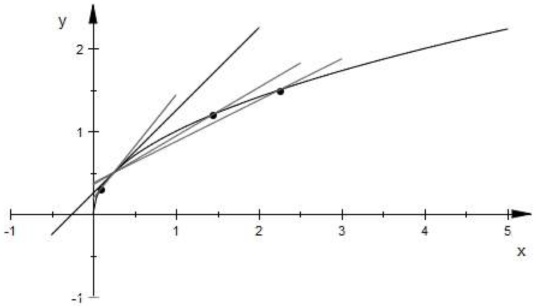
III.1.2 **(Nota)** A razão por que se exigiu que a seja ponto de acumulação do domínio X de f é o facto de o limite referido ser o de uma função cujo domínio é $X \setminus \{a\}$, sendo assim necessário que a seja aderente a $X \setminus \{a\}$, que é precisamente a condição para a ser ponto de acumulação de X.
Frequentemente, ao referir o limite que define a derivada escrevemos simplesmente $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, considerando assim que a condição $x \neq a$ está implícita pelo facto de $x - a$ aparecer em denominador.



Apesar de o estudante já ter encontrado essa interpretação anteriormente, não deixamos de sublinhar o significado geométrico do quociente $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, cujo limite define a derivada: Trata-se do declive da secante ao gráfico da função

[112]eventualmente com restrições desnecessárias sobre o domínio, por exemplo a exigência de se tratar de um intervalo.

f determinada pelos pontos deste de abcissas a e x. Definindo a tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a como sendo a reta limite (se existir) das retas secantes ao gráfico determinadas pelos pontos de abcissa a e x, quando x tende para a, isto é, a reta passando pelo ponto de abcissa a e cujo declive é o limite dos declives daquelas secantes, vemos que a derivada vai ser o declive da reta tangente.



III.1.3 **(Nota)** Repare-se que nas considerações precedentes, como noutras que vão seguir, temos utilizado a letra a para o ponto em que se considera a derivada e a letra x para a variável que intervém no limite que define a derivada. No entanto, uma vez que estas letras são variáveis mudas, nada nos impede, depois dos cálculos efetuados, passar a utilizar a letra x para designar o ponto em que se considera a derivada. Por exemplo, veremos adiante que, sendo $f(x) = x^n$, tem-se $f'(a) = na^{n-1}$. Poderemos então também dizer que se tem $f'(x) = nx^{n-1}$.

III.1.4 Dizemos que $f\colon X \to \mathbb{R}$ é derivável quando, para cada $x \in X$, x é ponto de acumulação de X e f é derivável em x. Quando isso acontecer, fica definida uma nova função $f'\colon X \to \mathbb{R}$, que a cada $x \in X$ associa a derivada $f'(x)$ no ponto x, função a que se dá o nome de *função derivada*.

III.1.5 **(Continuidade das funções deriváveis)** Se a função $f\colon X \to \mathbb{R}$ é derivável no ponto $a \in X$, ponto de acumulação de X, então f é contínua no ponto a.

Dem: Tendo em conta I.5.17, vemos que, por $f'(a)$ ser finito,

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} (f(x) - f(a)) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \Big(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times (x - a)\Big) = f'(a) \times 0 = 0,$$

pelo que

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \big((f(x) - f(a)) + f(a)\big) = 0 + f(a) = f(a),$$

o que implica que f é contínua em a (cf. II.1.4). □

Tal como acontecia com a determinação dos limites, será excepcional em casos concretos que se tenha que recorrer à definição de derivada para determinar estas. Como naquele caso, o que se faz é determinar a derivada de certas funções básicas e depois aplicar regras de derivação que permitem determinar as derivadas de certas funções a partir das de outras que entram na respetiva definição.

III.1.6 **(Dois casos triviais de existência de derivada)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in X$, ponto de acumulação de X. Tem-se então:

a) A função identidade $I_X\colon X \to \mathbb{R}$, definida por $I_X(x) = x$, é derivável em a e com derivada igual a 1.

b) Para cada $b \in \mathbb{R}$, a função $f\colon X \to \mathbb{R}$ constante de valor b, definida por $f(x) = b$, é derivável em a e com derivada 0.

Dem: Basta atender a que o limite de uma função constante é igual a essa constante e a que, no primeiro caso, tem-se

$$\frac{I_X(x) - I_X(a)}{x - a} = \frac{x - a}{x - a} = 1$$

e, no segundo caso,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{b - b}{x - a} = 0. \qquad \square$$

III.1.7 **(Derivadas da soma e do produto)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in X$ ponto de acumulação de X, $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ duas funções deriváveis em a e $c \in \mathbb{R}$ uma constante. Tem-se então:

a) A soma $f + g\colon X \to \mathbb{R}$ e o produto $cf\colon X \to \mathbb{R}$, que a cada x associam respetivamente $f(x) + g(x)$ e $cf(x)$, são deriváveis em a e

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a), \quad (cf)'(a) = cf'(a).$$

b) O produto $f \times g\colon X \to \mathbb{R}$, que a cada x associa $f(x)g(x)$, é derivável em a e

$$(f \times g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Dem: Relativamente a a), vem, pelas propriedades algébricas dos limites,

$$\begin{aligned}
\frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x - a} &= \frac{f(x) + g(x) - f(a) - g(a)}{x - a} = \\
&= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \xrightarrow[x \to a]{} f'(a) + g'(a), \\
\frac{(cf)(x) - (cf)(a)}{x - a} &= \frac{cf(x) - cf(a)}{x - a} = c\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[x \to a]{} cf'(a).
\end{aligned}$$

Relativamente a b) usamos também a continuidade em a das funções deriváveis nesse ponto e obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{(f\times g)(x)-(f\times g)(a)}{x-a}=\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}=\\&=\frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}=\\&=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x)+f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\underset{x\to a}{\longrightarrow}f'(a)g(a)+f(a)g'(a).\end{aligned}$$ □

III.1.8 **(Corolário — derivada da diferença)** Nas hipóteses anteriores, a diferença $f-g\colon X\to\mathbb{R}$, definida por $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ é derivável em a e com derivada $f'(a)-g'(a)$ nesse ponto.

Dem: basta reparar que $f-g$ é a soma da função f com o produto da função g pela constante -1. □

III.1.9 **(Corolário — derivada da potência de expoente natural)** Sejam $X\subset\mathbb{R}$, $a\in X$ ponto de acumulação de X, $f\colon X\to\mathbb{R}$ uma função derivável em a e n um natural. A função $f^n\colon X\to\mathbb{R}$, definida por $(f^n)(x)=f(x)^n$, é então também derivável em a e com

$$(f^n)'(a)=nf'(a)f(a)^{n-1}.$$

Em particular, considrando $f(x)=x$, vemos que a função $g_n(x)=x^n$ tem derivada $g_n'(a)=na^{n-1}$ (ou, alternativamente, uma vez que a é arbitrário, $g_n'(x)=nx^{n-1}$).

Dem: Fazemos a demonstração por indução matemática. Para $n=1$ a afirmação é trivialmente verdadeira (recordar que $f(a)^0=1$). Supondo (hipótese de indução) que o resultado vale para $n=p$, vemos que, para $n=p+1$, tem-se $f^{p+1}=f^p\times f$, donde

$$\begin{aligned}(f^{p+1})'(a)&=(f^p)'(a)f(a)+f^p(a)f'(a)=\\&=pf'(a)f^{p-1}(a)f(a)+f^p(a)f'(a)=\\&=(p+1)f'(a)f^p(a).\end{aligned}$$ □

III.1.10 **(Derivada do inverso e do quociente)** Sejam $X\subset\mathbb{R}$, $a\in X$ ponto de acumulação de X, $f\colon X\to\mathbb{R}$ e $g\colon X\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$ duas funções deriváveis em a. Tem-se então que:

a) A função $\frac{1}{g}\colon X\to\mathbb{R}$, que a x associa $\frac{1}{g(x)}$, é derivável em a e com derivada

$$\Big(\frac{1}{g}\Big)'(a)=-\frac{g'(a)}{g(a)^2}.$$

b) A função $\frac{f}{g}\colon X\to\mathbb{R}$, que a x associa $\frac{f(x)}{g(x)}$, é derivável em a e com

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

c) Em particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função que a x associa $g(x)^{-n} = \frac{1}{g(x)^n}$ tem derivada no ponto a igual a

$$\frac{-n\, g'(a)}{g(a)^{n+1}} = -ng'(a)g(a)^{-n-1}.$$

Dem: Utilizando as propriedades algébricas dos limites, vem, tendo em conta a continuidade de g no ponto a,

$$\begin{aligned}\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{x-a} &= \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} = \frac{g(a) - g(x)}{g(x)g(a)(x-a)} = \\ &= \frac{-1}{g(x)g(a)}\,\frac{g(x) - g(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} -\frac{g'(a)}{g(a)^2},\end{aligned}$$

o que justifica o valor da derivada em a). A conclusão de b) resulta da de a) e da regra de derivação do produto, por se ter $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = f'(a)\frac{1}{g(a)} + f(a)\frac{-g'(a)}{g(a)^2} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Quanto a c), aplicando o que vimos em a) com a função $x \mapsto g(x)^n$ no lugar de g e tendo em conta III.1.9, obtemos para derivada

$$\frac{-ng'(a)g(a)^{n-1}}{g(a)^{2n}} = \frac{-n\, g'(a)}{g(a)^{n+1}} = -ng'(a)g(a)^{-n-1} \qquad \square$$

III.1.11 **(Derivadas de restrições e derivadas laterais)** Analogamente ao que sucedia com a noção de limite, e como consequência disso (cf. I.5.6 e I.5.8), podemos dizer que:

a) Sejam $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função, $a \in X$ um ponto de acumulação de X, onde f tenha derivada $f'(a)$ e $a \in Y \subset X$ tal que a ainda seja ponto de acumulação de Y. Então a restrição $f_{/Y}\colon Y \to \mathbb{R}$ é também derivável em a e com derivada $(f_{/Y})'(a) = f'(a)$.

b) Sejam $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função, $a \in X$ um ponto de acumulação de X e $A \subset X$ e $B \subset X$ dois subconjuntos com $X = A \cup B$: Tem-se então que a é ponto de acumulação de A ou de B e:

b1) Se $a \in A \cap B$, a for ponto de acumulação de A e de B e ambas as restrições $f_{/A}\colon A \to \mathbb{R}$ e $f_{/B}\colon B \to \mathbb{R}$ tiverem iguais derivadas em a, então f tem derivada em a, com

$$f'(a) = (f_{/A})'(a) = (f_{/B})'(a).$$

b2) Se $a \in A$ for ponto de acumulação de A, mas não de B e se a restrição $f_{/A}\colon A \to \mathbb{R}$ tiver derivada em a, então f tem derivada em a e $f'(a) = (f_{/A})'(a)$.

Analogamente aos limites laterais, definidos em I.5.12, um caso particular importante das observações precedentes é aquele em que consideramos $X = X_{\leq a} \cup X_{\geq a}$, onde, naturalmente,

$$X_{\leq a} = \{x \in X \mid x \leq a\}, \quad X_{\geq a} = \{x \in X \mid x \geq a\}:$$

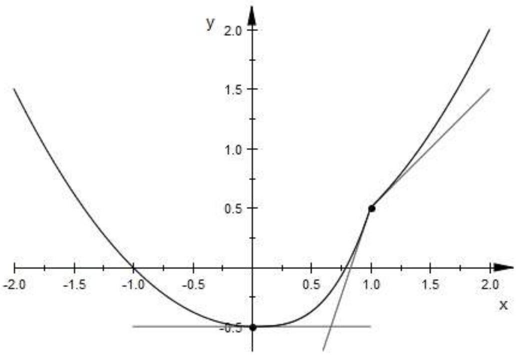
Quando a for ponto de acumulação de $X_{\leq a}$ (respetivamente de $X_{\geq a}$), isto é (cf. I.5.12), for ponto de acumulação à esquerda (respetivamente à direita) de X, à derivada no ponto a, se existir, da restrição de f a esse conjunto dá-se o nome de *derivada à esquerda* (respetivamente *à direita*) de f no ponto a, notada $f'(a^-)$ (respetivamente $f'(a^+)$). Dizemos que f é *derivável à esquerda* (respetivamente *à direita*) no ponto a quando existir e for finita a derivada à esquerda (respetivamente à direita) nesse ponto.

Tenha-se presente que as derivadas laterais, esquerda e direita, são derivadas, no sentido usual, de restrições da função pelo que a elas se aplica automaticamente tudo o que for estabelecido no contexto geral das derivadas de funções.

III.1.12 **(Exemplo)** Consideremos a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}, & \text{se } x < 0 \\ x^3 - \frac{1}{2}, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x^2, & \text{se } 1 < x \end{cases}$$

e averiguemos a derivabilidade[113] de f nos diferentes pontos do domínio.



1) Suponhamos que $a < 0$. Considerando $\mathbb{R} =]-\infty, 0[\cup [0, +\infty[$, como a não é ponto de acumulação de $[0, +\infty[$, a derivabilidade de f em a é equivalente à derivabilidade da sua restrição a $]-\infty, 0[$ e, tendo em conta que

[113]Por “derivabilidade” estamos a entender o facto de existir ou não derivada e, em caso de existência, o valor desta.

nesse intervalo $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$, resulta das regras de derivação que f é derivável em a e com

$$f'(a) = \frac{1}{2} \times 2a - 0 = a.$$

2) Suponhamos que $a = 0$. Como em 1), o facto de a não ser ponto de acumulação de $]1, +\infty[$ mostra que a derivabilidade de f em a é equivalente à derivabilidade em a da sua restrição a $]-\infty, 1]$. Ora, como $]-\infty, 1] =]-\infty, 0] \cup [0, 1]$ onde, para $x \in]-\infty, 0]$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ (para $x = 0$ também, uma vez que a expressão no segundo membro toma aí o valor $-\frac{1}{2} = f(0)$!) e, para $x \in [0, 1]$, $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}$, constatamos que em 0 a restrição referida tem derivadas à esquerda e à direita iguais aos valores em 0 de $\frac{1}{2} \times 2x - 0$ e de $3x^2 - 0$, isto é, ambas iguais a 0. Podemos assim concluir que f é derivável em 0, e com $f'(0) = 0$.
3) Suponhamos que $0 < a < 1$. Como $\mathbb{R} = (]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[) \cup [0, 1]$ e a não é ponto de acumulação de $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, a derivabilidade de f em a é equivalente à derivabilidade em a da sua restrição a $[0, 1]$ a qual, por se ter aí $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}$, resulta das regras de derivação: A função f é derivável em a e com

$$f'(a) = 3a^2 - 0 = 3a^2.$$

4) Suponhamos que $a = 1$. Neste caso podemos garantir que f não é derivável em a, uma vez que a pertence aos conjuntos $[0, 1]$ e $[1, +\infty[$, sendo ponto de acumulação de ambos, e que $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}$, para $x \in [0, 1]$, e $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, para $x \in [1, +\infty[$, o que implica que estas duas restrições têm derivadas diferentes em 1, a primeira igual a $3 \times 1^2 - 0 = 3$ e a segunda igual a $\frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$. A função é, no entanto derivável tanto à esquerda como à direita nesse ponto.
5) Suponhamos que $a > 1$. Como em 1), tem-se $\mathbb{R} =]-\infty, 1] \cup]1, +\infty[$, onde a não é ponto de acumulação de $]-\infty, 1]$ donde, por ser $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ para $x \in]1, +\infty[$ concluímos que f é derivável em a e com

$$f'(a) = \frac{1}{2} \times 2a = a.$$

III.1.13 **(Derivadas da exponencial e do logaritmo neperianos)** As funções

$$\exp\colon \mathbb{R} \to]0, +\infty[, \quad \ln\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R},$$

(cf. II.3.2) são deriváveis e com

$$\exp'(x) = \exp(x), \quad \ln'(y) = \frac{1}{y}.$$

Dem: Seja $a \in \mathbb{R}$ arbitrário. Tendo em conta as propriedades algébricas da exponencial, o resultado sobre o limite da função composta e o limite notável em II.3.4, vem

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\exp(x)-\exp(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{\exp(a+(x-a))-\exp(a)}{x-a} = \\ &= \lim_{x\to a}\frac{\exp(a)\big(\exp(x-a)-1\big)}{x-a} = \\ &= \exp(a)\times\lim_{y\to 0}\frac{\exp(y)-1}{y} = \exp(a).\end{aligned}$$

Seja agora $b \in]0,+\infty[$ arbitrário. Tendo em conta as propriedades algébricas do logaritmo, o resultado sobre o limite da função composta e o limite notável em II.3.4, vem

$$\lim_{y\to b}\frac{\ln(y)-\ln(b)}{y-b} = \lim_{y\to b}\frac{1}{b}\times\frac{\ln(\frac{y}{b})}{\frac{y}{b}-1} = \frac{1}{b}\times\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{1}{b}. \qquad \square$$

III.1.14 **(A derivada da função composta)** Sejam $X\subset\mathbb{R}$, $Y\subset\mathbb{R}$, $f\colon X\to Y$ e $g\colon Y\to\mathbb{R}$ duas funções e $a\in X$, ponto de acumulação de X tal que f seja derivável em a, que $f(a)$ seja ponto de acumulação de Y e que g seja derivável em $f(a)$. Tem-se então que a composta $g\circ f\colon X\to\mathbb{R}$ é derivável em a e

$$(g\circ f)'(a) = g'(f(a))\times f'(a).$$

Dem: Tem-se $X\setminus\{a\} = A\cup B$, onde

$$A=\{x\in X\setminus\{a\}\mid f(x)\neq f(a)\},\quad B=\{x\in X\setminus\{a\}\mid f(x)=f(a)\}.$$

Sabemos que f é contínua em a, por ser derivável nesse ponto e vemos que, se a for aderente a A, vem

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a} &= \lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}}\left(\frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)}\times\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right) = \\ = \lim_{\substack{y\to f(a)\\ y\neq f(a)}}\frac{g(y)-g(f(a))}{y-f(a)}&\times\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = g'(f(a))\times f'(a).\end{aligned}$$

Por outro lado, se a for aderente a B, tem-se

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in B}}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a} = \lim_{\substack{x\to a\\ x\in B}} 0 = 0.$$

No caso em que $f'(a)=0$, e portanto $0 = g'(f(a))\times f'(a)$, podemos assim concluir de I.5.8 que

$$(g \circ f)'(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = g'(f(a)) \times f'(a).$$

Suponhamos agora que $f'(a) \neq 0$. Tem-se então que a não é aderente a B visto que, se o fosse, viria

$$f'(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in B}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in B}} 0 = 0.$$

Podemos assim concluir, mais uma vez por I.5.8 que a é aderente a A e que, como antes,

$$(g \circ f)'(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = g'(f(a)) \times f'(a). \qquad \square$$

III.1.15 **(Exemplo)** Seja $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, tem-se $f(x) = \exp(g(x))$, com $g(x) = \frac{1}{x}$. Tendo em conta III.1.10 e III.1.13, $g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ é derivável em cada x e com $g'(x) = \frac{-1}{x^2}$ e $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável em cada y e com $\exp'(y) = \exp(y)$. Aplicando o resultado sobre a derivada da função composta, concluímos assim que f é derivável em cada $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e com

$$f'(x) = \exp(\frac{1}{x}) \times \frac{-1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}}.$$

III.1.16 **(Derivada da potência de expoente real)** Seja $d \in \mathbb{R}$ e consideremos a função potência de expoente d, $f_d\colon]0, +\infty[\to]0, +\infty[$, definida por $f_d(x) = x^d$. Tem-se então que f_d é derivável em cada $x \in]0, +\infty[$ e com

$$f_d'(x) = d\, x^{d-1}.$$ [114]

Dem: Podemos considerar a caracterização alternativa

$$f_d(x) = \exp(\ln(x^d)) = \exp(d \ln(x))$$

pelo que, tendo em conta o teorema de derivação da função composta e as derivadas da exponencial e do logaritmo em III.1.13,

$$f_d'(x) = \exp(d \ln(x)) \times \frac{d}{x} = x^d \times \frac{d}{x} = d\, x^{d-1}. \qquad \square$$

---

[114] Comparar com o caso do expoente natural, examinado em III.1.9, lembrando que, se $f(x) = x$, tem-se $f'(x) = 1$. Reparar que, em geral, a derivada de uma função do tipo $x \mapsto f(x)^d$, onde $f(x) > 0$, se pode obter, a partir do resultado agora enunciado, pelo teorema de derivação da função composta.

III.1.17 **(Derivada da função raiz de índice k)** Seja $k \in \mathbb{N}$ e consideremos a função contínua $g_k\colon [0,+\infty[\to [0,+\infty[$, definida por $g_k(x) = \sqrt[k]{x}$ (cf. II.1.22). Tem-se então que g_k é derivável em cada $x > 0$, e com

$$g_k'(x) = \frac{1}{k\sqrt[k]{x^{k-1}}},$$

e, se $k \geq 2$, $g_k'(0) = +\infty$ (em particular, g_k não é derivável em 0).[115]

Dem: Se $a > 0$, então a não é aderente a $\{0\}$ pelo que a derivabilidade de g_k em a é equivalente à da sua restrição a $]0,+\infty[$. Uma vez que se tem $g_k(x) = x^{\frac{1}{k}}$, para cada $x \in]0,+\infty[$, obtemos

$$g_k'(a) = \frac{1}{k}\, a^{\frac{1}{k}-1} = \frac{1}{k}\, a^{-\frac{k-1}{k}} = \frac{1}{k\sqrt[k]{a^{k-1}}}.$$

Quanto à derivada em 0, ela decorre imediatamente da definição, uma vez que, para $x \neq 0$ em $[0,+\infty[$,

$$\frac{g_k(x) - g_k(0)}{x - 0} = \frac{x^{\frac{1}{k}}}{x} = x^{\frac{1}{k}-1} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty,$$

por ser $\frac{1}{k} - 1 < 0$ (cf. II.2.14). □

III.1.18 **(Derivada da função inversa)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$ e $f\colon X \to Y$ uma função bijetiva. Seja $a \in X$, ponto de acumulação de X, tal que f seja derivável em a e com $f'(a) \neq 0$ e que a função inversa $f^{-1}\colon Y \to X$ seja contínua em $b = f(a)$.[116] Tem-se então que b é ponto de acumulação de Y e f^{-1} é derivável em b e com

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Dem: A função f é contínua em a, por ser derivável, e consequentemente, uma vez que a injetividade de f garante que $f(X \setminus \{a\}) \subset Y \setminus \{b\}$, o facto de b também ser o limite em a da restrição de f a $X \setminus \{a\}$ implica, por I.5.14, que b é aderente a $Y \setminus \{b\}$, ou seja que b é ponto de acumulação de Y. Tendo em conta o resultado sobre o limite da função composta vemos agora que

$$\lim_{y\to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{y\to b} \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a}} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}} = \frac{1}{f'(a)},$$

o que mostra que $\frac{1}{f'(a)}$ é a derivada de f^{-1} no ponto b. □

---

[115]Se $k = 1$, $g_k(x) = x$, donde $g_k'(0) = 1$.

[116]Em muitos casos concretos utiliza-se II.1.20 para garantir a continuidade de f^{-1}.

III.1.19 **(O caso $f'(a) = 0$)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$ e $f: X \to Y$ uma função bijetiva. Seja $a \in X$, ponto de acumulação de X, tal que f seja derivável em a e com $f'(a) = 0$. Tem-se então que, apesar de $b = f(a) \in Y$ ser, como no resultado precedente, um ponto de acumulação de Y, a função inversa $f^{-1}: Y \to X$ não é derivável no ponto b, embora possa ter derivada infinita nesse ponto.

Dem: Suponhamos, por absurdo, que f^{-1} era derivável no ponto $b = f(a)$. Aplicando o teorema da função composta à função $I_X = f^{-1} \circ f$, concluímos que

$$1 = (I_X)'(a) = (f^{-1})'(b) \times f'(a) = 0,$$

o que era absurdo. □

III.1.20 **(Exemplos) a)** Consideremos a função $g: [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ definida por $g(y) = \sqrt{y}$, cuja continuidade em todos os pontos é um caso particular do que foi verificado em II.1.22. Uma vez que se trata da função inversa da função $f: [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ definida por $f(x) = x^2$, a qual é derivável em todos os pontos e com $f'(x) = 2x$, em particular $f'(x) \neq 0$ para cada $x \neq 0$, concluímos do teorema de derivação da função inversa que, para cada $y \in]0, +\infty[$, portanto $y = x^2$, para um certo $x \neq 0$, g é derivável em y e com $g'(y) = \frac{1}{2x}$. No entanto este não é o resultado que se espera, o que se quer é conhecer $g'(y)$ como função de y. Para isso só há que reparar que se tem $x = \sqrt{y}$, pelo que chegamos à conclusão que

$$g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}},$$

que é evidentemente o mesmo resultado que já obtivéramos, por outro caminho e numa situação mais geral, em III.1.17.

b) Consideremos a função $\ln:]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, cuja continuidade em todos os pontos já foi provada em II.2.11. Uma vez que se trata da inversa da função $\exp: \mathbb{R} \to]0, +\infty[$, que já verificámos em III.1.13 ser derivável em todos os pontos e com derivada $\exp'(x) = \exp(x) \neq 0$, podemos concluir do teorema de derivação da função inversa que, para cada $y \in]0, +\infty[$, portanto $y = \exp(x)$, para um certo $x \in \mathbb{R}$, $\ln$ é derivável em y e com derivada $\ln'(y) = \frac{1}{\exp(x)}$, ou seja, em função de y,

$$\ln'(y) = \frac{1}{y},$$

que é evidentemente o mesmo resultado que já obtivéramos diretamente em III.1.13.

Vamos agora examinar o que se pode dizer sobre as derivadas das funções trigonométricas. Uma vez que, como já observámos anteriormente, estas funções não são do âmbito estrito da Análise Matemática, sendo definidas num contexto de Geometria, não é de espantar que seja mais uma vez um argumento geomético que permite estabelecer o resultado fundamental que conduz à determinação das derivadas que procuramos. Repare-se também no facto de ser essencial que a unidade de medição de ângulos utilizada seja o radiano.

III.1.21 **(Dois limites notáveis)** Para cada $x \neq 0$ em $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, tem-se

$$\cos(x) \leq \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \leq 1$$

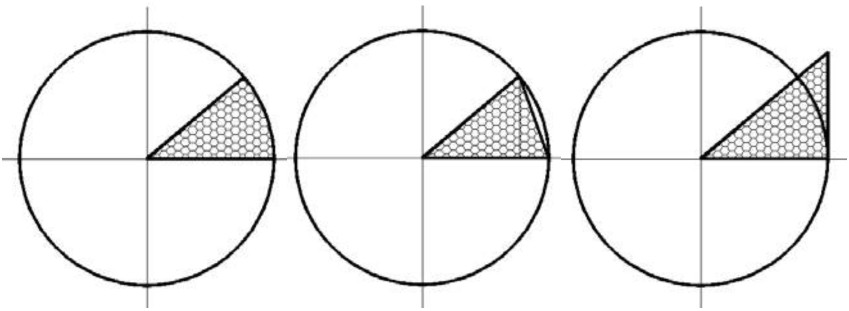
e, consequentemente,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1.$$

Tem-se também

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0.$$ [117]

Dem: Comecemos por supor que $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Nas três figuras seguintes consideramos no círculo trigonométrico um sector circular de ângulo x e dois triângulos, o primeiro contido e o segundo contendo esse sector.



A área do sector circular é igual a $\frac{x}{2}$ [118]; O primeiro triângulo tem um base igual a 1 e a correspondente altura igual a $\operatorname{sen}(x)$ pelo que a sua área é igual a $\frac{1}{2}\operatorname{sen}(x)$; O segundo triângulo tem uma base igual a 1 e a correspondente altura igual a $\tan(x)$ pelo a sua área é igual a $\frac{1}{2}\tan(x)$. Comparando as áreas, vemos assim que

[117]Reparar que estes dois limites correspondem a indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$.
[118]A área do círculo todo, correspondente a 2π radianos, é π.

$$\frac{1}{2}\text{sen}(x) \le \frac{x}{2} \le \frac{1}{2}\tan(x),$$

portanto

$$\text{sen}(x) \le x \le \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)},$$

e destas duas desigualdades decorre respetivamente que $\frac{\text{sen}(x)}{x} \le 1$ e que $\cos(x) \le \frac{\text{sen}(x)}{x}$. Ficam assim provadas as duas desigualdades do enunciado no caso em que $x > 0$ em $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ e o caso em que $x < 0$ neste intervalo resulta de se ter então $-x > 0$, $\cos(x) = \cos(-x)$ e $\frac{\text{sen}(x)}{x} = \frac{\text{sen}(-x)}{-x}$. Uma vez que, pela continuidade da função $\cos\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$, tem-se

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\ne 0}} \cos(x) = \cos(0) = 1,$$

concluímos agora, por enquadramento, que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\ne 0}} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1.$$

Relativamente ao último limite, vem, tendo em conta a continuidade das funções trigonométricas,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\ne 0}} \frac{\cos(x)-1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\ne 0}} \frac{\cos^2(x)-1}{x(\cos(x)+1)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\ne 0}} \frac{\text{sen}(x)}{x} \times \frac{-\text{sen}(x)}{\cos(x)+1} =$$
$$= 1 \times \frac{-\text{sen}(0)}{\cos(0)+1} = 0. \qquad \square$$

III.1.22 **(Derivadas do seno e do cosseno)** As funções trigonométricas $\text{sen}\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ e $\cos\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ são deriváveis em cada $x \in \mathbb{R}$ e com

$$\text{sen}'(x) = \cos(x), \quad \cos'(x) = -\text{sen}(x).$$

Dem: Dado $a \in \mathbb{R}$, podemos escrever, para cada $x \ne a$,

$$\frac{\text{sen}(x)-\text{sen}(a)}{x-a} = \frac{\text{sen}(a+(x-a))-\text{sen}(a)}{x-a} =$$
$$= \frac{\text{sen}(a)\cos(x-a)+\cos(a)\text{sen}(x-a)-\text{sen}(a)}{x-a} =$$
$$= \text{sen}(a)\frac{\cos(x-a)-1}{x-a} + \cos(a)\frac{\text{sen}(x-a)}{x-a}$$

pelo que, uma vez que, pelos limites notáveis em III.1.21,

$$\lim_{x\to a}\frac{\cos(x-a)-1}{x-a}=\lim_{y\to 0}\frac{\cos(y)-1}{y}=0,$$
$$\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{sen}(x-a)}{x-a}=\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(y)}{y}=1,$$

obtemos

$$\operatorname{sen}'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{sen}(x)-\operatorname{sen}(a)}{x-a}=\operatorname{sen}(a)\times 0+\cos(a)\times 1=\cos(a).$$

Lembrando agora a identidade $\cos(x)=\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-x)$, válida para todo o $x\in\mathbb{R}$, vemos agora, pelo teorema da derivação da função composta, que

$$\operatorname{sen}'(x)=\cos(\frac{\pi}{2}-x)\times(-1)=-\operatorname{sen}(x).\qquad\square$$

III.1.23 **(Derivada da tangente)** Lembremos que, sendo

$$X=\frac{\pi}{2}+\mathbb{Z}\pi=\left\{\frac{\pi}{2}+p\pi\right\}_{p\in\mathbb{Z}}$$

o conjunto dos zeros da função $\cos\colon\mathbb{R}\to[-1,1]$, a função $\tan\colon\mathbb{R}\setminus X\to\mathbb{R}$ está definida por $\tan(x)=\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$. Tem-se então que esta função é derivável em cada $x\in\mathbb{R}\setminus X$ e com

$$\tan'(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x).$$

Dem: Tendo em conta a regra de derivação do quociente, vem

$$\tan'(x)=\frac{\operatorname{sen}'(x)\cos(x)-\operatorname{sen}(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)}=\frac{\cos^2(x)+\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)},$$

tendo-se, por um lado,

$$\frac{\cos^2(x)+\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)}=\frac{1}{\cos^2(x)}$$

e, por outro lado,

$$\frac{\cos^2(x)+\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)}=1+\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x).\qquad\square$$

III.1.24 **(Derivadas das inversas das funções trigonométricas)** Recordemos as funções inversas de restrições das funções trigonométicas, definidas em II.1.25:

$$\operatorname{arcsen}\colon[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],\quad \arccos\colon[-1,1]\to[0,\pi],\quad \arctan\colon\mathbb{R}\to\,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[,$$

que se verificou nesse resultado serem funções contínuas. Tem-se então que as duas primeiras são deriváveis em todos os pontos de $]-1,1[$, e com derivadas

$$\mathrm{arcsen}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad \arccos'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}},$$

e a última é derivável em todos os pontos de $\mathbb{R}$ e com derivada

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

Dem: Uma vez que a função $\mathrm{arcsen}\colon [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ é contínua e é a inversa da restrição $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ da função sen, função essa que é derivável em cada $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e com derivada $\cos(x)$, que é diferente de 0 se $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, concluímos do teorema de derivação da função inversa em III.1.18 que, para cada $y \in]-1,1[$, com $y = \mathrm{sen}(x)$, a função arcsen é derivável em y e com $\mathrm{arcsen}'(y) = \frac{1}{\cos(x)}$. Mas uma vez que $\cos(x) > 0$ para $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, da relação $\mathrm{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$ resulta que

$$\cos(x) = \sqrt{1-\mathrm{sen}^2(x)} = \sqrt{1-y^2},$$

o que nos permite concluir que

$$\mathrm{arcsen}'(y) = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Analogamente, uma vez que, para cada $x \in]0,\pi[$, $\cos'(x) = -\mathrm{sen}(x)$, com $\mathrm{sen}(x) > 0$, concluímos que, para cada $y \in]-1,1[$, com $y = \cos(x)$, a função arccos é derivável em y e com

$$\arccos'(y) = \frac{1}{-\mathrm{sen}(x)} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2(x)}} = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Do mesmo modo, uma vez que a função $\arctan\colon \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ é contínua e é a inversa da restrição $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ da função tan, que tem derivada em cada x

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \neq 0,$$

concluímos esta função é derivável em cada $y \in \mathbb{R}$ e que, sendo $y = \tan(x)$,

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1+\tan^2(x)} = \frac{1}{1+y^2}. \qquad \square$$

III.1.25 **(Derivadas das funções hiperbólicas e suas inversas)** As funções hiperbólicas $\mathrm{senh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (cf. II.3.5) são deriváveis em cada $x \in \mathbb{R}$ e com

$$\operatorname{senh}'(x) = \cosh(x), \quad \cosh'(x) = \operatorname{senh}(x).$$

Quanto às funções hiperbólicas inversas

$$\operatorname{arcsenh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \operatorname{arccosh}\colon [1, +\infty[\to [0, +\infty[$$

(cf. II.3.8), a primeira é derivável em cada $y \in \mathbb{R}$ e com

$$\operatorname{arcsenh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}}$$

e a segunda é derivável em cada $y \in \,]1, +\infty[$ e com

$$\operatorname{arccosh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}.$$

Dem: Os valores das derivadas das funções hiperbólicas resulta das identidades que as definem

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

e da caracterização da derivada da função exponencial. Reparemos agora que, dado $y \in \mathbb{R}$, com $y = \operatorname{senh}(x)$, o facto de se ter $\operatorname{senh}'(x) = \cosh(x) \neq 0$ implica, pelo teorema de derivação da função inversa que arcsenh é derivável em y e com

$$\operatorname{arcsenh}'(y) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{senh}^2(x) + 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}}.$$

Analogamente, dado $y > 1$, com $y = \cosh(x)$ e $x > 0$, o facto de se ter $\cosh'(x) = \operatorname{senh}(x) \neq 0$ implica que arccosh é derivável em y e

$$\operatorname{arccosh}'(y) = \frac{1}{\operatorname{senh}(x)} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(x) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}. \qquad \square$$

Exercícios

Ex III.1.1 Mostrar que, se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função derivável num certo ponto $a \in \mathbb{R}$, então existe limite para a sucessão que a n associa

$$n\Big(f\big(a + \frac{1}{n}\big) - f(a)\Big).$$

Encontrar um exemplo que mostre que a recíproca desta afirmação não é verdadeira.

Ex III.1.2 Sejam $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função e $a\in\mathbb{R}$ fixado[119].

a) Mostrar que f é derivável em a se, e só se, existir o limite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

e que, quando isso acontecer, esse limite é igual à derivada $f'(a)$.

b) Mostrar que, se f é derivável em a então

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=f'(a)$$

e dar um exemplo em que o limite no primeiro membro exista e seja finito, sem que f seja derivável em a.

Ex III.1.3 Utilizar um dos limites notáveis examinados nesta secção para determinar o limite $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x-\pi}$.

Ex III.1.4 Determinar os números naturais p para os quais a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^p\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x\neq 0\\ 0, & \text{se } x=0\end{cases}:$$

a) É derivável em todos os pontos $x\in\mathbb{R}$;

b) É derivável em todos os pontos e a função derivada $f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é contínua.

Ex III.1.5 Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a função definida por $f(x)=|x^4+x^3|$.

a) Determinar os pontos onde f é diferenciável.

b) Determinar os pontos do gráfico de f em que a recta tangente é horizontal.

Ex III.1.6 Examinando o contraexemplo no exercício II.1.10, verificar que não se pode garantir a conclusão do teorema de derivação da função inversa (cf. III.1.18) sem fazer a exigência de continuidade desta.

Ex III.1.7 Na determinação das derivadas da exponencial e do logaritmo em III.1.13 foi essencial que a base considerada fosse a constante de Neper. Dado, em geral, $b\neq 1$ em $]0,+\infty[$, determinar, mais geralmente, as derivadas das funções exponencial e logaritmo de base b,

$$\exp_b:\mathbb{R}\to\,]0,+\infty[,\quad \log_b:\,]0,+\infty[\,\to\mathbb{R}.$$

Ex III.1.8 Encontrar uma relação entre as funções arcsen: $[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ e arccos: $[-1,1]\to[0,\pi]$ que dê uma explicação para a relação evidente entre as respetivas derivadas, referidas em III.1.22.

[119] O facto de considerarmos $\mathbb{R}$ como domínio tem como único objetivo permitir um enunciado mais conciso.

Ex III.1.9 Verificar que as funções

$$\text{arcsen}\colon [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad \text{arccos}\colon [-1,1] \to [0,\pi],$$

não são deriváveis em -1 e em 1, mas têm derivadas (infinitas) nesses pontos.

Ex III.1.10 Encontrar os pontos em que são deriváveis e as derivadas nesses pontos das funções definidas pelas expressões seguintes e tendo como domínios os domínios máximos de definição dessas expressões:

a) $f(x) = \text{arcsen}(1-x)$;
b) $f(x) = \sqrt[4]{x^2-1}$;
c) $f(x) = \ln(\ln(x))$,
d) $f(x) = \left(x^x\right)^x$;
e) $f(x) = (1+x^2)^x$;
f) $f(x) = \sqrt{x} \times \text{sen}(x)$;
g) $f(x) = \ln\left(\dfrac{\text{sen}(x)}{1+\cos(x)}\right)$.

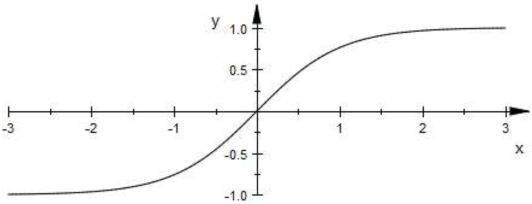
Ex III.1.11 Seja $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \ln(|x|)$. Verificar que se tem $f'(x) = \frac{1}{x}$, para cada $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

★ Ex III.1.12 Diz-se que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é *simétrico* se, para cada $x \in X$, tem-se também $-x \in X$. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto simétrico e $f\colon X \to \mathbb{R}$. Diz-se que f é uma *função par* (respetivamente *ímpar*) se, para cada $x \in X$, $f(-x) = f(x)$ (respetivamente $f(-x) = -f(x)$).
a) Verificar que, se f é uma função par (respetivamente ímpar) e $a \in X$ é um ponto de acumulação de X onde f seja derivável, então $-a$ é também um ponto de acumulação de X onde f é derivável e $f'(-a) = -f'(a)$ (respetivamente $f'(-a) = f'(a)$).
b) Deduzir de a) que, se f é uma função par (respetivamente ímpar) e se $Y \subset X$ é o conjunto dos pontos de X que são pontos de acumulação de X e onde f é derivável, então Y é um conjunto simétrico e a função$f'\colon Y \to \mathbb{R}$ é ímpar (respetivamente par).

Ex III.1.13 Seja $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \sqrt{\text{sen}(x^2)}$.
a) Verificar que f é derivável em cada $x \neq 0$ e determinar a sua derivada nesses pontos.
b) Verificar que f não é derivável em 0, embora seja derivável à esquerda e à direita nesse ponto.

Ex III.1.14 **(A tangente hiperbólica e a sua inversa)** Para cada $x \in \mathbb{R}$, define-se naturalmente a sua *tangente hiperbólica* $\tanh(x)$ por

$$\tanh(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$



a) Verificar que a função $\tanh\colon \mathbb{R} \to]-1,1[$ é ímpar e que, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\tanh^2(x) = 1 - \frac{1}{\cosh^2(x)},$$

em particular $\tanh(x) \in]-1,1[$. Concluir que $\tanh\colon \mathbb{R} \to]-1,1[$ é estritamente crescente e, determinando os respetivos limites em $+\infty$ e em $-\infty$, mostrar que ela é bijetiva.

b) Verificar que a função $\tanh\colon \mathbb{R} \to]-1,1[$ é derivável em cada x e com

$$\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x).$$

c) Seja $\operatorname{arctanh}\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$ a função inversa da função $\tanh\colon \mathbb{R} \to]-1,1[$. Mostrar que, para cada $y \in]-1,1[$, tem-se

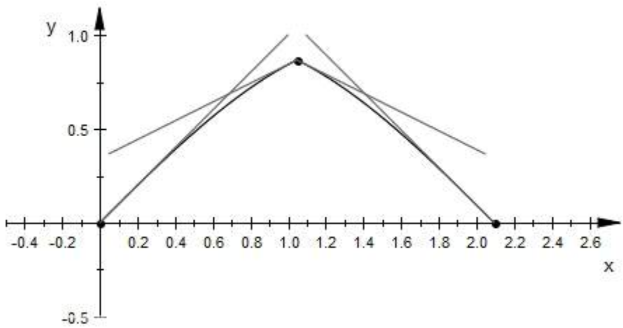
$$\operatorname{arctanh}'(y) = \frac{1}{1-y^2},$$
$$\operatorname{arctanh}(y) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+y}{1-y}).$$

§2. Aplicações das derivadas ao estudo das funções.

Vamos estudar nesta secção resultados que relacionam propriedades duma função, em particular propriedades de monotonia, com propriedades da sua derivada. Pode-se dividir esses resultados em duas classes: Nos da primeira, que têm uma justificação mais direta, deduzimos propriedades da derivada a partir de propriedades da função; nos da segunda partimos de propriedades da derivada para deduzir propriedades da função. Os resultados da primeira classe vão ser consequência simples da seguinte propriedade elementar.

III.2.1 **(Resultado básico elementar)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in X$. Tem-se então:

a) Suponhamos que f *tem máximo em* a, isto é, que $f(a)$ é máximo de f ou, equivalentemente, que $f(x) \leq f(a)$, para cada $x \in X$. Se a for ponto de acumulação à direita de X e f tiver derivada à direita em a, então $f'(a^+) \leq 0$. Se a for ponto de acumulação à esquerda de X e f tiver derivada à esquerda em a, então $f'(a^-) \geq 0$. Em particular (*teorema de Fermat*), se a for ponto de acumulação à esquerda e à direita de X e f for derivável em a, então $f'(a) = 0$.



b) Suponhamos que f *tem mínimo em* a, isto é, que $f(a)$ é mínimo de f ou, equivalentemente, que $f(x) \geq f(a)$, para cada $x \in X$. Se a for ponto de acumulação à direita de X e f tiver derivada à direita em a, então $f'(a^+) \geq 0$. Se a for ponto de acumulação à esquerda de X e f tiver derivada à esquerda em a, então $f'(a^-) \leq 0$. Em particular (*teorema de Fermat*), se a for ponto de acumulação à esquerda e à direita de X e f for derivável em a, então $f'(a) = 0$.

Dem: a) Por hipótese, tem-se $f(x) \leq f(a)$, para cada $x \in X$ e portanto, sendo $X_{>a}$ (respetivamente $X_{<a}$) o conjunto dos elementos de X maiores (respetivamente menores) que a, tem-se $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$, para cada $x \in X_{>a}$, e $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$, para cada $x \in X_{<a}$. Podemos assim concluir de I.5.3 que, se a for ponto de acumulação à direita de X e f tiver derivada à direita em a,

$$f'(a^+) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A_{>a}}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$$

e que, se a for ponto de acumulação à esquerda de X e f tiver derivada à esquerda em a,

$$f'(a^-) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A_{<a}}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0.$$

No caso em que f é derivável em a, simultaneamente ponto de acumulação à esquerda e à direita de X, vai-se ter $f'(a) = f'(a^+) = f'(a^-)$ e portanto, pelo que vimos atrás, $f'(a) \leq 0$ e $f'(a) \geq 0$, donde $f'(a) = 0$.

b) Por hipótese, tem-se $f(x) \geq f(a)$, para cada $x \in X$ e portanto tem-se $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$, para cada $x \in X_{>a}$, e $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$, para cada $x \in X_{<a}$. Como em a), podemos assim concluir que, se a for ponto de acumulação à direita de X e f tiver derivada à direita em a,

$$f'(a^+) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A_{>a}}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$

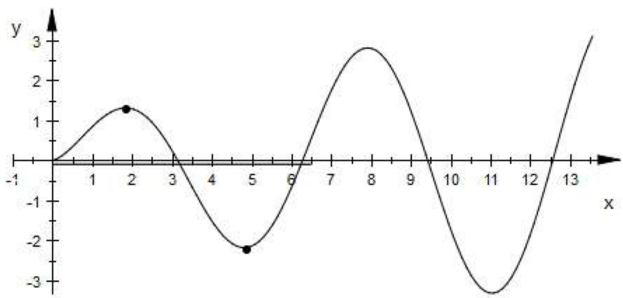
e que, se a for ponto de acumulação à esquerda de X e f tiver derivada à esquerda em a,

$$f'(a^-) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A_{<a}}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0.$$

Como em a), no caso em que f é derivável em a, simultaneamente ponto de acumulação à esquerda e à direita de X, vai-se ter, pelo que vimos atrás, $f'(a) \geq 0$ e $f'(a) \leq 0$, donde $f'(a) = 0$. □

III.2.2 **(Notas) 1)** Com frequência, o domínio X da função que estamos a considerar é um intervalo não trivial. Nesses casos, a extremidade esquerda é ponto de acumulação à direita de X, a extremidade direita é ponto de acumulação à esquerda de X e os pontos de X que não são extremidades (pontos interiores do intervalo) são simultaneamente pontos de acumulação à esquerda e à direita de X.

2) É frequente aplicar-se o resultado precedente não diretamente à função que estamos a estudar mas à sua restrição a um subconjunto conveniente do domínio, lembrando que a existência de derivada num certo ponto para a função original implica a existência de derivada, com igual valor, da sua restrição, desde que ainda tenhamos um ponto de acumulação do domínio da restrição. Por exemplo, o estudante já terá tido ocasião de aplicar a conclusão do teorema de Fermat (derivada nula) a pontos em que a função não tem máximo nem mínimo, mas apenas máximo ou mínimo relativos.



O enunciado que referimos pode ainda ser aplicado nestes casos, reparando que a restrição da função a um subconjunto conveniente já atinge máximo ou mínimo nos pontos em questão.

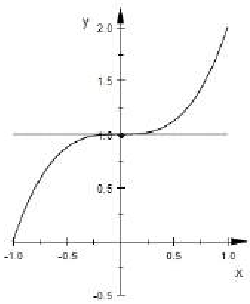
III.2.3 **(Monotonia e derivadas)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in X$. Tem-se então:

a) Suponhamos que a função f é crescente. Se a for ponto de acumulação à direita de X e f tiver derivada à direita em a, então $f'(a^+) \geq 0$. Se a for ponto de acumulação à esquerda de X e f tiver derivada à esquerda em a, então $f'(a^-) \geq 0$. Em particular, se a for ponto de acumulação de X e f for derivável em a, então $f'(a) \geq 0$.

b) Suponhamos que a função f é decrescente. Se a for ponto de acumulação à direita de X e f tiver derivada à direita em a, então $f'(a^+) \leq 0$. Se a for ponto de acumulação à esquerda de X e f tiver derivada à esquerda em a, então $f'(a^-) \leq 0$. Em particular, se a for ponto de acumulação de X e f for derivável em a, então $f'(a) \leq 0$.

Dem: Notemos, como temos feito, $X_{\geq a}$ e $X_{\leq a}$ o subconjuntos de X, com união X constituídos pelos $x \in X$ que verificam $x \geq a$ e $x \leq a$, respetivamente e lembremos que a é ponto de acumulação de X se, e só se, for ponto de acumulação de pelo menos um dos conjuntos $X_{\geq a}$ e $X_{\leq a}$ e que então a existência de derivada no ponto a arrasta a das correspondentes derivadas laterais e com o mesmo valor. As conclusões do enunciado são então uma consequência direta de III.2.1 e da observação que se f é crescente então as restrições de f a $X_{\geq a}$ e $X_{\leq a}$ têm respetivamente um mínimo e um máximo em a e que se f é decrescente então as restrições de f a $X_{\geq a}$ e $X_{\leq a}$ têm respetivamente um máximo e um mínimo em a. $\square$

III.2.4 **(Nota)** Poderia talvez pensar-se que, no caso em que a função $f: X \to \mathbb{R}$ é, por exemplo, mesmo estritamente crescente, pudesse concluír-se que necessariamente $f'(a) > 0$. Tal não é o caso, como o mostra o exemplo da função estritamente crescente $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 1$, para a qual se tem $f'(0) = 0$.



Vamos agora examinar o que se pode dizer "no sentido contrário", isto é, que conclusões se poderão tirar sobre a monotonia de f a partir das propriedades das suas derivadas. Para isso vamos trabalhar no contexto das funções definidas num intervalo que sejam contínuas em todo o domínio e deriváveis nos pontos interiores do intervalo. As conclusões sobre a monotonia vão resultar de dois teoremas que demonstramos primeiro e que serão aplicados também noutras ocasiões.

III.2.5 **(Teorema de Rolle)** Sejam $a < b$ em $\mathbb{R}$ e $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, derivável em todos os pontos $x \in \,]a,b[$ e tal que $f(a) = f(b)$. Existe então $c \in \,]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$. [120]

Dem: Uma vez que $[a,b]$ é fechado, limitado e não vazio, o teorema de Weierstrass (cf. II.1.11) garante que existem pelo menos um ponto de $[a,b]$ onde f atinge um valor máximo e um ponto de $[a,b]$ onde$f$ atinge um valor mínimo. Se esses valores máximo e mínimo coincidirem, a função é constante e portanto tem derivada nula não só num como em todos os pontos de $]a,b[$. Supondo agora que eles não coincidem, o facto de se ter $f(a) = f(b)$ implica que ou o máximo ou o mínimo é atingido num ponto $c \in \,]a,b[$ e então, pelo teorema de Fermat em III.2.1, tem-se $f'(c) = 0$. □

III.2.6 **(Exemplos)** Vamos examinar três exemplos que mostram como as diferentes hipóteses do teorema de Rolle são necessárias para se poder tirar a conclusão.

1) A função $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, é derivável, em particular contínua em todo o $x \in [0,1]$ e com $f'(x) = 1$, não existindo assim nenhum ponto de $]0,1[$ onde a derivada seja igual a 0. A hipótese que falha aqui é o facto de não se ter$f(0) = f(1)$.

2) A função $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$, ou, equivalentemente, por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ -x, & \text{se } -1 \le x < 0, \end{cases}$$

é contínua e verifica $f(-1) = f(1)$ e, no entanto, nos pontos em que é derivável (todos com a exceção de 0), a sua derivada é igual a -1 ou a 1 e portanto nunca é 0. A hipótese que falha agora resulta de no ponto 0, interior ao intervalo domínio, a função não ser derivável.

3) A função $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

[120] É claro que, uma vez que uma função derivável num ponto é sempre contínua nesse ponto, se tivéssemos exigido que a função fose também derivável nos pontos a e b não teria sido necessário explicitar a condição de continuidade. Pode parecer à primeira vista que não exigir a derivabilidade nas extremidades do domínio seja um pormenor de menor interesse mas, como veremos adiante aplicações do teorema de Lagrange, que é uma consequência do de Rolle, onde é importante não exigir a derivabilidade nas extremidades.

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 0, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

verifica $f(0) = f(1)$, é derivável em cada $x \in \,]0,1[$ e com $f'(x) = 1$, em particular não existe nenhum ponto em que a derivada seja 0. A hipótese que falha neste caso é a continuidade, uma vez que a função não é contínua no ponto 1.

III.2.7 **(Teorema de Lagrange)** Sejam $a < b$ em $\mathbb{R}$ e $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e derivável em todos os pontos $x \in \,]a,b[$. Existe então $c \in \,]a,b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$ [121]

Dem: Considere-se $m \in \mathbb{R}$ definido por

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Consideremos uma função auxiliar $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = f(x) - m(x - a)$$

que, tal como f, é contínua e derivável em cada $x \in \,]a,b[$, tendo-se

$$g'(x) = f'(x) - m.$$

O interesse de considerar esta função g está em que, tendo em conta a definição da constante m,

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - m(a - a) = f(a), \\ g(b) &= f(b) - m(b - a) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = \\ &= f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a), \end{aligned}$$

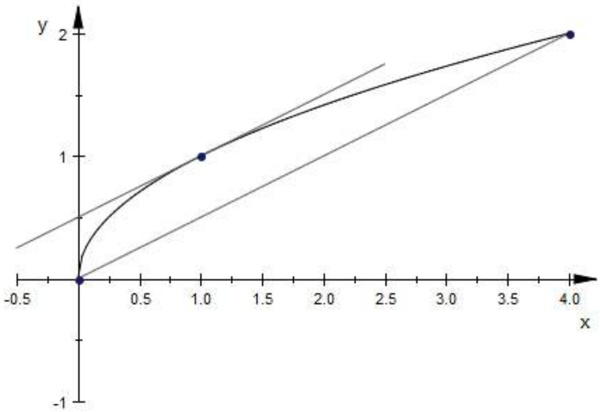
e portanto $g(a) = g(b)$. Podemos assim aplicar o teorema de Rolle à função g para concluir a existência de $c \in \,]a,b[$ tal que

$$0 = g'(c) = f'(c) - m,$$

ou seja, $f'(c) = m$, o que, lembrando a definição de m, é precisamente a conclusão pretendida. □

[121] Relativamente ao teorema de Rolle, dispensámos a hipótese de se ter $f(a) = f(b)$ mas a conclusão deixou de ser a existência de um ponto interior com derivada igual a 0. Repare-se que, no caso em que $f(a) = f(b)$, a conclusão do teorema de Lagrange traduz-se por $f'(c) = 0$, pelo que o teorema de Rolle acaba por ser um caso particular do de Lagrange que só foi necessário, como vamos ver, para demonstrar este (podíamos ter-lhe dado o nome de Lema de Rolle).

III.2.8 **(Nota)** A conclusão do teorema de Lagrange tem uma interpretação geométrica interessante: Uma vez que que o quociente $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ é o declive da secante ao gráfico de f que passa pelos pontos de abcissas a e b e que $f'(c)$ é o declive da tangente ao gráfico no ponto de abcissa c, o que o teorema de Lagrange afirma é a existência de um ponto interior onde a tangente ao gráfico é paralela à secante que une as extremidades do gráfico.



Existe ainda uma outra interpretação do teorema de Lagrange que porventura alguns considerarão menos interessante: Lembrando que a derivada instantânea de um veículo pode ser interpretada como sendo a derivada da função "distância precorrida", se um veículo passar em dois identificadores de Via Verde que distam 100 Km um do outro com um intervalo de meia hora, a polícia poderá deduzir que nalgum momento a velocidade foi 200 Km/h e passar o correspondente auto de contravenção[122].

III.2.9 **(Corolário do teorema de Lagrange)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função contínua e derivável nos pontos interiores do intervalo. Dados $a \neq b$ em X, existe c entre a e b tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Dem: No caso em que $a < b$ a conclusão resulta de aplicar o teorema de Lagrange à restrição de f ao intervalo $[a,b] \subset X$, cujos pontos interiores são também pontos interiores de X. O caso em que $a > b$ reduz-se ao anterior, se

[122]Foi referido na comunicação social que o teorema de Lagrange já chegou ao conhecimento das autoridades e que estas estão a considerar a hipótese de o utilizar da forma descrita.

reparamos que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}. \qquad \square$$

III.2.10 **(Limite de derivada é ainda derivada)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo não trivial, $a \in X$ e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função contínua, derivável em todos os pontos $x \neq a$ em X e tal que exista o limite

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f'(x)=\ell \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Então f tem derivada no ponto a e $f'(a)=\ell$, portanto f é derivável em a se, e só se, $\ell \in \mathbb{R}$.

Dem: No caso em que a não é extremidade direita de X, podemos aplicar III.2.9 à restrição de f ao intervalo $X_{\geq a}$ para deduzir a existência para cada $x>a$ em X de um real $c(x)$ com $a<c(x)<x$ tal que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c(x));$$

Por enquadramento, tem-se $\lim_{x\to a^+} c(x)=a$ e daqui resulta, tendo em conta a hipótese e o teorema sobre o limite da função composta, que existe a derivada à direita

$$f'(a^+)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+} f'(c(x))=\ell.$$

Analogamente, no caso em que a não é extremidade esquerda de X, podemos aplicar III.2.9 à restrição de f ao intervalo $X_{\leq a}$ para deduzir a existência para cada $x<a$ em X de um real $c(x)$ com $x<c(x)<a$ tal que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c(x));$$

Por enquadramento, tem-se $\lim_{x\to a^-} c(x)=a$ e daqui resulta, tendo em conta a hipótese e o teorema sobre o limite da função composta, que existe a derivada à esquerda

$$f'(a^-)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^-} f'(c(x))=\ell.$$

No caso em que a não é extremidade de X, o facto de f ter derivadas à direita e à esquerda no ponto a, ambas iguais a ℓ, implica que f tem derivada ℓ nesse ponto. $\square$

III.2.11 **(Derivadas e monotonia)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Tem-se então:

a) Se para cada ponto interior x do intervalo X a função f é derivável em x e

$f'(x) \geq 0$ então a função f é crescente;
b) Se para cada ponto interior x do intervalo X a função f é derivável em x e $f'(x) > 0$ então a função f é estritamente crescente;
c) Se para cada ponto interior x do intervalo X a função f é derivável em x e $f'(x) \leq 0$ então a função f é decrescente;
d) Se para cada ponto interior x do intervalo X a função f é derivável em x e $f'(x) < 0$ então a função f é estritamente decrescente.
Dem: Sejam $a < b$ arbitrários em X. Do corolário do teorema de Lagrange concluímos a existência de $c \in]a, b[$ tal que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$, por outras palavras, tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Sob as hipóteses de a) tem-se $f'(c) \geq 0$, donde $f(b) - f(a) \geq 0$, ou seja, $f(a) \leq f(b)$ o que, tendo em conta a arbitrariedade de a e b, implica que f é crescente. Sob as hipóteses de b) tem-se $f'(c) > 0$, donde $f(b) - f(a) > 0$, ou seja, $f(a) < f(b)$ o que implica que f é estritamente crescente. Sob as hipóteses de c) tem-se $f'(c) \leq 0$, donde $f(b) - f(a) \leq 0$, ou seja, $f(a) \geq f(b)$ o que implica que f é decrescente. Sob as hipóteses de d) tem-se $f'(c) < 0$, donde $f(b) - f(a) < 0$, ou seja, $f(a) > f(b)$ o que implica que f é estritamente decrescente. □

III.2.12 **(Funções com derivada 0)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f: X \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que, para cada $x \in X$, $f'(x) = 0$. Tem-se então que f é uma função constante.[123]
Dem: Podíamos apresentar uma justificação análoga às da demonstração precedente, mas também se pode observar que temos uma aplicação direta das alineas a) e c) deste, uma vez que por ser simultaneamente $f'(x) \geq 0$ e $f'(x) \leq 0$, podemos concluir que f é simultaneamente crescente e decrescente, portanto constante. □

O resultado precedente vai ter uma importância fundamental em várias situações da Análise Matemática, como por exemplo em relação com a noção de primitiva de uma função, que será abordada na próxima secção. Examinamos a seguir dois exemplos interessantes de aplicação deste resultado. O primeiro parte da observação de que a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x$ goza de uma propriedade ímpar, a de que se tem $f'(x) = f(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Poderíamos ser levados a conjeturar se esta será a única função $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com esta propriedade[124] mas facilmente

[123] A recíproca deste resultado já era conhecida, mesmo sem a hipótese de o domínio ser um intervalo: Uma função constante tem derivada 0 em todos os pontos do domínio que são pontos de acumulação deste.
[124] A igualdade $f'(x) = f(x)$, uma relação que se requer entre uma função e a sua derivada, é um exemplo daquilo a que se dá o nome de uma *equação diferencial*. O estudo geral das equações diferenciais, um assunto de grande interesse na Matemática e nas suas aplicações será encontrado mais adiante no decorrer da licenciatura.

constatamos que a função de valor constante 0 também a tem e que isso também acontece, para cada constante real a, com a função definida por $f(x) = ae^x$. O que é interessante é que, como verificamos a seguir, não há mais exemplos de funções nestas condições para além dos que acabamos de referir. No segundo exemplo verificamos que, se um par de funções $S, C: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem um comportanto semelhante ao do seno e do cosseno no que respeita à derivação, então elas têm que ter uma certa forma, envolvendo o seno e o cosseno, que referiremos a seguir.

III.2.13 **(Funções que coincidem com a sua derivada)** Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável em cada ponto $x \in \mathbb{R}$ e com $f'(x) = f(x)$. Existe então uma constante $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ae^x$, para cada $x \in \mathbb{R}$.

Dem: Consideremos uma nova função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ e reparemos que, pela regra de derivação do quociente, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{(e^x)^2} = 0.$$

A função g tem assim um valor constante a e a identidade $a = g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ diz-nos precisamente que $f(x) = ae^x$. □

III.2.14 **(Funções com um comportamento semelhante ao do seno e do cosseno)** Sejam $S: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $C: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções[125] deriváveis em cada $x \in \mathbb{R}$ e com

(1) $$S'(x) = C(x), \quad C'(x) = -S(x).$$ [126]

Existem então duas constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

(2) $$\begin{aligned} S(x) &= a\mathrm{sen}(x) + b\cos(x), \\ C(x) &= a\cos(x) - b\mathrm{sen}(x), \end{aligned}$$

em particular se for $S(0) = 0$ e $C(0) = 1$ tem-se necessariamente $S(x) = \mathrm{sen}(x)$ e $C(x) = \cos(x)$.

Observe-se a propósito que, dadas duas constantes $a, b \in \mathbb{R}$, as funções S e C definidas por (2) verificam efetivamente as condições (1).

Dem: Consideremos duas funções auxiliares $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{sen}(x)S(x) + \cos(x)C(x), \\ g(x) &= \cos(x)S(x) - \mathrm{sen}(x)C(x). \end{aligned}$$

Por derivação, obtemos

[125]Reparar que as letras que estamos a utilizar para designar estas funções destinam-se a sublinhar a semelhança que estas têm com o seno e o cosseno que conhecemos.

[126]Estas igualdades constituem um exemplo do que se costuma *chamar um sistema de equações diferenciais*.

$$f'(x) = \text{cos}(x)S(x) + \text{sen}(x)C(x) - \text{sen}(x)C(x) - \text{cos}(x)S(x) = 0,$$
$$g'(x) = -\text{sen}(x)S(x) + \text{cos}(x)C(x) - \text{cos}(x)C(x) + \text{sen}(x)S(x) = 0,$$

pelo que, como antes, temos duas funções constantes ou seja, existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que para cada $x \in \mathbb{R}$

$$\text{sen}(x)S(x) + \text{cos}(x)C(x) = a,$$
$$\text{cos}(x)S(x) - \text{sen}(x)C(x) = b.$$

Multiplicando ambos os membros da primeira igualdade por sen(x), ambos os membros da segunda por cos(x) e somando os resultados, obtemos

$$\text{sen}^2(x)S(x) + \text{sen}(x)\text{cos}(x)C(x) + \text{cos}^2(x)S(x) - \text{sen}(x)\text{cos}(x)C(x) =$$
$$= a\text{sen}(x) + b\text{cos}(x),$$

ou seja, $S(x) = a\text{sen}(x) + b\text{cos}(x)$. A segunda igualdade em (2), resulta desta última por derivação. Por fim, se for $S(0) = 0$ e $C(0) = 1$, deduzimos de (2) que

$$0 = S(0) = a\text{sen}(0) + b\text{cos}(0) = b,$$
$$1 = C(0) = a\text{cos}(0) - b\text{sen}(0) = a,$$

e portanto, mais uma vez por (2), $S(x) = \text{sen}(x)$ e $C(x) = \text{cos}(x)$. □

Vamos agora examinar uma generalização do teorema de Lagrange que será útil em várias situações, em particular para explicar o funcionamento de um método expedito de levantar indeterminações.

III.2.15 **(Teorema de Cauchy)** Sejam $a < b$ em $\mathbb{R}$ e $f, \varphi \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas e deriváveis em cada $x \in]a, b[$ e com $\varphi'(x) \neq 0$. Tem-se então $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ e existe $c \in]a, b[$ tal que

$$\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}.$$ [127]

Dem: Comecemos por reparar que o facto de se ter $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ é uma consequência do teorema de Lagrange, que nos garante que existe $d \in]a, b[$ tal que

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a} = \varphi'(d) \neq 0.$$

Tal como na demonstração do teorema de Lagrange, defina-se $m \in \mathbb{R}$ por

[127] Repare-se que, se tomarmos para φ a função definida por $\varphi(x) = x$, para a qual se tem $\varphi'(x) = 1$, a conclusão do teorema de Cauchy é precisamente a do teorema de Lagrange.

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}$$

e consideremos uma função auxiliar $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = f(x) - m(\varphi(x) - \varphi(a))$$

que, tal como f e φ, é contínua e derivável em cada $x \in \left]a, b\right[$, tendo-se

$$g'(x) = f'(x) - m\varphi'(x).$$

O interesse de considerar esta função g está em que, tendo em conta a definição da constante m,

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - m(\varphi(a) - \varphi(a)) = f(a), \\ g(b) &= f(b) - m(\varphi(b) - \varphi(a)) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}(\varphi(b) - \varphi(a)) = \\ &= f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a), \end{aligned}$$

e portanto $g(a) = g(b)$. Podemos assim aplicar o teorema de Rolle à função g para concluir a existência de $c \in \left]a, b\right[$ tal que

$$0 = g'(c) = f'(c) - m\varphi'(c),$$

ou seja, $\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = m$, o que, lembrando a definição de m, é precisamente a conclusão pretendida. □

III.2.16 **(Corolário do teorema de Cauchy)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f, \varphi\colon X \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas e deriváveis nos pontos x interiores do intervalo e com $\varphi'(x) \neq 0$. Dados $a \neq b$ em X, tem-se $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ *e* existe c entre a e b tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Dem: No caso em que $a < b$ a conclusão resulta de aplicar o teorema de Cauchy às restrições de f e φ ao intervalo $[a, b] \subset X$, cujos pontos interiores são também pontos interiores de X. O caso em que $a > b$ reduz-se ao anterior, se reparamos que

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f(a) - f(b)}{\varphi(a) - \varphi(b)}.$$ □

III.2.17 **(Regra de Cauchy para levantar indeterminações em limites à direita)** Sejam $a < b$ em $\mathbb{R}$ e $f, \varphi\colon \left]a, b\right[\to \mathbb{R}$ duas funções deriváveis, com $\varphi(x) \neq 0$ e $\varphi'(x) \neq 0$ para cada $x \in \left]a, b\right[$, verificando uma das duas hipóteses (H1) ou (H2)

(H1) $$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a}\varphi(x) = 0$$ [128]

(H2) $$\lim_{x\to a} |\varphi(x)| = \infty$$ [129]

e tais que exista o limite

(H3) $$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Tem-se então também

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \ell.$$ [130]

Dem: Vamos começar por supor que se verifica a hipótese (H1). Comecemos por prolongar as funções f e φ ao intervalo $[a, b[$ dando a ambos os prolongamentos (que notamos também f e φ) o valor 0 no ponto a e reparando que se obtêm assim funções com as mesmas derivadas nos pontos de $]a, b[$ e contínuas em a (embora não necessariamente deriváveis)[131]. Para cada $x \in]a, b[$ podemos então aplicar o teorema de Cauchy às restrições a $[a, x]$ das funções prolongadas f e φ para garantir a existência de um ponto intermédio, que notaremos $c(x) \in]a, x[$, tal que

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{f'(c(x))}{\varphi'(c(x))}.$$

De se ter $a < c(x) < x$ resulta, por enquadramento, que $\lim\limits_{x\to a} c(x) = a$ pelo que da hipótese (H3) resulta, como limite da função composta, que $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ também tem limite ℓ quando $x \to a$.
Vamos, por fim, tratar o caso menos direto em que é a hipótese (H2) que supomos verificada. Comecemos por estabelecer uma fórmula que teremos ocasião de aplicar duas vezes. Dados $x < y$ em $]a, b[$, vem

---

[128]Estas hipóteses são verificadas nos casos em que tentamos levantar indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$.
[129]Repare-se que, neste caso, não fazermos nenhuma exigência sobre o limite de $f(x)$. No entanto, nos caso mais frequente de utilização, estamos a tentar levantar um indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, e portanto f também tem limite infinito.
[130]Note-se que, apesar de, para fixar ideias, termos suposto um domínio do tipo $]a, b[$, este resultado pode ser aplicado ao caso de outros domínios que contenham um intervalo deste tipo, através da consideração de restrições para as funções.
[131]É aqui que intervêm as hipóteses (H1).

$$\frac{f(x)-f(y)}{\varphi(x)-\varphi(y)} = \frac{f(x)}{\varphi(x)-\varphi(y)} - \frac{f(y)}{\varphi(x)-\varphi(y)} =$$
$$= \frac{f(x)}{\varphi(x)}\,\frac{1}{1-\frac{\varphi(y)}{\varphi(x)}} - \frac{f(y)}{\varphi(x)}\,\frac{1}{1-\frac{\varphi(y)}{\varphi(x)}},$$

de onde deduzimos que

(1) $$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = (1-\frac{\varphi(y)}{\varphi(x)})\frac{f(x)-f(y)}{\varphi(x)-\varphi(y)} + \frac{f(y)}{\varphi(x)}.$$

Vamos agora separar a demonstração em vários casos, conforme o valor do limite ℓ.

A) Comecemos por examinar o caso em que $\ell = 0$. Seja $\delta > 0$ arbitrário. Pela condição (H3), podemos considerar $\varepsilon_1 > 0$ tal que, para cada $z \in\,]a,b[$ em $V_{\varepsilon_1}(a)$, $|\frac{f'(z)}{\varphi'(z)}| < \frac{\delta}{3}$. Fixemos agora $y \in\,]a,b[$ em $V_{\varepsilon_1}(a)$ e reparemos que, para cada $a < x < y$, o teorema de Cauchy garante que, para um certo c entre x e y, em particular em $V_{\varepsilon_1}(a)$,

(2) $$\Big|\frac{f(x)-f(y)}{\varphi(x)-\varphi(y)}\Big| = \Big|\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}\Big| < \frac{\delta}{3}.$$

Reparemos agora que, pela hipótese (H2), tem-se $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{|\varphi(x)|} = 0$, e portanto também

$$\lim_{x\to a}\Big|\frac{\varphi(y)}{\varphi(x)}\Big| = 0, \quad \lim_{x\to a}\Big|\frac{f(y)}{\varphi(x)}\Big| = 0,$$

o que nos permite considerar $\varepsilon_2 > 0$ e $\varepsilon_3 > 0$ tais que, para cada $x \in\,]a,b[$ em $V_{\varepsilon_2}(a)$, $\big|\frac{\varphi(y)}{\varphi(x)}\big| < 1$, donde $-1 < \frac{\varphi(y)}{\varphi(x)} < 1$ e $0 < 1-\frac{\varphi(y)}{\varphi(x)} < 2$, e, para cada $x \in\,]a,b[$ em $V_{\varepsilon_3}(a)$, $\big|\frac{f(y)}{\varphi(x)}\big| < \frac{\delta}{3}$. Seja enfim $\varepsilon > 0$ o menor dos números ε_2, ε_3 e $y-a$ e examinemos o que se passa para cada $x \in\,]a,b[$ em $V_\varepsilon(a)$. Ora, tem-se, em particular, $x < y$ pelo que, tendo em conta (1) e (2),

$$\Big|\frac{f(x)}{\varphi(x)}\Big| \le \Big|1-\frac{\varphi(y)}{\varphi(x)}\Big|\Big|\frac{f(x)-f(y)}{\varphi(x)-\varphi(y)}\Big| + \Big|\frac{f(y)}{\varphi(x)}\Big| < 2\,\frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta.$$

Ficou assim provado que se tem efetivamente $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$.

B) Vamos agora examinar, mais geralmente, o caso em que $\ell \in \mathbb{R}$ é arbitrário. Para isso, consideramos uma nova função derivável $g\colon]a,b[\, \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - \ell\varphi(x)$, para a qual se tem

$$\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)-\ell\varphi'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x\to a}\Big(\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} - \ell\Big) = 0$$

pelo que, tendo em conta o caso particular estudado em A), tem-se

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{g(x)+\ell\varphi(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\varphi(x)} + \ell = 0+\ell = \ell.$$

C) Vamos agora examinar o caso em que $\ell = +\infty$. Seja $\delta > 0$ arbitrário. Pela condição (H3), considerando a vizinhança $V_{\frac{\delta}{3}}(+\infty)$, podemos considerar $\varepsilon_1 > 0$ tal que, para cada $z \in \,]a,b[$ em $V_{\varepsilon_1}(a)$, $|\frac{f'(z)}{\varphi'(z)}| > \frac{3}{\delta}$. Fixemos agora $y \in \,]a,b[$ em $V_{\varepsilon_1}(a)$ e reparemos que, para cada $a < x < y$, o teorema de Cauchy garante que, para um certo c entre x e y, em particular em $V_{\varepsilon_1}(a)$,

$$\textbf{(3)}\qquad \frac{f(x)-f(y)}{\varphi(x)-\varphi(y)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} > \frac{3}{\delta}.$$

Reparemos agora que, pela hipótese (H2), tem-se $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{|\varphi(x)|} = 0$, e portanto também

$$\lim_{x\to a}\left|\frac{\varphi(y)}{\varphi(x)}\right| = 0, \quad \lim_{x\to a}\left|\frac{f(y)}{\varphi(x)}\right| = 0,$$

o que nos permite considerar $\varepsilon_2 > 0$ e $\varepsilon_3 > 0$ tais que, para cada $x \in \,]a,b[$ em $V_{\varepsilon_2}(a)$, $\left|\frac{\varphi(y)}{\varphi(x)}\right| < \frac{1}{3}$, donde $\frac{\varphi(y)}{\varphi(x)} < \frac{1}{3}$ e $1 - \frac{\varphi(y)}{\varphi(x)} > \frac{2}{3}$, e, para cada $x \in \,]a,b[$ em $V_{\varepsilon_3}(a)$, $\left|\frac{f(y)}{\varphi(x)}\right| < \frac{1}{\delta}$ donde $\frac{f(y)}{\varphi(x)} > -\frac{1}{\delta}$. Seja enfim $\varepsilon > 0$ o menor dos números ε_2, ε_3 e $y-a$ e examinemos o que se passa para cada $x \in \,]a,b[$ em $V_\varepsilon(a)$. Ora, tem-se, em particular, $x < y$ pelo que, tendo em conta (1) e (3),

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} > \frac{2}{3}\times\frac{3}{\delta} - \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\delta},$$

ou seja, $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \in \mathrm{V}_\delta(+\infty)$. Ficou assim provado que se tem efetivamente $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = +\infty$.

D) Examinemos enfim o caso em que $\ell = -\infty$. Embora se pudesse fazer uma demonstração análoga à de C) vamos, em vez disso, aplicar o que se viu em C) com a função f substituída pela função derivável $g\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = -f(x)$, reparando que

$$\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{-f'(x)}{\varphi'(x)} = +\infty.$$

Pelo provado em C) tem-se assim

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = -\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\varphi(x)} = -\infty. \qquad \square$$

III.2.18 **(Nota)** Note-se que, para aplicar a regra, supõe-se que existe limite para o quociente das derivadas e concluímos daí a existência e valor do limite para o quociente das funções. Pode perfeitamente acontecer que o quociente das

funções tenha limite e que, no entanto o quociente das derivadas não o tenha (para um exemplo, ver a alínea f) do exercício III.2.19 adiante).
Note-se também que o facto de só termos referido no resultado precedente limites à direita em pontos finitos se destinou a não multiplicar ainda mais o comprimento do enunciado e o número de variantes do raciocínio para obter o resultado mais geral. Veremos em breve, por raciocínios triviais de redução ao caso dos limites à direita em pontos finitos, que o resultado anterior vale, com adaptações evidentes, para limites à esquerda em pontos finitos e para limites em $-\infty$ e em $+\infty$.

III.2.19 **(Exemplos) 1)** Tentemos determinar o limite

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^{17}-1}{x^5-2x+1}.$$

Uma vez que o numerador e o denominador têm ambos limite 0 quando $x \to 1^+$, podemos aplicar a regra de Cauchy (tomando, por exemplo o domínio $]1,2[$, já que 1 não é aderente a $[2,+\infty])$ para garantir que, se o limite no segundo membro existir,

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^{17}-1}{x^5-2x+1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{17x^{16}}{5x^4-2}.$$

Ora, por aplicação das regras usuais sobre os limites, vemos que o limite do segundo membro existe e é igual a $\frac{17}{3}$, pelo que este é o limite procurado.
2) Calculemos o limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)-1}{x^2}.$$

Com antes, o numerador e o denominador têm ambos limites 0 e considerando, por exemplo, como domínio $]0,\pi[$, vemos que, se o limite do segundo membro existir,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)-1}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\operatorname{sen}(x)}{2x}.$$

Este último limite existe e pode ser calculado a partir de um dos limites notáveis conhecidos (cf. III.1.21) ou, alternativamente, a partir de uma segunda aplicação da regra de Cauchy:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)-1}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\operatorname{sen}(x)}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\cos(x)}{2} = -\frac{1}{2}.$$

3) Alguém com demasiado entusiasmo pela regra de Cauchy determinou erradamente o seguinte limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\operatorname{sen}(x)}{1} = \frac{0}{1} = 0.$$

O erro veio da aplicação da regra de Cauchy num caso em que não se verifica nenhuma das hipóteses (H1) e (H2) (o denominador tem limite 0 mas o numerador não). O limite correto é simplesmente

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

4) Examinemos uma aplicação da regra de Cauchy para determinar o limite $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)$, que corresponde a uma indeterminação do tipo $0\times\infty$. Uma primeira ideia é transformá-la numa indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, reparando que

$$x\ln(x) = \frac{x}{\frac{1}{\ln(x)}},$$

onde o numerador e o denominador principais têm ambos limite 0. Só que, por aplicação da regra de Cauchy ficamos reduzidos ao cálculo do limite quando $x\to 0^+$ de

$$\frac{1}{\frac{1}{x}\times\frac{-1}{\ln(x)^2}} = \frac{-x}{\frac{1}{\ln(x)^2}},$$

que se vê claramente ter ainda "pior aspeto" que o de partida, sendo também claro que continuar a aplicar a regra de Cauchy não vai melhorar as coisas. A solução é neste caso transformar a expressão original não numa indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ mas numa do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Obtemos assim, por aplicação da regra de Cauchy com a hipótese (H2),

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0.$$

Como anunciámos atrás, vamos agora enunciar versões da regra de Cauchy para os limites à esquerda e para os limites em $+\infty$ e em $-\infty$, constatando-se que elas se podem obter por aplicação do resultado já estabelecido para os limites à direita. Lembrando a relação entre limites num ponto e limites laterais nesse pontos, é claro que a regra de Cauchy também poderá ser utilizada para a determinação de limites não laterais num ponto.

III.2.20 **(Regra de Cauchy para levantar indeterminações em limites à esquerda)** Sejam $a<b$ em $\mathbb{R}$ e $f,\varphi\colon]a,b[\to\mathbb{R}$ duas funções deriváveis, com $\varphi'(x)\neq 0$ para cada $x\in]a,b[$, verificando uma das duas hipóteses (H1) ou (H2)

(H1) $$\lim_{x\to b} f(x) = 0 \quad\text{e}\quad \lim_{x\to b}\varphi(x) = 0$$

(H2) $$\lim_{x\to b} |\varphi(x)| = \infty$$

e tais que exista o limite

(H3) $$\lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Tem-se então também

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \ell.$$ [132]

Dem: Sejam $g, \psi\colon]-b, -a[\to \mathbb{R}$ as funções deriváveis definidas por $g(y) = f(-y)$ e $\psi(y) = \varphi(-y)$, para as quais $g'(y) = -f'(-y)$ e $\psi'(y) = -\varphi'(-y) \neq 0$ e que se constata, pelo resultado sobre o limite da função composta, que verificam uma das hipóteses (H1) ou (H2), para $y \to -b$. Uma vez que

$$\lim_{y\to -b} \frac{g'(y)}{\psi'(y)} = \lim_{y\to -b} \frac{-f'(-y)}{-\psi'(-y)} = \lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \ell,$$

podemos aplicar III.2.17 para concluir que

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{y\to -b} \frac{f(-y)}{\varphi(-y)} = \lim_{y\to -b} \frac{g(y)}{\psi(y)} = \ell.$$ □

III.2.21 **(Regra de Cauchy para levantar indeterminações em limites em $+\infty$)** Sejam $a > 0$ em $\mathbb{R}$ e $f, \varphi\colon]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ duas funções deriváveis, com $\varphi'(x) \neq 0$ para cada $x \in]a, +\infty[$, verificando uma das duas hipóteses (H1) ou (H2)

(H1) $$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} \varphi(x) = 0$$

(H2) $$\lim_{x\to +\infty} |\varphi(x)| = \infty$$

e tais que exista o limite

(H3) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Tem-se então também

[132]Note-se que, apesar de, para fixar ideias, termos suposto um domínio do tipo $]a, b[$, este resultado pode ser aplicado ao caso de outros domínios que contenham um intervalo deste tipo, através da consideração de restrições para as funções.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \ell.$$ [133]

Dem: Sejam $g, \psi\colon]0, \frac{1}{a}[\to \mathbb{R}$ as funções definidas por $g(y) = f(\frac{1}{y})$ e $\psi(y) = \varphi(\frac{1}{y})$, que são deriváveis, com

$$g'(y) = -\frac{1}{y^2}\, f'(\frac{1}{y}), \quad \psi'(y) = -\frac{1}{y^2}\, \varphi'(\frac{1}{y}) \neq 0$$

e verificam uma das hipóteses (H1) ou (H2), para $y \to 0$. Uma vez que

$$\lim_{y\to 0} \frac{g'(y)}{\psi'(y)} = \lim_{y\to 0} \frac{f'(\frac{1}{y})}{\psi'(\frac{1}{y})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \ell,$$

podemos aplicar III.2.17 para concluir que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{y\to 0} \frac{f(\frac{1}{y})}{\varphi(\frac{1}{y})} = \lim_{y\to 0} \frac{g(y)}{\psi(y)} = \ell. \qquad \square$$

III.2.22 **(Regra de Cauchy para levantar indeterminações em limites em $-\infty$)** Sejam $b < 0$ em $\mathbb{R}$ e $f, \varphi\colon]-\infty, b[\to \mathbb{R}$ duas funções deriváveis, com $\varphi'(x) \neq 0$ para cada $x \in]-\infty, b[$, verificando uma das duas hipóteses (H1) ou (H2)

(H1) $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = 0$$

(H2) $$\lim_{x\to-\infty} |\varphi(x)| = \infty$$

e tais que exista o limite

(H3) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Tem-se então também

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \ell.$$ [134]

Dem: Sejam $g, \psi\colon]-b, +\infty[\to \mathbb{R}$ as funções deriváveis definidas por

[133]Note-se que, apesar de, para fixar ideias, termos suposto um domínio do tipo $]a, +\infty[$, com $a > 0$, este resultado pode ser aplicado ao caso de outros domínios que contenham um intervalo deste tipo, através da consideração de restrições para as funções.

[134]Note-se que, apesar de, para fixar ideias, termos suposto um domínio do tipo $]-\infty, b[$, com $b < 0$, este resultado pode ser aplicado ao caso de outros domínios que contenham um intervalo deste tipo, através da consideração de restrições para as funções.

$g(y) = f(-y)$ e $\psi(y) = \varphi(-y)$, para as quais $g'(y) = -f'(-y)$ e $\psi'(y) = -\varphi'(-y) \neq 0$ e que verificam uma das hipóteses (H1) ou (H2), para $y \to +\infty$. Uma vez que

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{g'(y)}{\psi'(y)} = \lim_{y\to+\infty} \frac{-f'(-y)}{-\psi'(-y)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \ell,$$

podemos aplicar III.2.21 para concluir que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{y\to+\infty} \frac{f(-y)}{\varphi(-y)} = \lim_{y\to+\infty} \frac{g(y)}{\psi(y)} = \ell. \qquad \square$$

Exercícios

★ Ex III.2.1 **(Versão incrementada do teorema de Lagrange)** Sejam $a < b$ em $\mathbb{R}$ e $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e derivável à esquerda e à direita em todos os pontos $x \in \,]a,b[$. Mostrar que existe então $c \in \,]a,b[$ tal que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ seja igual a uma das derivadas laterais $f'(c^+)$ e $f'(c^-)$ ou esteja entre estas duas. **Sugestão:** Proceder como na demonstração do teorema de Lagrange, depois de enunciar e demonstrar uma versão incrementada do teorema de Rolle.

Ex III.2.2 Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $M \geq 0$ tal que, para cada ponto interior x do intervalo X, f seja derivável em x e com $|f'(x)| \leq M$.

a) Utilizar o teorema de Lagrange para mostrar que, quaisquer que sejam $a, b \in X$,

$$|f(b) - f(a)| \leq M\,|b - a|.$$

b) Sejam $a \in X$ fixado e $\delta > 0$. A continuidade de f no ponto a garante a existência de $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $x \in X$ na vizinhança $V_\varepsilon(a)$, $f(x)$ pertence à vizinhança $V_\delta(f(a))$, mas não nos diz nada sobre a forma como podemos explicitar um tal ε. Mostrar que, com as hipóteses que estamos a fazer, pode-se tomar $\varepsilon = \frac{\delta}{M}$ (se $M > 0$, senão qualquer ε serve) e deduzir, em particular, que a função f é uniformemente contínua.

Ex III.2.3 Mostrar que equação $x^3 + 3x - 1 = 0$ tem uma única solução e que esta pertence ao intervalo $]0,1[$.

Ex III.2.4 Utilizar o teorema de Lagrange para mostrar que dados números reais a, b, com $0 < a \leq b$, tem-se

$$\frac{b-a}{b} \leq \ln\left(\frac{b}{a}\right) \leq \frac{b-a}{a}.$$

Ex III.2.5 Utilizar o teorema de Lagrange para mostrar que:

a) Para cada $x > 0$,

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

b) Quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|\text{sen}(x) - \text{sen}(y)| \leq |x - y|.$$

Ex III.2.6 **(Método alternativo de examinar o exemplo em I.4.13)** Mostrar que a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$ é estritamente crescente e determinar o seu contradomínio utilizando os seus limites em $-\infty$ e em $+\infty$. Determinar em seguida a função inversa f^{-1}, reparando na razão por que os cuidados tidos no exemplo referido não são agora necessários.

★ Ex III.2.7 **(Versão de III.2.11 com pontos excecionais)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo, X_0 um conjunto finito de pontos interiores do intervalo X (pontos excecionais) e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostrar que:

a) Se para cada ponto interior x do intervalo X não pertencente a X_0 a função f é derivável em x e com $f'(x) \geq 0$ então a função f é crescente;

b) Se para cada ponto interior x do intervalo X não pertencente a X_0 a função f é derivável em x e com $f'(x) > 0$ então a função f é estritamente crescente;

c) Se para cada ponto interior x do intervalo X não pertencente a X_0 a função f é derivável em x e com $f'(x) \leq 0$ então a função f é decrescente;

d) Se para cada ponto interior x do intervalo X não pertencente a X_0 a função f é derivável em x e com $f'(x) < 0$ então a função f é estritamente decrescente.

Sugestão: Fazer a demonstração por indução no número n de pontos excecionais, reparando que o caso $n = 0$ é o resultado III.2.11 já conhecido. Sendo a o menor ponto excecional, considerar a decomposição $X = X_{\leq a} \cup X_{\geq a}$, aplicando a conclusão do exercício I.4.9 e a hipótese de indução à restrição de f a $X_{\geq a}$.

Ex III.2.8 Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$. Verificar que esta função é estritamente crescente, apesar de existir um ponto do domínio em que a sua derivada é igual a 0.

Ex III.2.9 Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 2x + \cos(x)$.

a) Mostrar que f é estritamente crescente e sobrejetiva.

b) Determinar a derivada da função inversa f^{-1} no ponto 3π, assim como os pontos em que essa função inversa tem derivada igual a 1.

Ex III.2.10 Seja $f\colon]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ a função definida por $f(x) = x^x$. Determinar o contradomínio desta função a partir do estudo da sua monotonia e dos limites em 0 e em $+\infty$.

Ex III.2.11 Verificar para que valores de $b > 0$ a equação $b^x = x$ admite pelo menos uma solução e, dentre estes quais aqueles para os quais essa solução é única.

Ex III.2.12 Estudar a monotonia e os limites em 0 e em $+\infty$ da função f definida por

$$f(x) = \frac{e^x}{x^e}$$

e concluir, sem utilizar a calculadora, qual dos dois números e^π e π^e é o maior. Justificar também que existem dois, e só dois, valores de $x \in]0, +\infty[$ tais que $e^{x-1} = x^e$.

★ Ex III.2.13 **a)** Mostrar que a função $f\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x \ln\big(1 + \frac{1}{x}\big)$$

é estritamente crescente. **Sugestão:** Apesar de não ser talvez muito simples verificar que $f'(x) > 0$, concluir esse facto provando que a função $f'\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ é estritamente decrescente e calculando o seu limite em $+\infty$.
b) Deduzir de a) que a função $g\colon]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ definida por

$$g(x) = \big(1 + \frac{1}{x}\big)^x$$

é estritamente crescente e verificar que esta afirmação é mais forte do que a que afirma que a sucessão $n \mapsto \big(1 + \frac{1}{n}\big)^n$ é estritamente crescente (referimos em II.3.1 que ela é crescente).

Ex III.2.14 **(Generalização de III.2.13)** Dada uma constante $k \in \mathbb{R}$, é imediato constatar que, para cada $a \in \mathbb{R}$, a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ae^{kx}$ verifica a "equação diferencial" $f'(x) = kf(x)$. Verificar que estas são as únicas soluções desta equação diferencial.[135]

★ Ex III.2.15 **(Formulação alternativa de III.2.14)** Sejam $S\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $C\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções deriváveis em cada $x \in \mathbb{R}$ e com

(1) $$S'(x) = C(x), \quad C'(x) = -S(x).$$

a) Utilizando a conclusão de III.2.14, concluir a existência de $x_0 \in [0, 2\pi[$ tal

[135]Esta conclusão tem importantes aplicações, por exemplo, nas ciências da natureza. É frequente sermos levados a admitir que certas grandezas, como a massa de um corpo formado por uma substância radiativa, têm uma taxa de variação instantânea que deve ser proporcional ao valor da grandeza. O que acabamos de concluir diz-nos que essa grandeza é caracterizada por uma lei de variação do tipo $t \mapsto ae^{kt}$, onde a constante k é determinada pela constante de proporcionalidade envolvida e a constante a é o valor da grandeza no instante $t = 0$.

que $S(x_0) = 0$ e $C(x_0) \geq 0$. **Sugestão:** Aplicar o teorema de Cauchy-Bolzano ao intervalo $[0, \pi]$ para deduzir a existência de $x_1 \in [0, \pi[$ tal que $S(x_1) = 0$ e escolher então para x_0 um dos dois elementos x_1 e $x_1 + \pi$.
b) Aplicando de novo III.2.14, mas agora à funções $\widehat{S}$ e $\widehat{C}$ definidas por

$$\widehat{S}(t) = S(x_0 + t), \quad \widehat{C}(t) = C(x_0 + t),$$

concluir a existência de $c \geq 0$ tal que

$$S(x) = c\mathrm{sen}(x - x_0), \quad C(x) = c\cos(x - x_0).$$

Ex III.2.16 **(Um resultado do mesmo tipo que III.2.14) a)** Verificar que, dados números reais a, b, as funções $C, S \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

(1) $$C(x) = ae^x + be^{-x}, \quad S(x) = ae^x - be^{-x},$$

verificam o "sistema de equações diferenciais"

(2) $$S'(x) = C(x), \quad C'(x) = S(x).$$

b) Suponhamos agora que $C, S \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são duas funções deriváveis que verifiquem o sistema de equações diferenciais (2). Mostrar que existem números reais a, b tais que as funções C e S sejam definidas por (1).
Sugestão: Derivar as funções que a x associam respetivamente

$$S(x)\cosh(x) - C(x)\mathrm{senh}(x),$$
$$S(x)\mathrm{senh}(x) - C(x)\cosh(x),$$

para concluir que estas funções tomam valores constantes c, d respetivamente. Multiplicando a primeira por $\cosh(x)$, a segunda por $\mathrm{senh}(x)$ e subtraindo, concluir que $S(x) = c\cosh(x) - d\mathrm{senh}(x)$.

Ex III.2.17 **(Uma demonstração incorreta do teorema de Cauchy)** Apresentamos em seguida uma ideia para demonstrar o teorema de Cauchy a partir do de Lagrange que só tem o "pequeno problema" de não estar correta. O que se pede neste exercício é que se encontre onde está o erro:
Aplicando o teorema de Lagrange separadamente às funções f e φ concluímos a existência de um ponto $c \in]a, b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad \varphi'(c) = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a}$$

e daqui concluímos que

$$\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \frac{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}} = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}.$$

Ex III.2.18 **(Pergunta aparecida em prova de avaliação)** Para um certo $a \in \mathbb{R}$, a função $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x-\pi}, & \text{se } x \neq \pi \\ a, & \text{se } x = \pi \end{cases}$$

é contínua em $\mathbb{R}$.
a) Determinar o valor de a.
b) Calcular $f'(\pi)$.
c) Sendo $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $g(1) = 0$ e $g'(1) = 2$, determinar $(f \circ g)'(1)$.

Ex III.2.19 Determinar os seguintes limites:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0} \frac{3^x - 2^x}{x}\ ;$$
$$\text{b)}\ \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)(1-\ln(1-x))}{\ln(x)}\ ;$$
$$\text{c)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - x}{x - \operatorname{sen}(x)}\ ;$$
$$\text{d)}\ \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{e^{1/\ln(x)} - 1}\ ;$$
$$\text{e)}\ \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}}\ ;$$
$$\text{f)}\ \lim_{x\to +\infty} \frac{x + \operatorname{sen}(x)}{x+1}\ ;$$
$$\text{g)}\ \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen}(x)^{\operatorname{sen}(x)}\ .$$

Ex III.2.20 Determinar o limite da sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$u_n = n\,(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}),$$

por aplicação do limite calculado na alínea a) do exercício III.2.19.

★ Ex III.2.21 Determinar o limite

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt{x^2 + x}\right).$$

Sugestão: “Tirar x para fora” de cada uma das raízes e transformar a expressão obtida numa indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Ex III.2.22 Seja $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \operatorname{arcsen}(x) + x\sqrt{1 - x^2}.$$

Utilizar a conclusão de III.2.10 para verificar que se tem

$$f'(x) = 2\sqrt{1 - x^2},$$

para cada $x \in [-1, 1]$, apesar de por utilização das regras de derivação só conseguirmos garantir este resultado para $x \in]-1, 1[$.

★ Ex III.2.23 **(Incursão pela possibilidade de definir a exponencial de um número complexo)** Sejam a, b dois números reais (que, para a alínea c), serão a parte real e o coeficiente da parte imaginária de um número complexo $z = a + bi$.

a) Verificar que a sucessão (r_n) definida por

$$r_n = \left(\sqrt{(1 + \frac{a}{n})^2 + (\frac{b}{n})^2}\right)^n$$

tem limite igual a e^a. **Sugestão:** Utilizar a regra de Cauchy para determinar o limite da função de variável real, definida numa vizinhança conveniente de $+\infty$,

$$\lim_{x \to +\infty} \left((1 + \frac{a}{x})^2 + (\frac{b}{x})^2\right)^{\frac{x}{2}}.$$ [136]

b) Verificar que a sucessão (u_n) (sucessão parcialmente definida no caso em que a é um inteiro menor que 0) definida por

$$u_n = n \arctan\left(\frac{\frac{b}{n}}{1 + \frac{a}{n}}\right) = n \arctan\left(\frac{b}{n + a}\right)$$

tem limite igual a b. [137] **Sugestão:** Utilizar a regra de Cauchy para determinar o limite da função de variável real, definida numa vizinhança conveniente de $+\infty$,

$$\lim_{x \to +\infty} x \arctan\left(\frac{b}{x + a}\right).$$

c) Para efeitos desta alínea, vamos dizer que uma sucessão (possivelmente parcialmente definida) de números complexos $u_n + v_n i$ tem como limite um número complexo $u + vi$ se as correspondentes sucessões de números reais (u_n) e (v_n) tiverem como limites u e v, respetivamente.[138] Verificar que, considerando o número complexo $z = a + bi$, a sucessão de números complexos

$$z_n = (1 + \frac{z}{n})^n$$

admite como limite o número complexo $e^a(\cos(b) + \operatorname{sen}(b)i)$ facto que, por comparação com a conclusão do exercício II.3.2, leva a que se defina a

[136] É claro que não faz sentido aplicar a regra de Cauchy para determinar diretamente o limite de uma sucessão.

[137] Veremos na alínea c) que esta sucessão, tal como a considerada na alínea a), não “cai propriamente do céu”.

[138] Esta definição é equivalente à que será encontrada mais tarde nos estudos.

exponencial do número complexo z por

$$\exp(z) = e^z = e^{a+bi} = e^a(\cos(b) + \operatorname{sen}(b)i).$$

Sugestão: Verificar que, pondo

$$s_n = \sqrt{(1+\frac{a}{n})^2 + (\frac{b}{n})^2}, \quad \alpha_n = \arctan\Big(\frac{\frac{b}{n}}{1+\frac{a}{n}}\Big)$$

(no caso em que a é inteiro menor que 0, apenas para $n \neq -a$), o complexo $1+\frac{z}{n}$ pode ser escrito na forma trigonométrica como

$$1 + \frac{z}{n} = s_n \times \big(\cos(\alpha_n) + \operatorname{sen}(\alpha_n)i\big)$$

e aplicar então a fórmula de Moivre e as conclusões das alíneas a) e b).[139]
Nota: Reparar que, no caso em que se toma $z = bi$ se obtém a *fórmula de Euler*

$$e^{bi} = \cos(b) + \operatorname{sen}(b)i,$$

onde o segundo membro é o que no ensino secundário é usualmente notado $\operatorname{cis}(b)$, fórmula que tem como caso particular a igualdade

$$e^{\pi i} = -1.$$

d) Verificar que as exponenciais dos números complexos verificam ainda a propriedade habitual $\exp(z+w) = \exp(z) \times \exp(w)$, e portanto também $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$. **Sugestão:** Utilizar as fórmulas conhecidas para o cosseno e o seno da soma de dois ângulos ou, alternativamente, a igualdade, já encontrada no ensino secundário, $\operatorname{cis}(\alpha+\beta) = \operatorname{cis}(\alpha) \times \operatorname{cis}(\beta)$ que, ela mesma, resulta das fórmulas referidas.

★ Ex III.2.24 **(Teorema de Darboux)** Sejam $a < b$ em $\mathbb{R}$ e $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função derivável em cada ponto do domínio. Se $d \in \mathbb{R}$ está entre $f'(a)$ e $f'(b)$ então existe $c \in \,]a,b[$ tal que $f'(c) = d$. **Sugestão:** No caso em que $f'(a) < d < f'(b)$ considerar a função $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - dx$, verificar que $g'(a) < 0$ e $g'(b) > 0$ e deduzir de III.2.1 que um ponto $c \in [a,b]$ onde g atinja o valor mínimo tem que pertencer a $]a,b[$ e portanto tem que verificar $g'(c) = d$. No caso em que $f'(a) > d > f'(b)$ fazer um raciocínio análogo ou aplicar o caso anterior considerando a função

[139] Poderá parecer estranho, embora não seja a primeira vez que encontremos esse facto que para calcular o limite de uma sucessão que se pode considerar puramente do âmbito da Análise Matemática tenhamos que passar pelas funções trigonométricas que, como já sublinhámos, são de natureza geométrica e, pior que isso, o próprio resultado dependa destas. Este facto não nos deve espantar muito, uma vez que quando se trabalhou com números complexos no ensino secundário, a forma trigonométrica de representação destes foi essencial para o estudo de muitas propriedades, como as que envolvem o cálculo de potências e de raízes.

$-f$.
Nota: Comparar este resultado com o teorema de Cauchy-Bolzano em II.1.15, resultado que implicaria aliás a nossa conclusão se estivéssemos a supor que $f' : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua, o que não estamos.

§3. Primitivas e aplicações geométricas.

III.3.1 Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo não trivial e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Diz-se que uma função $F : X \to \mathbb{R}$ é uma *primitiva* da função f se, para cada $x \in X$, F é derivável em x e com $F'(x) = f(x)$.
Repare-se na utilização do artigo indefinido “uma”: Não estamos, de modo nenhum, a afirmar que uma dada função não possa ter mais que uma primitiva. O enunciado a seguir aclara completamente essa questão.

III.3.2 Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo não trivial e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função, admitindo $F : X \to \mathbb{R}$ como primitiva. Tem-se então que as primitivas da função f são exatamente as funções $G : X \to \mathbb{R}$ da forma $G(x) = F(x) + c$, com $c \in \mathbb{R}$ constante.
Dem: Tendo em conta o facto de as constantes terem derivada 0 e de a derivada da soma ser a soma das derivadas, vemos que, se $G(x) = F(x) + c$, então $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$, o que mostra que G também é uma primitiva de f. Reciprocamente, se G é outra primitiva de f, tem-se, para cada $x \in X$,

$$(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

donde, tendo em conta III.2.12,[140] existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que, para cada $x \in \mathbb{R}$, $G(x) - F(x) = c$, ou seja, $G(x) = F(x) + c$. □

O conhecimento da primitiva duma função é muitas vezes importante, como veremos, para a modelação de certos problemas, por exemplo geométricos. No entanto, a determinação de uma primitiva para uma função é muitas vezes um problema menos simples que o da determinação de uma derivada uma vez que, para estas últimas, possuímos regras de derivação que nos permitem derivar quase todas as funções que nos aparecem na prática.
Apesar do que referimos sobre o défice de regras de primitivação, há duas regras de derivação (cf. III.1.7) que implicam trivialmente regras correspondentes de primitivação muito utilizadas.

III.3.3 **(Primitivação por decomposição)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo não trivial e $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções, admitindo $F, G : X \to \mathbb{R}$ como primitivas,

[140] Por isso a importância de exigirmos que o domínio seja um intervalo.

respetivamente. Tem-se então que a função $f+g\colon X\to\mathbb{R}$ admite a função $F+G\colon X\to\mathbb{R}$ como primitiva e, para cada constante $c\in\mathbb{R}$, a função $cf\colon X\to\mathbb{R}$ admite $cF\colon X\to\mathbb{R}$ como primitiva.

Apresentamos em seguida uma tabela com algumas primitivas, ditas imediatas, por terem sido obtidas simplesmente pelo método “Acho que me lembro de uma função que tinha esta derivada”, combinado eventualmente com uma das propriedades referidas em III.3.3.

III.3.4 **(Tabela com algumas primitivas “imediatas”)**

Função	Domínio	Primitiva	Notas
c	$x\in\mathbb{R}$	cx	$c\in\mathbb{R}$
x^n	$x\in\mathbb{R}$	$\frac{1}{n+1}\,x^{n+1}$	$n\in\mathbb{N}$
x^d	$x\in\,]0,+\infty[$	$\frac{1}{d+1}\,x^{d+1}$	$d\in\mathbb{R}$, $d\neq -1$
x^p	$x\in\,]-\infty,0[$	$\frac{1}{p+1}\,x^{p+1}$	$p\in\mathbb{Z}$, $p\neq -1$
$\frac{1}{x}$	$x\in\,]0,+\infty[$	$\ln(x)$	
e^x	$x\in\mathbb{R}$	e^x	
$\operatorname{sen}(x)$	$x\in\mathbb{R}$	$-\cos(x)$	
$\cos(x)$	$x\in\mathbb{R}$	$\operatorname{sen}(x)$	
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$x\in\,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$	$\tan(x)$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x\in\,]-1,1[$	$\operatorname{arcsen}(x)$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$x\in\mathbb{R}$	$\arctan(x)$	
$\operatorname{senh}(x)$	$x\in\mathbb{R}$	$\cosh(x)$	
$\cosh(x)$	$x\in\mathbb{R}$	$\operatorname{senh}(x)$	
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$x\in\mathbb{R}$	$\operatorname{arcsenh}(x)$	
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x\in\,]1,+\infty[$	$\operatorname{arccosh}(x)$	

Repare-se que as primitivas de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ e de $\frac{1}{1+x^2}$ têm uma característica singular: Apesar de estarmos a primitivar funções que são puramente do âmbito da Análise Matemática, as primitivas que encontrámos estão dependentes de uma definição geométrica que sai assim do contexto estrito da Análise Matemática. A afirmação de que cada uma destas funções admite uma primitiva não é assim uma afirmação que possamos considerar neste momento como demonstrada dentro do contexto puro da Análise Matemática. Uma tal demonstração pode efetivamente ser feita (cf. IV.3.28 e IV.3.31 adiante) mas apenas com instrumentos de que não dispomos de momento.

Note-se que a dificuldade com as primitivas é encontrar uma e que, se alguém nos aponta uma primitiva para uma função, será em geral muito simples saber se o resultado é ou não correto, bastando derivar a primitiva proposta para verificar se o resultado é ou não a função que queríamos primitivar. Trata-se de um fenómeno semelhante ao da determinação de uma solução de uma equação: O estudante possivelmente não conseguirá encontrar uma solução da equação

$$x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 2 = 0$$

mas se alguém lhe disser que $2 - \sqrt{3}$ é uma solução da equação, será bastante simples verificar que isso é verdade.

III.3.5 **(Exemplo de primitiva que ainda se pode classificar de imediata)** Pretendemos determinar uma primitiva da função $f\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^2 + \sqrt{x} - 3$. Uma vez que temos uma soma de três funções mais simples (aparecendo na tabela precedente), a primeira das quais multiplicada por uma constante, concluímos, por utilização de III.3.3, que será suficiente encontrar uma primitiva para cada uma dessas funções mais simples. Ora: **a)** Uma vez que a função x^2 admite a primitiva $\frac{1}{3}x^3$, a função $2x^2$ admite a primitiva $\frac{2}{3}x^3$; **b)** A função $\sqrt{x} = x^{1/2}$ admite a primitiva $\frac{1}{3/2}x^{3/2} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$; **c)** A função de valor constante -3 admite como primitiva a função $-3x$. Podemos assim concluir que a função $F\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 3x$ é uma primitiva da função f. Se pretendermos outra primitiva, basta somar uma constante à função que obtivémos, obtendo, por exemplo, a função $\widehat{F}$ definida por

$$\widehat{F}(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 3x - e^\pi.$$

III.3.6 **(Primitivação por partes)** O método de primitivação por partes é um método de primitivar que se baseia na regra de derivação dum produto em III.1.7. São dados um intervalo não trivial $X \subset \mathbb{R}$ e duas funções $f, g\colon X \to \mathbb{R}$, da primeira das quais se conhece uma primitiva $F\colon X \to \mathbb{R}$ e a segunda das quais admite uma derivada $g'\colon X \to \mathbb{R}$. A função que se pretende primitivar é a função $fg\colon X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)g(x)$. O método diz-nos que, se conseguirmos encontrar uma primitiva $H\colon X \to \mathbb{R}$ da função $x \mapsto F(x)g'(x)$ então a função $X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto F(x)g(x) - H(x)$ é uma primitiva da função fg.

Dem: Tendo em conta a regra de derivação do produto, vemos que a derivada da função $F(x)g(x) - H(x)$ está definida por

$$x \mapsto F'(x)g(x) + F(x)g'(x) - H'(x) = f(x)g(x). \qquad \square$$

III.3.7 **(Exemplos)** Repare-se que uma primitivação por partes de uma dada função não é um mero processo algorítmico: É preciso decompor a função dada como um produto de duas funções f e g, a primeira das quais saibamos primitivar, de modo que o produto da primitiva da primeira pela derivada da segunda seja mais fácil de primitivar. Vejamos o que se passa nalguns exemplos:

a) Tentemos encontrar por partes uma primitiva para a função $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x\text{sen}(x)$. Numa primeira tentativa tomemos, nas notações de III.3.6, $f(x) = x$, que tem uma primitiva $F(x) = \frac{x^2}{2}$, e $g(x) = \text{sen}(x)$, para a qual $g'(x) = \cos(x)$. Ficamos então com a necessidade de determinar uma primitiva da função $x \mapsto F(x)g'(x) = \frac{x^2}{2}\cos(x)$, o que parece ser uma tarefa ainda menos simples que a que tínhamos a partida. Façamos agora uma segunda tentativa, tomando $f(x) = \text{sen}(x)$, que tem uma primitiva $F(x) = -\cos(x)$, e $g(x) = x$, para a qual $g'(x) = 1$. Ficamos assim conduzidos a procurar uma primitiva da função $x \mapsto F(x)g'(x) = -\cos(x)$, o que não apresenta dificuldade. Obtemos assim como primitiva da função dada a função

$$x \mapsto F(x)g(x) - (-\text{sen}(x)) = -x\cos(x) + \text{sen}(x).$$

É claro que é muito simples confirmar o resultado: Derivando o resultado obtido obtém-se efetivamente a função dada à partida.

b) Para procurar uma primitiva para a função ln: $]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, utilizamos a decomposição $\ln(x) = 1 \times \ln(x)$, tomando assim $f(x) = 1$, com uma primitiva $F(x) = x$, e $g(x) = \ln(x)$, portanto $g'(x) = \frac{1}{x}$. Tem-se assim $F(x)g'(x) = 1$, com primitiva x, pelo que obtemos como primitiva de ln a função

$$x \mapsto x\ln(x) - x.$$

Mais uma vez, podemos facilmente confirmar que não nos enganámos derivando esta última função e constatando que obtemos a função cuja primitiva procurávamos.

c) O nosso objetivo é determinar uma primitiva H para a função $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x\cos(x)$. Tentamos, para isso, utilizar o método de primitivação por partes, com $f(x) = e^x$, com primitiva $F(x) = e^x$, e com $g(x) = \cos(x)$, para a qual $g'(x) = -\text{sen}(x)$, concluindo que, se tivermos uma primitiva $K: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da função $x \mapsto F(x)g'(x) = -e^x\text{sen}(x)$, bastará tomar para H a função

(1) $$H(x) = F(x)g(x) - K(x) = e^x\cos(x) - K(x).$$

Para procurarmos uma primitiva K da função $x \mapsto -e^x\text{sen}(x)$ utilizamos mais uma vez o método de primitivação por partes, agora com $f(x) = e^x$, com primitiva $F(x) = e^x$, e com $g(x) = -\text{sen}(x)$, e concluímos que, se tivermos uma primitiva $\widehat{H}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da função $x \mapsto F(x)g'(x) = -e^x\cos(x)$, bastará tomarmos para K a função

(2) $$K(x) = F(x)g(x) - K(x) = -e^x\text{sen}(x) - \widehat{H}(x).$$

Supondo agora que existe uma tal primitiva $\widehat{H}$, vemos que, uma vez que ambas as funções $\widehat{H}$ e $-H$ são primitivas de $x \mapsto -e^x\cos(x)$, existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $\widehat{H}(x) = -H(x) + c$ e, tendo em conta esta relação e substituindo (2) em (1), obtemos

$$H(x) = e^x\cos(x) - (-e^x\mathrm{sen}(x) + H(x) - c)$$

donde

$$2H(x) = e^x\cos(x) + e^x\mathrm{sen}(x) + c,$$
$$H(x) = \frac{1}{2}(e^x\cos(x) + e^x\mathrm{sen}(x)) + \frac{c}{2}.$$

Examinando o raciocínio feito, e uma vez que somando uma constante a uma primitiva se obtém outra primitiva, ficamos a saber que, se existir uma primitiva da função $x \mapsto -e^x\cos(x)$, o que é equivalente à existência de uma primitiva da função $x \mapsto e^x\cos(x)$, obtemos como primitiva desta última função a função definida por $x \mapsto \frac{1}{2}(e^x\cos(x) + e^x\mathrm{sen}(x))$. Em rigor, o nosso problema ainda não está resolvido porque, para concluir que esta função é uma primitiva precisámos da hipótese de existir uma primitiva, facto que neste momento não temos ainda instrumentos para garantir diretamente. No entanto temos uma solução muito simples para o nosso problema: Uma vez que temos um candidato a primitiva, para confirmarmos o resultado basta derivarmos esse candidato e verificar que obtemos efetivamente a função que queríamos primitivar, o que é uma tarefa que não oferece qualquer dificuldade.[141]

III.3.8 **(Primitivação por substituição)** Do mesmo modo que a primitivação por partes se baseia na regra de derivação de um produto a primitivação por substituição tem a sua raiz no teorema de derivação da função composta (cf. III.1.14). Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $Y \subset \mathbb{R}$ dois intervalos não triviais e $\varphi\colon Y \to X$ uma função derivável. Sejam $f\colon X \to \mathbb{R}$ e $F\colon X \to \mathbb{R}$ duas funções.

a) Se F é uma primitiva de f, então a função $F \circ \varphi\colon Y \to \mathbb{R}$, $y \mapsto F(\varphi(y))$, é uma primitiva da função $X \to \mathbb{R}$, $y \mapsto f(\varphi(y))\varphi'(y)$.

b) Suponhamos agora que $\varphi\colon Y \to X$ é monótona e bijetiva e que $\varphi'(y) \neq 0$, para cada $y \in Y$. Se $F \circ \varphi\colon Y \to \mathbb{R}$ é uma primitiva da função $X \to \mathbb{R}$, $y \mapsto f(\varphi(y))\varphi'(y)$, então F é uma primitiva de f.

Dem: a) Temos uma consequência direta do teorema de derivação da função composta: Uma vez que $F'(x) = f(x)$, para cada $x \in X$, tem-se, para cada $y \in Y$,

$$(F \circ \varphi)'(y) = F'(\varphi(y))\varphi'(y) = f(\varphi(y))\varphi'(y).$$

b) Comecemos por reparar que, por II.1.20 e I.4.22, a função monótona

---

[141] Esta última observação pode ser generalizada a outras situações: Não temos que ser muito cuidadosos com a validade dos raciocínios que fazemos quando procuramos encontrar uma primitiva, desde que, depois de obtido um resultado, derivemos este para confirmar que se obtém a função que queríamos primitivar.

$\varphi^{-1}: X \to Y$ é contínua, e portanto, tendo em conta III.1.18, é derivável. Uma vez que, por hipótese, $F \circ \varphi: Y \to \mathbb{R}$ é derivável, podemos concluir que

$$F = (F \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}: X \to \mathbb{R}$$

é também derivável. Tendo em conta a hipótese e o teorema de derivação da função composta, vemos agora que, para cada $y \in Y$,

$$F'(\varphi(y))\varphi'(y) = (F \circ \varphi)'(y) = f(\varphi(y))\varphi'(y)$$

e portanto, por ser $\varphi'(y) \neq 0$, $F'(\varphi(y)) = f(\varphi(y))$. Enfim, por φ ser bijetiva, podemos, para cada $x \in X$, considerar $y = \varphi^{-1}(x)$ na igualdade precedente para obter $F'(x) = f(x)$, o que mostra que F é uma primitiva da função f. □

III.3.9 **(Exemplos que aplicam a alínea a) de III.3.8)**

a) Tentemos encontrar uma primitiva da função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(y) = y\,\text{sen}(y^2)$. A função sen é uma das que conhecemos uma primitiva imediata mas neste caso temos a expressão sen(y^2) que poderia complicar a procura de uma primitiva. No entanto, como a derivada da função $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(y) = y^2$ é $\varphi'(y) = 2y$ e que a expressão sen(y^2) aparece multiplicada por y, somos levados a utilizar o método de primitivação por substituição (como se costuma dizer, fazemos $x = y^2$). Reparamos assim que se tem $g(y) = f(\varphi(y))\varphi'(y)$, onde $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por $f(x) = \frac{1}{2}\text{sen}(x)$ e tem assim uma primitiva $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = -\frac{1}{2}\cos(x)$, pelo que g admite a primitiva $G = F \circ \varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que está definida por $G(y) = -\frac{1}{2}\cos(y^2)$.

b) Pretendemos uma primitiva da função $g:]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $g(y) = \frac{1}{2y-2}$. Aqui, a função cuja primitiva conhecemos é a função $x \mapsto \frac{1}{x}$, de domínio $]0, +\infty[$, pelo que "fazemos $x = 2y - 2$" isto é, consideramos a função $\varphi:]1, +\infty[\to]0, +\infty[$, $\varphi(y) = 2y - 2$, com derivada $\varphi'(y) = 2$, e, escrevendo $g(y) = 2 \times (\frac{1}{2} \times \frac{1}{\varphi(y)})$, obtemos como primitiva de g a função $G:]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $G(y) = \frac{1}{2}\ln(2y - 2)$.

c) Para determinar uma primitiva da função tangente $\tan:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, reparamos que $\tan(y) = \frac{\text{sen}(y)}{\cos(y)}$, onde $\cos(y) > 0$ no intervalo referido, pelo que, "fazendo $x = \cos(y)$" e reparando que a derivada de $\cos(y)$ é $-\text{sen}(y)$, concluímos que aquela função tem uma primitiva $F:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ definida por

$$F(y) = -\ln(\cos(y)).$$

Antes de examinarmos alguns exemplos de primitivas que aplicam o referido na alínea b) de III.3.8, vamos debruçar-nos, ainda com a ajuda da alínea a) desse resultado, sobre métodos de obter algumas primitivas de funções que aparecem com frequência na prática, as frações racionais e as potências de funções trigonométricas. Fá-lo-emos apenas através de alguns exemplos mais simples, remetendo o estudante por exemplo para [4] ou [7] para um exame mais sistematizado destas primitivas.

III.3.10 **(Exemplos de primitivas de funções racionais)** Uma função definida num intervalo diz-se *racional* se puder ser obtida como quociente de duas funções polinomiais, em que o denominador, naturalmente, não se anula nesse intervalo.

a) Procuremos uma primitiva da função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{1+2x^2}.$$

Com o objetivo de nos aproximarmos de uma função cuja primitiva conhecemos, escrevemos

$$f(x) = \frac{1}{1+(\sqrt{2}x)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{1+(\sqrt{2}x)^2}$$

e então, como em III.3.9, com a substituição $y = \sqrt{2}x$, obtemos a primitiva $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}x).$$

b) Tentemos primitivar a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+x+1}.$$

Reparando que a derivada do denominador é $2x+1$, reescrevemos então f como soma de uma função que primitivaremos facilmente com outra função racional cujo numerador é constante:

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x+4}{x^2+x+1} = \frac{1}{2} \times \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{x^2+x+1}$$

Notando $f_1(x)$ e $f_2(x)$ a primeira e a segunda parcelas à direita, respetivamente, constatamos, tomando $y = x^2+x+1$ (expressão que só toma valores maiores que 0), que f_1 admite a primitiva F_1 definida por

$$F_1(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1).$$

Quanto a f_2, reparamos que

$$x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1$$

pelo que podemos pôr esta função “a jeito”:

$$f_2(x) = 2 \times \frac{1}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{3} \times \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}.$$

Obtemos assim uma primitiva F_2 de f_2 definida por

$$F_2(x) = \sqrt{3} \times \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

donde, finalmente, uma primitiva F de f definida por

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \sqrt{3} \times \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

c) Consideremos agora a função $f\colon]2,+\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x^3+x}{x^2-3x+2},$$

onde o denominador

$$x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$$

toma valores maiores que 0 no domínio. Uma boa ideia é fazer a divisão com resto do polinómio no numerador pelo polinómio no denominador, de modo a obter f como soma de uma função polinomial com um quociente de polinómios com o grau do numerador mais pequeno que o do denominador. Isso pode ser feito pelo algoritmo que o estudante possivelmente conhece (análogo ao algoritmo da divisão inteira de números) ou, alternativamente, pelo método de "ir acertando as contas"[142]:

$$\begin{aligned} x^3+x &= x(x^2-3x+2)+3x^2-x = \\ &= x(x^2-3x+2)+3(x^2-3x+2)+8x-6. \end{aligned}$$

Podemos assim escrever

$$f(x) = x+3+\frac{8x-6}{x^2-3x+2}$$

e, reparando que a derivada do denominador é $2x-3$ será útil[143] ainda escrever

$$f(x) = x+3+4\times\frac{2x-3}{x^2-3x+2}+\frac{6}{x^2-3x+2}.$$

Notemos $f_1(x)$ a soma das três primeiras parcelas e $f_2(x)$ a última. Fazendo

[142]Que, na realidade, corresponde ao algoritmo sem a sua apresentação gráfica.

[143]A estratégia passa por diminuir o grau do numerador na expressão que não sabemos primitivar.

$y = x^2 - 3x + 2$, já sabemos como obter uma primitiva F_1 de f_1, nomeadamente,

$$F_1(x) = \frac{x^2}{2} + 3x + 4\ln(x^2 - 3x + 2) =$$
$$= \frac{x^2}{2} + 3x + 4\ln(x-1) + 4\ln(x-2).$$

Quanto a f_2, começamos por reparar que $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ e a estratégia aconselhada é tentar encontrar uma decomposição

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2},$$

com a e b constantes reais a determinar. Reparando que esta identidade é equivalente a $1 = a(x-2) + b(x-1)$, ou ainda a

$$1 = (a+b)x - 2a - b,$$

sendo assim verificada se $a + b = 0$ e $-2a - b = 1$, sistema de equações que admite a solução $b = 1$ e $a = -1$.[144] Tem-se assim que

$$f_2(x) = \frac{6}{x^2 - 3x + 2} = \frac{-6}{x-1} + \frac{6}{x-2}$$

admite uma primitiva F_2 definida por

$$F_2(x) = -6\ln(x-1) + 6\ln(x-2)$$

pelo que obtemos finalmente uma primitiva F de f definida por

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - 2\ln(x-1) + 10\ln(x-2).$$ [145]

[144]Pode provar-se, embora não o façamos neste curso, que a possibilidade de encontrar uma decomposição do tipo procurado não foi uma questão de sorte. Em geral, utilizando um teorema de Bézout, que o estudante encontrará mais tarde no curso, seguido de um argumento simples utilizando a divisão com resto de polinómios, pode provar-se que, dados dois polinómios $P(x)$ e $Q(x)$ de graus maiores que 0 (no caso em análise com grau 1) que sejam primos entre si, no sentido de não serem divisíveis por um mesmo polinómio de grau maior que 0, existem necessariamente polinómios $A(x)$ e $B(x)$ com graus inferiores aos de $P(x)$ e $Q(x)$, respetivamente, (no caso em análise com grau 0) tais que $A(x)Q(x) + B(x)P(x) = 1$.

[145]Um caminho alternativo para chegarmos a uma primitiva consistiria em começar por tirar partido da decomposição

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$

para decompor a função dada como soma de duas funções racionais com os denominadores $x - 1$ e $x - 2$ e só então efetuar duas divisões para obter um polinómio somado

d) Consideremos agora a função $f\colon]-1,+\infty[\,\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{x^3+1}.$$

Como nos exemplos anteriores, tentamos decompor o denominador como produto de polinómios de grau inferior, reparando que podemos tomar para um deles o polinómio $x+1$, já que o denominador se anula para $x=-1$. Usando o método de "ir acertando as contas", que já utilizámos para o exemplo em c), vem

$$\begin{aligned} x^3+1 &= x^2\,(x+1) - x^2 + 1 = \\ &= x^2\,(x+1) - x\,(x+1) + x + 1 = \\ &= (x^2-x+1)\,(x+1). \end{aligned}$$

Seguidamente vamos tentar escrever

$$f(x) = \frac{1}{(x^2-x+1)\,(x+1)}$$

como soma de duas funções racionais com denominadores x^2-x+1 e $x+1$, respetivamente, e com numeradores com grau inferior aos denominadores, ou seja, procuramos constantes a, b, c tais que se tenha

$$\frac{1}{(x^2-x+1)\,(x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

ou, o que é equivalente,

$$1 = a\,(x^2-x+1) + (bx+c)\,(x+1),$$

ou seja

$$1 = (a+b)\,x^2 + (b+c-a)\,x + (a+c).$$ [146]

Esta identidade será verificada se se tiver $a+b=0$, $b+c-a=0$ e $a+c=1$ e, resolvendo este sistema de três equações com três incógnitas, obtemos a solução $a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$ e $c=\frac{2}{3}$. Temos assim, como era nosso objetivo, a decomposição

$$f(x) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3} \times \frac{x-2}{x^2-x+1}.$$

---

com duas funções racionais com numeradores constantes. Só com alguma experiência se consegue decidir qual o caminho menos trabalhoso.

[146] Para uma explicação (sem justificação) da razão por que fazemos esta tentativa e não outra, ver o que referimos atrás, na nota de pé de página 144. De qualquer modo, do ponto de vista lógico, essa explicação não é necessária e a certeza de existir uma decomposição do tipo procurado resulta de que vamos determinar explicitamente uma.

Tal como fizémos no exemplo em b), reparando que a derivada do segundo denominador é $2x-1$ e que esse denominador se pode decompor na forma $(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$, podemos "ajeitar" ainda mais a expressão de f escrevendo

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{3}\times\frac{1}{x+1}-\frac{1}{6}\times\frac{2x-4}{x^2-x+1} = \\
&= \frac{1}{3}\times\frac{1}{x+1}-\frac{1}{6}\times\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{x^2-x+1} = \\
&= \frac{1}{3}\times\frac{1}{x+1}-\frac{1}{6}\times\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{1+(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}})^2} = \\
&= \frac{1}{3}\times\frac{1}{x+1}-\frac{1}{6}\times\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}})^2}.
\end{aligned}$$

É agora simples obter como primitiva a função $F\colon]-1,+\infty[\,\to\mathbb{R}$ definida por

$$F(x)=\frac{1}{3}\ln(x+1)-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}).$$

III.3.11 **(Exemplos de primitivas de potências de funções trigonométricas)**

a) Consideremos a função $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\operatorname{sen}^2(x)$. O método mais simples de encontrar uma primitiva para a função f é lembrar uma das fórmulas para o cosseno do ângulo duplo,

$$\cos(2x)=2\cos^2(x)-1=1-2\operatorname{sen}^2(x).$$

A segunda permite-nos escrever a função a primitivar na forma

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)$$

e, "tomando $y=2x$", obtemos uma primitiva $F\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$F(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x),$$

ou, alternativamente, lembrando a fórmula do seno do ângulo duplo,

$$F(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(x)\cos(x).$$

b) Procuremos agora uma primitiva da função $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\operatorname{sen}^3(x)$. Neste caso podemos reescrever f na forma

$$f(x)=\operatorname{sen}(x)\,(1-\cos^2(x))=\operatorname{sen}(x)-\operatorname{sen}(x)\cos^2(x).$$

A primeira parcela tem a primitiva imediata $-\cos(x)$ e, quanto à segunda, reparando que $-\operatorname{sen}(x)$ é a derivada de $\cos(x)$, podemos "tomar $y=\cos(x)$"

de modo a obter uma primitiva $\frac{y^3}{3}$, ou seja, $\frac{1}{3}\cos^3(x)$. Obtemos assim para f uma primitiva $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = -\cos(x) + \frac{1}{3}\cos^3(x).$$

c) Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \cos^4(x)$. Para obter uma primitiva podemos proceder duas vezes como em a):

$$\begin{aligned} f(x) &= \big(\frac{1}{2}(1+\cos(2x))\big)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x) = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}(1+\cos(4x)). \end{aligned}$$

Obtemos então a primitiva $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x).$$

d) Seja agora $f\colon]0,\pi[\to \mathbb{R}$ a função definda por $f(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$. Um método de encontrar uma primitiva, usando ideias semelhantes às das alíneas precedentes é escrever f na forma

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} = \frac{\operatorname{sen}(x)}{1-\cos^2(x)}$$

e então, "tomando $y = \cos(x)$" (cuja derivada é $-\operatorname{sen}(x)$), somos conduzidos a procurar uma primitiva para a função $g\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$, $g(y) = \frac{-1}{1-y^2}$. Procedendo como nos exemplos em III.3.10, escrevemos g na forma

$$g(y) = -\frac{1}{2}\,\Big(\frac{1}{1+y} + \frac{1}{1-y}\Big)$$

o que nos permite identificar uma primitiva $G\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$ de g definida por

$$G(y) = -\frac{1}{2}\,\big(\ln(1+y) - \ln(1-y)\big).$$

A partir daqui, obtemos uma primitiva $F\colon]0,\pi[\to \mathbb{R}$ de f, definida por

$$\begin{aligned} F(x) &= -\frac{1}{2}\,\big(\ln(1+\cos(x)) - \ln(1-\cos(x))\big) = \\ &= \ln\Big(\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}\Big). \end{aligned}$$

Reparemos que a expressão anterior ainda pode ser simplificada: Tendo em conta o facto de se se ter $\mathrm{sen}(x) > 0$ no domínio, vem também

$$F(x) = \ln\Bigl(\sqrt{\frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{(1+\cos(x))^2}}\Bigr) =$$
$$= \ln\Bigl(\sqrt{\frac{1-\cos^2(x)}{(1+\cos(x))^2}}\Bigr) = \ln\Bigl(\frac{\mathrm{sen}(x)}{1+\cos(x)}\Bigr).$$

III.3.12 **(Exemplos de primitivas com o auxílio da alínea b) de III.3.8)**

a) Procuremos uma primitiva da função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sqrt{x^2+1}.$$

Um dos caminhos que ocorre utilizar é procurar uma substituição que "faça desaparecer" a raíz quadrada e, para isso, podemos considerar a função $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(y) = \mathrm{senh}(y)$ (cf. II.3.5) que é crescente, bijetiva e com derivada $\cosh(y) \neq 0$.[147] Somos assim conduzidos a procurar uma primitiva para a função $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$y \mapsto \varphi'(y) f(\varphi(y)) = \cosh(y)\sqrt{\mathrm{senh}^2(y)+1} = \cosh^2(y) =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cosh(2y)$$

(lembrar II.3.9), sendo facil de obter uma tal primitiva, nomeadamente a função

$$y \mapsto \frac{1}{2}\,y + \frac{1}{4}\,\mathrm{senh}(2y).$$

Para podermos aplicar a alínea referida, conviria apresentar esta primitiva na forma $y \mapsto F(\varphi(y))$, para uma função $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ conveniente. Para isso, reparamos que, considerando a função hiperbólica inversa $\mathrm{arcsenh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, (cf. II.3.8) tem-se

$$\frac{1}{2}\,y + \frac{1}{4}\,\mathrm{senh}(2y) = \frac{1}{2}\,y + \frac{1}{2}\,\mathrm{senh}(y)\cosh(y) =$$
$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{arcsenh}(\varphi(y)) + \frac{1}{2}\,\varphi(y)\,\sqrt{\varphi(y)^2+1}$$

pelo que podemos tomar para F, que vai ser a primitiva procurada, a função definida por

$$F(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{arcsenh}(x) + \frac{1}{2}\,x\sqrt{x^2+1}.$$

Quem preferir não utilizar explicitamente no resultado a função hiperbólica

[147]Outro caminho possível, mas que se revela mais trabalhoso, considera $\varphi(y) = \tan(y)$, $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, e tira partido da identidade $1 + \tan^2(y) = \frac{1}{\cos^2(y)}$.

inversa arcsenh pode substituir esta pela sua caracterização em II.3.8 e escrever

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1}) + \frac{1}{2}\,x\sqrt{x^2+1}.$$

b) Procuremos agora, dado $r>0$, uma primitiva da função $f\colon[-r,r]\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sqrt{r^2-x^2}.$$

Como no caso da alínea a), procuramos uma substituição que "faça desaparecer" a raíz quadrada e, para isso, será cómodo começar por substituir f pela sua restrição ao intervalo aberto $]-r,r[$. Consideremos então a função $\varphi\colon]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\,\to\,]-r,r[$ definida por $\varphi(y)=r\mathrm{sen}(y)$ que é crescente, bijetiva e com derivada $r\cos(y)\neq 0$.[148] Somos assim conduzidos a procurar uma primitiva da função $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\,\to\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y\mapsto \varphi'(y)f(\varphi(y)) &= r\cos(y)\sqrt{r^2-r^2\mathrm{sen}^2(y)} = r^2\cos^2(y) = \\ &= \frac{r^2}{2}+\frac{r^2}{2}\cos(2y), \end{aligned}$$

sendo fácil obter uma tal primitiva, nomeadamente a função $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\,\to\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y\mapsto \frac{r^2}{2}y+\frac{r^2}{4}\mathrm{sen}(2y) &= \frac{r^2}{2}y+\frac{r^2}{2}\mathrm{sen}(y)\cos(y) = \\ &= \frac{r^2}{2}\,\mathrm{arcsen}(\frac{\varphi(y)}{r}) + \frac{1}{2}\,\varphi(y)\,\sqrt{r^2-\varphi(y)^2}. \end{aligned}$$

Obtemos assim como primitiva da restrição de f a $]-1,1[$ a restrição a este intervalo da função $F\colon[-r,r]\to\mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \frac{r^2}{2}\,\mathrm{arcsen}(\frac{x}{r}) + \frac{1}{2}\,x\sqrt{r^2-x^2}.$$

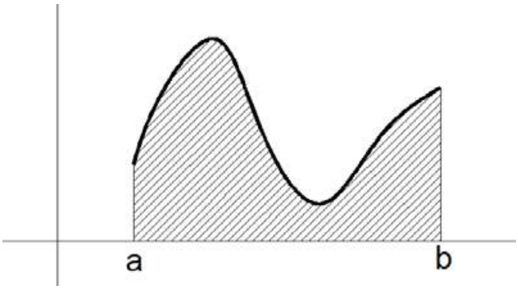
Reparamos enfim que, de facto, a própria função F é uma primitiva de f visto que nos pontos $-r$ e r que falta examinar podemos, tendo em conta a continuidade de f e F aplicar III.2.10 para deduzir que se tem ainda $F'(x)=f(x)$.

Vamos agora examinar aplicações geométricas da determinação de primitivas, por exemplo no cálculo da área de certas figuras planas e do volume de certos sólidos ou na determinação do baricentro de certas figuras planas. Repare-se que os cálculos que vamos fazer devem ser encarados no contexto de aplicações da Análise Matemática, neste caso à Geometria e não no contexto puro da Análise Matemática, já que se vai trabalhar com um conceito de área que supomos conhecido e cujas propriedades

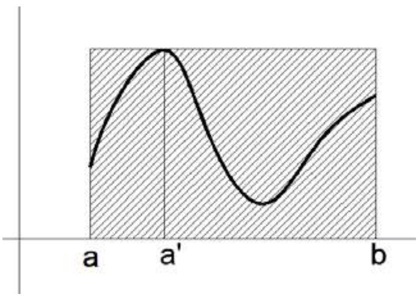
[148] É para termos esta última condição que retirámos os pontos $-r$ e r ao domínio de f.

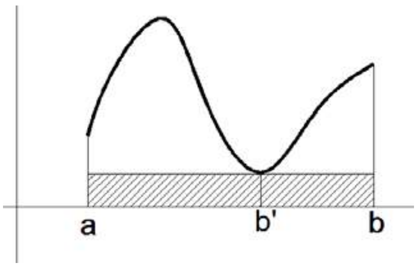
intuitivas habituais serão admitidas sem preocupações. Trata-se de uma observação análoga à que já fizémos a propósito das funções trigonométricas.

III.3.13 A primeira situação em que vamos determinar uma área situa-se no contexto em que se fixa um referencial ortogonal e monométrico no plano e se considera como unidade de área a correspondente à unidade de comprimento utilizada nos eixos. Consideramos um intervalo fechado e limitado $[a,b]$ com $a \le b$ e uma função contínua $f\colon [a,b] \to [0,+\infty[$. A área que queremos determinar é a da região do plano limitada pelo gráfico de f, pelo eixo das abcissas e pelas rectas verticais de abcissas a e b ou, dito de outro modo, do conjunto dos pontos (x,y) tais que $a \le x \le b$ e $0 \le y \le f(x)$.



É claro que, no caso trivial em que $a = b$ a área em questão é igual a 0 pelo que o caso que apresenta interesse é aquele em que $a < b$. Será no entanto útil não afastar *a priori* o caso trivial.
Uma propriedade simples, mas muito útil adiante, é que, nas condições descritas, existe um ponto $c \in [a,b]$ tal que a área considerada é igual a $f(c)(b-a)$.
Dem: Tendo em conta o teorema de Weierstrass (II.1.11), podemos considerar pontos $a', b' \in [a,b]$ tais que $f(a')$ e $f(b')$ sejam respetivamente o máximo e o mínimo da função f e então a região considerada está contida num retângulo de base $b-a$ e altura $f(a')$ e contém um retângulo com a mesma base e altura $f(b')$.



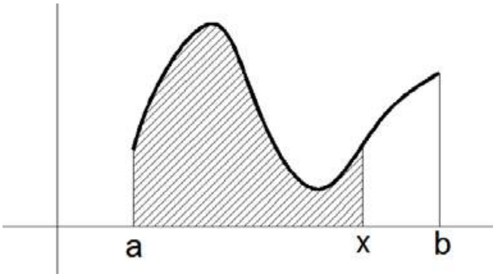


Resulta daqui que a área A da região considerada verifica as desigualdades

$$f(b')(b-a) \le A \le f(a')(b-a).$$

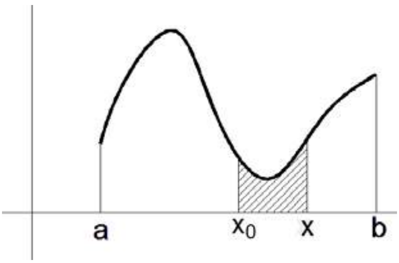
Aplicando o teorema de Cauchy-Bolzano (II.1.15) à função contínua $x \mapsto f(x)(b-a)$, concluímos a existência de c entre a' e b' ou igual a um destes dois, em qualquer caso em $[a,b]$, tal que $A = f(c)(b-a)$. □

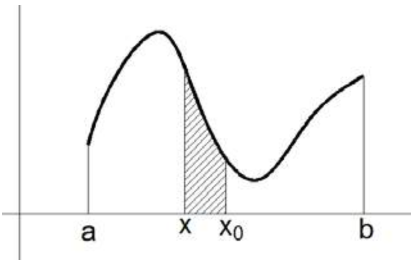
III.3.14 **(A função área parcial)** No contexto de III.3.13, suponhamos $a < b$ e notemos, para cada $x \in [a,b]$, $A(x)$ a área da região que se obtém quando se substitui f pela sua restrição ao intervalo $[a,x]$.



A função $A\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ assim definida é então uma primitiva de f que verifica a condição $A(a) = 0$.

Dem: O facto de se ter $A(a) = 0$ resulta de que, quando $x = a$, a região reduz-se a um segmento de reta. Resta-nos verificar que em cada $x_0 \in [a,b]$ a função $A\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tem derivada igual a $f(x_0)$. Ora, dado $x \ne x_0$ em $[a,b]$, $A(x) - A(x_0)$ vai ser a área da região assinalada na primeira das figuras abaixo, no caso em que $x > x_0$, e o simétrico da área da região assinalada na segunda dessas figuras, no caso em que $x < x_0$.



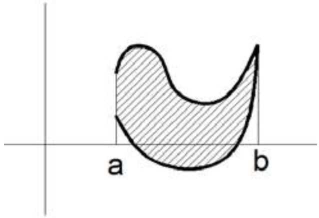


Tendo em conta o que verificámos em III.3.13, em qualquer dos dois casos podemos associar a cada $x \ne x_0$ um elemento $c(x)$ de $[a,b]$, entre x e x_0 ou igual a um destes, tal que $A(x) - A(x_0) = f(c(x))(x - x_0)$. Por enquadramento tem-se então $\lim\limits_{x \to x_0} c(x) = x_0$ e portanto, pela continuidade de f concluímos que

$$A'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f(c(x)) = f(x_0),$$

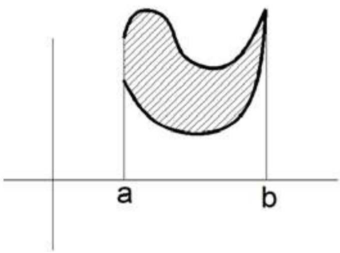
pelo que temos o valor da derivada que pretendíamos. □

III.3.15 **(O caso mais geral de região entre dois gráficos)** Suponhamos, mais geralmente, que $a < b$ e que temos duas funções contínuas $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ tais que $g(x) \leq f(x)$ para cada $x \in [a, b]$ e que a área que pretendemos calcular é a da região do plano limitada pelos gráficos de f e g e pela retas verticais de abcissas a e b, isto é, do conjunto dos pares (x, y) tais que $x \in [a, b]$ e $g(x) \leq y \leq f(x)$. [149]



Como anteriormente, seja, para cada $x \in [a, b]$, $A(x)$ a área da região que se obtém quando se consideram as restrições de f e g ao intervalo $[a, x]$. A função $A: [a, b] \to \mathbb{R}$ assim definida é então uma primitiva da função $x \mapsto f(x) - g(x)$ que verifica $A(a) = 0$.

Dem: Vamos começar por tratar o caso particular em que, ao contrário do caso sugerido na figura no enunciado, a função g, e portanto também a função f admite $[0, +\infty[$ como codomínio.



Neste caso tem-se, para cada $x \in [a, b]$, $A(x) = A_f(x) - A_g(x)$, onde A_f e A_g são as funções associadas em III.3.14 a f e a g, respetivamente. Tendo em conta esse resultado, vemos assim que $A(a) = 0$ e para cada $x \in [a, b]$

$$A'(x) = A'_f(x) - A'_g(x) = f(x) - g(x),$$

o que é precisamente o que estamos a afirmar. O caso geral pode agora ser

[149] A situação descrita anteriormente corresponde assim ao caso em que $g(x) = 0$, para cada x.

reduzido ao caso particular já estudado se reparamos que podemos sempre fixar uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que as funções $\widehat{f}(x) = f(x) + c$ e $\widehat{g}(x) = g(x) + c$ já admitam $[0, +\infty[$ como codomínio (tendo em conta o teorema de Weierstrass, II.1.11, podemos tomar para c o simétrico do valor mínimo de g) e que então, sendo $\widehat{A}(x)$ as áreas associadas às funções $\widehat{f}$ e $\widehat{g}$, tem-se $\widehat{A}(x) = A(x)$ e $\widehat{f}(x) - \widehat{g}(x) = f(x) - g(x)$. □

III.3.16 **(Cálculo da área da região em estudo)** No contexto de III.3.15 suponhamos que se encontrou uma primitiva $H: [a, b] \to \mathbb{R}$ da função $[a, b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - g(x)$. A área desta região é então igual a $H(b) - H(a)$.

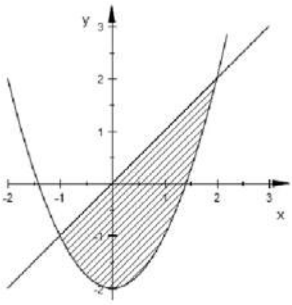
Dem: Considerando a função $A: [a, b] \to \mathbb{R}$ definida em III.3.15, a área que estamos a procurar determinar é, por definição, $A(b)$. Uma vez que A e H são duas primitivas da mesma função $f - g$ sabemos que existe uma constante $k \in \mathbb{R}$ tal que $A(x) = H(x) + k$ para todo o $x \in [a, b]$. Tem-se então

$$0 = A(a) = H(a) + k,$$

de onde deduzimos que $k = -H(a)$ e obtemos enfim

$$A(b) = H(b) + k = H(b) - H(a).$$ □

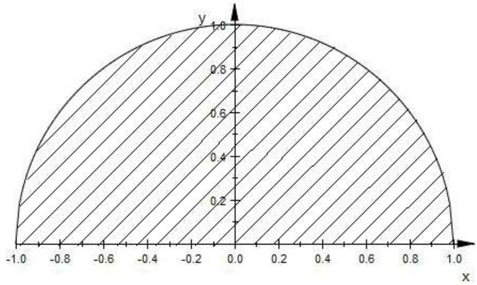
III.3.17 **(Exemplos) a)** Determinemos a área da região constituída pelos pontos (x, y) tais que $x^2 - 2 \leq y \leq x$.



Estudando a função $x - (x^2 - 2)$, constatamos que se tem $x^2 - 2 \leq x$ se, e só se, $x \in [-1, 2]$. Somos assim conduzidos a considerar as funções f e g definidas nesse intervalo por $f(x) = x$ e $g(x) = x^2 - 2$. Uma vez a função $f(x) - g(x) = x - (x^2 - 2)$ admite uma primitiva $H: [-1, 2] \to \mathbb{R}$ definida por $H(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x$, obtemos como área da região considerada

$$H(2) - H(-1) = (2 - \frac{8}{3} + 4) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 2) = \frac{9}{2}.$$

b) Procuremos agora determinar a área de um semicírculo de raio r, que realizamos como a região determinada pela função $f: [-r, r] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ (Lembrando que $x^2 + y^2 = r^2$ é uma equação da circunferência de raio r e centro na origem, constata-se que esta região é efetivamente o semicírculo — na figura a seguir tomamos $r=1$).



Jé determinámos, no exemplo na alínea b) de III.3.12, uma primitiva desta função, nomeadamente a função $F\colon[-r,r]\to\mathbb{R}$ definida por

$$F(x)=\frac{r^2}{2}\,\text{arcsen}(\frac{x}{r})+\frac{1}{2}\,x\sqrt{r^2-x^2}.$$

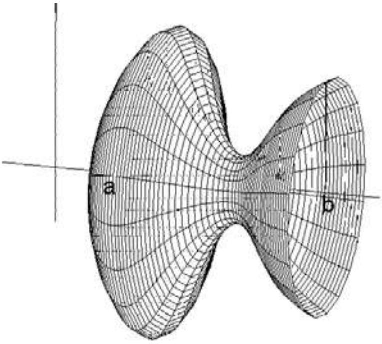
Obtemos assim para a área do semicírculo

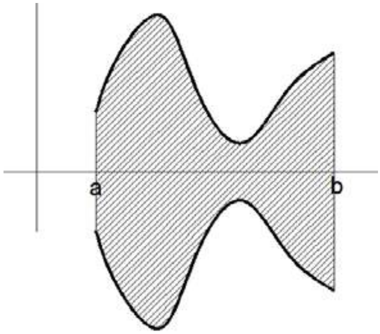
$$F(r)-F(-r)=\frac{r^2}{2}\,\text{arcsen}(1)-\frac{r^2}{2}\,\text{arcsen}(-1)=\frac{\pi r^2}{4}-(-\frac{\pi r^2}{4})=\frac{\pi r^2}{2}.$$

Note-se que não devemos ficar exuberantes com o resultado obtido: Limitá-mo-nos a confirmar um facto que já conhecíamos e que foi utilizado inúmeras vez no caminho que conduziu aos cálculos precedentes. Com efeito o número π apareceu, por definição, como a área do círculo de raio 1 e esse facto foi utilizado para a definição do radiano como unidade de ângulo e, através disso, para o cálculo das derivadas das funções trigonométricas e portanto das suas inversas. O que era perturbador era se tivéssemos chegado a um resultado diferente para a área do semicírculo…

Vamos agora utilizar uma ideia análoga para aplicar as primitivas ao estudo de outro problema geométrico, o do cálculo do volume dum sólido de revolução.

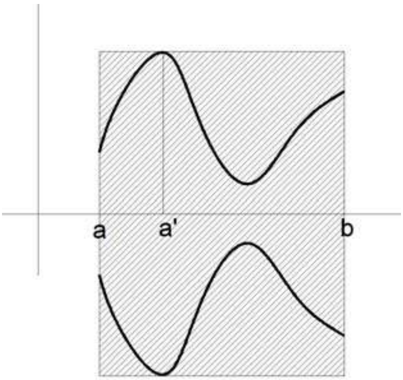
III.3.18 Voltemos a considerar um intervalo fechado e limitado $[a,b]$ com $a\leq b$ e uma função contínua $f\colon[a,b]\to[0,+\infty[$. Rodemos agora no espaço o gráfico desta função em torno do eixo das abcissas, obtendo o que se chama uma superfície de revolução, um processo que nos faz lembrar o modo como o moleiro faz por exemplo uma jarra de barro. Pretendemos agora determinar o volume do sólido de revolução limitado por essa superfície e pelos planos perpendiculares ao eixo nos pontos de abcissa a e b, isto é o sólido esquematizado a seguir, primeiro em perspetiva e sem as “tampas” e depois no estilo da representação da figura humana pelos antigos egípcios, isto é numa visão lateral ignorando o efeito de perspetiva, visão essa que, para uma maior clareza, será a que utilizaremos adiante.

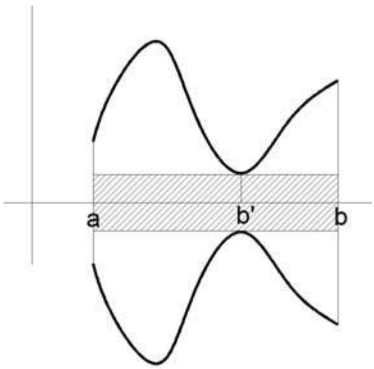




Tal como em III.3.13, existe sempre um ponto $c \in [a, b]$ tal que o volume do sólido de revolução seja igual a $\pi f(c)^2(b-a)$.

Dem: O caso em que $a = b$ é trivial, bastando tomar $c = a = b$. Suponhamos então que $a < b$. Tendo em conta o teorema de Weierstrass (II.1.11), podemos considerar pontos $a', b' \in [a, b]$ tais que $f(a')$ e $f(b')$ sejam respetivamente o máximo e o mínimo da função f e então o sólido de revolução considerado está contido num cilindro “deitado” de altura $b - a$ e raio da base $f(a')$ e contém um cilindro com a mesma altura e raio da base $f(b')$.



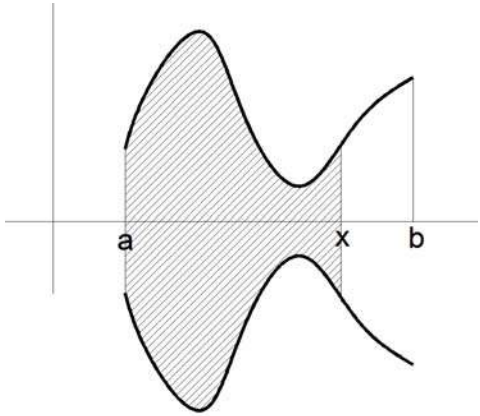


Resulta daqui que o volume V do sólido de revolução verifica as desigualdades

$$\pi f(b')^2(b-a) \leq V \leq \pi f(a')^2(b-a).$$

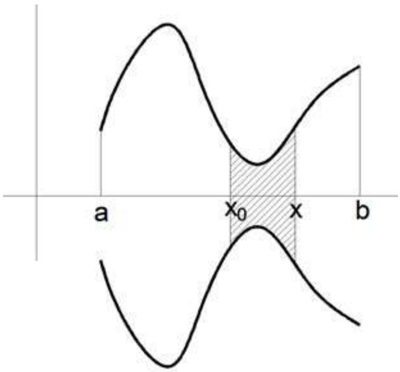
Aplicando o teorema de Cauchy-Bolzano (II.1.15) à função contínua $x \mapsto \pi f(x)^2(b-a)$, concluímos a existência de c entre a' e b' ou igual a um destes dois, em qualquer caso em $[a, b]$, tal que $V = \pi f(c)^2(b-a)$. □

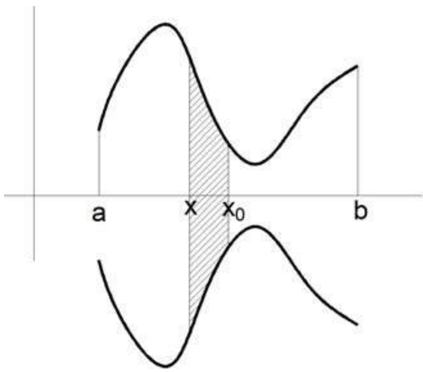
III.3.19 **(A função volume parcial)** No contexto de III.3.18 notemos, para cada $x \in [a, b]$, $V(x)$ o volume do sólido de revolução que se obtém quando se substitui f pela sua restrição ao intervalo $[a, x]$.



Supondo $a < b$, a função $V\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ assim definida é então uma primitiva da função $x \mapsto \pi f(x)^2$ que verifica a condição $V(a) = 0$.

Dem: O facto de se ter $V(a) = 0$ resulta de que, quando $x = a$, o sólido de revolução reduz-se a um círculo num plano. Resta-nos verificar que em cada $x_0 \in [a, b]$ a função $V\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ tem derivada igual a $\pi f(x_0)^2$. Ora, dado $x \neq x_0$ em $[a, b]$, $V(x) - V(x_0)$ vai ser o volume do sólido assinalado na primeira das figuras abaixo, no caso em que $x > x_0$, e o simétrico do volume do sólido assinalado na segunda dessas figuras, no caso em que $x < x_0$.



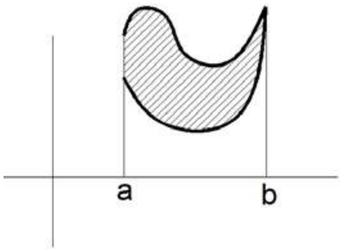


Tendo em conta o que verificámos em III.3.18, em qualquer dos dois casos podemos associar a cada $x \neq x_0$ um elemento $c(x)$ de $[a, b]$, entre x e x_0 ou igual a um destes, tal que $V(x) - V(x_0) = \pi f(c(x))^2(x - x_0)$. Por enquadramento tem-se então $\lim\limits_{x \to x_0} c(x) = x_0$ e portanto, pela continuidade de f concluímos que

$$V'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{V(x) - V(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \pi f(c(x))^2 = \pi f(x_0)^2,$$

pelo que temos o valor da derivada que pretendíamos. □

III.3.20 **(O caso mais geral da região entre dois gráficos)** Suponhamos, mais geralmente, que $a < b$ e que temos duas funções $f, g\colon [a, b] \to [0, +\infty[$, contínuas e tais que $g(x) \le f(x)$ para cada $x \in [a, b]$, e que o volume que pretendemos calcular é o do sólido de revolução obtido por rotação da região do plano limitada pelos gráficos de f e g e pela retas verticais de abcissas a e b, isto é, do conjunto dos pares (x, y) tais que $x \in [a, b]$ e $g(x) \le y \le f(x)$ (uma bóia "com forma original").[150]



Como anteriormente, seja, para cada $x \in [a, b]$, $V(x)$ o volume do sólido de revolução gerado região que se obtém quando se consideram as restrições de f e g ao intervalo $[a, x]$. A função $V\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ assim definida é então uma primitiva da função $x \mapsto \pi f(x)^2 - \pi g(x)^2$ que verifica $V(a) = 0$.

Dem: Como em III.3.15, para cada $x \in [a, b]$, $V(x) = V_f(x) - V_g(x)$, onde V_f e V_g são as funções associadas em III.3.19 a f e a g, respetivamente. Tendo em conta esse resultado, vemos assim que $V(a) = 0$ e para cada $x \in [a, b]$

$$V'(x) = V_f'(x) - V_g'(x) = \pi f(x)^2 - \pi g(x)^2,$$

o que é precisamente o que estamos a afirmar. □

III.3.21 **(Cálculo do volume do sólido de revolução)** No contexto de III.3.20, suponhamos que se encontrou uma primitiva $H\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ da função $h\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \pi f(x)^2 - \pi g(x)^2$. O volume do sólido de revolução é então igual a $H(b) - H(a)$.

Dem: Considerando a função $V\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ definida em III.3.20, o volume que estamos a determinar é, por definição, $V(b)$. Uma vez que V e H são duas primitivas da mesma função $x \mapsto \pi f(x)^2 - \pi g(x)^2$ sabemos que existe uma constante $k \in \mathbb{R}$ tal que $V(x) = H(x) + k$ para todo o $x \in [a, b]$. Tem-se então

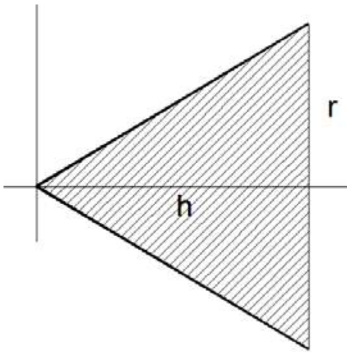
[150] A situação descrita anteriormente corresponde assim ao caso em que $g(x) = 0$, para cada x.

$$0 = V(a) = H(a) + k,$$

de onde deduzimos que $k = -H(a)$ e obtemos enfim

$$V(b) = H(b) + k = H(b) - H(a). \qquad \square$$

III.3.22 **(Exemplos) a)** Procuremos confirmar a validade da fórmula que há muito utilizamos para o volume de um cone de revolução com raio da base r e altura h. Para isso reparamos que um tal cone pode ser obtido como o sólido de revolução definido pela função $f(x) = \frac{r}{h}x$, com o intervalo $[0, h]$ como domínio.



Uma vez que a função $h\colon [0, h] \to \mathbb{R}$ definida por

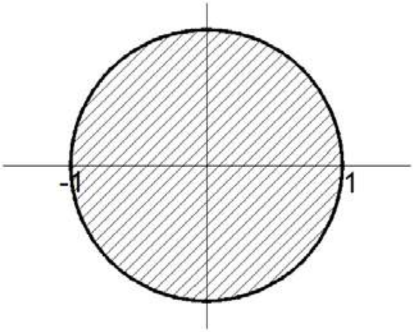
$$h(x) = \pi f(x)^2 = \pi \frac{r^2}{h^2} x^2$$

admite a primitiva $H\colon [0, h] \to \mathbb{R}$ definida por $H(x) = \pi \frac{r^2}{3h^2} x^3$, obtemos como volume do cone o valor

$$H(h) - H(0) = \pi \frac{r^2}{3h^2} h^3 = \frac{1}{3} \times (\pi r^2) \times h$$

(um terço da área da base vezes a altura).

b) Determinemos agora o volume de uma esfera de raio 1. Para isso reparamos que esta pode ser obtida como o sólido de revolução determinado pelo gráfico da função $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.



Uma vez que a função $h\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por

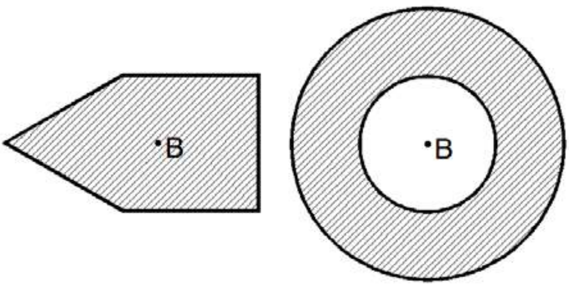
$$h(x) = \pi f(x)^2 = \pi(1 - x^2)$$

admite a primitiva $H\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por $H(x) = \pi(x - \frac{x^3}{3})$, obtemos como volume da esfera o valor

$$H(1) - H(-1) = \pi(1 - \frac{1}{3}) - \pi(-1 + \frac{1}{3}) = \frac{4}{3}\pi,$$

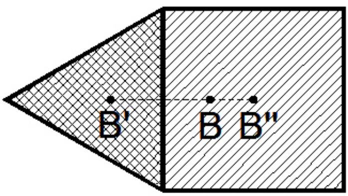
o que está de acordo com a fórmula para o volume de uma esfera que o estudante já encontrou anteriormente, possivelmente sem justificação.

III.3.23 **(Algumas observações sobre a noção física de baricentro de uma região plana)** Consideremos uma região limitada e de área maior que 0 do plano e pensemos nela como uma simplificação de um corpo de espessura desprezível constante, constituído por um material homogéneo (por exemplo um tampo de uma mesa). Suponhamos que pretendemos equilibrar esse corpo em cima de uma haste. O ponto onde devemos colocar a haste é o que se chama o *baricentro* (ou *centro de figura*, ou *centróide*) da região plana. Ilustramos a seguir dois exemplos de regiões planas com os respetivos baricentros assinalados com a letra B.



Observe-se que no segundo exemplo o centróide não pertence à região pelo que, para podermos colocar a haste, temos que imaginar que prolongámos o

corpo com um material de peso que se possa considerar insignificante.
Considerações físicas, que não cabe aqui explicitar mas que não deixam de ser plausíveis, levam a concluir que a noção de baricentro goza, entre outras, das seguintes propriedades:
a) (baricentro e transformações geométricas) Se movermos uma região (usando translações e rotações), o baricentro move-se do mesmo modo, por outras palavras, fica na mesma posição relativamente à região. Se substituirmos uma figura pela sua simétrica relativamente a uma reta, o baricentro é transformado no seu simétrico. Como consequência, se a região admite um eixo de simetria, o baricentro está necessariamente sobre esse eixo (examinar o primeiro dos exemplos atrás) e se admitir dois eixos de simetria concorrentes, o baricentro está no ponto de interseção dos eixos (examinar o segundo dos exemplos atrás). Em particular o baricentro de uma região poligonal regular é o respetivo centro e o baricentro de uma região retangular é a interseção das perpendiculares ao meio de dois lados concorrentes.
b) (baricentro e semiplanos) Se uma região está contida num dado semiplano (aberto ou fechado), então o seu baricentro também está contido nesse semiplano (não se pode equilibrar o corpo num ponto se ele está todo "para o outro lado"). Em consequência, se uma região está contida no interior de um polígono convexo então o seu baricentro também está no interior desse polígono (reparar que o interior de um polígono convexo é a interseção de semiplanos limitados pelas retas definidas pelos seus lados).
c) (baricentro e subdivisões) Fixemos um sistema de eixos ortogonal e monométrico no plano. Suponhamos que a região, com área $A \neq 0$ está subdividida em duas partes com áreas A' e A'' (portanto $A = A' + A''$). Se uma das partes tiver área nula, o baricentro da região coincide com o da outra parte; caso contrário, sendo (x, y) as coordenadas do baricentro B da região total e (x', y') e (x'', y'') as coordenadas dos baricentros B' e B'' das duas partes, x e y são respetivamente as médias pesadas de x' e x'' e de y' e y'', em anbos os casos com os pesos $\frac{A'}{A}$ e $\frac{A''}{A}$ (cf. I.1.4). Em particular, neste último caso, o ponto B está no segmento de reta que une B' e B'' (ou é igual a ambos se estes coincidirem).
Como exemplo, considere-se a figura abaixo, onde a região foi subdividida num triângulo equilátero e um quadrado, cujos baricentros foram determinados por intersção de eixos de simetria.



Repare-se que, como a área do quadrado é maior que a do triângulo, o baricentro da região total está no segmento que une os dois baricentros mas mais próximo do baricentro do quadrado.

d) (Propriedade de aditividade associada a uma subdivisão) As relações que enunciámos em c) entre as coordenadas do baricentro da região total e as dos baricentros das duas partes podem ser escritas explicitamente na forma

$$x = \frac{A'}{A}x' + \frac{A''}{A}x'', \quad y = \frac{A'}{A}y' + \frac{A''}{A}y''$$

ou, de forma equivalente, se notarmos

$$\widehat{x} = Ax, \quad \widehat{y} = Ay$$

(a *abcissa reescalada* e a *ordenada reescalada* associadas à região) e analogamente, $\widehat{x}' = A'x'$, $\widehat{x}'' = A''x''$, $\widehat{y}' = A'y'$ e $\widehat{y}'' = A''y''$ as coordenadas reescaladas associadas a cada uma das partes,

$$\widehat{x} = \widehat{x}' + \widehat{x}'', \quad \widehat{y} = \widehat{y}' + \widehat{y}''.$$

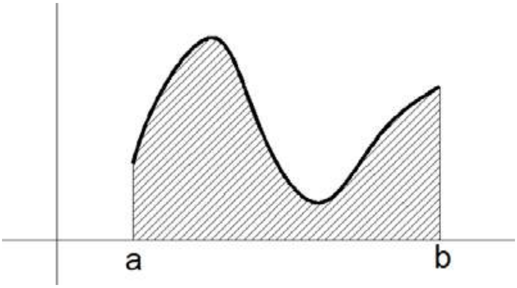
Note-se que, apesar de o baricentro de uma região de área 0 não estar definido, podemos ainda definir para uma tal região as suas coordenadas reescaladas $\widehat{x}$ e $\widehat{y}$ como sendo 0 e então as igualdades precedentes continuam a ser válidas quando alguma das partes, ou ambas, tenha área 0.

A propriedade de aditividade das coordenadas reescaladas que acabamos de referir, análoga à propriedade de aditividade das áreas, faz com que, como veremos, seja por vezes mais simples determinar o baricentro de uma região começando por determinar a abcissa e a ordenada reescaladas, obtendo a partir daí as coordenadas do baricentro pelas fórmulas $x = \frac{\widehat{x}}{A}$ e $y = \frac{\widehat{y}}{A}$.

d) (Propriedade de monotonia para regiões no primeiro quadrante) Para regiões contidas no primeiro quadrante fechado, a propriedade de aditividade referida em c) arrasta uma propriedade de monotonia: Se uma região está contida noutra cada uma das coordenadas reescaladas associadas à primeira é menor ou igual à correspondente coordenada reescalada associada à segunda. Para o concluirmos basta considerar a região complementar da primeira na segunda que, de acordo com o referido na alínea b) de III.3.23 tem as coordenadas do baricentro maiores ou iguais a 0, o mesmo acontecendo portanto às coordenadas reescaladas.

III.3.24 Analogamente ao que foi feito em III.3.13, fixemos um referencial ortogonal e monométrico no plano e consideremos um intervalo fechado e limitado $[a, b]$ com $0 \leq a \leq b$ [151] e uma função contínua $f\colon [a, b] \to [0, +\infty[$. Consideremos a região do plano limitada pelo gráfico de f, pelo eixo das abcissas e pelas rectas verticais de abcissas a e b ou, dito de outro modo, ao conjunto dos pontos (x, y) tais que $a \leq x \leq b$ e $0 \leq y \leq f(x)$.

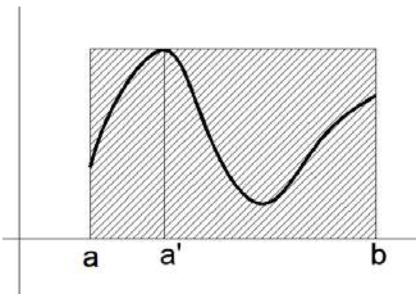
[151] A condição $a \geq 0$ tem uma natureza técnica e é destinada a simplificar o que faremos a seguir. Ela não diminui a generalidade das regiões cujo baricentro saberemos determinar, uma vez que podemos sempre fixar os eixos de modo que ela se verifique.

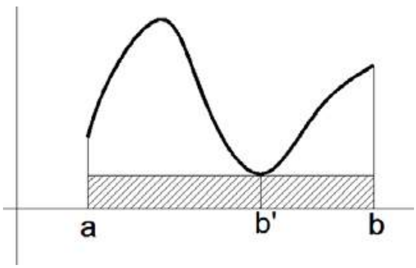


Com o objetivo de encontrar um método para determinar o baricentro desta região, naturalmente quando a sua área não for 0, começamos por um resultado auxiliar no mesmo espírito que os obtidos em III.3.13 e em III.3.18. Esse resultado afirma que, nas condições referidas, existem pontos $c, d \in [a, b]$ tais que a abcissa reescalada $\widehat{x}$ e a ordenada reescalada $\widehat{y}$ associadas à região sejam dadas por

$$\widehat{x} = \frac{a+b}{2} f(c)(b-a), \quad \widehat{y} = \frac{1}{2} f(d)^2(b-a).$$

Dem: Tendo em conta o teorema de Weierstrass (II.1.11), podemos considerar pontos $a', b' \in [a, b]$ tais que $f(a')$ e $f(b')$ sejam respetivamente o máximo e o mínimo da função f e então a região considerada está contida num retângulo de base $b-a$ e altura $f(a')$ e contém um retângulo com a mesma base e altura $f(b')$. Pelas propriedades de simetria do baricentro, sabemos que estes dois retângulos têm baricentros respetivamente com as coordenadas $(\frac{a+b}{2}, \frac{f(a')}{2})$ e $(\frac{a+b}{2}, \frac{f(b')}{2})$ e portanto com coordenadas reescaladas, no primeiro caso, $\frac{a+b}{2} f(a')(b-a)$ e $\frac{1}{2} f(a')^2(b-a)$ e, no segundo caso, $\frac{a+b}{2} f(b')(b-a)$ e $\frac{1}{2} f(b')^2(b-a)$. Pela propriedade de monotonia referida na alínea d) de III.3.23, tem-se assim

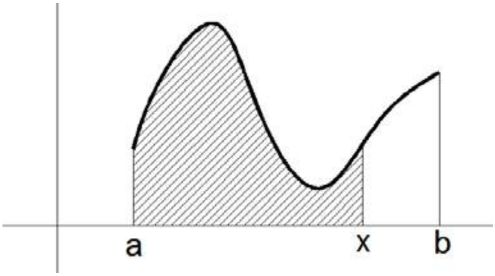




$$\frac{a+b}{2} f(b')(b-a) \le \widehat{x} \le \frac{a+b}{2} f(a')(b-a),$$
$$\frac{1}{2} f(b')^2(b-a) \le \widehat{y} \le \frac{1}{2} f(a')^2(b-a).$$

Aplicando o teorema de Cauchy-Bolzano (II.1.15), no primeiro caso, à função contínua $x \mapsto \frac{a+b}{2} f(x)(b-a)$ e, no segundo caso, à função contínua $x \mapsto \frac{1}{2} f(x)^2(b-a)$, concluímos a existência de c e d entre a' e b' ou igual a um destes dois, em qualquer caso em $[a,b]$, tal que se verifiquem as igualdades no enunciado. □

III.3.25 **(As funções associadas às regiões parciais)** No contexto de III.3.24 notemos, para cada $x \in [a,b]$, $\widehat{X}(x)$ e $\widehat{Y}(x)$ as coordenadas reescaladas associadas à região que se obtém quando se substitui f pela sua restrição ao intervalo $[a,x]$.

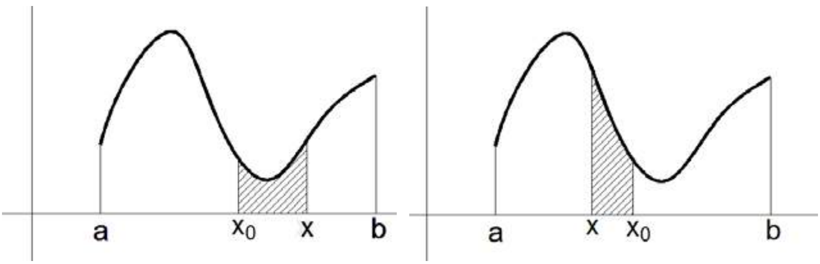


Supondo $a<b$, as funções $\widehat{X}, \widehat{Y} \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ assim definida$s$ são então primitivas das funções

$$x \mapsto x f(x), \quad x \mapsto \frac{1}{2} f(x)^2,$$

respetivamente, e verificam as condições $\widehat{X}(a) = 0$ e $\widehat{Y}(a) = 0$.

Dem: O facto de se ter $\widehat{X}(a) = 0$ e $\widehat{Y}(a) = 0$ resulta de que, quando $x = a$, a região reduz-se a um segmento de reta, portanto com área igual a 0. Resta-nos verificar que em cada $x_0 \in [a,b]$ as funções $\widehat{X}, \widehat{Y} \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ têm respetivamente derivadas iguais a $x_0 f(x_0)$ e $\frac{1}{2} f(x_0)^2$. Ora, dado $x \neq x_0$ em $[a,b]$, $\widehat{X}(x) - \widehat{X}(x_0)$ e $\widehat{Y}(x) - \widehat{Y}(x_0)$ vão ser as coordenadas reescaladas associadas à região assinalada na primeira das figuras abaixo, no caso em que $x > x_0$, e os simétricos das coordenadas reescaladas associadas à região assinalada na segunda destas, no caso em que $x < x_0$.



Tendo em conta o que verificámos em III.3.24, em qualquer dos dois casos podemos associar a cada $x \neq x_0$ dois elementos $c(x)$ e $d(x)$ de $[a,b]$, entre x e x_0 ou igual a um destes, tais que

$$\widehat{X}(x) - \widehat{X}(x_0) = \frac{x+x_0}{2} f(c(x))(x-x_0),$$
$$\widehat{Y}(x) - \widehat{Y}(x_0) = \frac{1}{2} f(d(x))^2 (x-x_0).$$

Por enquadramento tem-se então $\lim\limits_{x\to x_0} c(x) = x_0$ e $\lim\limits_{x\to x_0} d(x) = x_0$ e portanto, pela continuidade de f concluímos que

$$\widehat{X}'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\widehat{X}(x) - X(x_0)}{x - x_0} = x_0 \times \lim_{x\to x_0} f(c(x)) = x_0 f(x_0),$$
$$\widehat{Y}'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\widehat{Y}(x) - Y(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{2} \times \lim_{x\to x_0} f(d(x))^2 = \frac{1}{2} f(x_0)^2,$$

pelo que temos os valores das derivadas que pretendíamos. □

III.3.26 **(Cálculo das coordenadas reescaladas da região em estudo)** No contexto de III.3.24:

a) Suponhamos que se encontrou uma primitiva $G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ da função $[a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x f(x)$. A abcissa reescalada da região em estudo é então igual a $G(b) - G(a)$.

b) Suponhamos que se encontrou uma primitiva $H\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ da função $[a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2} f(x)^2$. A ordenada reescalada da região em estudo é então igual a $H(b) - H(a)$.

Dem: a) Considerando a função $\widehat{X}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definida em III.3.25, a abcissa reescalada que estamos a determinar é, por definição $\widehat{X}(b)$. Uma vez que $\widehat{X}$ e G são duas primitivas da mesma função $x \mapsto x f(x)$ sabemos que existe uma constante $k \in \mathbb{R}$ tal que $\widehat{X}(x) = G(x) + k$ para todo o $x \in [a,b]$. Tem-se então

$$0 = \widehat{X}(a) = G(a) + k,$$

de onde deduzimos que $k = -G(a)$ e obtemos enfim

$$\widehat{X}(b) = G(b) + k = G(b) - G(a).$$

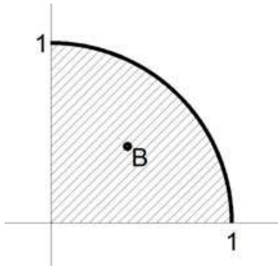
b) Considerando a função $\widehat{Y}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definida em III.3.25, a ordenada reescalada que estamos a determinar é, por definição $\widehat{Y}(b)$. Uma vez que $\widehat{Y}$ e H são duas primitivas da mesma função $x \mapsto \frac{1}{2} f(x)^2$ sabemos que existe uma constante $k \in \mathbb{R}$ tal que $\widehat{Y}(x) = H(x) + k$ para todo o $x \in [a,b]$. Tem-se então

$$0 = \widehat{Y}(a) = H(a) + k,$$

de onde deduzimos que $k = -H(a)$ e obtemos enfim

$$\widehat{Y}(b) = H(b) + k = H(b) - H(a). \qquad \square$$

III.3.27 **(Exemplo)** Consideremos uma região constituída por um quarto de círculo de raio 1, que colocamos com centro na origem e contida no primeiro quadrante (cf. a figura a seguir onde já representámos o baricentro que vamos determinar).



Esta região é a determinada, no contexto que estudámos anteriormente, pela função $f\colon [0,1] \to [0,+\infty[$ definida por $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.
A função $[0,1] \to [0,+\infty[$,

$$x \mapsto xf(x) = x\sqrt{1-x^2} = -\frac{1}{2} \times (-2x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

admite uma primitiva G definida por

$$G(x) = -\frac{1}{3}\,(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

e portanto a abcissa reescalada associada à região é

$$\widehat{x} = G(1) - G(0) = \frac{1}{3}.$$

Uma vez que a região tem área $A = \frac{\pi}{4}$, podemos concluir que a abcissa do baricentro é $\frac{\widehat{x}}{A} = \frac{4}{3\pi}$.
Uma vez que a região é simétrica relativamente à bissectriz dos quadrantes ímpares, já podemos concluir que a ordenada do barticentro é também igual a $\frac{4}{3\pi}$. Confimemos este resultado calculando essa ordenada pelos métodos estudados atrás: A função $[0,1] \to [0,+\infty[$

$$x \mapsto \frac{1}{2}f(x)^2 = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}$$

admite uma primitiva H definida por

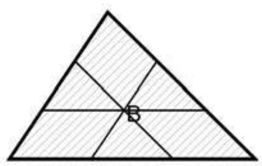
$$H(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{6}$$

e portanto a ordenada reescalada associada à região é

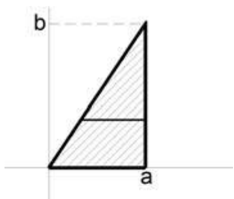
$$\widehat{y} = H(1) - H(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

e daqui deduzimos que a ordenada do baricentro é $\frac{\widehat{y}}{A} = \frac{4}{3\pi}$, de acordo com o previsto.

III.3.28 **(O baricentro duma região triangular)** O baricentro de uma região triangular pode ser obtido do seguinte modo: Para cada vértice do triângulo considera-se a reta paralela ao lado oposto (base do triângulo) cuja distância ao vértice é $2/3$ da distância da base ao vértice; as três retas assim obtidas intersetam-se num mesmo ponto[152] que vai ser o baricentro.



Dem: O que temos que mostrar é que o baricentro pertence a cada uma das três retas referidas. Vamos começar por examinar o caso particular em que o triângulo é retângulo e em que a base correspondente ao vértice é um dos catetos. "Coloquemos" o triângulo num sistema de eixos da forma descrita na figura abaixo, em que a base considerada é a contida no eixo das abcissas.



Temos neste caso a região associada à função $f\colon [0,a] \to [0,+\infty[$ definida por $f(x) = \frac{b}{a}x$. Uma vez que a função $x \mapsto \frac{1}{2}f(x)^2 = \frac{b^2}{2a^2}x^2$ admite a primitiva $H\colon [0,a] \to [0,+\infty[$ definida por

[152]Não seria *a priori* evidente que as três retas passassem por um mesmo ponto, aliás se, em vez de $2/3$ tivéssemos usado outra proporção, a interseção de cada par de retas não pertenceria à terceira. O facto de as três retas passarem por um mesmo ponto (que é compartilhado por outras situações da geometria do triângulo que o estudante decerto conhece) é parte da conclusão que estamos a enunciar.

$$H(x) = \frac{b^2}{6a^2}x^3,$$

concluímos que a ordenada reescalada $\widehat{y}$ é dada por

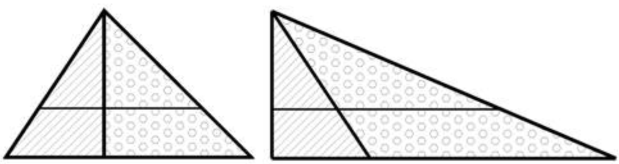
$$\widehat{y} = H(a) - H(0) = \frac{b^2}{6a^2}a^3 = \frac{ab^2}{6}$$

e portanto, como a área A do triângulo é igual a $\frac{1}{2}ab$, a ordenada do baricentro é

$$\frac{\widehat{y}}{A} = \frac{b}{3},$$

o que quer precisamente dizer que o baricentro pertence à reta horizontal de ordenada $\frac{b}{3}$ que é paralela à base e a uma distância do vértice igual a $\frac{2}{3}b$, com b distância do vértice à base.

Passemos agora ao caso em que não estamos na situação descrita anteriormente. Podemos considerar então a perpendicular à base que passa pelo vértice considerado, a qual determina dois triângulos retângulos com o mesmo vértice e com os catetos opostos contidos na mesma reta que contém a base (as figuras a seguir ilustram as duas situações possíveis, conforme os ângulos adjacentes à base sejam ambos agudos ou um deles seja obtuso). Em qualquer caso a reta paralela à base sobre a qual afirmamos que se situa o baricentro é a mesma para o triângulo dado e para os dois triângulos retângulos pelo que, como para estes já sabemos que o baricentro se encontra efetivamente nela, resulta da propriedade dos baricentros referida na alínea c) de III.3.23 que o mesmo acontece com o triângulo dado.



III.3.29 **(Nota)** Em Geometria costuma definir-se o baricentro dum triângulo como sendo o ponto de interseção das três medianas, isto é das três retas que unem os vértices aos pontos médios dos lados opostos (prova-se que essas três retas passam por um mesmo ponto). Um exercício simples de Geometria Analítica, que não parece oportuno abordar aqui, mostra que esse ponto de interseção tem uma distância a cada vértice igual a $\frac{2}{3}$ da distância deste ao ponto médio do lado oposto o que, lembrando o teorema de Tales, implica que ele pertence a cada uma das paralelas referidas no enunciado de III.3.28, e portanto coincide com o baricentro da região triangular que determinámos.

Exercícios

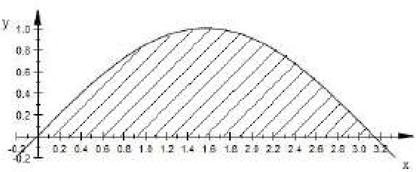
Ex III.3.1 Determinar primitivas das funções definidas por cada uma das expressões seguintes nos domínios indicados.

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^5}$, $x \in [0, +\infty[$;
b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$, $x \in]1, +\infty[$;
c) $f(x) = (x+1)\sqrt{x+1}$, $x \in]-1, +\infty[$;
d) $f(x) = x\text{sen}(x^2+1)$:
e) $f(x) = \text{arcsen}(x)$, $x \in]-1, 1[$;
f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}$, $x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$;
g) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+2}$, $x \in \mathbb{R}$;
h) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x-3}$, $x \in]1, +\infty[$:
i) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$, $x \in]1, +\infty[$;
j) $f(x) = \dfrac{1}{x^4-1}$, $x \in]1, +\infty[$;
k) $f(x) = \text{sen}^2(x)\cos^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$;
ℓ) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$, $x \in [1, +\infty[$.

Ex III.3.2 Determinar uma primitiva da função $f\colon]-\infty, 0[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$.

Ex III.3.3 Determinar uma primitiva da função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$.

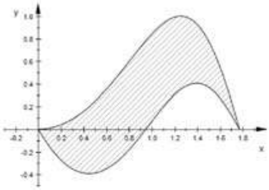
Ex III.3.4 Determinar a área da região determinada pelo eixo das abcissas e o gráfico da função seno restrita ao intervalo $[0, \pi]$.



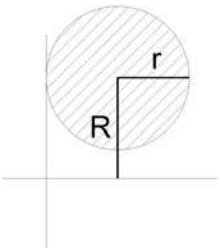
Ex III.3.5 Determinar a área limitada pelos gráficos das funções

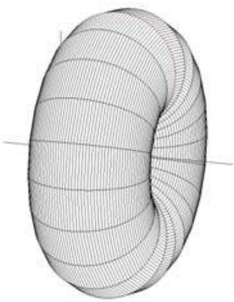
$$f(x) = \text{sen}(x^2) - x(\sqrt{\pi} - x), \quad g(x) = \text{sen}(x^2),$$

definidas no intervalo $[0, \sqrt{\pi}]$.

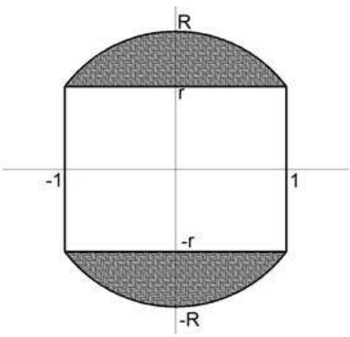


Ex III.3.6 Mostrar que o volume do toro de revolução (bóia com a forma usual), obtido por rotação de um círculo de raio r em torno de um eixo do seu plano a uma distância $R \geq r$ do centro, é igual a $2\pi^2 r^2 R$.



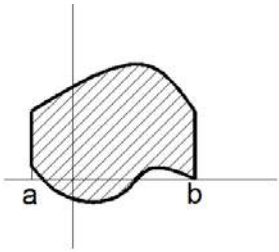


★ Ex III.3.7 Dada uma esfera maciça de raio R fez-se um furo segundo a direcção de um diâmetro com uma broca de raio r e obteve-se assim um sólido do tipo “pérola” de colar. Verificou-se que a altura do sólido, quando pousado com uma das aberturas para baixo, era igual a 2 (cf. a figura abaixo, onde, para simplificar, se colocaram as aberturas para os lados)



Determinar o volume do sólido, reparando que o resultado não depende de R e r. **Sugestão:** Reparar que o valor da altura implica uma relação entre R e r.

★ Ex III.3.8 **(Generalização de III.3.25 e III.3.26)** Sejam $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas, onde $a < b$ mas não necessariamente $a \geq 0$, tais que, para cada $x \in [a,b]$, $f(x) \leq g(x)$. Pretendemos determinar a abcissa reescalada $\widehat{x}$ e a ordenada reescalada $\widehat{y}$ da região limitada pelos gráficos de f e de g e pelas retas verticais de abcissas a e b o que nos permitirá, se conhecermos a área da região, suposta diferente de 0 (cf. III.3.16), determinar as coordenadas do baricentro da região.



Analogamente ao que tem vindo a ser feito, notamos, para cada $x \in [a,b]$, $\widehat{X}(x)$ e $\widehat{Y}(x)$ as coordenadas reescaladas associadas à região que se obtém quando se substitui f e g pelas suas restrições ao intervalo $[a,x]$. Os valores procurados são assim $\widehat{X}(b)$ e $\widehat{Y}(b)$ e tem-se naturalmente $\widehat{X}(a) = \widehat{Y}(a) = 0$.
a) Suponhamos provisoriamente as condições suplementares de se ter $a \geq 0$ e de f e g admitirem $[0,+\infty[$ como codomínio (a região está contida no primeiro quadrante fechado). Utilizar III.3.25 para deduzir que as funções $\widehat{X}, \widehat{Y}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ são deriváveis e com derivadas

$$\widehat{X}'(x) = x(g(x) - f(x)), \quad \widehat{Y}'(x) = \frac{1}{2}\big(g(x)^2 - f(x)^2\big).$$

b) Verificar que as conclusões de a) continuam a ser válidas mesmo sem supor as condições suplementares referidas nessa alínea. Deduzir que, se $G, H\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ forem primitivas das funções

$$x \mapsto x(g(x) - f(x)), \quad x \mapsto \frac{1}{2}\big(g(x)^2 - f(x)^2\big)$$

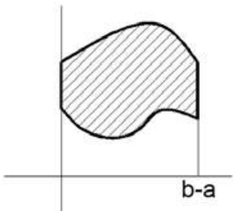
respetivamente, então a abcissa e a ordenada reescaladas da região são iguais a $G(b) - G(a)$ e $H(b) - H(a)$ respetivamente.
Sugestão: Considerar uma constante c tal que $f(x) + c \geq 0$, para cada x, e novas funções $f_1, g_1\colon [0, b-a] \to [0,+\infty[$ definidas por

$$f_1(x) = f(x+a) + c, \quad g_1(x) = g(x+a) + c,$$

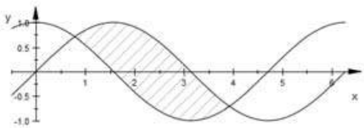
às quais já podemos aplicar as conclusões obtidas em a). Reparar que a região associada a f e g pode ser obtida a partir da associada a f_1 e g_1 por uma translação de coordenadas $(a, -c)$ e, notando $A(x)$ e $A_1(x)$ as áreas parciais associadas a f e a g e a f_1 e a g_1 assim como, em geral, utilizando o índice 1 para distinguir as quantidades associadas a f_1 e g_1, reparar que

$$\widehat{X}(x) = \widehat{X}_1(x-a) + aA(x), \quad \widehat{Y}_1(x) = \widehat{Y}_1(x-a) - cA(x),$$

onde $A'(x) = g(x) - f(x)$.

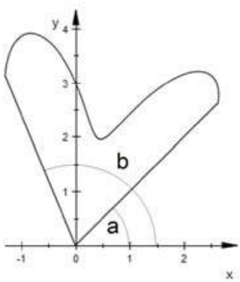


Ex III.3.9 **a)** Utilizar o exercício III.3.8 para determinar o baricentro da região limitada pelos gráficos das funções $\operatorname{sen}, \cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, entre os pontos de interseção destes gráficos com abcissas $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$.



b) Mostrar que uma rotação de 180° em torno do baricentro que foi determinado transforma a região considerada nela mesma. Que propriedade dos baricentros nos teria permitido prever o resultado que foi obtido?

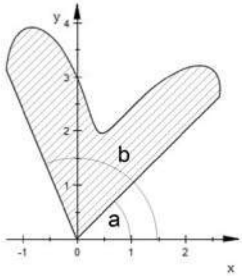
Ex III.3.10 **(Áreas de regiões definidas em coordenadas polares)** Sejam $a \leq b$ no intervalo $[0, 2\pi]$ e $f\colon [a,b] \to [0, +\infty[$ uma função contínua.



Esta função, no caso em que $a < b$, vai definir uma "curva", constituída pelos pontos com coordenadas da forma

$$\big(f(t)\cos(t), f(t)\operatorname{sen}(t)\big),$$

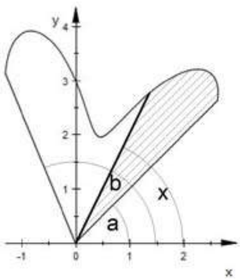
com $t \in \,]a,b[$, pontos cuja distância à origem é $f(t)$. O que se pretende neste exercício é justificar um método para determinar a área da região aberta[153] limitada pela curva e pelos segmentos de reta que unem as extremidades desta à origem, mais precisamente, da região cujos elementos são os pontos distintos da origem com argumento $t \in]a,b[$ e com distância à origem menor que $f(t)$.[154]



a) Mostrar que existe $c \in [a,b]$ tal que a área A da região seja dada por

$$A = \frac{1}{2} f(c)^2 (b-a).$$

b) Seja, para cada $x \in [a,b]$, $A(x)$ a área da região análoga que se obtém quando se substitui f pela sua restrição ao intervalo $[a,x]$. Verificar que $A(a) = 0$ e que $A'(x) = \frac{1}{2} f(x)^2$.



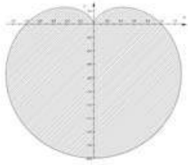
c) Deduzir de b) que, se $G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ for uma primitiva da função que a x associa $\frac{1}{2} f(x)^2$, então a área da região que estamos a considerar é dada por $G(b) - G(a)$.

Ex III.3.11 Utilizar a conclusão do exercício III.3.10 para determinar a área da cardióide, região constituídas pelos pontos do plano distintos da origem que

---

[153] O facto de considerarmos a região aberta ou a região fechada é irrelevante para efeito do cálculo da área mas evita alguns problemas técnicos no que faremos a seguir.
[154] Repare-se que, no caso em que $a = b$ não há curva mas esta região é o conjunto vazio.

têm um argumento $t \in]0, 2\pi[$ e distância à origem menor que $1 - \text{sen}(t)$.



Ex III.3.12 **(Todas as funções contínuas têm primitiva?)** Um teorema importante da Análise Matemática, cuja demonstração será estudada na disciplina de Análise do segundo semestre, afirma que qualquer função contínua $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, cujo domínio é um intervalo fechado e limitado não trivial $[a, b]$, admite uma primitiva $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. [155]

Uma tentativa de explicação deste resultado seria fazer notar que, no caso em que f admite $[0, +\infty[$ como codomínio, a função "área parcial" $A\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ referida em III.3.14 é uma tal primitiva e que, no caso geral, pode-se encontrar, pelo teorema de Weierstrass, uma constante c tal que $f(x) + c \geq 0$, para cada x, e então, partindo de uma primitiva desta função e subtraindo cx, obtém-se uma primitiva de f.

Por que razão este argumento não pode ser considerado como uma demonstração no contexto da Análise Matemática?

[155] De facto, deduz-se daqui facilmente que a mesma conclusão é válida no caso em que o domínio é um intervalo não trivial de qualquer tipo.

§4. Derivadas de ordem superior e fórmula de Taylor.

III.4.1 **(Derivadas de ordem 2 e 3)** Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto cujos elementos são todos pontos de acumulação, por exemplo um intervalo não trivial, e seja $f: X \to \mathbb{R}$ uma função.

1) Embora sem relação com a derivabilidade será cómodo dizer que f é 0 *vezes derivável* num ponto $a \in X$ se f for contínua no ponto a e, nesse caso, definir a sua *derivada de ordem* 0, $f^{(0)}(a)$, no ponto a como sendo sinónimo de $f(a)$. Dizemos que f é 0 vezes derivável, ou que é *de classe* C^0, se f for 0 vezes derivável em todos os pontos de X, isto é, se f for contínua.

2) Dizemos que f é 1 *vez derivável* num ponto $a \in X$ se for derivável nesse ponto e, nesse caso, definimos a sua derivada de ordem 1, $f^{(1)}(a)$, no ponto a como sendo sinónima de $f'(a)$. A função f diz-se 1 vez derivável se for 1 vez derivável em todos os pontos de X, ou seja, como foi definido em III.1.4, se for derivável, ficando então definida uma nova função $f^{(1)} = f': X \to \mathbb{R}$, a que se dá o nome de *função derivada*, ou *função derivada de ordem* 1. Dizemos que a função $f: X \to \mathbb{R}$ é *de classe* C^1 se for derivável e a função derivada $f': X \to \mathbb{R}$ for contínua (ou seja, de classe C^0...). Lembrar também que sabemos que uma função derivável é sempre contínua, ou seja, de classe C^0.

3) Diz-se que $f: X \to \mathbb{R}$ é 2 *vezes derivável* num ponto $a \in X$ se a função for derivável (ou seja 1 vez derivável) e a função derivada $f' = f^{(1)}: X \to \mathbb{R}$ for derivável no ponto a. A derivada de f' no ponto a é então notada $f''(a)$ ou $f^{(2)}(a)$ e chamada de *segunda derivada* de f *no ponto* a, ou *derivada de ordem* 2 de f nesse ponto. A função diz-se 2 vezes derivável se tiver derivada de segunda ordem em todos os pontos (ou seja, se for derivável e a função derivada $f': X \to \mathbb{R}$ também for derivável) e ficamos então com uma função $f'' = f^{(2)}: X \to \mathbb{R}$ a que se dá o nome de *segunda derivada* de f, ou derivada de ordem 2 de f, dizendo-se, neste caso, que a função f é *de classe* C^2 quando a função $f'': X \to \mathbb{R}$ for contínua (ou seja, quando f' for de classe C^1). Repare-se que, uma vez que uma função derivável é contínua, concluímos que uma função 2 vezes derivável é sempre de classe C^1, e portanto também de classe C^0.

4) O que vamos referir nesta alínea vai ser um caso particular da definição recursiva que explicaremos adiante mas, mesmo assim, talvez valha a pena examinar explicitamente mais um passo. Diz-se que $f: X \to \mathbb{R}$ é 3 *vezes derivável* num ponto $a \in X$ se a função for 2 vezes derivável e a função derivada de segunda ordem $f'' = f^{(2)}: X \to \mathbb{R}$ for derivável no ponto a. A derivada de f'' no ponto a é então notada $f'''(a)$ ou $f^{(3)}(a)$ e chamada de *terceira derivada* de f *no ponto* a, ou *derivada de ordem* 3 de f nesse ponto. A função diz-se 3 *vezes derivável* se tiver derivada de terceira ordem em todos os pontos (ou seja, se for 2 vezes derivável e a função segunda derivada $f'': X \to \mathbb{R}$ for derivável) e ficamos então com uma função $f''' = f^{(3)}: X \to \mathbb{R}$ a que se dá o nome de *terceira derivada* de f, ou *derivada de ordem* 3 de f. Neste caso dizemos que a função f é *de classe* C^3 quando a função $f''': X \to \mathbb{R}$ for contínua (ou seja, quando f'' for de classe C^1). Analogamente ao que foi dito nas alíneas precedentes, uma função 3 vezes derivável é sempre de classe C^2, e portanto também de classe C^1 e C^0.

III.4.2 **(Exemplo de aplicação — máximos e mínimos relativos)** Sejam X um intervalo, a um ponto interior a X e $f: X \to \mathbb{R}$ uma função derivável em a e atingindo nesse ponto um máximo ou um mínimo (ou, mais geralmente, um máximo ou um mínimo relativos). Sabemos então (teorema de Fermat, cf. III.2.1 e III.2.2) que se tem $f'(a) = 0$. Já observámos, no entanto que o facto de se ter $f'(a) = 0$ não garante por si só que a função tenha que ter em a um máximo ou mínimo relativo. Vamos agora verificar que o facto de ser ter $f'(a) = 0$, complementado pelo conhecimento da derivada de segunda ordem no ponto a pode ser suficiente para tirarmos conclusões sobre a existência de máximo ou mínimo relativos. Mais precisamente:

Sejam X um intervalo e $f: X \to \mathbb{R}$ uma função 2 vezes derivável num ponto a interior a X e tal que $f'(a) = 0$ e $f''(a) > 0$ (respetivamente $f''(a) < 0$). Existe então $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $x \in V_\varepsilon(a) \cap X$, $f(x) > f(a)$ (respetivamente $f(x) < f(a)$), por outras palavras, f atinge em a um mínimo estrito (respetivamente máximo estrito) relativo.[156]

Dem: Examinaremos apenas o caso em que $f''(a) > 0$ uma vez que aquele em que $f''(a) < 0$ pode ser demonstrado de modo análogo ou, alternativamente, por aplicação do caso que vamos examinar à função $-f$. Ora, tendo em conta o facto de se ter

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f'(x)}{x-a} = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f'(x) - f'(a)}{x-a} = f''(a) > 0$$

implica, pela propriedade dos limites referida em I.5.2, que existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $x \in V_\varepsilon(a) \cap X$ se tenha $\frac{f'(x)}{x-a} > 0$, portanto $f'(x) > 0$ se $x > a$ e $f'(x) < 0$ se $x < a$. Concluímos daqui, por III.2.11, que a função f é estritamente crescente no intervalo $V_\varepsilon(a) \cap X_{\geq a}$ e estritamente decrescente no intervalo $V_\varepsilon(a) \cap X_{\leq a}$ em particular se $x \neq a$ em $X \cap V_\varepsilon(a)$, quer no caso em que $x < a$ como naquele em que $x > a$, tem-se $f(x) > f(a)$. □

III.4.3 **(Derivadas de ordem superior)** Não há nenhuma razão para pararmos nas derivadas de ordem 3 e podemos também definir derivadas de ordem superior. Utilizamos para isso uma definição recursiva, que define o que são as derivadas de ordem $p+1$ a partir das derivadas de ordem p, generalizando o que se fez nas alíneas 3) e 4) de III.4.1 para passar das derivadas de

[156]Pelo contrário, se for também $f''(a) = 0$, não poderemos dizer nada sobre a existência ou não de extremo relativo em a, sem fazer um estudo mais completo.

primeira ordem para as de segunda e das derivadas de segunda ordem para as de terceira. Para não multiplicarmos o número de plicas na notação das derivadas, será usual utilizar nas derivadas de ordem superior a 3, ou nas de ordem indeterminada, as notações sem plicas.

A definição recursiva consiste em admitir que já sabemos os que são, para um certo $p \geq 1$, as funções p vezes deriváveis e o que são as respetivas derivadas de ordem p, notadas $f^{(p)}$, em particular, o que são as funções de classe C^p. Diz-se então que uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ é $p+1$ *vezes derivável* num ponto $a \in X$ se for p vezes derivável e a função derivada de ordem p, $f^{(p)}\colon X \to \mathbb{R}$ for derivável no ponto a e, nesse caso, a derivada desta função no ponto a toma o nome de *derivada de ordem* $p+1$ de f no ponto a e é notada $f^{(p+1)}(a)$. A função $f\colon X \to \mathbb{R}$ diz-se $p+1$ *vezes derivável* se o for em todos os pontos de X (caso em que ela é automaticamente de qualquer das classes $C^0, C^1, C^2, \ldots, C^p$) e diz-se *de classe* C^{p+1} quando, além disso, a função $f^{(p+1)}\colon X \to \mathbb{R}$ assim obtida for contínua.[157]

Referimos enfim que a função $f\colon X \to \mathbb{R}$ diz-se *de classe* C^∞, ou *indefinidamente derivável*, se for de classe C^p para todo o natural p.

III.4.4 **(Resultado elementar de uso frequente)** Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto cujos elementos são todos pontos de acumulação, por exemplo um intervalo não trivial, e seja $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função. Dados $p \geq 1$ e $q \geq 1$, a função é $p+q$ vezes derivável num ponto $a \in X$ se, e só se, ela é p vezes derivável e a derivada de ordem p, $f^{(p)}\colon X \to \mathbb{R}$, é q vezes derivável no ponto a e, nesse caso, a derivada $f^{(p+q)}(a)$ coincide com a derivada de ordem q, $(f^{(p)})^{(q)}$, da função $f^{(p)}\colon X \to \mathbb{R}$ no ponto a. Em consequência, $f\colon X \to \mathbb{R}$ é $p+q$ vezes derivável (respetivamente, é de classe C^{p+q}) se, e só se, é p vezes derivável e $f^{(p)}\colon X \to \mathbb{R}$ é q vezes derivável (respetivamente de classe C^q).

Dem: Trata-se de um resultado que porventura seremos levados a aceitar como muito intuitivo mas do qual se pode explicitar uma prova por indução matemática no número natural q: Para $q = 1$, temos simplesmente a definição recursiva da derivada de ordem superior. Suponhamos então que a afirmação é verdadeira para um certo $q \geq 1$. Pela definição recursiva, f é $p + (q+1) = (p+q) + 1$ vezes derivável em a se, e só se for $p+q$ vezes derivável e a derivada de ordem $p+q$, $f^{(p+q)}\colon X \to \mathbb{R}$ for derivável em a, tendo-se então $f^{(p+q+1)}(a) = (f^{(p+q)})'(a)$. Mas, pela hipótese de indução, f é $p+q$ vezes derivável se, e só se for p vezes derivável e com $f^{(p)}\colon X \to \mathbb{R}$ q vezes derivável, caso em que $f^{(p+q)} = (f^{(p)})^{(q)}$. Concluímos assim que f é

---

[157]Deve ter-se em atenção uma particularidade do caso $p = 0$ que implicou que começássemos a nossa definição recursiva com a passagem de 1 para 2: De acordo com as convenções que estamos a fazer, embora uma função $p+1$ vezes derivável num ponto (onde $p \geq 1$) seja p vezes derivável em todos os pontos, uma função 1 vez derivável em todos os pontos não tem que ser 0 vezes derivável (isto é, contínua) em todos os pontos, embora o seja evidentemente no ponto em questão. É claro que, quando a função for 1 vez derivável em todos os pontos a particularidade deixa de existir: A função tem também derivada de ordem 0 em todos os pontos e portanto é de classe C^0.

$p+(q+1)$ vezes derivável em a se, e só se f for p vezes derivável, a função $f^{(p)}\colon X\to\mathbb{R}$ for q vezes derivável e a função $(f^{(p)})^{(q)}\colon X\to\mathbb{R}$ for derivável em a o que, mais uma vez pela definição recursiva, é equivalente à função $f^{(p)}$ ser $q+1$ vezes derivável em a, tendo-se nesse caso

$$f^{(p+q+1)}(a)=(f^{(p+q)})'(a)=\big((f^{(p)})^{(q)}\big)'(a)=(f^{(p)})^{(q+1)}(a),$$

o que termina a prova por indução. □

Vamos agora verificar que um número muito importante de funções que encontramos na prática são de classe C^∞. Fazemo-lo verificando esse facto para algumas funções e mostrando em seguida que as operações usuais que permitem construir novas funções a partir de outras mais simples conduzem a funções de classe C^p quando partem de funções de classe C^p. As justificações destes últimos factos serão feitas em geral por indução, aplicando o caso $p=1$ da propriedade estabelecida em III.4.4.
Observe-se a propósito que, apesar de para os exemplos básicos que referimos a seguir conseguirmos encontrar caracterizações explícitas das derivadas de ordem p, isso pode ser considerado, de certo modo, excecional. Para muitas funções de classe C^∞ definidas por expressões mais complicadas, conseguimos determinar para cada p uma expressão para a sua derivada de ordem p (calculando sucessivamente as derivadas de ordens inferiores) mas não é fácil explicitar uma fórmula que dê diretamente para cada p a derivada de ordem p.

III.4.5 **(As funções constantes)** Se $c\in\mathbb{R}$, a função constante $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de valor c é de classe C^∞ e com $f^{(p)}(x)=0$, para cada $p\geq 1$.
Dem: A demonstração, por indução em p, é uma consequência do facto de uma função constante ser contínua e ter derivada 0. □

III.4.6 **(As funções potência de expoente natural)** Se n é um número natural, então a função $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^n$ é de classe C^∞ tendo-se $f^{(p)}(x)=0$ para $p>n$ e, para $0\leq p\leq n$,

$$f^{(p)}(x)=\frac{n!}{(n-p)!}x^{n-p},$$ [158]

em particular $f^{(n)}(x)=n!$. Repare-se que, em particular, tem-se $f^{(p)}(0)=0$ para cada $p\neq n$ e, é claro, $f^{(n)}(0)=n!$.
Dem: O caso em que $p=0$ é trivialmente verdadeiro. Para $p=1$, sabemos que se tem

$$f^{(1)}(x)=f'(x)=nx^{n-1}=\frac{n!}{(n-1)!}x^{n-1}.$$

Supondo que a afirmação do enunciado é verdadeira para um certo $p\geq 1$

[158] De facto, esta fórmula também vale trivialmente para $p=0$.

verifiquemo-la para o natural seguinte $p+1$. Se $p=n$ estamos a supor que $f^{(p)}(x)=n!$ (constante) e portanto $f^{(p+1)}(x)=0$. Se $p>n$ estamos a supor que $f^{(p)}(x)=0$, e portanto também $f^{(p+1)}(x)=0$. Por fim, se $p<n$ estamos a supor que $f^{(p)}(x)=\frac{n!}{(n-p)!}x^{n-p}$ e daqui deduzimos que

$$f^{(p+1)}(x)=\frac{n!}{(n-p)!}(n-p)x^{n-p-1}=\frac{n!}{(n-(p+1))!}x^{n-(p+1)}.$$

Em qualquer dos casos, justificámos a afirmação do enunciado com $p+1$ no lugar de p, o que prova o resultado por indução em p. □

III.4.7 **(A função exponencial)** Ainda com uma justificação mais simples que a dada para o caso da função potência de expoente natural, verificamos imediatamente que a função exponencial de base e, $\exp\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $\exp(x)=e^x$, é de classe C^∞, e com $\exp^{(p)}(x)=\exp(x)$, para cada $p\geq 0$.

III.4.8 **(As funções seno e cosseno)** As funções $\cos\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $\mathrm{sen}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ são de classe C^∞ e as suas derivadas $\cos^{(q)}$ e $\mathrm{sen}^{(q)}$, de ordem q, estão definidas pelas seguintes fórmulas, onde $p\geq 0$ é um inteiro:

$$\begin{array}{ll}
\cos^{(4p)}(x)=\cos(x), & \mathrm{sen}^{(4p)}(x)=\mathrm{sen}(x),\\
\cos^{(4p+1)}(x)=-\mathrm{sen}(x), & \mathrm{sen}^{(4p+1)}(x)=\cos(x),\\
\cos^{(4p+2)}(x)=-\cos(x), & \mathrm{sen}^{(4p+2)}(x)=-\mathrm{sen}(x),\\
\cos^{(4p+3)}(x)=\mathrm{sen}(x), & \mathrm{sen}^{(4p+3)}(x)=-\cos(x).
\end{array}$$

Dem: Derivando sucessivamente obtemos $\cos'(x)=-\mathrm{sen}(x)$, $\cos''(x)=-\cos(x)$, $\cos'''(x)=\mathrm{sen}(x)$, $\cos^{(4)}(x)=\cos(x)$. Daqui resulta, por indução em p, que $\cos^{(4p)}(x)=\cos(x)$ e portanto

$$\begin{aligned}
\cos^{(4p+1)}(x)&=\left(\cos^{(4p)}\right)^{(1)}(x)=\cos'(x)=-\mathrm{sen}(x),\\
\cos^{(4p+2)}(x)&=\left(\cos^{(4p)}\right)^{(2)}(x)=\cos^{(2)}(x)=-\cos(x),\\
\cos^{(4p+3)}(x)&=\left(\cos^{(4p)}\right)^{(3)}(x)=\cos^{(3)}(x)=\mathrm{sen}(x).
\end{aligned}$$

As fórmulas para as derivada do seno têm uma justificação análoga ou, alternativamente, resultam das anteriores se repararmos que a igualdade $\mathrm{sen}'(x)=\cos(x)$ implica que

$$\mathrm{sen}^{(q+1)}(x)=\left(\mathrm{sen}'\right)^{(q)}(x)=\cos^{(q)}(x).$$ □

III.4.9 **(A função $\frac{1}{x}$)** A função $f\colon\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{1}{x}$ é de classe C^∞ e as suas derivadas de ordem $p\geq 0$ estão definidas por

$$f^{(p)}(x)=\frac{(-1)^p p!}{x^{p+1}}.$$

Dem: O caso $p=0$ é trivialmente verdadeiro. Provamos, por indução em p, que f é de classe C^p para cada $p \in \mathbb{N}$ e com a derivada de ordem p definida do modo indicado. Isso vai resultar por aplicação da regra de derivação do inverso de uma função (cf. III.1.10). Vem assim $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$ e, supondo que, para um certo $p \geq 1$, $f^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{x^{p+1}}$, obtemos

$$f^{(p+1)}(x) = f^{(p)'}(x) = \frac{-(-1)^p p!(p+1)x^p}{x^{2p+2}} = \frac{(-1)^{p+1}(p+1)!}{x^{p+2}}. \qquad \square$$

III.4.10 **(A função x^d)** Seja $d \in \mathbb{R}$ e consideremos a função $f\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^d$. Esta função é de classe C^∞ e as derivadas de ordem $p \geq 1$ estão definidas por

$$f^{(p)}(x) = d(d-1)(d-2)\cdots(d-(p-1))x^{d-p}.$$

Dem: Provamos, por indução em p, que f é de classe C^p para cada p e com a derivada de ordem p definida do modo indicado. O caso em que $p = 1$ resume-se à igualdade $f'(x) = dx^{d-1}$, que já encontrámos em III.1.16. Supondo que, para um certo $p \geq 1$,

$$f^{(p)}(x) = d(d-1)(d-2)\cdots(d-(p-1))x^{d-p},$$

obtemos então, pelo mesmo resultado

$$\begin{aligned} f^{(p+1)}(x) = f^{(p)'}(x) &= d(d-1)(d-2)\cdots(d-(p-1))(d-p)x^{d-p-1} = \\ &= d(d-1)(d-2)\cdots(d-(p+1-1))x^{d-(p+1)}. \qquad \square \end{aligned}$$

III.4.11 **(Restrições)** Sejam $Y \subset X$ dois subconjuntos de $\mathbb{R}$ cujos elementos são todos pontos de acumulação. Se $f\colon X \to \mathbb{R}$ é uma função p vezes derivável num ponto $a \in Y$, então a restrição $f_{/Y}\colon Y \to \mathbb{R}$ é também p vezes derivável no ponto a a com a mesma derivada de ordem p no ponto a que f. Em consequência, se f é p vezes derivável (respetivamente de classe C^p) então $f_{/Y}$ é também p vezes derivável (respetivamente de classe C^p).

Dem: Trata-se de uma propriedade que decorre naturalmente, por indução em p, da propriedade sobre a derivada de uma restrição e daquela que afirma que a restrição de uma função contínua num ponto é contínua nesse ponto. $\square$

III.4.12 **(Linearidade)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto cujos elementos são todos pontos de acumulação, $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ duas funções e $c \in \mathbb{R}$.

a) Se f e g são p vezes deriváveis num ponto $a \in X$ então as funções $f + g\colon X \to \mathbb{R}$ e $cf\colon X \to \mathbb{R}$ são também p vezes deriváveis em x e com

$$(f+g)^{(p)}(a) = f^{(p)}(a) + g^{(p)}(a), \quad (cf)^{(p)}(a) = cf^{(p)}(a).$$

b) Se f e g forem p vezes deriváveis (respetivamente de classe C^p) então as funções $f + g$ e cf são também p vezes deriváveis (respetivamente de classe $C^{(p)}$).

Dem: Trata-se, como antes, de uma propriedade que decorre naturalmente, por indução em p, da propriedade sobre a derivada de uma soma e do produto por uma constante (cf. a alínea a) de III.1.7), tendo em conta a continuidade num ponto da soma de duas funções contínuas nesse ponto e do produto de uma constante por uma função contínua nesse ponto. □

III.4.13 **(Corolário)** Uma vez que uma soma finita de funções pode ser sempre obtida por aplicação repetida da operação de somar duas funções, decorre do resultado precedente que uma soma finita de funções p vezes deriváveis num ponto a é ainda uma função p vezes derivável no ponto a e com derivada de ordem p em a igual à soma das derivadas de ordem p no ponto a das funções de partida (se se quiser ser mais claro pode sempre fazer-se um raciocínio por indução no número de parcelas). Consequentemente, a soma finita de funções p vezes deriváveis (respetivamente de classe C^p) é ainda p vezes derivável (respetivamente de classe C^p).

Como exempo de aplicação do que acabamos de referir, e tendo em conta III.4.6, concluímos que, se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função polinomial de grau $n \geq 1$ da forma

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n,$$

com $a_0, a_1, \ldots, a_n$ em $\mathbb{R}$ e $a_0 \neq 0$, então f é de classe C^∞, $f^{(p)}(x) = 0$ para cada $p > n$, $f^{(n)}(x) = n! a_0$ e $f^{(p)}(0) = p! a_{n-p}$ para cada $0 \leq p \leq n$. Esta conclusão permite-nos, em particular, escrever a igualdade

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

que não é mais do que um caso particular da fórmula de Maclaurin que estudaremos mais adiante nesta secção.

III.4.14 **(Produto de funções)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto cujos elementos são todos pontos de acumulação e $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ duas funções.

a) Se f e g são p vezes deriváveis num ponto $a \in X$ então $f \times g\colon X \to \mathbb{R}$ é também p vezes derivável no ponto a.

b) Se f e g são p vezes deriváveis (respetivamente de classe C^p) então $f \times g$ é também p vezes derivável (respetivamente de classe C^p).[159]

Dem: O caso em que $p = 0$ resulta de o produto de funções contínuas num ponto ser contínuo nesse ponto. O caso em que $p = 1$ resulta imediatamente da fórmula para a derivada de um produto

$$(f \times g)'(x) = f'(x) g(x) + f(x) g'(x).$$

O caso geral demonstra-se por indução em p, reparando que a derivada de

[159]Repare-se que, ao contrário do que fizémos em III.4.12, não exibimos aqui uma fórmula explícita para a derivada de ordem p de $f \times g$ no ponto a. Ver o exercício III.4.3 adiante para uma tal fórmula.

ordem $p+1$ de $f\times g$ num certo ponto é a derivada de ordem p nesse ponto da função $(f\times g)'$. [160] □

III.4.15 **(Corolário)** Analogamente ao que sucedia no caso da soma, decorre do resultado precedente que um produto finito de funções p vezes deriváveis num ponto a é ainda uma função p vezes derivável no ponto a (se se quiser ser mais claro pode sempre fazer-se um raciocínio por indução no número de factores). Consequentemente, o produto finito de funções p vezes deriváveis (respetivamente de classe C^p) é ainda p vezes derivável (respetivamente de classe C^p).

III.4.16 **(Quociente de funções)** Sejam $X\subset\mathbb{R}$ um conjunto cujos elementos são todos pontos de acumulação e $f,g\colon X\to\mathbb{R}$ duas funções, com $g(x)\neq 0$, para cada $x\in X$.

a) Se f e g são p vezes deriváveis num ponto $a\in X$ então a função $\frac{f}{g}\colon X\to\mathbb{R}$ é também p vezes derivável no ponto a.

b) Se f e g são p vezes deriváveis (respetivamente de classe C^p) então $\frac{f}{g}$ é também p vezes derivável (respetivamente de classe C^p). [161]

Dem: O caso em que $p=0$ resulta de o quociente de funções contínuas num ponto ser contínuo nesse ponto. O caso em que $p=1$ resulta imediatamente da fórmula para a derivada de um quociente

$$(\frac{f}{g})'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

O caso geral demonstra-se por indução em p, reparando que a derivada de ordem $p+1$ de $\frac{f}{g}$ num certo ponto é a derivada de ordem p nesse ponto da função $(\frac{f}{g})'$. [162] □

III.4.17 **(Composta de funções)** Sejam $X\subset\mathbb{R}$ e $Y\subset\mathbb{R}$ dois conjuntos cujos elementos sejam todos pontos de acumulação e $f\colon X\to Y$ e $g\colon Y\to\mathbb{R}$ duas funções.

a) Se $f\colon X\to Y$ é p vezes derivável num ponto $a\in X$ e $g\colon Y\to\mathbb{R}$ é p vezes derivável no ponto $f(a)$, então a função composta $g\circ f\colon X\to\mathbb{R}$ é também p vezes derivável no ponto a.

b) Se f e g são p vezes deriváveis (respetivamente de classe C^p) então $g\circ f$ é também p vezes derivável (respetivamente de classe C^p).

Dem: O caso em que $p=0$ resulta da propriedade bem conhecida sobre a

---

[160] Repare-se que no passo de indução tivémos que utilizar não só a hipótese de indução mas também a conclusão de III.4.12.

[161] Mais uma vez neste resultado, apesar de afirmarmos que um certa função é p vezes derivável, não exibimos nenhuma fórmula para a sua derivada de ordem p. O mesmo vai acontecer nos dois resultados a seguir.

[162] Repare-se que no passo de indução tivémos que utilizar não só a hipótese de indução mas também as conclusões de III.4.12 e III.4.14.

composta de funções contínuas em pontos convenientes. O caso em que $p = 1$ resulta imediatamente da fórmula para a derivada da função composta $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$. O caso geral demonstra-se por indução em p, reparando que a derivada de ordem $p+1$ de $g \circ f$ num certo ponto é a derivada de ordem p nesse ponto da função $(g \circ f)'$. [163] □

III.4.18 **(Caso particular, frequente nas aplicações, em que se pode ser mais detalhado)** Nas hipóteses de III.4.17, suponhamos que existem constantes $c, d \in \mathbb{R}$ tais que, para cada $x \in X$, $f(x) = cx + d$ (em particular, f é mesmo de classe C^∞). Se $g\colon Y \to \mathbb{R}$ é p vezes derivável num ponto a, onde $p \geq 0$, então

$$(g \circ f)^{(p)}(a) = c^p g^{(p)}(f(a)).$$

Dem: O caso $p = 0$ é trivialmente verdadeiro. Reparando que, para cada $x \in X$, $f'(x) = c$, o caso $p = 1$ do enunciado reduz-se ao teorema de derivação da função composta: Em cada x tal que g seja derivável em $f(x)$,

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x) = cg'(f(x)).$$

O caso geral resulta então, mostrando, por indução em p, que em cada x tal que g seja p vezes derivável em x, $(g \circ f)^{(p)}(x) = c^p g^{(p)}(f(x))$. □

III.4.19 **(A função inversa)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$ conjuntos cujos elementos são todos pontos de acumulação e $f\colon X \to Y$ uma função bijetiva derivável, com $f'(x) \neq 0$ para cada x, e com inversa $f^{-1}\colon Y \to X$ contínua[164].

a) Se $f\colon X \to Y$ é p vezes derivável num ponto $a \in X$, então $f^{-1}\colon Y \to X$ é p vezes derivável no ponto $f(a)$.

b) Se $f\colon X \to Y$ é p vezes derivável (respetivamente de classe C^p) então $f^{-1}\colon Y \to X$ é também p vezes derivável (respetivamente de classe C^p).

Dem: O caso em que $p = 0$ é trivial. O caso em que $p = 1$ resulta de que, como se verificou em III.1.18, tem-se, para cada $y \in Y$,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$ [165]

O caso geral demonstra-se por indução em p, a partir da fórmula precedente, reparando que a derivada de ordem $p+1$ de f^{-1} num certo ponto é a derivada de ordem p nesse ponto da função $(f^{-1})'$. [166] □

---

[163] Repare-se que no passo de indução tivémos que utilizar não só a hipótese de indução mas também a conclusão de III.4.14.

[164] Em muitos casos concretos utiliza-se II.1.20 para garantir a continuidade de f^{-1}.

[165] De facto, a conclusão de a) para $p = 1$ resume-se a III.1.18, sendo assim válida com hipóteses menos exigentes que as que estamos a fazer.

[166] Repare-se que no passo de indução tivémos que utilizar não só a hipótese de indução mas também as conclusões de III.4.17 e de III.4.16.

Vamos agora utilizar as derivadas de ordem superior para estudar a fórmula de Maclaurin (e posteriormente a fórmula de Taylor que é uma generalização simples desta) que permite aproximar funções admitindo derivadas de ordem superior por polinómios, nomeadamente os chamados polinómios de Maclaurin. Como motivação para a definição destes, relembramos o modo de caracterizar os coeficientes dum polinómio referido em III.4.13. O estudo destas fórmulas será feito exclusivamente no contexto de funções cujos domínios são intervalos não triviais.

III.4.20 **(Fórmula de Maclaurin)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo não trivial com $0 \in X$ e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função p vezes derivável em 0, onde $p \geq 1$. Define-se então a *aproximação de Maclaurin* (ou *polinómio de Maclaurin*) de ordem p de f como sendo o polinómio

$$P_p(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p$$

e o *resto de Maclaurin* de ordem p de f como sendo a função $r_p\colon X \to \mathbb{R}$ definida por $r_p(x) = f(x) - P_p(x)$. Pode então escrever-se a *fórmula de Maclaurin* de ordem de p da função f,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p + r_p(x).$$

Por extensão, se $f\colon X \to \mathbb{R}$ é uma função arbitrária, encaramos o valor $f(0)$ como sendo a *aproximação de Maclaurin* de ordem 0 de f e define-se o *resto de Maclaurin* de ordem 0, $r_0\colon X \to \mathbb{R}$ por $r_0(x) = f(x) - f(0)$, obtendo-se assim a *fórmula de Maclaurin* de ordem 0 da função f

$$f(x) = f(0) + r_0(x).$$

III.4.21 **(Fórmula de Taylor)** Sejam, mais geralmente, $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo não trivial e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função p vezes derivável num ponto $a \in X$, onde $p \geq 1$. Definimos então a *aproximação de Taylor* de ordem p de f centrada em a como sendo a função[167] $P_p\colon X \to \mathbb{R}$ definida por

$$P_p(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(p)}(a)}{p!}(x-a)^p$$

e o *resto de Taylor* de ordem p de f centrado em a como sendo a função $r_p\colon X \to \mathbb{R}$ definida por $r_p(x) = f(x) - P_p(x)$. Pode então escrever-se a *fórmula de Taylor* de ordem p da função f centrada em a,

[167]De facto, tal como no caso particular da aproximação de Maclaurin, trata-se de um polinómio de grau menor ou igual a p (como se reconhece desenvolvendo cada uma das potências de $x-a$) mas o importante é a sua decomposição em potências de $x-a$.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(p)}(a)}{p!}(x-a)^p + r_p(x).$$

Como antes, por extensão, se $f\colon X \to \mathbb{R}$ é uma função arbitrária, encaramos o valor $f(a)$ como sendo, a *aproximação de Taylor* de ordem 0 de f centrada em a e o *resto de Taylor* de ordem 0, $r_0\colon X \to \mathbb{R}$ por $r_0(x) = f(x) - f(a)$, obtendo-se assim a *fórmula de Taylor* de ordem 0 da função f,

$$f(x) = f(a) + r_0(x).$$

Repare-se que se tem trivialmente $r_p(a) = 0$.

É claro que a aproximação, o resto e a fórmula de Maclaurin não são mais do que a aproximação, o resto e a fórmula de Taylor no caso em que $0 \in X$ e se considera $a = 0$ pelo que todas as propriedades que se estabelecerem no "contexto Taylor" aplicam-se, em particular no "contexto Maclaurin".

Repare-se que a fórmula de Taylor, tal como a de Maclaurin, não necessita de demonstração, uma vez que é um consequência direta da definição do resto $r_p(x)$ de ordem p. O que será importante é, como faremos adiante, estabelecer propriedades do resto, por exemplo majorações deste, em valor absoluto, que permitam encarar a aproximação de Taylor $P_p(x)$ como constituindo uma aproximação de $f(x)$ e o resto $r_p(x)$ como o erro que se comete com essa aproximação.

III.4.22 No caso em que a função $f\colon X \to \mathbb{R}$ é $p+1$ vezes derivável no ponto a ($p \geq 0$), comparando as fórmulas de Taylor de ordens p e $p+1$, concluímos que, para cada $x \in X$,

$$r_p(x) = \frac{f^{(p+1)}(a)}{(p+1)!}(x-a)^{p+1} + r_{p+1}(x).$$

III.4.23 Tendo em conta a definição $r_p(x) = f(x) - P_p(x)$, onde a aproximação de Taylor P_p é uma função de classe C^∞, podemos dizer que o resto de Taylor $r_p\colon X \to \mathbb{R}$ tem as mesmas propriedades de derivabilidade que a função f, mais precisamente, para cada $k \geq 0$, r_p é k vezes derivável num ponto $x \in X$ se, e só se, f for k vezes derivável em x e r_p é de classe C^k se, e só se, f é de classe C^k.

III.4.24 **(Exemplo)** Seja $f\colon]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$ a função de classe C^∞ definida por

$$f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Tendo em conta o cálculo, feito em III.4.9, da derivada de ordem p da função $y \mapsto \frac{1}{y}$ e o corolário III.4.18, vemos que para cada $p \geq 0$

$$f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}.$$

A fórmula de Maclaurin de ordem p de f vai ser assim, neste caso

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^p + r_p(x).$$

Repare-se que, o que é de certo modo excecional, é possível neste caso dar uma fórmula explícita para o resto $r_p\colon]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$. Com efeito, pela fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica (cf. I.2.4), tem-se

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^p = \frac{1-x^{p+1}}{1-x}$$

(fórmula válida trivialmente também para $p = 0$) e daqui deduzimos que

$$r_p(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{p+1}}{1-x} = \frac{x^{p+1}}{1-x}.$$

III.4.25 **(Lema[168])** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo não trivial e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função derivável, que seja $p+1$ vezes derivável em $a \in X$, onde $p \geq 0$. Sejam $r_{p+1}\colon X \to \mathbb{R}$ o resto de Taylor de ordem $p+1$ de f centrado em a e $\widehat{r}_p\colon X \to \mathbb{R}$ o resto de Taylor de ordem p centrado em a da função $f'\colon X \to \mathbb{R}$, que, no caso em que $p \geq 1$, é p vezes derivável em a. Tem-se então, para cada $x \in X$, $r'_{p+1}(x) = \widehat{r}_p(x)$.

Dem: Basta reparar que, no caso em que $p = 0$, de se ter

$$r_1(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$$

obtém-se, por derivação, $r'_1(x) = f'(x) - f'(a) = \widehat{r}_0(x)$ e que, no caso em que $p \geq 1$, de se ter

$$r_{p+1}(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 - \\ - \cdots - \frac{f^{(p+1)}(a)}{(p+1)!}(x-a)^{p+1},$$

obtém-se, por derivação,

$$r'_{p+1}(x) = f'(x) - f'(a) - \frac{2f^{(2)}(a)}{2!}(x-a) - \frac{3f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^2 - \\ - \cdots - \frac{(p+1)f^{(p+1)}(a)}{(p+1)!}(x-a)^p = \\ = f'(x) - f'(a) - (f')'(a)(x-a) - \frac{(f')^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 - \\ - \cdots - \frac{(f')^{(p)}(a)}{p!}(x-a)^p = \widehat{r}_p(x).$$

□

[168]Este lema será frequentemente utilizado em demonstrações por indução.

III.4.26 **(Exemplo)** Seja $g:]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$ a função de classe C^∞ definida por

$$g(x) = -\ln(1-x)$$

para a qual se tem $g'(x) = f(x)$, onde $f(x) = \frac{1}{1-x}$ é a função que estudámos no exemplo III.4.24. Tem-se assim $g^{(p+1)}(x) = f^{(p)}(x)$, para cada $p \geq 0$, pelo que a fórmula de Maclaurin de ordem $p \geq 1$ de g vai ser

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^p}{p} + \widehat{r}_p(x),$$

onde não temos uma expressão tão precisa sobre o resto $\widehat{r}_p:]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$ como acontecia no exemplo referido. Tendo em conta o lema III.4.25, ficamos no entanto a saber que, no caso em que $p \geq 1$, sendo r_{p-1} o resto de Maclaurin de ordem $p-1$ de f, tem-se

$$\widehat{r}'_p(x) = r_{p-1}(x) = \frac{x^p}{1-x}$$

o que, em conjunto com o facto geral de se ter $\widehat{r}_p(0) = 0$, permite deduzir informações sobre $\widehat{r}_p(x)$ como por exemplo, pelo teorema de Lagrange, para cada $x \neq 0$,

$$\widehat{r}_p(x) = x\frac{c^p}{1-c},$$

para um certo c entre 0 e x. Estudaremos adiante um método mais geral de obter informações sobre o resto (o resto na forma de Lagrange).

III.4.27 **(Propriedade fundamental do resto)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo não trivial e $f: X \to \mathbb{R}$ uma função p vezes derivável num ponto $a \in X$, onde $p \geq 0$. O resto de Taylor de ordem p de f centrado em a, $r_p: X \to \mathbb{R}$ verifica então a propriedade

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{r_p(x)}{(x-a)^p} = 0.$$

Dem: O caso $p = 0$ resulta trivialmente de se ter $r_0(x) = f(x) - f(a)$, lembrando que um função 0 vezes derivável em a é, por definição, contínua nesse ponto. Para $p \geq 1$, fazemos a demonstração por indução em p. No caso em que $p = 1$ temos uma consequência direta da definição de derivada: Supomos que f é derivável em a e, uma vez que

$$r_1(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a),$$

tem-se, para cada $x \neq a$,

$$\frac{r_1(x)}{x-a} = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) \xrightarrow[x \to a]{} f'(a) - f'(a) = 0.$$

Suponhamos agora que o resultado é válido para um certo $p \geq 1$ e vejamos o que se pode afirmar quando $f\colon X \to \mathbb{R}$ é uma função $p+1$ vezes derivável em a, em particular derivável. Ora, aplicando a regra de Cauchy para o levantamento de indeterminações (cf. III.2.17 e III.2.20) vemos que, no caso em que o segundo limite existe,

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{r_{p+1}(x)}{(x-a)^{p+1}} = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{r'_{p+1}(x)}{(p+1)(x-a)^p}.$$

Mas, como verificámos em III.4.25, tem-se $r'_{p+1}(x) = \widehat{r}_p(x)$, onde $\widehat{r}_p$ é o resto de Taylor de ordem p centrado em a da função $f'\colon X \to \mathbb{R}$, que é p vezes derivável, pelo que, tendo em conta a hipótese de indução, o limite no segundo membro é efetivamente igual a 0. □

III.4.28 **(Propriedade de unicidade da aproximação de Taylor)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo não trivial e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função p vezes derivável num ponto $a \in X$, onde $p \geq 0$. Sejam $b_0, b_1, \ldots, b_p$ em $\mathbb{R}$ tais que, sendo

$$\tilde{P}(x) = b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_p(x-a)^p$$

e definindo $\tilde{r}\colon X \to \mathbb{R}$ por $\tilde{r}(x) = f(x) - \tilde{P}(x)$, ou seja, pela condição de se ter, para cada $x \in X$,

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_p(x-a)^p + \tilde{r}(x),$$

se tenha

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{\tilde{r}(x)}{(x-a)^p} = 0.$$

Tem-se então que $\tilde{P}$ é a aproximação de Taylor de ordem p centrada em a de f, ou seja,

$$b_0 = f(a), \quad b_1 = f'(a), \quad b_2 = \frac{f^{(2)}(a)}{2!}, \quad \cdots \quad b_p = \frac{f^{(p)}(a)}{p!},$$

e portanto $\tilde{r}(x) = r_p(x)$.

Dem: Vamos demonstrar o resultado por indução em p. No caso em que $p = 0$, estamos a supor que f é contínua em a e que se tem $f(x) = b_0 + \tilde{r}(x)$ com $\tilde{r}(x) \to 0$ quando $x \to a$, $x \neq a$ e daqui resulta que

$$f(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = b_0.$$

Suponhamos que o resultado é válido para um certo $p \geq 0$ e provemo-lo para funções $f\colon X \to \mathbb{R}$ que sejam $p+1$ deriváveis em a e para as quais se possa escrever

(1) $$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_{p+1}(x-a)^{p+1} + \tilde{r}(x),$$

com $\frac{\tilde{r}(x)}{(x-a)^{p+1}} \to 0$ quando $x \to a$, $x \neq a$. Pondo então

$$R(x) = b_{p+1}(x-a)^{p+1} + \tilde{r}(x),$$

tem-se, para cada $x \neq a$,

$$\frac{R(x)}{(x-a)^p} = (x-a)(b_{p+1} + \frac{\tilde{r}(x)}{(x-a)^{p+1}}) \to 0$$

quando $x \to a$ e

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_p(x-a)^p + R(x)$$

o que nos permite concluir, pela hipótese de indução, que

$$b_0 = f(a), \quad b_1 = f'(a), \quad b_2 = \frac{f^{(2)}(a)}{2!}, \quad \cdots \quad b_p = \frac{f^{(p)}(a)}{p!}.$$

A igualdade (1) pode assim ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \\ + \cdots + \frac{f^{(p)}(a)}{p!}(x-a)^p + b_{p+1}(x-a)^{p+1} + \tilde{r}(x) \end{aligned}$$

e, comparando-a com a fórmula de Taylor em III.4.21,

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \\ + \cdots + \frac{f^{(p)}(a)}{p!}(x-a)^p + \frac{f^{(p+1)}(a)}{(p+1)!}(x-a)^{p+1} + r_{p+1}(x), \end{aligned}$$

onde, por III.4.27, se tem também $\frac{r_{p+1}(x)}{(x-a)^{p+1}} \to 0$ quando $x \to a$, $x \neq a$, obtemos

$$b_{p+1}(x-a)^{p+1} + \tilde{r}(x) = \frac{f^{(p+1)}(a)}{(p+1)!}(x-a)^{p+1} + r_{p+1}(x)$$

e portanto, para $x \neq a$,

$$b_{p+1} + \frac{\tilde{r}(x)}{(x-a)^{p+1}} = \frac{f^{(p+1)}(a)}{(p+1)!} + \frac{r_{p+1}(x)}{(x-a)^{p+1}}$$

donde finalmente, considerando os limites de ambos os membros quando

$x \to a$,

$$b_{p+1} = \frac{f^{(p+1)}(a)}{(p+1)!}. \qquad \square$$

III.4.29 **(Exemplo)** Seja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função de classe C^∞ definida por

$$g(y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

Apesar de podermos calcular, desde que tenhamos tempo suficiente, sucessivamente as derivadas $g'(y)$, $g''(y)$, $g^{(3)}(y)\ldots$, não é fácil obter uma fórmula geral para a derivada $g^{(p)}(y)$ de ordem p num ponto y arbitrário. Vamos ver no entanto que, por aplicação do resultado de unicidade III.4.28, podemos obter a fórmula de Maclaurin de g de ordem par arbitrária e, a partir daí, estabelecer fórmulas explícitas para as derivadas de todas as ordens de g no ponto 0. Para isso, partimos da fórmula de Maclaurin de ordem p da função $f\colon]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1-x}$, que obtivémos em III.4.24,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^p + r_p(x),$$

onde $r_p(x) = \frac{x^{p+1}}{1-x}$, e, substituindo x por $-y^2$, obtemos

$$\textbf{(1)} \qquad g(y) = \frac{1}{1+y^2} = 1 - y^2 + y^4 - \cdots + (-1)^p y^{2p} + r_p(-y^2).$$

Reparamos então que, por se ter $\lim\limits_{x\to 0} \frac{r_p(x)}{x^p} = 0$, obtemos

$$\lim_{y\to 0} \frac{r_p(-y^2)}{y^{2p}} = (-1)^p \lim_{y\to 0} \frac{r_p(-y^2)}{(-y^2)^p} = 0.$$

Podemos assim concluir que (1) é a fórmula de Maclaurin de ordem $2p$ da função g, com as parcelas identicamente nulas omitidas, em particular que o resto de Maclaurin $\widehat{r}_{2p}$, de ordem $2p$, de g está definido por

$$\widehat{r}_{2p}(y) = r_p(-y^2) = (-1)^{p+1} \frac{y^{2p+2}}{1+y^2}.$$

Tendo em conta a arbitrariedade de p, vemos que as derivadas de ordem ímpar de g no ponto 0 são iguais a 0 e as derivadas de ordem par no ponto 0 são dadas por

$$g^{(2p)}(0) = (-1)^p \times (2p)!.$$

O facto de as derivadas de ordem ímpar no ponto a serem 0 implica também, por III.4.22, que os restos de Maclaurin de ordem ímpar $\widehat{r}_{2p+1}$ estão definidos por

$$\widehat{r}_{2p+1}(y) = \widehat{r}_{2p}(y) = (-1)^{p+1}\frac{y^{2p+2}}{1+y^2}.$$

Vamos agora estabelecer uma nova caracterização do resto de Taylor de ordem p, que permite controlar melhor o comportamento deste.

III.4.30 **(O resto na forma de Lagrange)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo não trivial, $a \in X$ e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função $p+1$ vezes derivável, onde $p \geq 0$. Sendo $r_p\colon X \to \mathbb{R}$ o resto de Taylor de ordem p de f centrado em a, então, para cada $x \neq a$ em X, existe c entre a e x tal que

$$r_p(x) = \frac{f^{(p+1)}(c)}{(p+1)!}(x-a)^{p+1}$$

(*forma de Lagrange* do resto), isto é, tal que

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \\ + \cdots + \frac{f^{(p)}(a)}{p!}(x-a)^p + \frac{f^{(p+1)}(c)}{(p+1)!}(x-a)^{p+1}. \end{aligned}$$

Dem: Vamos demonstrar a conclusão por indução em p. O caso em que $p = 0$ resulta diretamente do corolário do teorema de Lagrange em III.2.9 que, por $f\colon X \to \mathbb{R}$ ser derivável, garante a existência de c entre a e x tal que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c),$$

ou seja, $f(x) = f(a) + f'(c)(x-a)$.
Suponhamos o resultado verdadeiro para um certo $p \geq 0$ e estudemos o que se pode dizer no caso em que f é $p+2$ vezes derivável. Notemos r_{p+1} o resto de Taylor de ordem $p+1$ de f centrado em a e $\widehat{r}_p$ o resto de ordem p da função $p+1$ vezes derivável $f'\colon X \to \mathbb{R}$ centrado no mesmo ponto, lembrando que, pelo lema III.4.25, tem-se $r'_{p+1}(x) = \widehat{r}_p(x)$. Aplicando o corolário do teorema de Cauchy às funções deriváveis $X \to \mathbb{R}$ que a x associam $r_{p+1}(x)$ e $(x-a)^{p+2}$, ambas com o valor 0 para $x = a$ e a segunda com derivada diferente de 0 para $x \neq a$, concluímos a existência de y entre a e x tal que

$$\frac{r_{p+1}(x)}{(x-a)^{p+2}} = \frac{r'_{p+1}(y)}{(p+2)(y-a)^{p+1}} = \frac{1}{p+2}\,\frac{\widehat{r}_p(y)}{(y-a)^{p+1}}$$

e, aplicando agora a hipótese de indução à função f', concluímos a existência de c entre a e y, e portanto também entre a e x, tal que

$$\frac{r_{p+1}(x)}{(x-a)^{p+2}} = \frac{1}{p+2}\,\frac{f'^{(p+1)}(c)}{(p+1)!} = \frac{f^{(p+2)}(c)}{(p+2)!}. \qquad \square$$

III.4.31 **(Exemplo)** Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função de classe C^∞ definida por $f(x) = e^x$. Como referimos em III.4.7, tem-se $f^{(p)}(x) = e^x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{N}$, pelo que a fórmula de Maclaurin de ordem p é, neste caso,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^p}{p!} + r_p(x).$$

Usando a propriedade fundamental do resto referida em III.4.27, sabemos que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{r_p(x)}{x^p} = 0$ o que, apesar de nos apontar para uma tendência de $|r_p(x)|$ se tornar "bastante pequeno" desde que x esteja "suficientemente próximo" de 0, não nos dá nenhuma informação efetiva mais objetiva que nos permita majorar o valor absoluto do erro para um dado valor de x. Já utilizando o resto na forma de Lagrange sabemos que se tem $r_p(x) = \frac{e^c}{(p+1)!}x^{p+1}$, para um certo c entre 0 e x, o que permite majorar de forma muito mais efetiva o valor absoluto do erro $r_p(x)$. Por exemplo, se quisermos determinar uma boa aproximação de $e = e^1$, podemos usar o valor aproximado

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{p!}$$

tendo a certeza que a diferença entre o valor exato e a aproximação, sendo igual a $\frac{e^c}{(p+1)!}$ para um certo c entre 0 e 1, está entre 0 e $\frac{3}{(p+1)!}$ (lembrar que, como vimos em II.3.1, tem-se $e \le 3\ldots$). Uma vez que o fatorial cresce com uma certa rapidez, não é em geral necessário tomar um valor grande de p para obter uma boa aproximação de e ou mais geralmente de e^x. Refira-se a propósito que as calculadoras conhecem à partida o modo de efetuar as quatro operações básicas e que, quando calculam valores da exponencial, do seno, do cosseno, etc…, é com a ajuda de aproximações do tipo da anterior que o fazem.

Com o objetivo de tirar mais consequências da fórmula de Taylor, com o resto na forma de Lagrange, vamos agora abordar muito resumidamente a noção de soma duma série, noção essa que será estudada com mais profundidade no segundo semestre.

III.4.32 **(Séries)** Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais. Podemos então associar-lhe uma nova sucessão $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dita sucessão das *somas parciais* da primeira, pondo

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \quad \ldots \quad S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

(comparar com o que referimos em I.4.32), ou, utilizando a notação de somatório,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Quando nos referirmos a uma sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como sendo uma *série* estaremos a indicar que certas propriedades que vamos referir dizem respeito não a esta sucessão mas à sucessão das somas parciais. Por exemplo, chamamos *soma da série* ao limite, se existir, da sucessão das somas parciais (a soma da série pode ser um número real, $+\infty$ ou $-\infty$), limite esse que é notado

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

ou, de forma mais sugestiva mas menos precisa,

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

e dizemos que a série é *convergente* se tiver soma finita e que é *divergente* caso contrário, isto é, se não tiver soma ou esta for $+\infty$ ou $-\infty$.
Quando nos quisermos referir à própria sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, é usual dizer que consideramos a sucessão dos *termos da série*[169].

É comum cometer-se o abuso de utilizar a notação $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ ou

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

para designar a série definida pelos termos u_n, em vez da soma dessa série (que pode ou não existir). Em geral este abuso não apresenta perigo, uma vez que será claro a partir do contexto em que a notação é utilizada qual dos dois significados estamos a considerar. Por exemplo se afirmamos que $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$ é convergente estamos a pensar na série e se escrevemos $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \leq 1$ estamos a pensar na soma da série (suposta, naturalmente, convergente).

III.4.33 **(Condição necessária para a convergência)** Se uma série é convergente, então a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos seus termos tem limite 0.

Dem: Sendo $s \in \mathbb{R}$ a soma da série, sabemos, por definição, que a sucessão $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ das somas parciais tem limite s. Reparando que, para $n \geq 2$, $u_n = S_n - S_{n-1}$ e que, tendo em conta o limite da função composta, a função $\mathbb{N}_{\geq 2} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto S_{n-1}$ também tem limite s, concluímos que a função $\mathbb{N}_{\geq 2} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto u_n = S_n - S_{n-1}$ tem limite $s - s = 0$. Uma vez que $+\infty$

[169] Seria mais natural falarmos antes de “parcelas da série” mas a designação “termos da série” é a mais utilizada.

não é aderente ao subconjunto $\{1\}$ de $\mathbb{N}$, a afirmação anterior implica que a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem limite 0. □

III.4.34 **(O exemplo da série harmónica)** É usual dar o nome de *série harmónica* à série

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

isto é à série cuja sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos termos está definida por $u_n=\frac{1}{n}$. Apesar de esta sucessão ter limite 0, a série é divergente.

Dem: Mostremos, por indução em p, que se tem sempre $S_{2^p}\geq\frac{p}{2}$, o que implicará, por enquadramento, que $S_{2^p}\to+\infty$. Isso implicará a divergência da série visto que, se esta fosse convergente aquela sucessão deveria ter a soma da série por limite. Ora, o caso em que $p=1$ é claro, uma vez que

$$S_{2^1}=S_2=1+\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}$$

e, supondo que, para um certo p, $S_{2^p}\geq\frac{p}{2}$, reparamos que $S_{2^{p+1}}$ se obtém a partir de S_{2^p} somando-lhe 2^p parcelas todas maiores ou iguais $\frac{1}{2^{p+1}}$, donde

$$S_{2^{p+1}}\geq S_{2^p}+2^p\times\frac{1}{2^{p+1}}=S_{2^p}+\frac{1}{2}\geq\frac{p}{2}+\frac{1}{2}=\frac{p+1}{2},$$

o que termina a justificação por indução. □

III.4.35 **(O exemplo das séries geométricas)** Dado $x\in\mathbb{R}$, consideremos a série

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots,$$

a que se dá o nome de *série geométrica* de razão x e seja $S_n(x)$ a respetiva soma parcial de ordem n. Vejamos o que se passa para cada valor de x.

Se $x=1$ todos os termos são iguais a 1 pelo que $S_n=n$ e portanto a série, apesar de não ser convergente, tem $+\infty$ como soma.

Suponhamos, a partir de agora, que $x\neq1$, caso em que S_n é a soma de n termos de uma progressão geométrica de razão diferente de 1 e portanto, pelo que vimos em I.2.4, temos a caracterização explícita[170]

$$\textbf{(1)}\qquad S_n=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}=\frac{1-x^n}{1-x}.$$

No caso em que $|x|<1$, tem-se $|x^n|=|x|^n\to0$, portanto também $x^n\to0$ pelo que $S_n\to\frac{1}{1-x}$, ou seja,

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x}.$$

[170]O que é, de certo modo excecional. Para muitas séries, não se consegue arranjar uma fórmula explícita para as somas parciais.

No caso em que $x=-1$, resulta de (1) que $S_n=1$ se n é ímpar e $S_n=0$ se n é par pelo que a sucessão das somas parciais não tem limite. A série não tem assim soma, em particular é divergente.
No caso em que $x>1$, tem-se $x^n\to+\infty$ donde, por ser $1-x>0$, $S_n\to+\infty$; A série é assim divergente mas admite $+\infty$ como soma.
Por fim, no caso em que $x<-1$, tem-se $1-x>0$ e $|x|^n\to+\infty$ e portanto para n ímpar ou n par tem-se respetivamente

$$S_n=\frac{1+|x|^n}{1-x}\to+\infty,\quad S_n=\frac{1-|x|^n}{1-x}\to-\infty,$$

o que implica que a série não tem soma, em particular é divergente.

III.4.36 **(Séries de termos positivos[171])** Chamam-se *séries de termos positivos* às séries cuja sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos termos verifica $u_n\ge 0$, para cada n. Uma tal série tem sempre soma, pertencente a $[0,+\infty[$ ou igual a $+\infty$, que é igual ao supremo de todas as somas parciais, uma vez que a sucessão destas é crescente e com termos positivos.

III.4.37 **(Propriedades de "linearidade") a)** Se $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ é convergente e $a\in\mathbb{R}$, então $\sum\limits_{k=1}^{\infty} au_k$ é também convergente e

$$\sum_{k=1}^{\infty} au_k=a\sum_{k=1}^{\infty} u_k.$$

b) Se $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ e $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k$ são convergentes, então $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (u_k+\widehat{u}_k)$ é também convergente e

$$\sum_{k=1}^{\infty}(u_k+\widehat{u}_k)=\Big(\sum_{k=1}^{\infty}u_k\Big)+\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{u}_k\Big).$$

Dem: Temos uma consequência de que, para as sucessões das somas parciais associadas, vem

$$\sum_{k=1}^{n} au_k=a\sum_{k=1}^{n} u_k,$$
$$\sum_{k=1}^{n}(u_k+\widehat{u}_k)=\Big(\sum_{k=1}^{n}u_k\Big)+\Big(\sum_{k=1}^{n}\widehat{u}_k\Big),$$

[171]Apesar de frequentemente se considerarem *positivos* apenas os números que são maiores que 0, vamos neste texto utilizar sempre o adjetivo "positvo" no sentido de **maior ou igual** a 0. Quando quisermos falar de números maiores que 0 poderemos chamá-los de *estritamente positivos*.

tendo em conta as propriedades dos limites de sucessões (e, mais geralmente, funções) em I.5.17. □

III.4.38 **(As séries de Taylor e de Maclaurin)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo não trivial, $a \in X$ e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞. Para cada $x \in \mathbb{R}$ define-se então a *série de Taylor* de f centrada no ponto a no ponto x como sendo a série

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

ou seja, a série cuja sucessão $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ de termos está definida por $u_1(x) = f(a)$ e, para cada $n \geq 2$,

$$u_n(x) = \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1\,172}.$$

No caso particular em que $0 \in X$ e $a = 0$, também se dá o nome de *série de Maclaurin* de f no ponto x à série

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots,$$

ou seja, à série da Taylor de f centrada em 0 no ponto x. Uma vez que as séries de Maclaurin são simplesmente um caso particular das de Taylor, tudo o que se disser sobre estas últimas aplica-se também às primeiras.

III.4.39 Repare-se que, nas condições de III.4.38, dado $x \in X$, para cada $n \geq 1$ a soma parcial $S_n(x)$ é igual à aproximação de Taylor de ordem $n-1$ da função f centrada em a no ponto x,

$$S_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1},$$

pelo que a fórmula de Taylor diz-nos que se tem $f(x) = S_n(x) + r_{n-1}(x)$, onde $r_{n-1}\colon X \to \mathbb{R}$ é o resto de Taylor de ordem $n-1$ centrado em a.
São especialmente interessantes os pontos $x \in X$ tais que a série de Taylor no ponto x seja convergente e tenha soma igual a $f(x)$, facto que acontece trivialmente para $x = a$.[173] Tendo em conta o facto de a soma de uma série ser, por definição, o limite da sucessão das suas somas parciais isso vai suceder se, e só se, a sucessão $(r_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ dos restos de Taylor de ordem n calculados em x tiver limite 0.[174]

[172]Fóirmula que é aliás também válida para $n = 1$.
[173]Note-se que pode acontecer que a série de Taylor seja convergente para um dado $x \in X$ e que a sua soma não seja $f(x)$. Para um exemplo, ver o exercício III.4.19 adiante.
[174]Se quisermos ser mais detalhados na explicação deste facto, o que talvez já não seja necessário nesta fase do curso, dizemos que a sucessão $n \mapsto f(x) - S_n(x) = r_{n-1}(x)$ tem limite 0 se e só se, isso acontecer à sua restrição a $\mathbb{N}_{\geq 2}$ ou seja, aplicando duas vezes

III.4.40 **(Exemplos) a)** Sendo $f\colon]-\infty,1[\,\to\mathbb{R}$ a função de classe C^∞ definida por

$$f(x)=\frac{1}{1-x},$$

o que verificámos no exemplo III.4.24 diz-nos que a sua série de Maclaurin no ponto x é

$$1+x+x^2+\cdots+x^p+\cdots,$$

ou seja, é a série geométrica de razão x. Como vimos em III.4.35, esta série é convergente se, e só se, $|x|<1$ e, nessse caso, a sua soma é precisamente $f(x)$.

b) Sendo $g\colon]-\infty,1[\,\to\mathbb{R}$ a função de classe C^∞ definida por

$$g(x)=-\ln(1-x),$$

o que verificámos no exemplo III.4.26 diz-nos que a sua série de Maclaurin no ponto x é

(1) $$0+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^p}{p}+\cdots$$

e que, para $p\ge 1$, o resto de Maclaurin $\widehat{r}_p\colon]-\infty,1[\,\to\mathbb{R}$ de ordem p verifica a condição

(2) $$\widehat{r}_p'(x)=\frac{x^p}{1-x}.$$

Utilizando o teorema de Lagrange, vemos que, se $p\ge 2$, para cada $x\ne 0$ existe c entre 0 e x tal que

(3) $$\frac{\widehat{r}_p(x)}{x}=\frac{\widehat{r}_p(x)-\widehat{r}_p(0)}{x-0}=\widehat{r}_p'(c)=\frac{c^p}{1-c}.$$

No caso em que $0<x<1$, deduz-se de (3) que

$$0<\widehat{r}_p(x)=\frac{xc^p}{1-c}<\frac{x^{p+1}}{1-x}$$

e portanto, por enquadramento, por ser $\frac{x^{p+1}}{1-x}\to 0$ quando $p\to+\infty$, tem-se também $\widehat{r}_p(x)\to 0$ quando $p\to+\infty$, por outras palavras, temos uma série convergente e com

(4) $$0+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^p}{p}+\cdots=-\ln(1-x).$$

---

o limite da função composta (uma vez com a bijeção $\mathbb{N}\to\mathbb{N}_{\ge 2}$, $n\mapsto n+1$ e outra a sua inversa), se e só se, a sucessão $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiver limite 0.

conclusão que, como acontece sempre com uma série de Maclaurin, é também trivialmente verdadeira para $x = 0$.
No caso em que $-1 < x < 0$, deduzimos de (3) que

$$|\widehat{r}_p(x)| = \left|\frac{xc^p}{1-c}\right| \leq |x|^{p+1}$$

e portanto, por enquadramento, por ser $|x|^{p+1} \to 0$, tem-se também $\widehat{r}_p(x) \to 0$, pelo que, mais uma vez, temos uma série convergente e com

$$0 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^p}{p} + \cdots = -\ln(1-x).$$

Note-se que, se $|x| > 1$, tem-se, pelo que vimos em I.5.45,

$$\left|\frac{x^p}{p}\right| = \frac{|x|^p}{p} \to +\infty$$

pelo que a sucessão dos termos da série em (1) não tem limite 0, o que implica que essa série é divergente. Para $x = 1$, a série (1) tem soma parcial de ordem $n \geq 2$ igual à soma parcial de ordem $n-1$ da série harmónica e portanto, como esta, é divergente.[175] Ficou apenas em aberto o que se passa para $x = -1$. Para estudar o comportamento da sucessão dos restos de Maclaurin $\widehat{r}_p(-1)$ é mais cómodo utilizar a caracterização na forma de Lagrange desses restos que nos diz que se tem, para um certo c entre 0 e -1,

$$\widehat{r}_p(-1) = \frac{g^{(p+1)}(c)}{(p+1)!}(-1)^{p+1}.$$

Uma vez que, sendo $f(x) = \frac{1}{1-x}$, tem-se, como referimos em III.4.24,

$$g^{(p+1)}(x) = f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}},$$

concluímos que

$$|\widehat{r}_p(-1)| = \frac{1}{(p+1)(1-c)^{p+1}} \leq \frac{1}{p+1}.$$

Temos assim, mais uma vez, uma série convergente e com

(5) $$0 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + (-1)^p\frac{1}{p} + \cdots = -\ln(2).$$

c) A série de Maclaurin destacada em (4) na alínea b) costuma ser "resumida" omitindo o primeiro termo, por ser identicamente 0. Escrevemos assim, para $-1 \leq x < 1$,

---

[175]Note-se que os valores de $x \geq 1$ não pertencem ao domínio da função que estamos a estudar, pelo que a série (1) não pode ser encarada como série de Maclaurin desta.

(6) $$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^p}{p}+\cdots=-\ln(1-x),$$

igualdade que parece decorrer trivialmente de (4) mas que merece ser examinada para entender a situação.[176] O que se passa é que, como se constata facilmente, a soma parcial de ordem n da série no primeiro membro de (6) coincide com a soma parcial de ordem $n+1$ da série no primeiro membro de (4) e portanto, pelo resultado sobre o limite da função composta, a sucessão das somas parciais de (6) converge para o mesmo limite que a das somas parciais de (4). De qualquer modo, do ponto de vista estrito, a série no primeiro membro de (6) não é a série de Maclaurin. No caso particular em que $x=-1$, é usual multiplicar ambos os membros de (5) por -1 e omitir o primeiro termo igual a 0 de modo a obter a igualdade

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{p+1}\frac{1}{p}+\cdots=\ln(2).$$ [177]

Apresentamos a seguir mais um exemplo de série de Maclaurin que é suficientemente importante para não o enunciarmos como um mero exemplo.

III.4.41 **(A série exponencial)** Consideremos a função exponencial $\exp\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\exp(x)=e^x$, que sabemos ser de classe C^∞ e com derivadas de ordem p $\exp^{(p)}(x)=\exp(x)$ (cf. III.4.7). Tem-se então que, para cada $x\in\mathbb{R}$, a série de Maclaurin desta função é convergente e com soma $\exp(x)$, nomeadamente

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^p}{p!}+\cdots=e^x.$$

Dem: O facto de a série de Maclaurin ser a referida resulta do que examinámos no exemplo III.4.31. Nesse mesmo exemplo verificámos que, para cada $p\ge 1$, o resto de Maclaurin de ordem p desta função $r_p\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ verificava a condição de se ter, para cada $x\neq 0$,

(1) $$r_p(x)=e^c\,\frac{x^{p+1}}{(p+1)!},$$

para um certo c entre 0 e x. No caso em que $x<0$ resulta de (1) que se tem

---

[176]Na secção IV.4 adiante estudaremos as séries de funções do tipo das anteriores (séries de potências) de uma forma ligeiramente menos geral mas muito mais manejável, que permite, em particular, encarar esta omissão de um termo de uma forma muito mais simples.

[177]A série no primeiro membro é semelhante à série harmónica, a única diferença estando na alternância de sinal dos termos, e, por esse motivo, costuma-se dar-lhe o nome de *série harmónica alternada*.

$$|r_p(x)| \leq e^0 \frac{|x|^{p+1}}{(p+1)!} = \frac{|x|^{p+1}}{(p+1)!}$$

onde, como vimos em I.5.47, $\frac{|x|^{p+1}}{(p+1)!} \to 0$, pelo que concluímos por enquadramento que $r_p(x) \to 0$ quando $p \to +\infty$, facto que é trivialmente verdadeiro também para $x = 0$. No caso em que $x > 0$ resulta analogamente de (1) que se tem

$$0 < r_p(x) \leq e^x \frac{x^{p+1}}{(p+1)!}$$

onde, pelo resultado já citado, $\frac{x^{p+1}}{(p+1)!} \to 0$ e portanto, mais uma vez por enquadramento, $r_p(x) \to 0$ quando $p \to +\infty$. $\square$

Vamos examinar uma última forma para o resto de Taylor de ordem p que se revela útil para algumas aplicações.

III.4.42 **(O resto na forma de Peano)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo não trivial, $a \in X$ e $f: X \to \mathbb{R}$ uma função $p+1$ vezes derivável em a, onde $p \geq 0$, e seja $r_p: X \to \mathbb{R}$ o resto de Taylor de ordem p de f centrado em a. Definimos então uma nova função $s_p: X \to \mathbb{R}$ por

$$s_p(x) = \begin{cases} \frac{r_p(x)}{(x-a)^{p+1}}, & \text{se } x \neq a \\ \frac{f^{(p+1)}(a)}{(p+1)!}, & \text{se } x = a \end{cases}$$

para a qual se tem trivialmente, para cada $x \in X$,

$$r_p(x) = s_p(x)(x-a)^{p+1}$$

(*forma de Peano* do resto) e portanto

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \\ + \cdots + \frac{f^{(p)}(a)}{p!}(x-a)^p + s_p(x)(x-a)^{p+1}.$$

Repare-se que, no caso particular em que $p = 0$, estamos a supor f derivável em a e a função $s_0: X \to \mathbb{R}$ está definida por

$$s_0(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, & \text{se } x \neq a \\ f'(a), & \text{se } x = a. \end{cases}$$

III.4.43 **(Continuidade no resto na forma de Peano)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo não trivial, $a \in X$ e $f: X \to \mathbb{R}$ uma função $p+1$ vezes derivável em a, onde $p \geq 0$. Tem-se então:

a) A correspondente função $s_p: X \to \mathbb{R}$, que figura na forma de Peano do resto, é contínua no ponto a.[178]

b) A função $s_p: X \to \mathbb{R}$ é contínua em todos os pontos se, e só se, $f: X \to \mathbb{R}$ é contínua em todos os pontos (o que sucede necessariamente no caso em que $p \geq 1$) .

Dem: Tendo em conta III.4.22 e III.4.27, tem-se

$$r_p(x) = \frac{f^{(p+1)}(a)}{(p+1)!}(x-a)^{p+1} + r_{p+1}(x),$$

com $\lim_{x \to a} \frac{r_{p+1}(x)}{(x-a)^{p+1}} = 0$. Podemos assim garantir que, quando $x \to a$, $x \neq a$,

$$s_p(x) = \frac{r_p(x)}{(x-a)^{p+1}} = \frac{f^{(p+1)}(a)}{(p+1)!} + \frac{r_{p+1}(x)}{(x-a)^{p+1}} \to \frac{f^{(p+1)}(a)}{(p+1)!} = s_p(a),$$

o que prova a continuidade de s_p no ponto a. No caso em que f é contínua, a continuidade de s_p nos pontos $x \neq a$ resulta da continuidade desses pontos da sua restrição a $X \setminus \{a\}$ (eles não são aderentes a $\{a\}$), continuidade essa que resulta da continuidade do resto r_p (cf. III.4.23) e da igualdade

$$s_p(x) = \frac{r_p(x)}{(x-a)^{p+1}}.$$

Reciprocamente, se $s_p: X \to \mathbb{R}$ é contínua, a igualdade

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \\ + \cdots + \frac{f^{(p)}(a)}{p!}(x-a)^p + s_p(x)(x-a)^{p+1} \end{aligned}$$

mostra que $f: X \to \mathbb{R}$ é contínua. □

III.4.44 **(Derivabilidade no resto na forma de Peano)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo não trivial, $a \in X$ e $f: X \to \mathbb{R}$ uma função $p+2$ vezes derivável em a, onde $p \geq 0$. Notemos $s_p: X \to \mathbb{R}$ e $s_{p+1}: X \to \mathbb{R}$ as correspondentes funções que figuram nos restos na forma de Peano e $\widehat{s}_p: X \to \mathbb{R}$ a função análoga associada à função $f': X \to \mathbb{R}$, que é $p+1$ vezes derivável em a. Tem-se então:

a) A função s_p é derivável em a e com

$$s_p'(a) = s_{p+1}(a) = \frac{f^{(p+2)}(a)}{(p+2)!}.$$

[178] É para que isto suceda que se atribuiu à função s_p no ponto a o valor referido em III.4.42.

b) Mais geralmente, para cada $x \in X$, a função s_p é derivável em x e com

$$s'_p(x) = \widehat{s}_p(x) - (p+1)s_{p+1}(x),$$

e portanto $s'_p: X \to \mathbb{R}$ é contínua em a.
c) A função $s_p: X \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 se, e só se, $f: X \to \mathbb{R}$ for de classe C^1 (o que sucede necessariamente no caso em que $p \geq 1$) .
Dem: A derivabilidade de s_p e s_{p+1} nos pontos $x \neq a$ resulta da derivabilidade nesses pontos da sua restrição a $X \setminus \{a\}$ (eles não são aderentes a $\{a\}$), derivabilidade essa que resulta da derivabilidade dos restos r_p e r_{p+1} (cf. III.4.23) e das igualdades

$$s_p(x) = \frac{r_p(x)}{(x-a)^{p+1}}, \quad s_{p+1}(x) = \frac{r_{p+1}(x)}{(x-a)^{p+2}}.$$

Comparando as igualdades

(1)
$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \\ + \cdots + \frac{f^{(p)}(a)}{p!}(x-a)^p + s_p(x)(x-a)^{p+1}\,, \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(p)}(a)}{p!}(x-a)^p + \\ + \frac{f^{(p+1)}(a)}{(p+1)!}(x-a)^{p+1} + s_{p+1}(x)(x-a)^{p+2}\,, \end{aligned}$$

obtemos, para cada $x \neq a$,

$$s_p(x) = \frac{f^{(p+1)}(a)}{(p+1)!} + s_{p+1}(x)(x-a)$$

e portanto, por derivação,

(3)
$$s'_p(x) = s'_{p+1}(x)(x-a) + s_{p+1}(x).$$

Por outro lado, derivando (2), obtemos, para $x \neq a$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'(a) + f''(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(p+1)}(a)}{p!}(x-a)^p + \\ &\quad + s'_{p+1}(x)(x-a)^{p+2} + (p+2)s_{p+1}(x)(x-a)^{p+1} = \\ &= f'(a) + (f')'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f'^{(p)}(a)}{p!}(x-a)^p + \\ &\quad + s'_{p+1}(x)(x-a)^{p+2} + (p+2)s_{p+1}(x)(x-a)^{p+1} \end{aligned}$$

donde, comparando com a fórmula de Taylor para a função f', com o resto na forma de Peano,

$$\widehat{s}_p(x) = s'_{p+1}(x)(x-a) + (p+2)s_{p+1}(x). \tag{4}$$

Combinando (3) e (4) vemos agora que, para cada $x \neq a$,

$$\begin{aligned} s'_p(x) &= \widehat{s}_p(x) - (p+2)s_{p+1}(x) + s_{p+1}(x) = \\ &= \widehat{s}_p(x) - (p+1)s_{p+1}(x). \end{aligned} \tag{5}$$

Tendo em conta III.4.43, o segundo membro de (5) tem limite quando $x \to a$ igual a $\widehat{s}_p(a) - (p+1)s_{p+1}(a)$ e deduzimos então de III.2.10 que s_p também é derivável em a e com derivada

$$\begin{aligned} s'_p(a) &= \widehat{s}_p(a) - (p+1)s_{p+1}(a) = \\ &= \frac{1}{(p+1)!}\,(f')^{(p+1)}(a) - \frac{p+1}{(p+2)!}\,f^{(p+2)}(a) = \\ &= \frac{p+2}{(p+2)!}\,f^{(p+2)}(a) - \frac{p+1}{(p+2)!}\,f^{(p+2)}(a) = \\ &= \frac{1}{(p+2)!}\,f^{(p+2)}(a) = s_{p+1}(a). \end{aligned}$$

em particular a fórmula (5) é válida também para $x = a$ e s'_p é contínua em a. No caso em que $f\colon X \to \mathbb{R}$ é de classe C^1, e portanto f e f' são contínuas em todos os pontos, resulta de III.4.43 que as funções $\widehat{s}_p$ e s_{p+1} são contínuas em todos os pontos, e portanto, pela identidade em b), a função $s'_p\colon X \to \mathbb{R}$ é contínua em todos os pontos, ou seja $s_p\colon X \to \mathbb{R}$ é de classe C^1. Reciprocamente, se $s_p\colon X \to \mathbb{R}$ é de classe C^1, a igualdade

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \\ + \cdots + \frac{f^{(p)}(a)}{p!}(x-a)^p + s_p(x)(x-a)^{p+1} \end{aligned}$$

mostra que $f\colon X \to \mathbb{R}$ é de classe C^1. □

III.4.45 **(Derivadas de ordem superior no resto de Peano)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo não trivial, $a \in X$ e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função $p+q+1$ vezes derivável em a, onde $p \geq 0$ e $q \geq 1$. Sendo $s_p\colon X \to \mathbb{R}$ a função que figura na forma de Peano do resto, tem-se então:

a) A função s_p é q vezes derivável em a e com

$$s_p^{(q)}(a) = s_{p+q}(a) = \frac{f^{(p+q+1)}(a)}{(p+q+1)!}.$$

b) A função $s_p\colon X \to \mathbb{R}$ é q vezes derivável em cada $x \in X$ e é de classe C^q se, e só se, f for de classe C^q (o que acontece necessariamente no caso em que $p \geq 1$).

Dem: Se s_p for de classe C^p então f é de classe C^p, como decorre da igualdade

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \\ + \cdots + \frac{f^{(p)}(a)}{p!}(x-a)^p + s_p(x)(x-a)^{p+1}.$$

As restantes afirmações resultam por indução em q, reparando que o caso em que $q = 1$ é precisamente o que estabelecemos em III.4.44 e que o passo de indução resulta da igualdade na alínea b) do resultado citado, que nos diz que, sendo $\widehat{s}_p \colon X \to \mathbb{R}$ a função que figura na forma de Peano do resto de f',

$$s'_p(x) = \widehat{s}_p(x) - (p+1)s_{p+1}(x). \qquad \square$$

Exercícios

Ex III.4.1 **a)** Verificar que a função $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 \mathrm{sen}(\frac{1}{x})$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ é derivável em todos os pontos do domínio mas não é de classe C^1.
b) Verificar que a função $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^4 \mathrm{sen}(\frac{1}{x})$ se $x \neq 0$ e $g(0) = 0$ é duas vezes derivável mas não é de classe C^2.

Ex III.4.2 Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $f \colon X \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in X$ um ponto interior de X (isto é, que não seja nenhuma das suas extremidades).
a) Verificar que existe $\varepsilon > 0$ tal que a vizinhança $V_\varepsilon(a)$ esteja contida em X e mostrar que, se f for derivável em a, então

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ |h| < \varepsilon}} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a),$$

reparando que esta conclusão já foi tirada no exercício III.1.2, com a hipótese mais forte de se ter $X = \mathbb{R}$, que não simplifica nada a demonstração.
★ **b)** Supondo que f é 2 vezes derivável em a, mostrar que

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ |h| < \varepsilon}} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = f''(a).$$

Sugestão: Utilizar a regra de Cauchy para levantar a indeterminação no primeiro membro e aplicar em seguida a conclusão de a) à função $f' \colon X \to \mathbb{R}$.
★ **c)** Supondo que f é 3 vezes derivável em a, mostrar que

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ |h|<\varepsilon/2}} \frac{f(a+2h)-2f(a+h)+2f(a-h)-f(a-2h)}{2h^3} = f'''(a).$$

★★ **d)** Tentar encontrar uma função de h no mesmo espírito que as anteriores que, no caso em que f é 4 vezes derivável em a, tenha como limite $f^{(4)}(a)$ quando $h \to 0$, com $|h| < \frac{\varepsilon}{2}$.

★ Ex III.4.3 **(Fórmula de Leibnitz)** Demonstrar por indução em p a seguinte fórmula de Leibnitz para a derivada de ordem p num ponto a de duas funções f e g que são p vezes deriváveis no ponto a:

$$\begin{aligned}(f\times g)^{(p)}(a) = f^{(p)}(a)g(a) + {}^pC_1 f^{(p-1)}(a)g^{(1)}(a) + {}^pC_2 f^{(p-2)}(a)g^{(2)}(a) + \\ + \cdots + {}^pC_q f^{(p-q)}(a)g^{(q)}(a) + \cdots + {}^pC_{p-1} f^{(1)}(a)g^{(p-1)}(a) + \\ + f(a)g^{(p)}(a).\end{aligned}$$ [179]

Sugestão: Lembrar que $\binom{p}{q}$ designa o número de combinações de p elementos tomados q a q (número de subconjuntos de q elementos de um conjunto com p elementos) e a relação $\binom{p+1}{q} = \binom{p}{q} + \binom{p}{q-1}$.

Ex III.4.4 Qual o número máximo de zeros que pode ter uma função 3 vezes derivável $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f'''(x) > 0$, para cada $x \in \mathbb{R}$?

Ex III.4.5 Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = x^6 - x^4 - x^3 + x^2 - x.$$

Verificar se f atinge ou não um extremo relativo no ponto 1 e, em caso afirmativo, se se trata de um máximo relativo ou de um mínimo relativo.

Ex III.4.6 **(Exemplo de uma equação diferencial de segunda ordem)**
a) Dadas constantes $a, b \in \mathbb{R}$, verificar que a função $S\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$S(x) = a\mathrm{sen}(x) + b\cos(x)$$

é uma solução da "equação diferencial de segunda ordem" $S''(x) = -S(x)$.
b) Seja $S\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função 2 vezes derivável e tal que, para cada $x \in \mathbb{R}$, $S''(x) = -S(x)$. Verificar que existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$S(x) = a\mathrm{sen}(x) + b\cos(x).$$

Sugestão: Reparar que temos uma consequência direta de III.2.14.
c) Nas hipóteses de b), e lembrando a conclusão do exercício III.2.15,

[179] Reparar na semelhança com a fórmula do binómio de Newton, para potência p de uma soma de duas parcelas, já encontrada no ensino secundário, para a qual também propusemos como exercício (I.2.7) uma demonstração por indução em p.

concluir a existência de $x_0 \in [0, 2\pi[$ e $c \geq 0$ tal que se tenha

$$S(x) = c\,\mathrm{sen}(x - x_0).$$

Ex III.4.7 **(Porque é que as coisas oscilam)** É comum uma grandeza física, como o alongamento orientado de uma mola relativamente à sua posição de equlíbrio, ter uma variação ao longo do tempo traduzida por uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifica uma equação diferencial de segunda ordem do tipo $f''(t) = -k^2 f(t)$, com uma constante $k > 0$ conveniente[180]. Utilizar a conclusão da alínea c) do exercício III.4.6, para concluir a existência de $t_0 \in [0, \frac{2\pi}{k}[$ e $c \geq 0$ tal que, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = c\,\mathrm{sen}(k(t_0 + t)),$$

em particular que a grandeza varia periodicamente com o período $\frac{2\pi}{k}$.

Ex III.4.8 Sendo $f\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ a função (cf. III.4.10) definida por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$$

verificar que $f'(x) = -\frac{1}{2}\, x^{-\frac{1}{2}-1}$ e, por indução que para cada $p \geq 2$

$$\begin{aligned} f^{(p)}(x) &= (-1)^p \frac{1}{2^p} \times 3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2p-1)\, x^{-\frac{1}{2}-p} = \\ &= (-1)^p\, \frac{1}{2^{(2p-1)}}\, \frac{(2p-1)!}{(p-1)!}\, x^{-\frac{1}{2}-p}. \end{aligned}$$

Ex III.4.9 **a)** Reparando que, para cada $n \geq 1$, a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (1+x)^n$ é um polinómio de grau n, em particular, para cada $p > n$, tem derivada de ordem p identicamente 0, utilizar a fórmula de Taylor com o resto na forma de Lagrange para obter a identidade

$$(1+x)^n = 1 + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + \cdots + {}^nC_p x^p + \cdots + {}^nC_{n-1} x^{n-1} + x^n,$$

e reparar que esta identidade é um caso particular da fórmula do binómio de Newton, já examinada no exercício I.2.7.
b) Utilizar a conclusão de a) para obter a fórmula do binómio de Newton sobre o desenvolvimento de $(x+y)^n$.

Ex III.4.10 Se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um polinómio de grau n, mostrar que, para $a, x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

[180]Comparar com o que se disse na nota de pé de página 135 na página 212. A razão deste comportamento, no caso da mola, deriva da existência de uma força de sentido contrário ao alongamento e com uma grandeza proporcional a este.

★ Ex III.4.11 **(Complementos sobre a série harmónica)** Consideremos a série harmónica, associada à sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $u_n = \frac{1}{n}$, e seja $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão das respetivas somas parciais.

a) Aplicando o teorema de Lagrange à função $\ln\colon]0,+\infty[\, \to \mathbb{R}$, mostrar que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{n+1} \le \ln(n+1) - \ln(n) \le \frac{1}{n}.$$

b) Aplicar a segunda das desigualdades em a) a cada uma das parcelas de

(1) $$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

para concluir que se tem

$$S_n \ge \ln(n+1)$$

e reparar que esta desigualdade permite dar uma demonstração alternativa do facto de se ter

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = +\infty.$$

c) Aplicar a primeira das desigualdades em a) a cada uma das parcelas de (1) para concluir que se tem

$$S_n \le 1 + \ln(n)$$

e concluir desta desigualdade e da que foi estabelecida em b) que se tem

$$\lim \frac{S_n}{\ln(n)} = 1$$

(a sucessão das somas parciais é "comparável" à sucessão $n \mapsto \ln(n)$).

Ex III.4.12 **(Convergência de uma série de Dirichlet)** Tendo presente a conclusão do exercício I.2.6, concluir que é convergente a série de termos positivos

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

e que a sua soma é menor ou igual a 2.[181]

Ex III.4.13 Verificar que as funções $\operatorname{sen}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tomam em cada $x \in \mathbb{R}$ um valor igual ao da soma das respetivas séries de Maclaurin, e concluir que,

[181] Pode provar-se, mas com métodos de que não dispomos neste momento, que a soma desta série é igual a $\frac{\pi^2}{6}$, um valor que não deixa de ser inesperado. Esse resultado será obtido no exercício IV.3.12 adiante.

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \cdots,$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \cdots.$$ [182]

Encontrar majorações para os restos de Maclaurin destas funções com ordens $2p+1$ e $2p$ respetivamente. **Sugestão:** Tal como foi feito com a função exponencial em III.4.41, lembrar a convergência para 0 da sucessão estudada em I.5.47.

★ Ex III.4.14 **(Série de Maclaurin para a função arctan)** Tenhamos presente o que foi examinado no exemplo III.4.29 relativamente à função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe C^∞, definida por $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e lembremos que, sendo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \arctan(x)$, f é derivável em cada x e com $f'(x) = g(x)$, em particular f é também de classe C^∞. Notemos $\widehat{r}$ os restos de Maclaurin de g e r os de f.

a) Lembrando as caracterizações das derivadas em 0 de g,

$$g^{(2p)}(0) = (-1)^p \times (2p)!, \quad g^{(2p+1)}(0) = 0,$$

onde $p \geq 0$, e dos restos de Maclaurin de g,

$$\widehat{r}_{2p+1}(x) = \widehat{r}_{2p}(x) = (-1)^{p+1}\, \frac{x^{2p+2}}{1+x^2},$$

onde $p \geq 0$, assim como a igualdade $r'_k(x) = \widehat{r}_{k-1}(x)$, $k \geq 1$, deduzir que

$$f^{(2p+1)}(0) = (-1)^p \times (2p)!, \quad f^{(2p+2)}(0) = 0,$$

e que, para $x \geq 0$,

$$0 \leq (-1)^{p+1} r'_{2p+1}(x) = (-1)^{p+1} \widehat{r}_{2p}(x) \leq x^{2p+2},$$

deduzindo daqui que

$$0 \leq (-1)^{p+1} r_{2p+2}(x) = (-1)^{p+1} r_{2p+1}(x) \leq \frac{1}{2p+3}\, x^{2p+3}$$

(a diferença dos dois membros tem derivada maior ou igual a 0 e é nula em 0) e portanto

$$|r_{2p+2}(x)| = |r_{2p+1}(x)| \leq \frac{1}{2p+3}\, x^{2p+3}.$$

[182]Reparar que as séries de Maclaurin têm termos identicamente nulos intercalados entre os das séries descritas (e, no caso do seno, no início desta) mas que o facto de os termos omitido não altera nem a convergência nem o valor da série. Comparar com o que foi referido no exemplo na alínea c) de III.4.40.

b) Deduzir de a) que, para cada $0 \leq x \leq 1$, arctan(x) é a soma da sua série de Maclaurin e portanto, omitindo, como no exercício III.4.13 e com a mesma justificação, os termos identicamente nulos,

$$\textbf{(1)} \qquad \arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + \cdots.$$

Multiplicando ambos os membros por -1, verificar que a mesma conclusão é válida para $-1 \leq x \leq 0$. Concluir em particular a validade da soma da série

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^p \frac{1}{2p+1} + \cdots.$$

c) Verificar que, se $|x| > 1$, apesar de x pertencer ao domínio da função $x \mapsto$ arctan(x), a série no segundo membro de (1) não é convergente, por a sucessão dos seus termos não ter limite igual a 0.

★ Ex III.4.15 **(Aplicação a um cálculo aproximado de π)** A série de Maclaurin para a função arctan: $\mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, obtida no exercício III.4.14, aponta para a possibilidade de obter valores aproximados de π, por exemplo a partir do facto de se ter $\frac{\pi}{4} =$ arctan(1). De facto, a utilização direta desta fórmula não é muito eficiente, tendo em conta a lentidão com que a sucessão das somas parciais da série cuja soma é $\frac{\pi}{4}$ converge (por exemplo, somando 1000 termos da série, obtemos um valor aproximado de π igual a $3.14259\ldots$, que só tem as duas primeiras casas decimais exatas). Constata-se, no entanto, que para valores positivos de x consideravelmente menores que 1 a convergência da série de Maclaurin torna-se mais rápida e tanto mais rápida quanto menor for x (pensar no comportamento de x^{2p+1} para valores pequenos de x e grandes de p). O objetivo deste exercício é examinar um método, baseado também na utilização da mesma série, que foi utlizado pelo matemático inglês John Machin em 1706 para obter um valor aproximado de π com 100 decimais corretos.

a) Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que tan$(\alpha) = \frac{1}{5}$, por outras palavras, $\alpha =$ arctan$(\frac{1}{5})$. Lembrando as fórmulas para a tangente de uma soma de dois ângulos e, em particular, para a tangente do dobro de um ângulo,

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}, \quad \tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)},$$

verificar sucessivamente os valores

$$\tan(2\alpha) = \frac{5}{12}, \quad \tan(4\alpha) = \frac{120}{119}, \quad \tan(4\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{239}.$$ [183]

Deduzir daqui a seguinte *fórmula de Machin* que permite calcular valores

[183] O êxito deste método resulta assim de algumas coincidências felizes associadas ao facto de termos partido do valor $\frac{1}{5}$.

aproximados de $\frac{\pi}{4}$ e, a partir destes, de π:

$$\frac{\pi}{4} = 4\,\mathrm{arctan}(\frac{1}{5}) - \mathrm{arctan}(\frac{1}{239}).$$

b) Com o auxílio da calculadora, obter um valor aproximado de π a partir da fórmula de Machin, substituindo $\mathrm{arctan}(\frac{1}{5})$ pela soma dos primeiros 7 termos da sua série de Maclaurin e $\mathrm{arctan}(\frac{1}{239})$ pela soma dos primeiros dois termos da sua série de Maclaurin[184]. Dever-se-á obter, dependendo do número de algarismos exibidos pela calculadora, o resultado

$$\pi \approx 3.14159\,26535\,88\ldots,$$

onde só o último algarismo não é o correto.

★★ **c)** Havendo paciência e destreza no cálculo feito à mão (a calculadora não será agora de grande utilidade…) fazer o mesmo que foi feito na alínea b) mas somando 20 termos da primeira série e 7 termos da segunda e trabalhando em cada cálculo intermédio com 38 casas decimais. Não havendo enganos nos cálculos, dever-se-á obter o valor aproximado

$$\pi \approx 3.14159\,26535\,89793\,23846\,26433\,83279\,81813\ldots,$$

onde as 30 primeiras casas decimais estão exatas!

Ex III.4.16 **(Pergunta aparecida em prova de avaliação)** ★ **a)** Escrever a fórmula de Taylor de ordem 2 centrada no ponto 4 para a função $f(x) = \sqrt{x}$, com o resto na forma de Lagrange.

b) Usar a alínea anterior para obter um valor aproximado de $\sqrt{5}$ e verificar que o erro obtido é inferior a 0,002.

Ex III.4.17 **(Pergunta aparecida em prova de avaliação) a)** Determinar o desenvolvimento de Maclaurin de segunda ordem (Taylor, centrado em 0) da função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-x}\mathrm{sen}(x)$, com o resto na forma de Lagrange.

b) Deduzir de a) que, para cada $x > 0$,

$$|e^{-x}\mathrm{sen}(x) - x + x^2| < \frac{2}{3}\,x^3.$$

★ Ex III.4.18 **(Irracionalidade da constante de Neper *e*) a)** Sendo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$, considerar a fórmula de Maclaurin de ordem n da função $f(x) = e^x$, com o resto na forma de Lagrange, para deduzir que se tem

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + r_n$$

com $0 < r_n < \frac{3}{(n+1)!}$.

---

[184]Tomamos menos termos no segundo caso por termos uma convergência mais rápida.

b) Deduzir de a) que, para cada $n \geq 2$,

$$n!e = n! + n! + \frac{n!}{2} + \frac{n!}{3!} + \cdots + \frac{n!}{n!} + n!r_n$$

com $0 < n!r_n < 1$ e concluir que $n!e$ não é um número inteiro.
c) Deduzir de b) que o número e não é racional. **Sugestão:** Se se tivesse $e = \frac{p}{n}$, então $n!e$ seria um número inteiro.

★ Ex III.4.19 **(Uma função de classe C^∞ com propriedades singulares)**
a) Verificar que, para cada $k \in \mathbb{N}$ tem-se

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^k} e^{-\frac{1}{x}} = 0.$$

Sugestão: Fazendo uma mudança de variáveis, isto é, utilizando de forma conveniente os resultado sobre o limite da função composta, temos uma consequência simples do limite notável em II.2.18.
b) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}.$$

Mostrar que a função f é de classe C^∞ e com derivadas de ordem k verificando $f^{(k)}(x) = 0$ para cada $x \leq 0$.
Sugestão: Seja, para cada $k \in \mathbb{N}$, $f_k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^k} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}.$$

Mostrar que f é derivável em todos os pontos e com $f'(x) = f_2(x)$ e que cada f_k é derivável em todos os pontos e com

$$f_k'(x) = -k f_{k+1}(x) + f_{k+2}(x)$$

e deduzir, por indução em p, que a função f e cada uma das funções f_k são de classe C^p para todo o p. **Sugestão:** Para a derivabilidade no ponto 0 poderá ser útil ter em conta III.2.10.
c) Mostrar que a série de Maclaurin da função f é convergente para todo o $x \in \mathbb{R}$ mas que a sua soma é igual a $f(x)$ se, e só se $x \leq 0$.

Ex III.4.20 **(Aplicação do resto na forma de Peano à determinação de máximos e mínimos relativos)** Sejam X um intervalo, a um ponto interior a X e $f: X \to \mathbb{R}$ uma função que, para simplificar o enunciado suporemos de classe C^∞. Suponhamos que $f'(a) = 0$. Viu-se em III.4.2 que, se $f''(a) > 0$ (respetivamente $f''(a) < 0$), então f atinge em a um mínimo estrito (respetivamente máximo estrito) relativo mas se fosse $f''(a) = 0$ não sabíamos tirar nenhuma conclusão. Suponhamos agora que, para um certo $p \geq 2$, $f^{(p)}(a) \neq 0$ e que, para cada $1 \leq q < p$, $f^{(q)}(a) = 0$ (a derivada de ordem p

é a primeira que não se anula). Utilizar a fórmula de Taylor com o resto na forma de Peano e ter em conta III.4.43 para mostrar que:

a) Se p é par então f atinge em a um extremo relativo estrito, que é mínimo se $f^{(p)}(a) > 0$ e máximo se $f^{(p)}(a) < 0$.

b) Se p é ímpar então f não atinge em a um extremo relativo.

Ex III.4.21 **(Derivadas de ordem superior e paridade de funções)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto simétrico (ver o exercício III.1.12) cujos elementos são todos pontos de acumulação e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função par (respetivamente ímpar). Se f for p vezes derivável, mostrar que a função $f^{(p)}\colon X \to \mathbb{R}$ é par (respetivamente ímpar) se p é par e é ímpar (respetivamente par) se p é ímpar. Deduzir que, no caso em que $0 \in X$ e f é p vezes derivável em 0, tem-se $f^{(p)}(0) = 0$ se p é ímpar (respetivamente se p é par).

★ Ex III.4.22 **(Funções ímpares de classe C^∞)** Seja $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo simétrico não trivial, portanto de um dos tipos $]-\infty, +\infty[$, $]-a, a[$ ou $[-a, a]$, com $a > 0$.

a) Verificar que se $g\colon X \to \mathbb{R}$ é uma função par de classe C^∞ então tem lugar uma função ímpar de classe C^∞ $f\colon X \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = xg(x).$$

b) Verificar que se $f\colon X \to \mathbb{R}$ é uma função ímpar de classe C^∞ então existe uma única função par de classe C^∞ $g\colon X \to \mathbb{R}$ tal que, para cada $x \in X$,

$$f(x) = xg(x).$$

tendo-se então $g(0) = f'(0)$. **Sugestão:** Considerar a fórmula de Maclaurin de ordem 0 para a função f com o resto na forma de Peano e ter em conta III.4.45.

★ Ex III.4.23 **(Funções pares de classe C^∞)** Seja $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo simétrico não trivial, portanto de um dos tipos $]-\infty, +\infty[$, $]-a, a[$ ou $[-a, a]$, com $a > 0$ e notemos Y o intervalo $[0, +\infty[$, $[0, \sqrt{a}[$ ou $[0, \sqrt{a}]$ respetivamente.

a) Verificar que se $g\colon Y \to \mathbb{R}$ é um função de classe C^∞ arbitrária então tem lugar uma função par de classe C^∞ $f\colon X \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = g(x^2).$$

b) Verificar que se $f\colon X \to \mathbb{R}$ é uma função par de classe C^∞ então existe uma única função de classe C^∞ $g\colon Y \to \mathbb{R}$ tal que, para cada $x \in X$,

$$f(x) = g(x^2),$$

nomeadamente a definida por $g(y) = f(\sqrt{y})$.

Sugestão: Reparar que, para a função g definida do modo referido, tem-se que g é contínua e, para cada $y \neq 0$,

$$g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\, f'(\sqrt{y}).$$

Ter em conta o exercício III.4.22 para concluir a existência de uma função par de classe C^∞ $h\colon X \to \mathbb{R}$ com $h(0) = f''(0)$ e, para $x \neq 0$, $h(x) = \frac{f'(x)}{x}$ e deduzir, por exemplo pela regra de Cauchy, que g é derivável em 0 e com

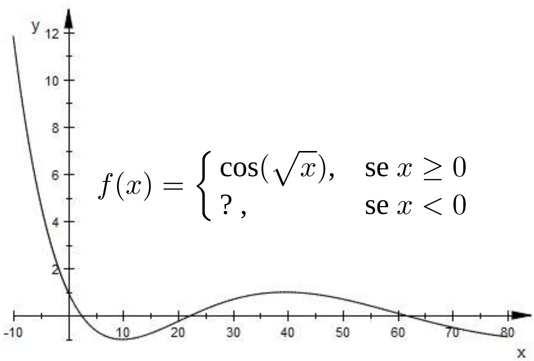
$$g'(0) = \lim_{y\to 0} g'(y) = \lim_{y\to 0} \frac{1}{2} h(\sqrt{y}) = \frac{1}{2}\, h(0) = \frac{1}{2}\, f''(0).$$

Deduzir que a função $g\colon Y \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 e seguidamente, por indução em p, que g é de classe C^p para todo o p, e portanto de classe C^∞.

Ex III.4.24 **a)** Utilizar a conclusão obtida no exercício III.4.23 para mostrar que é de classe C^∞ a função $f\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \cos(\sqrt{x}).$$

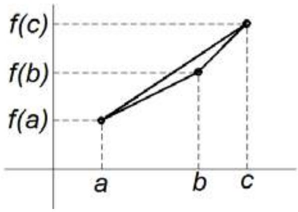
★ **b)** Encontrar um prolongamento de classe C^∞ a $\mathbb{R}$ da função referida na alínea a), prolongamento que poderemos notar também f. Mais precisamente, pretende-se exprimir explicitamente os valores $f(x)$ com $x < 0$ utilizando "funções elementares" já estudadas anteriormente. **Sugestão:** Considerar a série de Maclaurin da função considerada em a) e procurar os valores de $f(x)$ para $x \leq 0$ de modo a obter uma função de classe C^∞ com a mesma série de Maclaurin.



§5. Aplicação ao sentido da concavidade.

As propriedades de monotonia duma função são propriedades que se definem a partir da comparação dos valores da função em dois pontos distintos arbitrários do seu domínio (cf. I.4.18). A noção de sentido da concavidade, que o estudante reconhece de forma mais ou menos intuitiva, envolve o exame do que se passa em três pontos distintos arbitrários do domínio. Para a definirmos de modo preciso será cómodo estabelecer uma relação importante que envolve os valores de uma função em três pontos distintos do seu domínio.

III.5.1 Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função e $a < b < c$ três pontos do domínio. Os pontos do gráfico de f com estes pontos como abcissas vão determinar três secantes ao gráfico cujos declives nos interessa comparar.



Chamaremos *declive esquerdo* ao da recta que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, por outras palavras,

$$\text{declive esquerdo} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

declive direito ao da recta que passa por $(b, f(b))$ e $(c, f(c))$, por outras palavras,

$$\text{declive direito} = \frac{f(c) - f(b)}{c - b},$$

e *declive total* ao da recta que passa por $(a, f(a))$ e $(c, f(c))$, por outras palavras,

$$\text{declive total} = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

Uma relação importante entre estes três declives é que o terceiro é a média pesada dos dois primeiros associada aos pesos (maiores que 0 e de soma 1)

$$s = \frac{b - a}{c - a}, \quad t = \frac{c - b}{c - a}$$

(cf. I.1.4) e consequentemente:

1) Se o declive esquerdo é igual ao declive direito então o declive total é igual a estes.

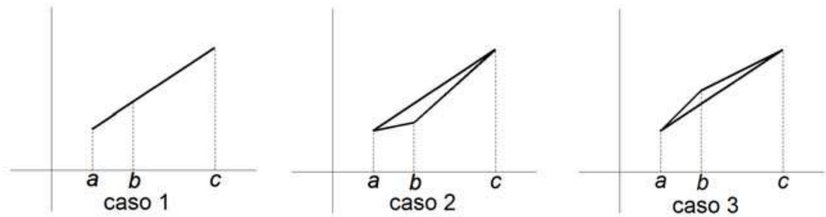
2) Se o declive esquerdo é diferente do declive direito então o declive total está entre estes dois.

Dem: É imediato constatar-se que os pesos s e t definidos no enunciado são efetivamente maiores que 0 e de soma igual a 1. O facto de ter lugar a média referida corresponde à igualdade

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} = \frac{b-a}{c-a}\,\frac{f(b)-f(a)}{b-a} + \frac{c-b}{c-a}\,\frac{f(c)-f(b)}{c-b},$$

cuja verificação não oferece dificuldade. O facto de o declive total estar entre os declives esquerdo e direito, quando estes forem diferentes, e ser igual a ambos, quando estes forem iguais, é uma consequência das propriedades das médias pesadas referidas em I.1.4. □

III.5.2 **(Comportamento de três pontos do domínio no que respeita à concavidade)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função e $a < b < c$ três pontos do domínio. Tendo em conta o que referimos em III.5.1, verifica-se uma, e uma só, das três condições seguintes:



1) Os declives esquerdo, direito e total são todos iguais. Neste caso dizemos que f é *retilínea* nestes três pontos.
2) O declive esquerdo é menor que o declive total e este é menor que o declive direito. Neste caso dizemos que f *curva para cima* nestes três pontos.
3) O declive esquerdo é maior que o declive total e este é maior que o declive direito. Neste caso dizemos que f *curva para baixo* nestes três pontos.
As definições anteriores admitem uma interpretação geométrica que, não sendo essencial para o que faremos a seguir, pode ser importante para apoiar a nossa intuição. Essa interpretação baseia-se no facto de um ponto do plano se encontrar sobre uma reta oblíqua, abaixo desta ou acima dela conforme a sua ordenada seja igual, menor ou maior que a do ponto da reta com a mesma abcissa. Tendo isso em conta, é fácil concluir que:
1′) Dizer que f é retilínea nos pontos $a < b < c$ é equivalente a fizer que os três pontos do gráfico com abcissas a, b, c estão sobre uma mesma reta.
2′) Dizer que f curva para cima nos pontos $a < b < c$ é equivalente a qualquer das seguintes afirmações: **a)** O ponto do gráfico de abcissa b está abaixo da reta secante que passa pelos pontos do gráfico de abcissas a e c; **b)** O ponto do gráfico de abcissa c está acima da reta secante que passa pelos pontos do gráfico de abcissas a e b; **c)** O ponto do gráfico de abcissa a está acima da reta secante que passa pelos pontos do gráfico de abcissas b e c. [185]
3′) Dizer que f curva para baixo nos pontos $a < b < c$ é equivalente a qual-

[185]Não é necessário, nem talvez desejável, conhecer de cor estas caracterizações; as figuras atrás constituem mnemónicas simples para nos lembrarmos delas.

quer das seguintes afirmações: **a)** O ponto do gráfico de abcissa b está acima da reta secante que passa pelos pontos do gráfico de abcissas a e c; **b)** O ponto do gráfico de abcissa c está abaixo da reta secante que passa pelos pontos do gráfico de abcissas a e b; **c)** O ponto do gráfico de abcissa a está abaixo da reta secante que passa pelos pontos do gráfico de abcissas b e c.

Estamos agora em condições de definir facilmente o sentido da concavidade de uma função. Tal como acontecia com a monotonia, há lugar para uma versão estrita e uma versão lata de cada uma das definições.

III.5.3 **(Sentido da concavidade)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função.
a) Diz-se que f *tem a concavidade estritamente voltada para cima*, ou que é *estritamente convexa*, se f curva para cima em quaisquer pontos $a < b < c$ de X.
b) Diz-se que f *tem a concavidade voltada para cima*, ou que é *convexa*,[186] se em quaisquer pontos $a < b < c$ de X a função f curva para cima ou é retilínea.
c) Diz-se que f *tem a concavidade estritamente voltada para baixo*, ou que é *estritamente côncava*, se f curva para baixo em quaisquer pontos $a < b < c$ de X.
d) Diz-se que f *tem a concavidade voltada para baixo*, ou que é *côncava*, se em quaisquer pontos $a < b < c$ de X a função f curva para baixo ou é retilínea.
Repare-se que uma função tem simultaneamente a concavidade voltada para cima e para baixo se, e só se, em quaisquer pontos $a < b < c$ a função é retilínea ou seja, se, e só se, o gráfico da função está contido numa reta.[187]

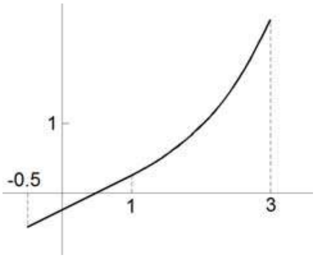
III.5.4 **(Exemplos)** Nas duas figuras a seguir sugerimos duas funções definidas no intervalo $[-\frac{1}{2}, 3]$. A primeira tem a concavidade voltada para cima, mas não estritamente voltada para cima, e a sua restrição ao intervalo $[1, 3]$ tem mesmo a concavidade estritamente voltada para cima. A segunda tem a concavidade estritamente voltada para baixo. Para reconhecermos intuitivamente estes factos (o que é a única coisa que podemos fazer para funções sugeridas por gráficos) o mais simples é utilizarmos a interpretação

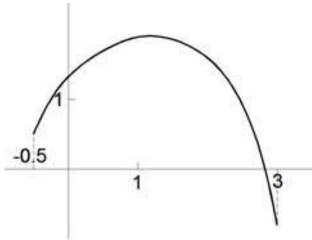
---

[186]As palavras "convexa" e "côncava" costumam ser utilizadas apenas no caso em que o domínio é um intervalo, hipótese que ainda não estamos a fazer neste momento.

[187]Quem tenha algum treino lógico constatará que, se o domínio X tiver menos que três elementos, qualquer função é simultaneamente estritamente convexa e estritamente côncava mas que, afastada esta situação pouco interessante, uma função estritamente convexa não pode ser côncava (nem, muito menos, estritamente côncava) e uma função estritamente côncava não pode ser convexa (nem, muito menos, estritamente convexa). Temos aqui uma situação semelhante à que se podia observar sobre a monotonia: Quando o domínio tem apenas um elemento, qualquer função é ao mesmo tempo estritamente crescente e estritamente decrescente.

geométrica referida nas alíneas 1′) a 3′) de III.5.2: Por exemplo, no caso da segunda função, tudo o que temos que reparar é que, se considerarmos uma secante ao gráfico que passa por pontos de abcissas $a < c$ arbitrárias, a parte do gráfico correspondente às abcissas entre a e c está estritamente acima dessa secante.





Repare-se que não há *a priori* nenhuma relação entre o sentido da concavidade e o sentido de variação da função: No primeiro exemplo a concavidade está voltada para cima e a função é crescente mas no segundo exemplo a concavidade está voltada para baixo e a função é estritamente crescente num intervalo e estritamente decrescente noutro[188].

III.5.5 **(Efeito sobre o sentido da concavidade da substituição de uma função pela sua simétrica)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função e consideremos também a função $-f\colon X \to \mathbb{R}$, que a x associa $-f(x)$. Tem-se então:

1) Se a função f é retilínea nos pontos $a < b < c$ de X então o mesmo acontece à função $-f$.

2) Se a função f curva para cima nos pontos $a < b < c$ de X então a função $-f$ curva para baixo nesses pontos.

3) Se a função f curva para baixo nos pontos $a < b < c$ de X então a função $-f$ curva para cima nesses pontos.

Em consequência:

a) Se a função f tem a concavidade voltada para cima (respetivamente, estritamente voltada parta cima) então a função $-f$ tem a concavidade voltada para baixo (respetivamente, estritamente voltada para baixo).

b) Se a função f tem a concavidade voltada para baixo (respetivamente, estritamente voltada parta baixo) então a função $-f$ tem a concavidade voltada para cima (respetivamente, estritamente voltada para cima).[189]

Dem: As conclusões 1), 2) e 3) resultam de que, dados pontos $a < b < c$, os declives esquerdo, direito e total da função $-f$ são simétricos dos declives

[188]Talvez não seja por acaso que o intervalo em que a função é estritamente crescente aparece antes daquele em que ela é estritamente decrescente. Será capaz de encontrar uma explicação para esse facto?

[189]Com frequência este resultado será utilizado para deduzir resultados envolvendo um dos sentidos da concavidade a partir de outros resultados já estudados que envolvem o sentido oposto da concavidade,

esquerdo, direito e total da função f e as conclusões de a) e b) decorrem imediatamente das primeiras. $\square$

III.5.6 **(Existência de derivadas laterais no caso da concavidade voltada para cima)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função com a concavidade voltada para cima e $a \in X$. Tem-se então:

1) A função $X \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, é crescente, sendo mesmo estritamente crescente no caso em que f tenha a concavidade estritamente voltada para cima.

2) Se a for ponto de acumulação à direita de X então existe derivada à direita $f'(a^+)$, finita ou igual a $-\infty$, que é igual ao ínfimo dos $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ com $x > a$. No caso em que a não é mínimo de X, essa derivada à direita é necessariamente finita (ou seja, f é derivável à direita em a).

3) Se a for ponto de acumulação à esquerda de X então existe derivada à esquerda $f'(a^-)$, finita ou igual a $+\infty$, que é igual ao supremo dos $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ com $x < a$. No caso em que a não é máximo de X, essa derivada à esquerda é necessariamente finita (ou seja, f é derivável à esquerda em a).

4) Se a for simultaneamente ponto de acumulação à esquerda e à direita de X, então $f'(a^-) \le f'(a^+)$, com ambos os membros finitos.

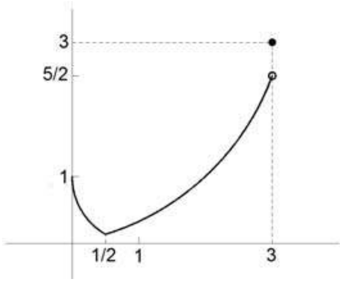
5) Se a não for máximo nem mínimo de X, então f é contínua em a.

Dem: Comecemos por justificar a afirmação em 1), ou seja que, sempre que $x < y$ em $X \setminus \{a\}$,

(1) $$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(y)-f(a)}{y-a},$$

tendo-se mesmo a correspondente desigualdade estrita no caso em que a concavidade está mesmo estritamente voltada para cima. Três situações são possíveis: **a)** Se $x < y < a$ a desigualdade resulta de, na linguagem utilizada em III.5.1 e III.5.2, o primeiro membro ser o declive total e o segundo ser o declive direito; **b)** Se $x < a < y$ a desigualdade resulta de, na mesma linguagem, o primeiro membro ser o declive esquerdo e o segundo ser o declive direito; **c)** Se $a < x < y$ a desigualdade resulta de, na mesma linguagem, o primeiro membro ser o declive esquerdo e o segundo ser o declive total. Uma vez justificada a afirmação em 1), o que referimos em 2), 3) e 4) é uma mera reformulação das propriedades dos limites laterais de funções crescentes examinadas em I.5.38 e no seu corolário I.5.39. A conclusão de 5) resulta de que, afastados os casos em que a é mínimo ou máximo de X, podemos concluir que, se a for ponto de acumulação à direita, resulta de 2) que a restrição de f a $X_{\ge a}$ é derivável em a e portanto contínua nesse ponto, o que implica que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, e que, se a for ponto de acumulação à esquerda, resulta de 3) que a restrição de f a $X_{\le a}$ é derivável em a e portanto contínua nesse ponto, o que implica que $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$. $\square$

III.5.7 **(Exemplo)** Sugerimos a seguir o gráfico de uma função com a concavidade voltada para cima (mesmo estritamente voltada para cima), definida no intervalo $[0,3]$, que apresenta alguns dos “maus comportamentos” que não são “proíbidos” pela propriedade precedente: Ela é contínua, mas tem derivada à direita $-\infty$ na extremidade esquerda 0 do intervalo, não é contínua na extremidade direita 3 do intervalo e no ponto interior $\frac{1}{2}$ tem derivadas laterais distintas.



III.5.8 **(Existência de derivadas laterais no caso da concavidade voltada para baixo)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função com a concavidade voltada para baixo e $a \in X$. Tem-se então:
1) A função $X \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, é decrescente, sendo mesmo estritamente decrescente no caso em que f tenha a concavidade estritamente voltada para baixo.
2) Se a for ponto de acumulação à direita de X então existe derivada à direita $f'(a^+)$, finita ou igual a $+\infty$, que é igual ao supremo dos $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ com $x > a$. No caso em que a não é mínimo de X, essa derivada à direita é necessariamente finita (ou seja, f é derivável à direita em a).
3) Se a for ponto de acumulação à esquerda de X então existe derivada à esquerda $f'(a^-)$, finita ou igual a $-\infty$, que é igual ao ínfimo dos $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ com $x < a$. No caso em que a não é máximo de X, essa derivada à esquerda é necessariamente finita (ou seja, f é derivável à esquerda em a).
4) Se a for simultaneamente ponto de acumulação à esquerda e à direita de X, então $f'(a^-) \geq f'(a^+)$, com ambos os membros finitos.
5) Se a não for máximo nem mínimo de X, então f é contínua em a.
Dem: Este resultado admite uma demonstração análoga à de III.5.6 ou, alternativamente, resulta de aplicar o resultado referido à função $-f$, que, tendo em conta III.5.5, tem a concavidade voltada para cima. □

A partir de agora vamos restringir o nosso estudo ao caso em que a função tem como domínio um intervalo não trivial. Essa restrição tem nalguns casos como único objetivo a simplificação dos enunciados (não é necessário explicitar que pontos do domínio são pontos de acumulação à esquerda ou à direita deste) e é noutros casos essencial, por exemplo quando tivermos que aplicar o teorema de Lagrange, III.5.9 **(Propriedades das derivadas no caso da concavidade voltada para cima)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo não trivial e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função com a concavidade voltada par cima (respetivamente, estritamente voltada para cima). Tem-se então:

1) Se $a < b$ em X, vem $f'(a^+) \leq f'(b^-)$ (respetivamente, $f'(a^+) < f'(b^-)$).

2) Em particular, se a função f for derivável, então a função $f'\colon X \to \mathbb{R}$ é crescente (respetivamente, estritamente crescente).

3) Em particular, se f for 2 vezes derivável num ponto $a \in X$, então $f''(a) \geq 0$.[190]

Dem: Para justificarmos a afirmação em 1) começamos por notar que a existência das derivadas laterais referidas decorre de III.5.6, que nos caracteriza mesmo essas derivadas laterais como um ínfimo e um supremo, respetivamente. Fixando um ponto x entre a e b, a caracterização referida dessa derivadas laterais garante que

$$f'(a^+) \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x} = \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \leq f'(b^-),$$

onde a segunda desigualdade é estrita no caso em que a concavidade está estritamente voltada para cima. A conclusão de 2) é uma consequência imediata da de 1) e a de 3) resulta do fecto de uma função crescente ter derivada maior ou gual a 0 em qualquer ponto em que seja derivável. □

III.5.10 **(Propriedades das derivadas no caso da concavidade voltada para baixo)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo não trivial e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função com a concavidade voltada par baixo (respetivamente, estritamente voltada para baixo). Tem-se então:

1) Se $a < b$ em X, vem $f'(a^+) \geq f'(b^-)$ (respetivamente, $f'(a^+) > f'(b^-)$).

2) Em particular, se a função f for derivável, então a função $f'\colon X \to \mathbb{R}$ é decrescente (respetivamente, estritamente decrescente).

3) Em particular, se f for 2 vezes derivável num ponto $a \in X$, então $f''(a) \leq 0$.

Dem: Este resultado admite uma demonstração análoga à de III.5.9 ou, alternativamente, resulta de aplicar esse resultado à função $-f$, que tem a concavidade voltada para cima (respetivamente, estritamente voltada para cima). □

III.5.11 **(Condições que implicam a concavidade voltada para cima)** Seja $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo não trivial e notemos $\mathrm{int}(X)$ o intervalo constituído pelos pontos interiores[191], isto é, aquele que se obtém de X retirando-lhe as extremidades.

[190] Note-se que, mesmo que f tenha a concavidade estritamente voltada para cima, não se pode concluir que $f''(a)$ tenha que ser maior que 0. Trata-se de um fenómeno análogo àquele que verificámos com as funções estritamente crescentes, as quais podem ter derivada nula nalguns pontos.

[191] Trata-se de um caso particular da noção de interior de um conjunto arbitrário que não examinámos neste curso.

1) Se $f\colon X \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, derivável nos pontos interiores de X e tal que a função $f'\colon \mathrm{int}(X) \to \mathbb{R}$ seja crescente (respetivamente, estritamente crescente), então a função f tem a concavidade voltada para cima (respetivamente, estritamente voltada para cima).

2) Se $f\colon X \to \mathbb{R}$ é uma função contínua cuja restrição a $\mathrm{int}(X)$ seja 2 vezes derivável e tal que, para cada $x \in \mathrm{int}(X)$, $f''(x) \geq 0$ (respetivamente, $f''(x) > 0$)[192], então a função f tem a concavidade voltada para cima (respetivamente, estritamente voltada para cima).

Dem: Suponhamos que f verifica a hipótese em 1). Sejam $a < b < c$ em X. Tendo em conta o teorema de Lagrange (cf. III.2.7) podemos considerar x entre a e b e y entre b e c tais que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x), \quad \frac{f(c)-f(b)}{c-b} = f'(y).$$

Em particular, x e y são interiores a X e $x < y$ e portanto, pela hipótese feita, tem-se

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b},$$

a desigualdade sendo estrita no caso em que $f'\colon \mathrm{int}(X) \to \mathbb{R}$ é mesmo estritamente crescente. Relativamente a 2), tudo o que temos que notar é que o facto de a restrição de f a $\mathrm{int}(X)$ ter segunda derivada maior ou igual a 0 (respetivamente, maior que 0) em cada ponto impliva que a primeira derivada desta restrição é crescente (respetivamente, estritamente crescente). $\square$

III.5.12 **(Condições que implicam a concavidade voltada para baixo)** Seja $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo não trivial e notemos $\mathrm{int}(X)$ o intervalo constituído pelos pontos interiores, isto é, aquele que se obtém de X retirando-lhe as extremidades.

1) Se $f\colon X \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, derivável nos pontos interiores de X e tal que a função $f'\colon \mathrm{int}(X) \to \mathbb{R}$ seja decrescente (respetivamente, estritamente decrescente), então a função f tem a concavidade voltada para baixo (respetivamente, estritamente voltada para baixo).

2) Se $f\colon X \to \mathbb{R}$ é uma função contínua cuja restrição a $\mathrm{int}(X)$ seja 2 vezes derivável e tal que, para cada $x \in \mathrm{int}(X)$, $f''(x) \leq 0$ (respetivamente, $f''(x) < 0$)[193], então a função f tem a concavidade voltada para baixo (respetivamente, estritamente voltada para baixo).

Dem: Como em casos anteriores, a demonstração deste resultado é análoga à

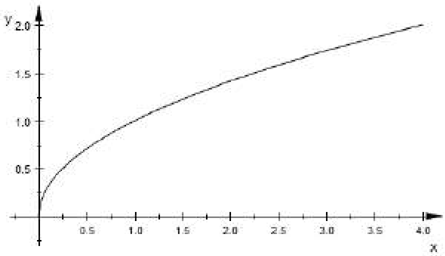
---

[192] Estamos a fazer o abuso de notar $f''(x)$ a segunda derivada da restrição de f e não de f, uma vez que esta última poderá não estar definida de acordo com a definição que estamos a utilizar.

[193] Estamos a fazer o abuso de notar $f''(x)$ a segunda derivada da restrição de f e não de f, uma vez que esta última poderá não estar definida de acordo com a definição que estamos a utilizar.

de III.5.11 ou, alternativamente, pode ser feita por aplicação do resultado referido à função $-f$. $\square$

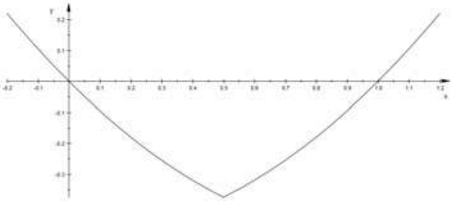
III.5.13 **(Exemplo)** A função $f\colon [0,+\infty[\, \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$, é contínua e, embora não seja derivável em 0, é derivável em cada $x \in\,]0,+\infty[$ e com $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.



Constatamos assim que a derivada é estritamente decrescente em $]0,+\infty]$ pelo que podemos concluir que a função f tem a concavidade estritamente voltada para baixo. Repare-se que, tal como é implicado por III.5.8, a função f, apesar de não ser derivável em 0 (isto é, não ter aí derivada finita) tem derivada infinita nesse ponto: $f'(0) = +\infty$.

Os resultados precedentes permitem-nos estabelecer o sentido da concavidade de uma função cujo domínio é um intervalo a partir do estudo das suas derivadas nos pontos interiores, só sendo necessário admitir, relativamente às extremidades, a sua continuidade nesses pontos. No entanto, para uma função como, por exemplo, a definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2-1}{2}, & \text{se } x \le \frac{1}{2} \\ \frac{x^2-1}{2}, & \text{se } x > \frac{1}{2} \end{cases},$$



em no ponto $\frac{1}{2}$ interior ao domínio as derivadas laterais são diferentes, não temos ainda nenhum resultado que nos permita concluir que a concavidade está estritamente voltada para cima, como a nossa intuição nos parece indicar. Apresentamos a seguir dois resultados que nos permitem lidar com situações deste tipo, um para cada sentido da concavidade.

III.5.14 **(Convexidade por partes)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo e w um ponto interior a X e consideremos os intervalos $X_{\leq w}$ e $X_{\geq w}$ constituídos respetivamente pelos $x \in X$ com $x \leq w$ e por aqueles com $x \geq w$. Seja $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função cuja restrições a $X_{\leq w}$ e a $X_{\geq w}$ tenham a concavidade voltada para cima (respetivamente, estritamente voltada para cima) e tal que $f'(w^-) \leq f'(w^+)$.[194] Podemos então concluir que f tem a concavidade voltada para cima (respetivamente, estritamente voltada para cima).

Dem: Consideremos $a < b < c$ arbitrários em X. Por hipótese, se os três pontos pertencerem a um mesmo dos intervalos $X_{\leq w}$ e $X_{\geq w}$, sabemos que f curva para cima ou é retilínea (respetivamente, curva para cima) nesses pontos. Resta-nos assim examinar o que se passa quando isso não suceder, isto é, quando $a < w < c$. Tratemos separadamente as diferentes hipóteses possíveis sobre a relação entre w e b:

1) Examinemos o caso em que $b = w$. Tendo em conta a caraterização das derivadas laterais $f'(w^-)$ e $f'(w^+)$ como um supremo e como um ínfimo, respetivamente, vem

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(a)-f(b)}{a-b} \leq f'(b^-) \leq f'(b^+) \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b},$$

o que mostra que f curva para cima ou é retilínia nos pontos $a < b < c$ (o declive esquerdo é menor ou igual ao declive direito). No caso em que as restrições curvam estritamente para cima, as desiguladades anteriores não chegam para afastar a possibilidade de f ser retilínea nos pontos considerada mas já o conseguimos fazer considerando um ponto auxiliar x com $a < x < b$ e reparando então que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < \frac{f(b)-f(x)}{b-x} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b},$$

onde a primeira desigualdade é a desigualdade entre o declive total e o declive direito relativa aos pontos $a < x < b$ de $X_{\leq w}$ e a segunda é a que já provámos com os pontos $x < b < c$ no lugar dos pontos $a < b < c$.

2) Examinemos o caso em que $b < w$. Vem

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(w)-f(a)}{w-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a},$$

onde a primeira desigualdade resulta de f curvar para cima nos pontos $a < b < w$ de $X_{\leq w}$ (o declive esquerdo é menor ou igual ao declive total) e a segunda desigualdade resulta do caso estudado em 1), aplicado aos pontos $a < w < c$ (o declive esquerdo é menor ou igual ao declive total) e podemos garantir que a primeira desigualdade é mesmo estrita no caso em que a restrição de f a $X_{\leq w}$ tem mesmo a concavidade estritamente voltada para

[194] A existência destas derivadas laterais, a primeira finita ou $+\infty$ e a segunda finita ou $-\infty$, encontra-se assegurada pelas propriedades estabelecidas em III.5.6. A desigualdade que estamos a tomar como hipótese implica que elas são ambas finitas.

cima. A relação estabelecida entre os declives esquerdo e total relativos aos pontos $a < b < c$ mostra assim que f curva para cima (respetivamente, estritamente para cima) nestes pontos.

3) Examinemos o caso em que $w < b$. Vem

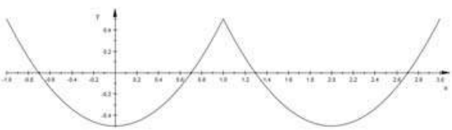
$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(w)}{c-w} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b},$$

onde a segunda desigualdade resulta de f curvar para cima nos pontos $w < b < c$ de $X_{\geq w}$ (o declive total é menor ou igual ao declive direito) e a primeira desigualdade resulta do caso estudado em 1), aplicado aos pontos $a < w < c$ (o declive total é menor ou igual ao declive direito) e podemos garantir que a segunda desigualdade é mesmo estrita no caso em que a restrição de f a $X_{\geq w}$ tem mesmo a concavidade estritamente voltada para cima. A relação estabelecida entre os declives total e direito relativos aos pontos $a < b < c$ mostra assim que f curva para cima (respetivamente, estritamente para cima) nestes pontos. ☐

III.5.15 **(Nota)** Repare-se que para a validade do resultado precedente foi essencial a condição de se ter $f'(w^-) \leq f'(w^+)$, como aliás é evidente pela conclusão da alínea 4) de III.5.6. Por exemplo a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

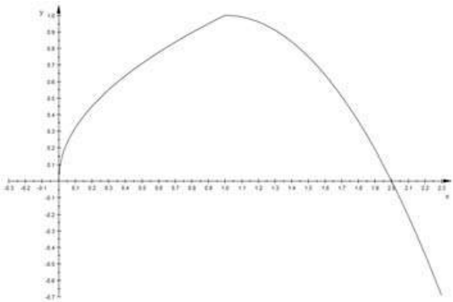
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{1}{2}, & \text{se } x \leq 1 \\ (x-2)^2 - \frac{1}{2}, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

não tem a concavidade voltada para cima, embora isso aconteça às suas restrições aos intervalos $]-\infty, 1]$ e $[1, +\infty[$.



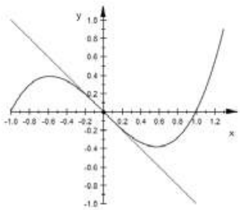
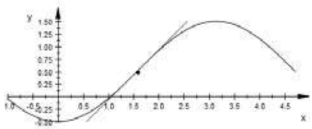
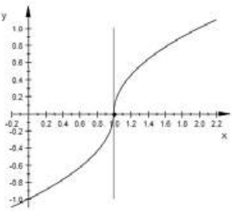
III.5.16 **(Concavidade por partes)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo e w um ponto interior a X e consideremos os intervalos $X_{\leq w}$ e $X_{\geq w}$ constituídos respetivamente pelos $x \in X$ com $x \leq w$ e por aqueles com $x \geq w$. Seja $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função cuja restrições a $X_{\leq w}$ e a $X_{\geq w}$ tenham a concavidade voltada para baixo (respetivamente, estritamente voltada para baixo) e tal que $f'(w^-) \geq f'(w^+)$.[195] Podemos então concluir que f tem a concavidade voltada para baixo (respetivamente, estritamente voltada para baixo).

[195] A existência destas derivadas laterais, a primeira finita ou $-\infty$ e a segunda finita ou $+\infty$, encontra-se assegurada pelas propriedades estabelecidas em III.5.8. A desigualdade que estamos a tomar como hipótese implica que elas são ambas finitas.

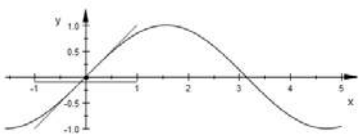


Dem: Este resultado admite uma justificação análoga à apresentada para III.5.14 ou, alternativamente, resulta de aplicar esse resultado à função $-f\colon X \to \mathbb{R}$. □

III.5.17 **(Pontos de inflexão)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função e w um ponto interior a X. Vamos dizer que f tem no ponto w um *ponto de inflexão absoluto* se a restrição de f a um dos intervalos $X_{\le w}$ e $X_{\ge w}$ tiver a concavidade estritamente voltada para cima e a restrição de f ao outro tiver a concavidade estritamente voltada para baixo.[196]

Mais geralmente, diz-se que f tem no ponto w um *ponto de inflexão relativo*, ou simplesmente um *ponto de inflexão*, se existir um intervalo $Y \subset X$, tendo w como ponto interior, tal que a restrição de f a Y tenha em w um ponto de inflexão absoluto.



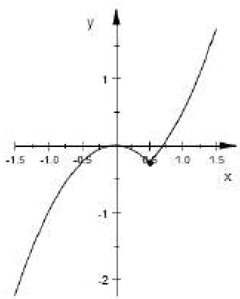
Repare-se no paralelo com os extremos de uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ cujo

[196]Dito de forma mais rápida, mas menos precisa, f deve mudar em w o sentido da concavidade. Note-se que também se poderia ter apresentado uma versão lata desta conceito (omitindo o advérbio “estritamente” na definição) mas não nos parece útil aprofundar mais esta questão: A versão estrita parece-nos ser a que está mais de acordo com a utilização comum deste conceito.

domínio não terá que ser um intervalo: Depois da definição global do que é um ponto de X onde f atinge um máximo ou um mínimo absoluto, diz-se, mais geralmente, que f atinge num ponto um máximo ou mínimo relativo se a sua restrição a uma subconjunto "conveniente" Y atinge nesse ponto um máximo ou mínimo absoluto. Neste caso, "conveniente" pode ser explicado de várias maneiras equivalentes, por exemplo o ponto em questão não deve ser aderente ao conjunto $X \setminus Y$ dos pontos do domínio que estão a ser ignorados. A diferença mais marcante é que, quando se fala simplesmente de máximo ou mínimo é a noção absoluta que está implícita, ao contrário do que acontece com os pontos de inflexão em que é a situação relativa que se considera implícita.

III.5.18 **(Nota)** A definição que demos de ponto de inflexão absoluto (e, consequentemente, também de ponto de inflexão relativo) não é a única possível mas tem sobre a outra cuja utilização é mais frequente (e que corresponde à propriedade que examinaremos adiante na alínea c) de III.5.20) a vantagem de não exigir a derivabilidade da função no ponto que se está a considerar. Por exemplo, a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{se } x \leq \frac{1}{2} \\ x^2 - \frac{1}{2}, & \text{se } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$



tem um ponto de inflexão absoluto no ponto $\frac{1}{2}$, no sentido que estamos a considerar, o que poderá eventualmente chocar quem esteja habituado a utilizar a outra definição (note-se que f não é derivável no ponto $\frac{1}{2}$).

III.5.19 **(Pontos de inflexão e derivadas)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo não trivial, $f: X \to \mathbb{R}$ uma função derivável e w um ponto interior a X. Tendo em conta o que foi referido em III.5.9, III.5.10, III.5.11 e III.5.12, podemos dizer que f tem em w um ponto de inflexão absoluto se, e só se, das restrições de f aos intervalos $X_{\leq w}$ e $X_{\geq w}$, uma é estritamente crescente e outra é estritamente decrescente. Em particular, podemos dizer que:

1) Se f é 2 vezes derivável num ponto w e se w é um ponto de inflexão absoluto, então $f''(w) = 0$ (e portanto o mesmo acontece se w for um ponto de inflexão relativo).

2) Se f for 2 vezes derivável e a segunda derivada $f'': X \to \mathbb{R}$ for estritamente positiva num dos intervalos $X_{<w}$ e $X_{>w}$ e estritamente negativa no outro, então w é um ponto de inflexão absoluto de f.

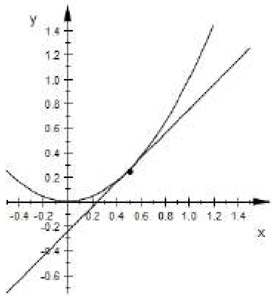
Os dois resultados seguintes mostram que o sentido da concavidade, no caso das funções deriváveis, pode ser também caracterizado pela análise da posição relativa do gráfico da função e das retas tangentes a este.

III.5.20 **(Sentido da concavidade e posição do gráfico relativamente à reta tangente)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo não trivial e $f: X \to \mathbb{R}$ uma função derivável num ponto $w \in X$. Tem-se então:

a) Se f tem a concavidade voltada para cima (respetivamente estritamente voltada para cima) então, para cada $x \neq w$ em X,

$$f(x) \geq f(w) + f'(w)(x-w) \quad \text{no caso geral,}$$
$$f(x) > f(w) + f'(w)(x-w) \quad \text{no caso estrito,}^{197}$$

por outras palavras, geometricamente, a parte do gráfico de f correspondente aos pontos de abcissa $x \neq w$ fica acima (respetivamente estritamente acima) da reta tangente ao gráfico no ponto de abcissa w.

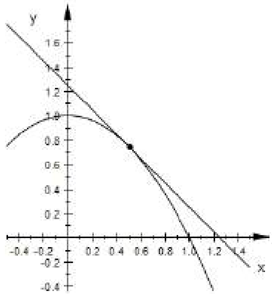


b) Se f tem a concavidade voltada para baixo (respetivamente estritamente voltada para baixo) então, para cada $x \neq w$ em X,

$$f(x) \leq f(w) + f'(w)(x-w) \quad \text{no caso geral,}$$
$$f(x) < f(w) + f'(w)(x-w) \quad \text{no caso estrito,}^{198}$$

por outras palavras, geometricamente, a parte do gráfico de f correspondente aos pontos de abcissa $x \neq w$ fica abaixo (respetivamente estritamente abaixo) da reta tangente ao gráfico no ponto de abcissa w.

[197] Repare-se que no caso em que $x = w$ os dois membros são sempre trivialmente iguais.
[198] Repare-se que no caso em que $x = w$ os dois membros são sempre trivialmente iguais.

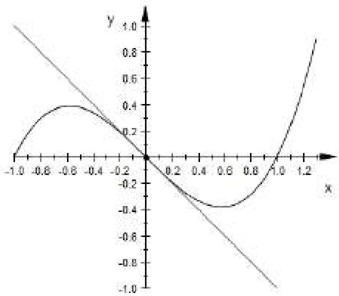


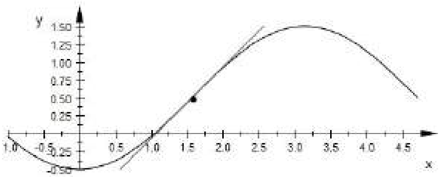
c) Se w é interior ao intervalo X e f tem um ponto de inflexão absoluto em w, então verifica-se um dos seguintes pares de condições

$$\begin{cases} f(x) < f(w) + f'(w)(x-w), & \text{se } x < w, \\ f(x) > f(w) + f'(w)(x-w), & \text{se } x > w, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) > f(w) + f'(w)(x-w), & \text{se } x < w, \\ f(x) < f(w) + f'(w)(x-w), & \text{se } x > w, \end{cases}$$

por outras palavras, geometricamente, a parte do gráfico de f correspondente aos pontos de abcissa $x < w$ fica estritamente de um dos lados da reta tangente ao gráfico no ponto de abcissa w e a parte do gráfico de f correspondente aos pontos de abcissa $x > w$ fica estritamente do outro lado dessa reta.





Dem: a) Comecemos por supor que $x > w$. Tendo em conta a caracterização de $f'(w) = f'(w^+)$ na alínea 2) de III.5.6, tem-se

$$f'(w) \le \frac{f(x) - f(w)}{x - w}$$

e a alínea 1) do mesmo resultado mostra-nos que, no caso da concavidade estritamente voltada para cima, tomando y em $]w, x[$, tem-se mesmo

$$f'(w) \leq \frac{f(y) - f(w)}{y - w} < \frac{f(x) - f(w)}{x - w},$$

desigualdades que, por ser $x - w > 0$, implicam as desigualdades enunciadas. Suponhamos agora que $x < w$. Tendo em conta a caracterização de $f'(w) = f'(w^-)$ na alínea 3) de III.5.6, tem-se

$$\frac{f(x) - f(w)}{x - w} \leq f'(w)$$

e a alínea 1) do mesmo resultado mostra-nos que, no caso da concavidade estritamente voltada para cima, tomando y em $]x, w[$, tem-se mesmo

$$\frac{f(x) - f(w)}{x - w} < \frac{f(y) - f(w)}{y - w} \leq f'(w),$$

desigualdades que, por ser $x - w < 0$, implicam mais uma vez as desigualdades enunciadas.
b) A conclusão desta alínea admite uma justificação análoga à dada para a alínea a), aplicando agora III.5.8 em vez de III.5.6, ou alternativamente, resulta de aplicar a conclusão de a) à função $-f\colon X \to \mathbb{R}$.
c) Tendo em conta a definição dos pontos de inflexão absolutos, a conclusão desta alínea resulta diretamente das conclusões de a) e b). □

III.5.21 **(Das tangentes para o sentido da concavidade)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo não trivial e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função contínua e derivável em todos os pontos interiores.
a) Se, para cada par de pontos w, x interiores a X,

$$f(x) \geq f(w) + f'(w)(x - w)$$

(respetivamente

$$f(x) > f(w) + f'(w)(x - w)\ ),$$

então f tem a concavidade voltada para cima (respetivamente, estritamente voltada para cima).
b) Se, para cada par de pontos w, x interiores a X,

$$f(x) \leq f(w) + f'(w)(x - w)$$

(respetivamente,

$$f(x) < f(w) + f'(w)(x - w)\ ),$$

então f tem a concavidade voltada para baixo (respetivamente, estritamente voltada para baixo).
Dem: a) Vamos utilizar a condição que implica a convexidade (respetivamente convexidade estrita) na alínea 1) de III.5.11. Sejam então $w < z$ no interior de X e reparemos que, aplicando a nossa hipótese duas

vezes, se obtém

$$f(z) \geq f(w) + f'(w)(z - w),$$
$$f(w) \geq f(z) + f'(z)(w - z),$$

e portanto, reparando que $w - z < 0$,

$$f'(w) \leq \frac{f(z) - f(w)}{z - w} = \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \leq f'(z),$$

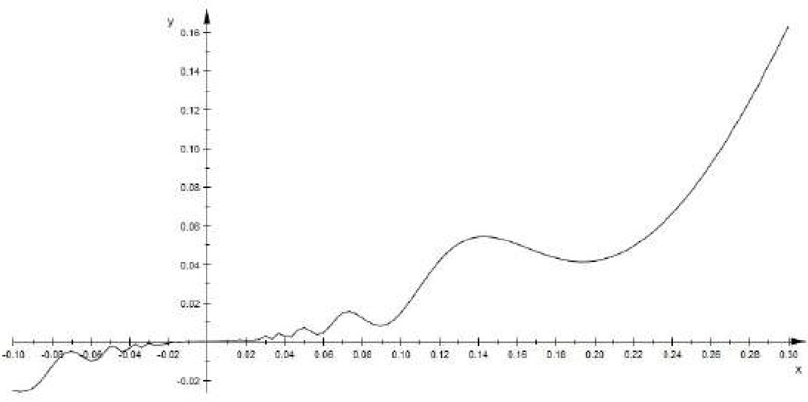
onde as desigualdades são estritas no caso em que na hipótese a desigualdade seja estrita. Fica assim provado que a derivada da restrição de f ao interior de X é crescente (respetivamente, estritamente crescente).

b) A demonstração de b) pode ser obtida por adaptação trivial da apresentada para a) ou, alternativamente, resulta de aplicar a conclusão de a) à função $-f$. □

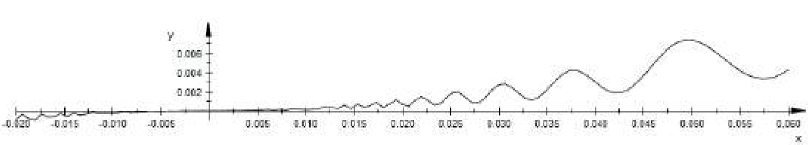
III.5.22 **(Nota)** Pelo contrário, uma função derivável f que verifique, para um certo w interior ao domínio, a condição na alínea c) de III.5.20 não tem necessariamente um ponto de inflexão, nem sequer local, nesse ponto. Um contraexemplo pode ser dado pela função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x\,|x|\,(2 + \text{sen}(\frac{1}{x}), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

e pelo ponto $w = 0$ cujo gráfico sugerimos a seguir



com a seguinte ampliação junto da origem



Exercícios

Ex III.5.1 Para cada uma das funções seguintes, determinar intervalos maximais[199] onde elas tenham a concavidade voltada para cima ou voltada para baixo e identificar os pontos de inflexão.
a) x^3+x, onde $x\in\mathbb{R}$;
b) $2x^3-3x^2$, onde $x\in\mathbb{R}$;
c) $\operatorname{sen}(x)$, $x\in[0,2\pi]$;
d) x^x, $x\in\,]0,+\infty[$;
e) $|\tan(x)|$, $x\in\,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$;
f) $|x^3-3x|$, $x\in\mathbb{R}$.

Ex III.5.2 Verificar que a função $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=|x|$ tem a concavidade voltada para cima.

Ex III.5.3 **(Pergunta aparecida em prova de avaliação)** Considerar a função $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=x\,e^{1-x^2}.$$

a) Verificar que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ e $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.
b) Estudar f no que respeita à monotonia, extremos e sentido de concavidade.
c) Determinar o contradomínio $\mathcal{C}$ de f. Justificar que existem exactamente duas soluções da equação $f(x)=\frac{1}{4}$.

Ex III.5.4 **(Pergunta aparecida em prova de avaliação)** Determinar o sentido da concavidade da função $f\colon[0,\pi]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{sen}(x)$, e utilizar a caracterização do sentido da concavidade através dos declives das secantes para deduzir que, se $0<x<\frac{\pi}{2}$, então $\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}>\frac{2}{\pi}$.

Ex III.5.5 Sejam $X\subset\mathbb{R}$ um intervalo, w um ponto interior de X e $f\colon X\to\mathbb{R}$ uma função 3 vezes derivável em w e tal que $f''(w)=0$ e $f'''(w)\neq0$. Mostrar que f tem no ponto w um ponto de inflexão relativo.

★ Ex III.5.6 Seja $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função com a concavidade voltada para cima e não constante. Justificar que, pelo menos um dos dois limites $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ e $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ existe e é igual a $+\infty$. Dar um exemplo (se se quiser, apenas

[199] Um intervalo *maximal* com uma dada propriedade é um intervalo que não está estritamente contido em nenhum outro com a mesma propriedade. Por exemplo, aquilo que usualmente se designa por *intervalos de monotonia* de uma função são os intervalos maximais em que ela é crescente ou é decrescente.

sugerido graficamente) em que apenas um daqueles limites é $+\infty$.
Sugestão: Considerar $a < b$ com $f(a) \neq f(b)$ e examinar separadamente o que acontece em cada um dos casos $f(a) < f(b)$ e $f(a) > f(b)$, utilizando a caracterização do sentido da concavidade pelos declives das secantes ao gráfico.

★ Ex III.5.7 Sejam $]a,b[\subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, não vazio, com extremidades finitas ou infinitas, e $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ uma função com a concavidade voltada para cima.
a) Mostrar que se a função f não é decrescente então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que a restrição de f a $[c,b[$ seja crescente.
b) Deduzir de a) que existe necessariamente o limite $\lim\limits_{x\to b} f(x)$, que pode ser finito, $+\infty$ ou $-\infty$. Mostrar que, no caso em que $b < +\infty$, o limite não pode ser $-\infty$ (embora possa ser $+\infty$).
c) Supondo que $b < +\infty$ e que existe limite finito $\lim\limits_{x\to b} f(x) = B$, mostrar que f pode ser prolongada a $]a,b]$ como função convexa e descobrir quais os valores que se pode dar a $f(b)$ para obter um tal prolongamento.

★ Ex III.5.8 **(Comparar com a alínea 4) de III.5.6 e a alínea 1) de III.5.9)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo não trivial e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que:
1) Qualquer que seja a interior a X, f tem derivadas laterais em a e $f'(a^-) \leq f'(a^+)$;
2) Quaisquer que sejam $a < b$ no interior de X, $f'(a^+) \leq f'(b^-)$ (respetivamente, $f'(a^+) < f'(b^-)$).
Mostrar que f tem a concavidade voltada para cima (respetivamente, estritamente voltada para cima). Enunciar condições análogas que impliquem o sentido contrários para a concavidade. **Sugestão:** Dados $a < b < c$ em X, utilizar a versão incrementada do teorema de Lagrange no exercício III.2.1 para comparar os declives esquerdo e direito.

Ex III.5.9 Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função. Sejam $a < c$ em X e $s, t > 0$ com $s + t = 1$ e lembremos que a média pesada $sa + tc$ verifica as desigualdades

$$a < sa + tc < c$$

(cf. I.1.4).
a) Mostrar que f é retilínea nos pontos $a < sa + tc < c$ (cf. III.5.2) se, e só se,

$$f(sa + tc) = sf(a) + tf(c).$$

b) Mostrar que f curva para cima nos pontos $a < sa + tc < c$ se, e só se,

$$f(sa + tc) < sf(a) + tf(c).$$

c) Mostrar que f curva para baixo nos pontos $a < sa + tc < c$ se, e só se,

$$f(sa + tc) > sf(a) + tf(c).$$

Ex III.5.10 **(Médias pesadas e sentido da concavidade)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função. Lembrando a conclusão do exercício I.1.2, deduzir do exercício III.5.9 que:

a) A função f tem a concavidade estritamente voltada para cima se, e só se, quaisquer que sejam $a \neq c$ em X e $s, t > 0$ com $s + t = 1$,

$$f(sa + tc) < sf(a) + tf(c).$$ [200]

b) A função f tem a concavidade voltada para cima se, e só se, quaisquer que sejam $a \neq c$ em X e $s, t > 0$ com $s + t = 1$,

$$f(sa + tc) \leq sf(a) + tf(c).$$

Reparar que se $a = c$ esta desigualdade é sempre válida, como igualdade.

c) A função f tem a concavidade estritamente voltada para baixo se, e só se, quaisquer que sejam $a \neq c$ em X e $s, t > 0$ com $s + t = 1$,

$$f(sa + tc) > sf(a) + tf(c).$$

d) A função f tem a concavidade voltada para baixo se, e só se, quaisquer que sejam $a \neq c$ em X e $s, t > 0$ com $s + t = 1$,

$$f(sa + tc) \geq sf(a) + tf(c).$$

Reparar que se $a = c$ esta desigualdade é sempre válida, como igualdade.

★ Ex III.5.11 **(Médias pesadas de $\boldsymbol{n}$ reais)** Dado um número natural $n \geq 2$, chamamos *sequência de n pesos* a uma sequência de n reais $s_1, s_2, \ldots, s_n$ maiores que 0 e tais que $s_1 + s_2 + \cdots + s_n = 1$. Dada uma tal sequência e dados n reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$, chama-se *média aritmética pesada*, ou simplesmente *média pesada* destes últimos, associada à sequência de pesos, ao número real

$$s_1x_1 + s_2x_2 + \cdots + s_nx_n$$

(repare-se que, se $n = 2$, reencontramos a noção de média pesada de dois reais examinada em I.1.4).

a) Verificar que, no caso em que $n \geq 3$, a média pesada atrás referida é igual à média pesada, com os dois pesos s_n e $1 - s_n$, entre x_n e a média pesada dos $n - 1$ reais $x_1, \ldots, x_{n-1}$, esta última com os pesos $\frac{s_1}{1-s_n}, \ldots, \frac{s_{n-1}}{1-s_n}$.

b) Utilizar a conclusão de a) para mostrar, por indução, que, se X é um intervalo e os reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pertencem a X, então qualquer média pesada destes reais pertence a X.

[200] Reparar que é indiferente examinar os pontos a, c com $a < c$ ou com $a \neq c$, uma vez que a média de a e c com os pesos s e t coincide com a média de c e a com os pesos t e s.

c) Generalizar a conclusão do exercício III.5.10, mostrando que, se X é um intervalo e $f\colon X \to \mathbb{R}$ é uma função com a concavidade voltada para cima, então, dados elementos $x_1, \ldots, x_n$ e uma sequência de n pesos $s_1, \ldots, s_n$, tem-se

$$f(s_1x_1 + \cdots + s_nx_n) \leq s_1f(x_1) + \cdots + s_nf(x_n),$$

tendo-se mesmo

$$f(s_1x_1 + \cdots + s_nx_n) < s_1f(x_1) + \cdots + s_nf(x_n),$$

no caso em que f tem a concavidade estritamente voltada para cima e os pontos $x_1, \ldots, x_n$ não são todos iguais.
d) Enunciar e justificar a conclusão correspondente à da alínea c) para o caso de uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ com a concavidade voltada para baixo.

★ Ex III.5.12 **(Médias geométricas pesadas de n reais positivos)** Dada uma sequência de n pesos $s_1, s_2, \ldots, s_n$ e dados n números reais $y_1, y_2, \ldots, y_n$ maiores que 0, chama-se *média geométrica pesada* deste últimos ao número real maior que 0

$$y_1^{s_1} \times y_2^{s_2} \times \cdots \times y_n^{s_n}$$

(reparar que a média geométrica de dois reais positivos, definida no exercício I.1.18, é o caso particular em que temos dois números e dois pesos reais iguais, portanto ambos iguais a $\frac{1}{2}$). Generalizando a conclusão obtida no exercício referido, mostrar que se tem sempre

$$y_1^{s_1} \times y_2^{s_2} \times \cdots \times y_n^{s_n} \leq s_1y_1 + s_2y_2 + \cdots + s_ny_n$$

(a média geométrica pesada é menor ou igual à correspondente média aritmética pesada) e que os dois membros são iguais se, e só se, os números positivos $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são todos iguais. **Sugestão:** Utilizar a conclusão do exercício III.5.11, verificando que a função exponencial $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$, tem a concavidade estritamente voltada para cima e considerando reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tais que $y_j = e^{x_j}$.

CAPÍTULO IV
Somatórios finitos e infinitos

§1. Somatórios finitos de números reais.

Já encontrámos anteriormente a notação de somatório para designar a soma de uma sequência finita de números reais. Por exemplo, se tivermos números reais u_j, para cada natural j entre 1 e 4, o somatório $\sum\limits_{j=1}^{4} u_j$ designa a soma

$$((u_1 + u_2) + u_3) + u_4,$$

onde, ao contrário do que é habitual, utilizámos parênteses para sublinhar a ordem pela qual as operações foram feitas. Se, em vez de o índice j variar entre 1 e 4, ele variar entre 1 e um número natural n, que não explicitamos, o somatório $\sum\limits_{j=1}^{n} u_j$ tem um significado análogo, mas não é fácil explicitar esse significado sem utilizar o símbolo "…". Um modo de contornar essa incomodidade parte da observação que, por exemplo no caso concreto apresentado no início, tem-se $\sum\limits_{j=1}^{4} u_j = (\sum\limits_{j=1}^{3} u_j) + u_4$. Pode então dar-se uma definição recursiva do significado de $\sum\limits_{j=1}^{n} u_j$ quando para cada natural j entre 1 e n temos um número real u_j: Começamos por explicitar que $\sum\limits_{j=1}^{1} u_j$ significa naturalmente u_1 e, em seguida, supomos que para um certo $p < n$ já sabemos o que é $\sum\limits_{j=1}^{p} u_j$ e definimos então

$$\sum_{j=1}^{p+1} u_j = \Big(\sum_{j=1}^{p} u_j\Big) + u_{p+1}.$$

Em várias situações é útil extender a notação de somatório de modo a somar famílias finitas de números reais u_j em que o índice j, em vez de referir um número natural entre 1 e n, refere um elemento de um certo conjunto finito J de índices que não tem que ser constituído por números nem ter uma ordenação preferencial e que, por comodidade, até admitimos que possa ser vazio. É o que faremos em seguida, sublinhando desde já que isso só é possível porque a operação $+$ que está em jogo é comutativa, associativa e tem elemento neutro (nomeadamente 0). Para um estudo mais aprofundado, e com muitos exemplos concretos, dos somatórios finitos, remetemos o leitor para o capítulo 2 de [1].

IV.1.1 Seja J um conjunto finito de índices com n elementos (que até pode ser vazio) e seja x_j um número real para cada $j \in J$ (dizemos então que $(x_j)_{j\in J}$ é uma *família* de números reais *indexada em* J). Vamos definir o *somatório* (ou soma[201]) $\sum\limits_{j\in J} x_j$ definindo simultaneamente para todos os subconjuntos finitos $I \subset J$ as "somas parciais" $\sum\limits_{j\in I} x_j$. Para isso provaremos que há uma única maneira de associar um número real a cada "soma parcial" $\sum\limits_{j\in I} x_j$ de modo a que se verifiquem modo que se verifiquem as seguintes propriedades "naturais" que para nós serão essenciais:

1) $\displaystyle\sum_{j\in\emptyset} x_j = 0\,;$

2) Sempre que $j_0 \in I$, $\displaystyle\sum_{j\in I} x_j = \Big(\sum_{j\in I\setminus\{j_0\}} x_j\Big) + x_{j_0}$.

A "soma total" $\sum\limits_{j\in J} x_j$ que pretendemos definir é então simplesmente uma das somas parciais determinadas pela condição referida.

Dem: A ideia é provar, por indução no inteiro $p \geq 0$, que há uma única maneira de associar a cada parte I de J com um número de elementos menor ou igual a p um número real $\sum\limits_{j\in I} x_j$ de modo a que as propriedades 1) e 2) sejam verificadas. Para $p = 0$ isso é certamente verdade: A solução única é definir $\sum\limits_{j\in\emptyset} x_j = 0$, como determina a propriedade 1). Suponhamos então que, para um certo $p < n$ a afirmação que referimos é verdadeira. O que temos que provar é que existe uma única maneira de definir para cada parte I com $p+1$ elementos a soma $\sum\limits_{j\in I} x_j$ de modo que, juntamente com as somas que já estão bem definidas pela hipótese de indução, as propriedades 1) e 2) continuem a ser verdadeiras. Ora, dado um tal I, podemos escolher $j_0 \in I$, considerar o conjunto $I \setminus \{j_0\}$ com p elementos e definir

$$\sum_{j\in I} x_j = \Big(\sum_{j\in I\setminus\{j_0\}} x_j\Big) + x_{j_0}$$

(é a única escolha possível se queremos que se verifique a propriedade 2)). Para mostrarmos que as propriedades 1) e 2) continuam válidas para os conjuntos com um número de elementos menor ou igual a $p+1$, falta-nos

[201]A diferença entre "soma" e "somatório" é ténue: O somatório é a expressão construída com a ajuda do símbolo $\sum$ e a soma é o valor que lhe atribuímos.

apenas verificar que, se considerássemos $j_1 \neq j_0$ em I, continuava a ter-se $\sum\limits_{j\in I} x_j = \Big(\sum\limits_{j\in I\setminus\{j_1\}} x_j\Big) + x_{j_1}$. É para verificar esse facto que são importantes as propriedades comutativa e associativa da soma: Vem

$$\begin{aligned}\sum_{j\in I} x_j &= \Big(\sum_{j\in I\setminus\{j_0\}} x_j\Big) + x_{j_0} = \bigg(\Big(\sum_{j\in I\setminus\{j_0,j_1\}} x_j\Big) + x_{j_1}\bigg) + x_{j_0} = \\ &= \Big(\sum_{j\in I\setminus\{j_0,j_1\}} x_j\Big) + (x_{j_1} + x_{j_0}) = \Big(\sum_{j\in I\setminus\{j_0,j_1\}} x_j\Big) + (x_{j_0} + x_{j_1}) = \\ &= \bigg(\Big(\sum_{j\in I\setminus\{j_0,j_1\}} x_j\Big) + x_{j_0}\bigg) + x_{j_1} = \Big(\sum_{j\in I\setminus\{j_1\}} x_j\Big) + x_{j_1}.\end{aligned}$$ □

IV.1.2 **(Nota)** Repare-se que uma família $(x_j)_{j\in J}$ de números reais é a mesma coisa que uma função de domínio J e codomínio $\mathbb{R}$ e que x_j é simplesmente uma notação alternativa para $x(j)$. A diferença de notações é simplesmente uma questão de uso e não tem um carácter essencial. Comparar com o que foi referido em I.4.29 a propósito das sucessões. Observe-se também que na notação $\sum\limits_{j\in J} x_j$ a variável j é o que se chama uma *variável muda*, que pode assim ser substituída por outra, escrevendo por exemplo $\sum\limits_{k\in J} x_k$, sem alterar o significado da expressão (e, como veremos, há por vezes conveniência em fazê-lo).

Como já referimos antes, o que estamos a fazer com os somatórios depende apenas de a operação envolvida ser comutativa e associativa e ter elemento neutro. Se substituíssemos a soma pelo produto (onde o elemento neutro é 1) obtínhamos uma noção análoga de “produtório”, em que o símbolo $\prod$ substitui o símbolo $\sum$, e que goza de propriedades análogas às que vamos obter em seguida para os somatórios. Por exemplo, tem-se

$$\prod_{j\in\emptyset} x_j = 1, \quad n! = \prod_{p=1}^{n} p.$$

Nâo teremos ocasião de explorar o estudo dos produtórios neste texto.

IV.1.3 **(Casos particulares) 1)** No caso em que o conjunto J dos índices que estamos a considerar é vazio (a soma não tem parcelas), o valor do somatório fica imediatamente determinado pela propriedade 1) referida em IV.1.1:

$$\sum_{j\in\emptyset} x_j = 0.$$

2) No caso em que J tem um único elemento, $J = \{j_1\}$, tem-se simplesmente

$$\sum_{j\in\{j_1\}} x_j = x_{j_1},$$

como resulta de aplicar a propriedade 2) referida em IV.1.1, reparando que $J \setminus \{j_1\} = \emptyset$.

3) No caso em que o número de elementos de J é 2, $J = \{j_1, j_2\}$ tem-se

$$\sum_{j\in J} x_j = x_{j_1} + x_{j_2},$$

como resulta, mais uma vez, de aplicar a propriedade 2), reparando que $J \setminus \{j_2\} = \{j_1\}$. Repare-se que, alternativamente, também podíamos partir do facto de se ter $J \setminus \{j_1\} = \{j_2\}$ e obter o valor do somatório na forma $x_{j_2} + x_{j_1}$, o que é naturalmente o mesmo resultado (mais uma vez fica bem patente a importância de a adição ser comutativa).

4) No caso em que $J = \{1, 2, \ldots, n\}$, a soma $\sum\limits_{j\in J} x_j$ coincide com a que designámos nas observações introdutórias por $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j$, uma vez que a definição recursiva desta última não é mais do que a definição recursiva da primeira, com a exigência suplementar de, em cada passo, o índice que se retira ter que ser o maior (em vez de ser arbitrário).

IV.1.4 **(Nota)** O leitor poderá ter ficado com a ideia de que os somatórios finitos definidos em IV.1.1 são difíceis de calcular, em particular exigindo o cálculo prévio e sucessivo de todos os somatórios parciais. De facto isso não acontece e os somatórios indexados em conjuntos finitos arbitrários dão o mesmo trabalho a calcular que os somatórios a que estávamos habituados e a única diferença é que ficamos com a liberdade de escolher a ordem que nos for mais conveniente para os índices, tendo a certeza que o resultado obtido não depende dessa ordem. Por exemplo, no caso em que $J = \{1, 2, 3, 4\}$, um somatório do tipo $\sum\limits_{j\in J} u_j$, que também admite a notação $\sum\limits_{j=1}^{4} u_j$, que era naturalmente calculado como

$$((u_1 + u_2) + u_3) + u_4,$$

pode também ser calculado, entre outros modos, como

$$((u_3 + u_2) + u_4) + u_1.$$

Estudamos a seguir algumas propriedades mais ou menos familiares dos somatórios que em muitos casos contribuem para simplificar o respetivo cálculo. Tendo em conta a definição recursiva que foi dada para os somatórios, a justificação dessa propriedades será em geral feita por indução no número de índices envolvido e tirará partido da liberdade de escolha do primeiro índice que temos referido.

IV.1.5 **(Mudança no conjunto de índices)** Sejam J e K dois conjuntos finitos e $\varphi\colon K \to J$ uma função bijetiva (em particular os conjuntos têm necessariamente o mesmo número de elementos). Dada uma família $(x_j)_{j\in J}$ de números reais, indexada em J, podemos associar-lhe uma família indexada em K, nomeadamente a família $(x_{\varphi(k)})_{k\in K}$. Tem-se então

$$\sum_{j\in J} x_j = \sum_{k\in K} x_{\varphi(k)}.$$

Dem: A demonstração faz-se muito facilmente por indução no número de elementos dos conjuntos de índices e ilustra a vantagem de termos usado uma definição dos somatórios que é independente de qualquer ordenação dos índices: O resultado é certamente verdadeiro quando o número de índices é 0 uma vez que ambos os membros da igualdade são então iguais a 0; Supondo o resultado verdadeiro quando os conjuntos de índices têm n elementos, para provar a sua validade quando estes têm $n+1$ elementos, escolhemos um elemento k_0 de K e o correspondente $j_0 = \varphi(k_0) \in J$ e, utilizando a definição recursiva e a hipótse de indução, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{j\in J} x_j &= \Big(\sum_{j\in J\setminus\{j_0\}} x_j\Big) + x_{j_0} = \\ &= \Big(\sum_{k\in K\setminus\{k_0\}} x_{\varphi(k)}\Big) + x_{\varphi(k_0)} = \sum_{k\in K} x_{\varphi(k)}.\end{aligned}$$ □

IV.1.6 **(Exemplos) a)** A igualdade

$$\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{100} \frac{1}{(101-p)^2}$$

é verdadeira e resulta de aplicar o resultado precedente no caso em que J e K são ambos iguais ao conjunto dos números naturais entre 1 e 100 e $\varphi\colon K \to J$ é a função bijetiva definida por $\varphi(p) = 101 - p$. Apesar de neste exemplo os dois conjuntos de índices envolvidos coincidirem, podemos ainda dizer que estamos a fazer uma mudança no conjunto de índices.

b) Seja J o conjunto dos números ímpares menores que 50. Podemos considerar uma função bijetiva do conjunto dos números naturais entre 1 e 25 para o conjunto J, que a p associa $2p-1$ e, a partir daí, escrever, por exemplo

$$\sum_{n\in J} \cos(n) = \sum_{p=1}^{25} \cos(2p-1).$$

IV.1.7 **(O caso das parcelas todas iguais)** Sejam J um conjunto finito de índices com n elementos, $x \in \mathbb{R}$ e $(x_j)_{j\in J}$ a família constante definida por $x_j = x$ para cada j. Tem-se então

$$\sum_{j\in J} x_j = nx.$$

Em particular, tem-se $\sum\limits_{j\in J} x_j = 0$ no caso em que $x_j = 0$ para cada $j \in J$.

Dem: A demonstração faz-se, mais uma vez, por indução no número de elementos de J e não a explicitamos por poder ser muito facilmente obtida pelo estudante. □

IV.1.8 **(Somatórios e monotonia)** Sejam J um conjunto finito de índices e consideremos duas famílias de números reais $(x_j)_{j\in J}$ e $(y_j)_{j\in J}$ tais que $x_j \le y_j$ para cada índice j. Tem-se então

$$\sum_{j\in J} x_j \le \sum_{j\in J} y_j,$$

e vem mesmo $\sum\limits_{j\in J} x_j < \sum\limits_{j\in J} y_j$ no caso em que existe pelo menos um índice j com $x_j < y_j$.

Dem: A demonstração faz-se, mais uma vez, por indução no número de elementos de J e não a explicitamos por poder ser muito facilmente encontrada pelo estudante. □

IV.1.9 **(Distributividade)** Sejam J um conjunto finito de índices, $a \in \mathbb{R}$ e $(x_j)_{j\in J}$ uma família de números reais. Tem-se então

$$a \times \sum_{j\in J} x_j = \sum_{j\in J} (a \times x_j).$$

Dem: A demonstração faz-se, mais uma vez, por indução no número de elementos de J e não a explicitamos por poder ser muito facilmente encontrada pelo estudante. □

IV.1.10 **(Primeira versão da associatividade)** Sejam J um conjunto finito de índices e $(x_j)_{j\in J}$ uma família de números reais. Suponhamos que o conjunto de índices J é a união de dois subconjuntos disjuntos[202] J' e J''. Tem-se então

$$\sum_{j\in J} x_j = \Big(\sum_{j\in J'} x_j\Big) + \Big(\sum_{j\in J''} x_j\Big).$$

Dem: Vamos fazer uma demonstração por indução no número de elementos de J''. No caso em que este é igual a 0, ou seja $J'' = \emptyset$ e portanto $J' = J$, a fórmula resulta de se ter

[202] Isto é, sem nenhum índice em comum.

$$\sum_{j\in J} x_j = \Big(\sum_{j\in J} x_j\Big) + 0 = \Big(\sum_{j\in J'} x_j\Big) + \Big(\sum_{j\in J''} x_j\Big).$$

Supondo que a igualdade é verdadeira sempre que J'' tem p elementos, provemo-la no caso em que J'' tem $p+1$ elementos. Para isso, escolhemos um elemento $j_0 \in J''$ e, reparando que o conjunto $J\setminus\{j_0\}$ é a união dos subconjuntos disjuntos J' e $J''\setminus\{j_0\}$, o segundo dos quais com p elementos, escrevemos, utilizando a hipótese de indução,

$$\sum_{j\in J} x_j = \Big(\sum_{j\in J\setminus\{j_0\}} x_j\Big) + x_{j_0} = \bigg(\Big(\sum_{j\in J'} x_j\Big) + \Big(\sum_{j\in J''\setminus\{j_0\}} x_j\Big)\bigg) + x_{j_0} =$$

$$= \Big(\sum_{j\in J'} x_j\Big) + \bigg(\Big(\sum_{j\in J''\setminus\{j_0\}} x_j\Big) + x_{j_0}\bigg) = \Big(\sum_{j\in J'} x_j\Big) + \Big(\sum_{j\in J''} x_j\Big). \quad \square$$

IV.1.11 **(Exemplo)** O conjunto dos números naturais de 1 até 100 pode ser decomposto como união de dois subconjuntos disjuntos, o daqueles que são pares e o daqueles que são ímpares. Aplicando IV.1.10 e fazendo mudanças nos conjuntos de índices (cf. IV.1.5) podemos escrever, com notações que se explicam por si,

$$\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n} = \sum_{\substack{n=1\\ n \text{ par}}}^{100} \frac{1}{n} + \sum_{\substack{n=1\\ n \text{ ímpar}}}^{100} \frac{1}{n} = \sum_{p=1}^{50} \frac{1}{2p} + \sum_{p=1}^{50} \frac{1}{2p-1}.$$

IV.1.12 **(Versão mais geral da associatividade)** Sejam J um conjunto finito de índices e $(x_j)_{j\in J}$ uma família de números reais. Sejam A outro conjunto finito de índices e, para cada $a\in A$, J_a um subconjunto de J e suponhamos que estes conjuntos são disjuntos dois a dois e de união J.[203] Tem-se então

$$\sum_{j\in J} x_j = \sum_{a\in A} \Big(\sum_{j\in J_a} x_j\Big).$$

Dem: Fazemos a demonstração por indução no número de elementos do segundo conjunto de índices A. Se este for 0, isto é, $A=\emptyset$, tem que ser $J=\emptyset$ e a igualdade a estabelecer é verdadeira por ambos os membros serem iguais a 0. Suponhamos que a igualdade é verificada quando A tem p elementos e provemo-la quando A tem $p+1$ elementos. Para isso, escolhemos um índice $a_0 \in A$ e notamos $J' \subset J$ a união dos J_a com $a \neq a_0$. Utilizando a hipótese de indução e a versão particular da associatividade

[203] Por outras palavras, cada índice em J pertence a um único dos subconjuntos J_a.

estabelecida em IV.1.10, obtemos então

$$\sum_{j\in J} x_j = \Big(\sum_{j\in J'} x_j\Big) + \Big(\sum_{j\in J_{a_0}} x_j\Big) = \bigg(\sum_{a\in A\setminus\{a_0\}} \Big(\sum_{j\in J_a} x_j\Big)\bigg) + \Big(\sum_{j\in J_{a_0}} x_j\Big) =$$
$$= \sum_{a\in A} \Big(\sum_{j\in J_a} x_j\Big). \qquad \square$$

IV.1.13 **(Propriedade de Fubini dos somatórios)** Sejam J e K dois conjuntos finitos de índices e, para cada $j \in J$ e $k \in K$, $x_{j,k} \in \mathbb{R}$ (por outras palavras, e à parte o facto de estarmos a omitir parênteses na notação, estamos a considerar uma família de números reais indexada no conjunto finito $J \times K$ de todos os pares (j, k) com $j \in J$ e $k \in K$). Tem-se então

$$\sum_{j\in J} \Big(\sum_{k\in K} x_{j,k}\Big) = \sum_{k\in K} \Big(\sum_{j\in J} x_{j,k}\Big)$$

e o valor comum coincide com o somatório indexado em $J \times K$

$$\sum_{(j,k)\in J\times K} x_{j,k}.$$

Dem: O conjunto $J \times K$ pode ser considerado como a união para $j \in J$ dos subconjuntos $\{j\} \times K$, consituídos pelos pares cuja primeira coordenada é j, conjuntos esses que são disjuntos dois a dois. Aplicando IV.1.12 e mudanças nos conjuntos de índices associadas às funções bijetivas $K \to \{j\} \times K$ definidas por $k \mapsto (j, k)$ (cf. IV.1.5) vem

$$\sum_{(j,k)\in J\times K} x_{j,k} = \sum_{(j',k)\in J\times K} x_{j',k} = \sum_{j\in J} \Big(\sum_{(j',k)\in\{j\}\times K} x_{j,k}\Big) = \sum_{j\in J} \Big(\sum_{k\in K} x_{j,k}\Big).$$ [204]

Analogamente, considerando agora $J \times K$ como a união para $k \in K$ dos subconjuntos $J \times \{k\}$, consituídos pelos pares cuja segunda coordenada é k, conjuntos esses que são disjuntos dois a dois, e fazendo também uma mudança conveniente nos conjuntos de índices, vemos que se tem também

$$\sum_{(j,k)\in J\times K} x_{j,k} = \sum_{k\in K} \Big(\sum_{\mathrm{j}\in J} x_{j,k}\Big),$$

em particular os membros à direita das duas igualdades são iguais. $\square$

IV.1.14 **(Corolário — soma de dois somatórios)** Sejam J um conjunto finito de índices e $(x_j)_{j\in J}$ e $(y_j)_{j\in J}$ duas famílias de números reais indexadas em J. Tem-se então

---

[204] A primeira igualdade, que se resume à mudança do índice mudo j para j' torna-se necessária para que a terceira expressão tenha significado.

$$\sum_{j\in J}(x_j+y_j)=\Bigl(\sum_{j\in J}x_j\Bigr)+\Bigl(\sum_{j\in J}y_j\Bigr).$$

Dem: Esta conclusão resulta dum caso particular da propriedade de Fubini em IV.1.13 desde que se considere um novo conjunto de índices $K=\{1,2\}$ e uma família de elementos $z_{j,k}$, com $j\in J$ e $k\in K$, definida por $z_{j,1}=x_j$ e $z_{j,2}=y_j$. □

Como exemplo de aplicação do corolário precedente, reobtemos a seguir a fórmula para a soma dos termos de uma progressão geométrica, já estabelecida, por indução, em I.2.4.

IV.1.15 Sejam a,r números reais, com $r\neq 1$ e consideremos a progressão geométrica com n termos, primeiro termo a e razão r, constituída pelos números

$$a\,,\ ar\,,\ ar^2\,,\dots,\ ar^{n-1}.$$

Tem-se então a seguinte caracterização da soma S destes termos:

$$S=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

Dem: Podemos escrever S na forma

$$S=\sum_{p=0}^{n-1}ar^p=a+\sum_{p=1}^{n-1}ar^p$$

e daqui deduzimos, efectuando mudanças apropriadas nos conjuntos de índices, que

$$\begin{aligned}-rS&=\sum_{p=0}^{n-1}(-ar^{p+1})=\sum_{k=1}^{n}(-ar^k)=\\&=\Bigl(\sum_{k=1}^{n-1}(-ar^k)\Bigr)-ar^n=\Bigl(\sum_{p=1}^{n-1}(-ar^p)\Bigr)-ar^n\end{aligned}$$

e portanto, somando as igualdades obtidas,

$$(1-r)S=S-rS=a+\Bigl(\sum_{p=1}^{n-1}(ar^p-ar^p)\Bigr)-ar^n=a(1-r^n),$$

donde, como queríamos,

$$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

□

Exercícios

Ex IV.1.1 Notemos $\mathcal{P}_3$ o conjunto de todos os subconjuntos do conjunto $\{1,2,3\}$ e, para cada $A \in \mathcal{P}_3$, seja s_A a soma dos números pertencentes ao conjunto A. Determinar a soma

$$\sum_{A\in\mathcal{P}_3} s_A$$

e reparar que não parece haver nenhuma ordenação preferencial do conjunto dos oito índices deste somatório.

★ Ex IV.1.2 Mais geralmente, para cada inteiro $n \geq 0$, seja $\mathbb{N}_{(n)}$ o conjunto dos números naturais entre 1 e n, por exemplo

$$\mathbb{N}_{(0)} = \emptyset, \quad \mathbb{N}_{(1)} = \{1\}, \quad \mathbb{N}_{(2)} = \{1,2\}, \quad \mathbb{N}_{(3)} = \{1,2,3\},$$

seja $\mathcal{P}_{(n)}$ o conjunto de todos os subconjuntos de $\mathbb{N}_{(n)}$, que sabemos ter 2^n elementos,[205] e notemos

$$S_n = \sum_{A\in\mathcal{P}_{(n)}} s_A,$$

onde, como no exercício precedente, s_A denota a soma dos elementos do subconjunto A. Verificar que $S_0 = 0$ e que, para cada inteiro $n \geq 0$,

$$S_{n+1} = 2S_n + 2^n(n+1).$$

Sugestão: Utilizar a propriedade associativa, para além de outras propriedades dos somatórios referidas atrás, reparando que os subconjuntos de $\mathbb{N}_{(n+1)}$ podem ser considerados de dois tipos, aqueles que não contêm $n+1$ e aqueles que contêm $n+1$.

Ex IV.1.3 **(Binómio de Newton)** Consideremos números reais x_1 e x_2. Para cada número natural n, consideremos o conjunto de índices $\{1,2\}^n$ de todas as sequências $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ de elementos de $\{1,2\}$. Mostrar, por indução em n, que se tem

$$(x_1 + x_2)^n = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\{1,2\}^n} x_{i_1} \times x_{i_2} \times \cdots \times x_{i_n}.$$

Utilizando a propriedade associativa, para além de outras propriedades dos

[205] Poderá ser interessante fazer esta contagem, por indução em n, usando uma sugestão análoga à que apresentaremos adiante.

somatórios referidas atrás, deduzir daqui a fórmula do binómio de Newton

$$(x_1+x_2)^n = \sum_{p=0}^{n} {}^nC_p\, x_1^p\, x_2^{n-p}.$$

Ex IV.1.4 **(Revisão sobre a soma dos termos de uma progressão aritmética)** Sejam a, r números reais e consideremos a progressão aritmética com n parcelas, primeira parcela a e razão r, constituída pelos números

$$a\,,\ a+r\,,\ a+2r\,,\dots,\ a+(n-1).$$

Justificar, pelo método que vamos sugerir[206], a seguinte caracterização da soma S destas parcelas:

$$\begin{aligned} S &= a+(a+r)+\cdots+(a+(n-1)r) = \\ &= n\times\frac{a+(a+(n-1)r)}{2} = na+\frac{n(n-1)}{2}r \end{aligned}$$

(a média da primeira e última parcela multiplicada pelo número de parcelas). **Sugestão:** Reparar que S é definido como o somatório

$$S=\sum_{p=0}^{n-1}(a+pr),$$

usando uma mudança no conjunto de índices obter as caracterizações alternativas

$$S=\sum_{k=0}^{n-1}(a+(n-1-k)r)=\sum_{p=0}^{n-1}(a+(n-1-p)r)$$

e deduzir daqui uma fórmula para $2S$ como soma de n parcelas todas iguais.

[206] Que costuma ser atribuído a Gauss quando tinha 7 anos de idade.

§2. Somatórios arbitrários de números positivos.

Lembremos que, como já referimos por ocasião do estudo elementar das séries feito na secção III.4, estamos neste texto a utilizar a palavra "positivo" com o significado de "maior ou igual a 0" e não, como é frequente, com o sentido de "maior que 0". O objetivo desta secção é verificar que é possível definir a soma de famílias arbitárias (não necessariamente finitas) de números positivos, somas essas que podem ser finitas ou $+\infty$ mas que, para além disso, vão ter propriedades análogas ás estudadas na secção precedente no contexto das famílias finitas, sendo, por esse motivo, muito facilmente manipuláveis. Começamos por fazer uma observação elementar sobre as somas finitas de parcelas positivas.

IV.2.1 **(Propriedade de monotonia dos somatórios finitos de parcelas positivas)** Seja $(x_j)_{j\in J}$ uma família finita de reais $x_j \geq 0$. Tem-se então $\sum\limits_{j\in J} x_j \geq 0$ e, para cada subconjunto $I \subset J$,

$$\sum_{j\in I} x_j \leq \sum_{j\in J} x_j.$$

Dem: A primeira afirmação resulta da propriedade de monotonia referida em IV.1.8 e do facto de um somatório com as parcelas todas iguais a 0 ser igual a 0. A segunda afirmação resulta da primeira, uma vez que se tem

$$\sum_{j\in J} x_j = \Big(\sum_{j\in I} x_j\Big) + \Big(\sum_{j\in J\setminus I} x_j\Big). \qquad \square$$

IV.2.2 **(Definição dos somatórios arbitrários de parcelas positivas)** Seja J um conjunto arbitrário de índices (finito ou infinito) e seja $(x_j)_{j\in J}$ uma família de reais $x_j \geq 0$. Define-se então

$$\sum_{j\in J} x_j \in [0, +\infty]$$

como sendo o supremo de todas as *somas parciais finitas*, isto é, de todas as somas $\sum\limits_{j\in I} x_j$ com I subconjunto finito de J.

Repare-se que no caso em que o conjunto de índices J é finito a soma assim definida coincide com a já conhecida (em particular é menor que $+\infty$) uma vez que, tendo em conta IV.2.1, a conjunto das somas parciais finitas tem

como máximo a correspondente a $I = J$.[207]
Repare-se ainda que se existir um índice $j_0 \in J$ com $x_{j_0} > 0$, então tem-se mesmo

$$\sum_{j \in J} x_j \geq x_{j_0} > 0,$$

uma vez que uma das somas finitas cujo supremo define o somatório é a correspondente ao subconjunto $\{j_0\}$.

IV.2.3 **(Mudança no conjunto de índices)** Sejam J e K dois conjuntos de índices e $\varphi: K \to J$ uma função bijetiva. Dada uma família $(x_j)_{j \in J}$ com $x_j \geq 0$, tem-se então

$$\sum_{j \in J} x_j = \sum_{k \in K} x_{\varphi(k)}.$$

Dem: Para cada subconjunto finito I de J, $\varphi^{-1}(I)$ é um subconjunto finito de K e a restrição de φ é uma função bijetiva de $\varphi^{-1}(I)$ para I pelo que, como vimos em IV.1.5,

$$\sum_{j \in I} x_j = \sum_{k \in \varphi^{-1}(I)} x_{\varphi(k)}.$$

Uma vez que todo o subconjunto finito de K é da forma $\varphi^{-1}(I)$ com I subconjunto finito de J, concluímos que o conjunto das somas finitas cujo supremo define $\sum\limits_{j \in J} x_j$ coincide com o conjunto das somas finitas cujo supremo define $\sum\limits_{k \in K} x_{\varphi(k)}$ e portanto os dois somatórios coincidem. □

IV.2.4 **(O caso das parcelas todas iguais)** Sejam J um conjunto infinito de índices, $x \in \mathbb{R}$ e $(x_j)_{j \in J}$ a família constante definida por $x_j = x$ para cada j. Tem-se então

$$\sum_{j \in J} x_j = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0 \\ +\infty, & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Dem: Temos uma consequência de IV.1.7 uma vez que se $x = 0$ todas as somas parciais finitas são 0 e que se $x > 0$ o somatório tem que ser maior ou igual a nx para cada natural n por existirem somas parciais finitas com um número de índices arbitrário. □

IV.2.5 **(Propriedades de monotonia)** Seja $(x_j)_{j \in J}$ uma família de números reais $x_j \geq 0$. Tem-se então:

---

[207] Pelo contrário, sem a exigência de se ter $x_j \geq 0$ para cada j, esta definição não faria sentido. Por exemplo, para a família definida por $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 3$, a soma é 4 mas o supremo das somas parciais finitas é $5 = x_2 + x_3$.

a) Se, para cada $j \in J$, $0 \leq y_j \leq x_j$, então

$$\sum_{j \in J} y_j \leq \sum_{j \in J} x_j,$$

em particular se o segundo membro é finito então o primeiro membro também o é.
b) Se $J' \subset J$ é um subconjunto, finito ou infinito, então

$$\sum_{j \in J'} x_j \leq \sum_{j \in J} x_j,$$

em particular se o segundo membro é finito então o primeiro membro também o é.
Dem: A conclusão de a) resulta de IV.1.8, uma vez que, para cada parte finita I de J, podemos escrever

$$\sum_{j \in I} y_j \leq \sum_{j \in I} x_j \leq \sum_{j \in J} x_j,$$

por outras palavras, $\sum\limits_{j \in J} x_j$ é um majorante de todas as somas finitas cujo supremo define $\sum\limits_{j \in J} y_j$. A conclusão de b) resulta de que, para cada subconjunto finito I de J', I é também um subconjunto de J e portanto

$$\sum_{j \in I} x_j \leq \sum_{j \in J} x_j,$$

por outras palavras $\sum\limits_{j \in J} x_j$ é um majorante de todas as somas finitas cujo supremo define $\sum\limits_{j \in J'} x_j$. □

Embora já o pudéssemos ter feito antes, vamos agora examinar uma situação de que possivelmente o leitor já se terá apercebido. Tata-se do caso em que o conjunto de índices J é $\mathbb{N}$ e temos uma família $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com $x_n \geq 0$, caso em que estudámos na secção III.4 o que se entende por soma da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, soma essa que, como referimos em III.4.36, está definida e é igual ao supremo, finito ou igual a $+\infty$, das somas parciais $S_p = \sum\limits_{n=1}^{p} x_n$. O que se passa é que neste contexto também faz sentido considerar o somatório $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n$, encarado como caso particular dos que estamos a estudar nesta secção, e seria de certo modo incómodo se os dois somatórios não tivessem o mesmo valor. Verificaremos a seguir, depois de examinar um resultado auxiliar aplicável noutras situações, que essa incomodidade não se concretiza mas fazemos notar desde já que o eventual problema poderia resultar de, embora ambos os somatórios aparecerem como supremos de somas parciais finitas, essas somas parciais no segundo caso são mais do que as consideradas no contexto das séries, por incluirem também somas com n a variar em conjuntos finitos como $\{2,5\}$.

IV.2.6 **(Primeiro teorema da convergência monótona)** Seja $(x_j)_{j\in J}$ uma família de números reais $x_j\ge 0$. Suponhamos que $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma *sucessão crescente de subconjuntos* de J (isto é, com $J_n\subset J_{n+1}$ para cada n) tal que $J=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} J_n$. Notando, para cada n, $S_n\in[0,+\infty]$ a soma parcial

$$S_n=\sum_{j\in J_n} x_j,$$

tem-se então:
a) Se existir n_0 tal que $S_{n_0}=+\infty$, então também $\sum\limits_{j\in J} x_j=+\infty$.
b) Se $S_n<+\infty$ para cada n, então a sucessão das somas parciais $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente e tem a soma total $\sum\limits_{j\in J} x_j$ como limite (finito ou $+\infty$).[208]

Dem: A conclusão de a) resulta trivialmente da propriedade de monotonia na alínea b) de IV.2.5. Essa mesma propriedade garante que, com a hipótese em b), temos uma sucessão de números reais S_n que é crescente e com todos os termos menores ou iguais à soma $S=\sum\limits_{j\in J} x_j$. Esta sucessão, sendo crescente, tem limite igual ao supremo do conjunto dos seus termos, em particular verifica $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n\le S$. Resta-nos provar a desigualdade oposta. Para isso consideramos uma parte finita $I\subset J$ arbitrária. Reparando que existe necessariamente n_0 tal que $I\subset J_{n_0}$ (afastado o caso trivial em que $I=\emptyset$, podemos escolher para cada $j\in I$ um natural n_j tal que $x_j\in J_{n_j}$ e tomamos para n_0 o máximo do conjunto finito dos n_j assim escolhidos) podemos concluir, mais uma vez pelas propriedades de monotonia dos somatórios que

$$\sum_{j\in I} x_j\le\sum_{j\in J_{n_0}} x_j=S_{n_0}\le\lim_{n\to+\infty} S_n$$

donde, pela caracterização da soma total como um supremo das somas parciais finitas,

$$S=\sum_{j\in J} x_j\le\lim_{n\to+\infty} S_n. \qquad \square$$

[208]A necessidade de separar os dois casos resulta de na noção de limite duma sucessão termos sempre exigido que os termos da sucessão sejam números reais e não reais estendidos. Se tivéssemos adaptado trivialmente a noção de limite a este contexto mais geral bastaria termos referido a afirmação em b).

IV.2.7 **(Séries e somas infinitas)** Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais com $x_n \geq 0$. Tem-se então que o valor do somatório $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$, no sentido de IV.2.2, coincide com a soma da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, no sentido de III.4.32.

Dem: Trata-se de uma consequência do resultado precedente se reparamos que $\mathbb{N}$ é a união da sucessão crescente de subconjuntos $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$, que neste caso são finitos, e que as correspondentes somas parciais

$$S_n = \sum_{k\in\mathbb{N}_n} x_k$$

são as que intervêm na definição de soma da série em III.4.32. □

IV.2.8 **(Propriedade associativa mais geral)** Seja $(x_j)_{j\in J}$ uma família arbitrária de números reais $x_j \geq 0$ e suponhamos que o conjunto de índices J é uma união, finita ou infinita, de subconjuntos J_β disjuntos dois a dois, onde $\beta \in B$. Tem-se então:

a) Se para algum β se tiver $\sum\limits_{j\in J_\beta} x_j = +\infty$, então $\sum\limits_{j\in J} x_j = +\infty$.

b) Se para todos os índices β se tiver $\sum\limits_{j\in J_\beta} x_j < +\infty$, então

$$\sum_{j\in J} x_j = \sum_{\beta\in B} \big(\sum_{j\in J_\beta} x_j\big)$$

(somas finitas ou $+\infty$).[209]

Dem: A conclusão de a) resulta imediatamente da propriedade de monotonia na alínea b) de IV.2.5. Suponhamos agora que $\sum\limits_{j\in J_\beta} x_j < +\infty$ para todos os índices $\beta \in B$. Vamos dividir a prova da igualdade em b) em duas partes, em cada uma das quais provamos uma das desigualdades entre os dois membros.

1) Vamos começar por mostrar que $\sum\limits_{j\in J} x_j \leq \sum\limits_{\beta\in B} \big(\sum\limits_{j\in J_\beta} x_j\big)$. Para isso, e tendo em conta a definição do primeiro membro como um supremo, bastará mostrar que para cada subconjunto finito $I \subset J$ se tem $\sum\limits_{j\in I} x_j \leq \sum\limits_{\beta\in B} \big(\sum\limits_{j\in J_\beta} x_j\big)$.

Fixemos então $I \subset J$ finito. Seja A a parte finita de B constituída pelos β tais que $I \cap J_\beta \neq \emptyset$ (no máximo um β para cada elemento de I). Tem-se então que o conjunto finito I é a união finita dos subconjuntos $I \cap J_\beta$, com $\beta \in A$, que são disjuntos dois a dois, pelo que, tendo em conta a associatividade finita estudada em IV.1.12 e as propriedades de monotonia dos somatórios, podemos escrever

---

[209] Analogamente ao que foi referido na nota de pé de página 208, se se fizesse a convenção de permitir parcelas iguais a $+\infty$ nos somatórios, considerando a sua soma, quando elas existam, igual a $+\infty$, poder-se-ia dispensar a alínea a) e dizer que a fórmula em b) é válida sem restrições.

$$\sum_{j\in I} x_j = \sum_{\beta\in A}\Big(\sum_{j\in I\cap J_\beta} x_j\Big) \le \sum_{\beta\in A}\Big(\sum_{j\in J_\beta} x_j\Big) \le \sum_{\beta\in B}\Big(\sum_{j\in J_\beta} x_j\Big),$$

como queríamos.

2) Vamos mostrar agora a desigualdade oposta $\sum_{j\in J} x_j \ge \sum_{\beta\in B}\big(\sum_{j\in J_\beta} x_j\big)$. Para isso, e tendo em conta a definição do segundo membro como um supremo, bastará provar que, fixado $A\subset B$ finito, se tem $\sum_{j\in J} x_j \ge \sum_{\beta\in A}\big(\sum_{j\in J_\beta} x_j\big)$. Suponhamos, por absurdo, que isso não acontecia, portanto que, para um certo A finito com k elementos, $\sum_{j\in J} x_j < \sum_{\beta\in A}\big(\sum_{j\in J_\beta} x_j\big)$. Sendo $\delta>0$ tal que

$$\Big(\sum_{j\in J} x_j\Big) + \delta < \sum_{\beta\in A}\Big(\sum_{j\in J_\beta} x_j\Big),$$

podemos, para cada $\beta\in A$, considerar $I_\beta\subset J_\beta$ finito tal que

$$\sum_{j\in I_\beta} x_j \ge \Big(\sum_{j\in J_\beta} x_j\Big) - \frac{\delta}{k}$$

e, sendo I o conjunto finito união dos I_β, com $\beta\in A$, obtemos, tendo em conta mais uma vez a associatividade finita em IV.1.12 e as propriedades de monotonia dos somatórios,

$$\begin{aligned}\sum_{\beta\in A}\Big(\sum_{j\in J_\beta} x_j\Big) &\le \sum_{\beta\in A}\Big(\Big(\sum_{j\in I_\beta} x_j\Big) + \frac{\delta}{k}\Big) = \Big(\sum_{\beta\in A}\Big(\sum_{j\in I_\beta} x_j\Big)\Big) + \Big(\sum_{\beta\in A}\frac{\delta}{k}\Big) = \\ &= \Big(\sum_{j\in I} x_j\Big) + \delta \le \Big(\sum_{j\in J} x_j\Big) + \delta < \sum_{\beta\in A}\Big(\sum_{j\in J_\beta} x_j\Big),\end{aligned}$$

o que é o absurdo procurado. □

Tal como acontecia no caso das somas finitas, a propriedade associativa tem algumas consequência triviais que é útil explicitar.

IV.2.9 **(Propriedade de Fubini para somatórios)** Sejam J e K dois conjuntos, finitos ou infinitos, de índices e $(x_{j,k})_{(j,k)\in J\times K}$ uma família de números reais com $x_{j,k}\ge 0$. Tem-se então:

1a) Se para algum $j\in J$ for $\sum_{k\in K} x_{j,k} = +\infty$ então $\sum_{(j,k)\in J\times K} x_{j,k} = +\infty$.

1b) Se para todo o $j\in J$ for $\sum_{k\in K} x_{j,k} < +\infty$ então

$$\sum_{j\in J}\Big(\sum_{k\in K} x_{j,k}\Big) = \sum_{(j,k)\in J\times K} x_{j,k}.$$

2a) Se para algum $k\in K$ for $\sum\limits_{j\in J} x_{j,k}=+\infty$ então $\sum\limits_{(j,k)\in J\times K} x_{j,k}=+\infty$.

2b) Se para todo o $k\in K$ for $\sum\limits_{j\in J} x_{j,k}<+\infty$ então

$$\sum_{k\in K}\Big(\sum_{j\in J} x_{j,k}\Big)=\sum_{(j,k)\in J\times K} x_{j,k}.$$ [210]

Dem: Começamos por reparar que, por mudança no conjunto de índices, podemos concluir que para cada $j\in J$ fixado tem-se

$$\sum_{k\in K} x_{j,k}=\sum_{(j',k)\in\{j\}\times K} x_{j',k}.$$

Reparando que $J\times K$ é a união disjunta dos subconjuntos $\{j\}\times K$ com $j\in J$ e aplicando a propriedade associativa em IV.2.8 podemos assim concluir que se para algum $j\in J$ for $\sum\limits_{k\in K} x_{j,k}=+\infty$ vem

$$\sum_{(j,k)\in J\times K} x_{j,k}=\sum_{(j',k)\in J\times K} x_{j',k}=+\infty$$

e que, caso contrário,

$$\sum_{j\in J}\Big(\sum_{k\in K} x_{j,k}\Big)=\sum_{j\in J}\Big(\sum_{(j',k)\in\{j\}\times K} x_{j',k}\Big)=\sum_{(j',k)\in J\times K} x_{j',k}=\sum_{(j,k)\in J\times K} x_{j,k}.$$

A justificação das afirmações em 2a) e 2b) é análoga, utilizando agora o facto de $J\times K$ ser a união disjunta dos conjuntos $J\times\{k\}$ com $k\in K$. $\square$

IV.2.10 **(Corolário — soma de dois somatórios)** Sejam J um conjunto, finito ou infinito, de índices e $(x_j)_{j\in J}$ e $(y_j)_{j\in J}$ duas famílias de números reais positivos. Tem-se então:

a) Se $\sum\limits_{j\in J} x_j=+\infty$ ou $\sum\limits_{j\in J} y_j=+\infty$, então $\sum\limits_{j\in J}(x_j+y_j)=+\infty$.

b) Se $\sum\limits_{j\in J} x_j<+\infty$ e $\sum\limits_{j\in J} y_j<+\infty$, então

$$\sum_{j\in J}(x_j+y_j)=\Big(\sum_{j\in J} x_j\Big)+\Big(\sum_{j\in J} y_j\Big).$$

Dem: Como no caso finito, temos uma consequência da propriedade de Fubini em IV.2.9. Com efeito, considerando um novo conjunto de índices $K=\{1,2\}$ e uma família de elementos $z_{j,k}$, com $(j,k)\in J\times K$, definida por $z_{j,1}=x_j$ e $z_{j,2}=y_j$, tem-se

[210] Analogamente ao referido na nota de pé de página 209, se se fizesse a convenção de permitir parcelas iguais a $+\infty$ nos somatórios, considerando a sua soma, quando elas existam, igual a $+\infty$, poder-se-ia dispensar as alíneas 1a) e 2a) e dizer que as fórmulas em 1b) e 2b) são válidas sem restrições.

$$\sum_{j\in J} x_j = \sum_{j\in J} z_{j,1}, \quad \sum_{j\in J} y_j = \sum_{j\in J} z_{j,2},$$

$$\sum_{j\in J} (x_j + y_j) = \sum_{j\in J} \Big(\sum_{k\in K} z_{j,k}\Big),$$

bastando então reparar que, no caso em que os dois somatórios dos segundo membro da igualdade destacada no enunciado são finitos, a propriedade de Fubini implica que ambos os membros dessa igualdade são iguais a

$$\sum_{(j,k)\in J\times K} z_{j,k}. \qquad \square$$

IV.2.11 **(Corolário — diferença de dois somatórios)** Sejam J um conjunto, finito ou infinito, de índices e $(x_j)_{j\in J}$ e $(y_j)_{j\in J}$ duas famílias de números reais positivos tais que $y_j \le x_j$ para cada j e que $\sum\limits_{j\in J} x_j < +\infty$. Tem-se então também $\sum\limits_{j\in J} y_j < +\infty$ e

$$\sum_{j\in J} (x_j - y_j) = \Big(\sum_{j\in J} x_j\Big) - \Big(\sum_{j\in J} y_j\Big).$$

Em consequência se existir j_0 tal que $y_{j_0} < x_{j_0}$ tem-se mesmo

$$\sum_{j\in J} y_j < \sum_{j\in J} x_j.$$

Dem: Considerando também a família de números positivos $(x_j - y_j)_{j\in J}$, o facto de se ter, para cada j, $x_j = (x_j - y_j) + y_j$ implica, pelo resultado precedente, que

$$\sum_{j\in J} x_j = \Big(\sum_{j\in J} (x_j - y_j)\Big) + \Big(\sum_{j\in J} y_j\Big),$$

com as parcelas no segundo membro ambas finitas, o que é equivalente à igualdade destacada no enunciado. No caso em que existe j_0 tal que $y_{j_0} < x_{j_0}$, donde $x_{j_0} - y_{j_0} > 0$, já sabemos que $\sum\limits_{j\in J} (x_j - y_j) > 0$ e portanto tem-se mesmo $\sum\limits_{j\in J} y_j < \sum\limits_{j\in J} x_j$. $\square$

Outra consequência trivial da propriedade associativa permite-nos transformar somas parciais correspondentes a partes do conjunto de índices em somas totais de famílias convenientemente modificadas.

IV.2.12 **(Somas parciais e a função indicatriz)** Sejam J um conjunto de índices e $(x_j)_{j\in J}$ uma família de reais $x_j \geq 0$. Seja $J' \subset J$ e consideremos a *função indicatriz* $\mathbb{I}_{J'}\colon J \to \{0,1\}$, definida por

$$\mathbb{I}_{J'}(j) = \begin{cases} 1, & \text{se } j \in J' \\ 0, & \text{se } j \notin J' \end{cases}.$$

Tem-se então

$$\sum_{j\in J'} x_j = \sum_{j\in J} (x_j \times \mathbb{I}_{J'}(j)).$$

Dem: Reparando que J é a união disjunta dos subconjuntos J' e $J \setminus J'$ onde $x_j \times \mathbb{I}_{J'}(j) = x_j$ para cada $j \in J'$ e $x_j \times \mathbb{I}_{J'}(j) = 0$ para cada $j \in J \setminus J'$, e portanto $\sum\limits_{j\in J} (x_j \times \mathbb{I}_{J'}(j)) = 0$, a igualdade enunciada resulta da alínea a) de IV.2.8 no caso em que o primeiro membro é $+\infty$ e da alínea b) do mesmo resultado no caso em que este é finito. □

IV.2.13 **(Distributividade)** Sejam J um conjunto, finito ou infinito, de índices, $(x_j)_{j\in J}$ uma família de números reais positivos com $\sum\limits_{j\in J} x_j < +\infty$ e $a \geq 0$ em $\mathbb{R}$. Tem-se então:

$$a \times \sum_{j\in J} x_j = \sum_{j\in J} (a \times x_j).$$

Dem: Para cada parte finita I de J, tem-se, pela distributividade finita referida em IV.1.9,

$$\sum_{j\in I} (a \times x_j) = a \times \Big(\sum_{j\in I} x_j\Big) \leq a \times \Big(\sum_{j\in J} x_j\Big),$$

pelo que, tendo em conta a definição da soma indexada em J como um supremo das somas parciais finitas, tem-se

$$\sum_{j\in J} (a \times x_j) \leq a \times \Big(\sum_{j\in J} x_j\Big).$$

Resta-nos mostrar que se tem também

$$a \times \Big(\sum_{j\in J} x_j\Big) \leq \sum_{j\in J} (a \times x_j),$$

desigualdade que é verdadeira, por o primeiro membro ser igual a 0, no caso em que $a = 0$. Resta-nos verificar esta desigualdade no caso em que $a > 0$. Ora, aplicando a desigualdade já demonstrada com $\frac{1}{a}$ no lugar de a e $a \times x_j$ no lugar de x_j, obtemos

$$\sum_{j\in J} x_j = \sum_{j\in J} (\frac{1}{a} \times a \times x_j) \leq \frac{1}{a} \times \Big(\sum_{j\in J} (a \times x_j)\Big)$$

e multiplicando ambos os membros desta desigualdade por a, obtemos

$$a \times \Big(\sum_{j\in J} x_j\Big) \leq \sum_{j\in J} (a \times x_j),$$

como queríamos. □

IV.2.14 **(Produto de dois somatórios)** Sejam $(x_j)_{j\in J}$ e $(y_k)_{k\in K}$ duas famílias, finitas ou infinitas, de elementos de reais positivos tais que $\sum\limits_{j\in J} x_j < +\infty$ e $\sum\limits_{k\in K} y_k < +\infty$. Tem-se então

$$\Big(\sum_{j\in J} x_j\Big) \times \Big(\sum_{k\in K} y_k\Big) = \sum_{(j,k)\in J\times K} (x_j \times y_k).$$

Dem: Tendo em conta IV.2.9 e IV.2.13, vem

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{j\in J} x_j\Big) \times \Big(\sum_{k\in K} y_k\Big) &= \sum_{j\in J} \Big(x_j \times \sum_{k\in K} y_k\Big) = \sum_{j\in J} \Big(\sum_{k\in K} (x_j \times y_k)\Big) = \\ &= \sum_{(j,k)\in J\times K} (x_j \times y_k).\end{aligned}$$

□

O nosso próximo objetivo nesta secção é examinar o que se passa quando, em vez de uma família de reais positivos, tivermos uma família de funções com um mesmo domínio e com $[0,+\infty[$ como codomínio. Podemos então somar para cada ponto do domínio o valores das funções nesse ponto obtendo assim uma nova função com o mesmo domínio e com valores em $[0,+\infty]$ (a função soma) e, no caso em que esta admita $[0,+\infty[$ como codomínio, será útil estudar os limites num ponto da função soma, relacionados com os limites no mesmo ponto das funções parcelas, também supostos finitos. É o que faremos a partir de agora limitando-nos nesta secção ao caso particular em que o domínio é $\mathbb{N}$ e os limites são considerados em $+\infty$ (as funções são sucessões).

IV.2.15 **(Limites de sucessões crescentes e somatórios telescópicos)** Seja $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão crescente de reais em [0,$+\infty$[. Pode então considerar-se uma nova sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de reais positivos definida por

$$u_1 = v_1, \quad u_n = v_n - v_{n-1} \text{ se } n \geq 2,$$

e tem-se então

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

costumando-se dizer que o segundo membro é o *somatório telescópico* associado à sucessão de partida.

Dem: A soma no segundo membro é o limite da sucessão das somas parciais $S_n = \sum_{p=1}^{n} u_p$ pelo que tudo o que temos que reparar é que se tem $S_n = v_n$ para cada n o que se pode verificar muito facilmente por indução ou, alternativamente, de forma mais intuitiva mas menos precisa (e que explica a razão da palavra "telescópica"[211]) escrevendo

$$S_n = v_1 + (v_2 - v_1) + (v_3 - v_2) + \cdots + (v_n - v_{n-1}). \qquad \square$$

IV.2.16 **(Segundo teorema da convergência monótona)** Sejam J um conjunto, finito ou infinito, de índices e, para cada $j \in J$, $f_j\colon \mathbb{N} \to [0,+\infty[$ uma sucessão crescente de reais positivos (para a qual, para melhor clareza, estamos a utilizar uma notação funcional[212]). Suponhamos que, para cada $j \in J$,

$$x_j = \lim_{n\to+\infty} f_j(n) < +\infty$$

e que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) = \sum_{j\in J} f_j(n) < +\infty.$$

Tem-se então que a sucessão $f\colon \mathbb{N} \to [0,+\infty[$ assim definida é crescente e

$$\lim_{n\to+\infty} f(n) = \sum_{j\in J} x_j,$$

ou seja, é válida a "passagem ao limite"

$$\lim_{n\to+\infty} \Big(\sum_{j\in J} f_j(n)\Big) = \sum_{j\in J} \Big(\lim_{n\to+\infty} f_j(n)\Big).$$

Dem: O facto de a sucessão f ser crescente é uma consequência direta da propriedade de monotonia na alínea a) de IV.2.5. Tendo em conta IV.2.15,

[211]De facto, a associação aos telescópios não é a mais correta. Devia melhor pensar-se nas lunetas, aparelhos para auxiliar a visão de objetos distantes que costumam ser divididos em segmentos tubulares que, depois de utilizados, podem ser compactados por inserção de cada segmento no seguinte.

[212]Os primeiros termos da sucessão f_j são assim notados $f_j(1)$, $f_j(2)$, $f_j(3)$… em vez de, como é mais habitual para as sucessões, $f_{j,1}$, $f_{j,2}$, $f_{j,3}$… tentando evitar a confusão que poderia resultar dos duplos índices.

cada x_j também pode ser calculado pela soma telescópica

$$x_j = \sum_{n\in\mathbb{N}} g_j(n),$$

onde as sucessões $g_j\colon \mathbb{N} \to [0, +\infty[$ estão definidas por $g_j(1) = f_j(1)$ e, para cada $n \geq 2$, $g_j(n) = f_j(n) - f_j(n-1)$ e daqui deduzimos, tendo em conta IV.2.9, que

$$\textbf{(1)} \qquad \sum_{j\in J} x_j = \sum_{j\in J}\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} g_j(n)\Big) = \sum_{(j,n)\in J\times\mathbb{N}} g_j(n).$$

Por outro lado, podemos definir, para cada $n \in \mathbb{N}$, $g(n) = \sum\limits_{j\in J} g_j(n)$, vindo

$$g(1) = \sum_{j\in J} g_j(1) = \sum_{j\in J} f_j(1) = f(1) < +\infty$$

e, tendo em conta IV.2.11, para cada $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} g(n) &= \sum_{j\in J} g_j(n) = \Big(\sum_{j\in J} f_j(n)\Big) - \Big(\sum_{j\in J} f_j(n-1)\Big) = \\ &= f(n) - f(n-1) < +\infty \end{aligned}$$

e portanto, mais uma vez por IV.2.9 e IV.2.15,

$$\textbf{(2)} \qquad \lim_{n\to+\infty} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} g(n) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{j\in J} g_j(n)\Big) = \sum_{(j,n)\in J\times\mathbb{N}} g_j(n).$$

Comparando as igualdades (1) e (2) obtemos assim a igualdade

$$\lim_{n\to+\infty} f(n) = \sum_{j\in J} x_j. \qquad \square$$

O nosso próximo passo é tentar encontrar outra situação em que, sem a exigência de partirmos de sucessões crescentes $f\colon \mathbb{N} \to [0, +\infty[$ seja ainda válida a passagem ao limite referida no resultado precedente. Note-se que, tendo em conta o exercício IV.2.7 adiante, a hipótese de monotonia não pode ser simplesmente abandonada, sendo necessário encontrar outra que a possa substituir. É isso que faremos em seguida começando por estabelecer um lema que mostra que, na ausência de uma hipótese que substitua a monotonia vale ainda “metade” da condição de convergência.

IV.2.17 **(Lema de Fatou)** Sejam J um conjunto, finito ou infinito, de índices e, para cada $j \in J$, $f_j\colon \mathbb{N} \to [0, +\infty[$ uma sucessão de reais positivos. Suponhamos que, para cada $j \in J$, existe o limite

$$x_j = \lim_{n\to+\infty} f_j(n) < +\infty$$

e seja, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) = \sum_{j\in J} f_j(n) \in [0, +\infty].$$

Qualquer que seja o real $\ell < \sum\limits_{j\in J} x_j$ existe então $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $n \geq n_0$, se tenha $f(n) > \ell$.

Dem: Seja, para cada $j \in J$, $g_j\colon \mathbb{N} \to [0, +\infty[$ a sucessão de reais positivos definida por

$$g_j(n) = \inf\{f_j(p)\}_{p\geq n} = \inf\{f_j(n), f_j(n+1), f_j(n+2)\ldots\}.$$

Para cada $j \in J$, a sucessão g_j é crescente ($g_j(n+1)$ é o ínfimo de um conjunto contido naquele cujo ínfimo define $g_j(n)$) e tem-se $g_j(n) \leq f_j(n)$ e, como vamos ver, tem-se ainda

$$x_j = \lim_{n\to+\infty} g_j(n).$$ [213]

Ora, dado $\delta > 0$ arbitrário, podemos considerar $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq n_1$,

$$f_j(n) \in V_{\frac{\delta}{2}}(x_j) =]x_j - \frac{\delta}{2}, x_j + \frac{\delta}{2}[$$

e então, lembrando que o ínfimo de um conjunto não vazio é aderente a esse conjunto (cf. I.3.18), concluímos que, para cada $n \geq n_1$,

$$g_j(n) \in [x_j - \frac{\delta}{2}, x_j + \frac{\delta}{2}] \subset V_\delta(x_j).$$

Reparemos agora que, se, para um certo $n_0 \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{j\in J} g_j(n_0) = +\infty$, então, para cada $n \geq n_0$, por ser $f_j(n) \geq g_j(n_0)$, vem

$$f(n) = \sum_{j\in J} f_j(n) \geq \sum_{j\in J} g_j(n_0) = +\infty > \ell.$$

Resta-nos examinar o caso em que $\sum\limits_{j\in J} g_j(n) < +\infty$ para todo o n, caso em que podemos aplicar o segundo teorema da convergência monótona às sucessões crescentes $g_j\colon \mathbb{N} \to [0, +\infty[$ para concluir que

[213] Quem tiver presente o estudo dos sublimites de funções e sucessões, feito na secção I.6, poderá dispensar a explicação que vamos dar, uma vez que, como se verificou em I.6.10, o limite da sucessão crescente g_j é o sublimite mínimo da sucessão f_j a qual, por ter limite x_j, tem este real como único sublimite.

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\sum_{j\in J} g_j(n)\Big) = \sum_{j\in J} x_j$$

e portanto, considerando $\delta > 0$ tal que a vizinhança $V_\delta(\sum\limits_{j\in J} x_j)$ tenha todos os elementos maiores que ℓ (cf. a propriedade de Haudorff em I.3.13), deduzimos a existência de $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$

$$\sum_{j\in J} g_j(n) \in V_\delta(\sum_{j\in J} x_j)$$

e portanto, for ser $f_j(n) \geq g_j(n)$,

$$f(n) = \sum_{j\in J} f_j(n) \geq \sum_{j\in J} g_j(n) > \ell. \qquad \square$$

IV.2.18 **(Teorema da convergência dominada)** Sejam J um conjunto, finito ou infinito, de índices e $(y_j)_{j\in J}$ uma família de reais positivos com $\sum\limits_{j\in J} y_j < +\infty$ (a *família dominadora*). Consideremos, para cada $j \in J$, uma sucessão $f_j\colon \mathbb{N} \to [0, +\infty[$ admitindo limite finito

$$x_j = \lim_{n\to+\infty} f_j(n)$$

e tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_j(n) \leq y_j$ (a *condição de dominação*). Para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se então

$$f(n) = \sum_{j\in J} f_j(n) < +\infty$$

e tem-se

$$\lim_{n\to+\infty} f(n) = \sum_{j\in J} x_j < +\infty,$$

ou seja, é válida a "passagem ao limite"

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\sum_{j\in J} f_j(n)\Big) = \sum_{j\in J}\Big(\lim_{n\to+\infty} f_j(n)\Big) < +\infty.$$

Dem: Comecemos por notar que as desigualdades $f_j(n) \leq y_j$ permitem definir sucessões $\widehat{f}_j\colon \mathbb{N} \to [0, +\infty[$ por $\widehat{f}_j(n) = y_j - f_j(n)$ com limites finitos

$$\widehat{x}_j = \lim_{n\to+\infty} \widehat{f}_j(n) = y_j - x_j,$$

tendo-se em particular $x_j \leq y_j$ e $\widehat{x}_j \leq y_j$, donde

$$\sum_{j\in J} x_j \leq \sum_{j\in J} y_j < +\infty, \quad \sum_{j\in J} \widehat{x}_j \leq \sum_{j\in J} y_j < +\infty$$

e

$$\sum_{j\in J} \widehat{x}_j = \Big(\sum_{j\in J} y_j\Big) - \Big(\sum_{j\in J} x_j\Big).$$

As desigualdades $f_j(n) \leq y_j$ implicam que

$$f(n) = \sum_{j\in J} f_j(n) \leq \sum_{j\in J} y_j < +\infty$$

e portanto

$$\widehat{f}(n) = \sum_{j\in J} \widehat{f}_j(n) = \Big(\sum_{j\in J} y_j\Big) - \Big(\sum_{j\in J} f_j(n)\Big) = \Big(\sum_{j\in J} y_j\Big) - f(n).$$

Seja $\delta > 0$ arbitrário. Aplicando o lema de Fatou às sucessões f_j e às sucessões $\widehat{f}_j$, permite considerar $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que para cada $n \geq n_1$

$$f(n) > \Big(\sum_{j\in J} x_j\Big) - \delta$$

e para cada $n \geq n_2$

$$\Big(\sum_{j\in J} y_j\Big) - f(n) = \widehat{f}(n) > \Big(\sum_{j\in J} \widehat{x}_j\Big) - \delta = \Big(\sum_{j\in J} y_j\Big) - \Big(\sum_{j\in J} x_j\Big) - \delta,$$

e portanto

$$f(n) < \Big(\sum_{j\in J} x_j\Big) + \delta.$$

Sendo n_0 o máximo entre n_1 e n_2, concluímos que, para cada $n \geq n_0$, $f(n)$ pertence à vizinhança $V_\delta\Big(\sum_{j\in J} x_j\Big)$ o que mostra que a sucessão $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge efetivamente para $\sum_{j\in J} x_j$. □

Exercícios

Ex IV.2.1 Lembremos a notação $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, para o conjunto dos inteiros positivos. Seja $0 \leq x < 1$. Lembrando a fórmula para a soma dos termos de uma série geométrica (cf. III.4.35), calcular de duas maneiras distintas o somatório

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0} x^{p+q}$$

para deduzir que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} (n+1)x^n = \Big(\frac{1}{1-x}\Big)^2.$$

Ex IV.2.2 Determinar o valor do somatório

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|n|}}.$$

Ex IV.2.3 **(Convergência das séries de Dirichlet)** Seja $\alpha > 1$ um número real. Verificar que se tem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \le \frac{2^\alpha}{2^\alpha - 2},$$

em particular que a série no primeiro membro (a *série de Dirichlet* associada a α) é convergente. Note-se que para a soma desta série é usada a notação $\zeta(\alpha)$:

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha},$$

dizendo-se que a função $\zeta\colon]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ assim definida é a *função zeta de Riemann*.[214]

Sugestão: Reparar que, para cada $k \ge 3$, a soma parcial

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^\alpha}$$

verifica

$$S_k \le 1 + \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{(2p)^\alpha} + \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{(2p+1)^\alpha} \le 1 + \frac{1}{2^\alpha} S_k + \frac{1}{2^\alpha} S_k.$$

Ex IV.2.4 **(Prova alternativa da divergência da série harmónica)** Mostrar por absurdo que se tem $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} = +\infty$ reparando que, se esta soma tivesse um

[214]De facto trata-se de uma restrição da função zeta de Riemann, esta última podendo ser definida num domínio maior por um processo diferente.

valor finito, viria

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}=\sum_{n\text{ par}}\frac{1}{n}+\sum_{n\text{ ímpar}}\frac{1}{n}=\sum_{p\in\mathbb{N}}\frac{1}{2p}+\sum_{p\in\mathbb{N}}\frac{1}{2p-1}>$$
$$>\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}.$$

Ex IV.2.5 Seja $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão crescente de reais positivos definida por $v_n=1-\frac{1}{n+1}$. Verificar que as parcelas u_n do somatório telescópico associado (cf. IV.2.15) estão definidas por

$$u_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}.$$

Deduzir que

$$1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\geq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$$

e concluir uma majoração para a soma da série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ que coincide com a obtida no exercício IV.2.3.

Ex IV.2.6 Verificar que a conclusão da alínea b) do primeiro teorema da convergência monótona IV.2.6 (a parte menos trivial desse resultado) pode ser obtida como consequência do segundo teorema da convergência monótona IV.2.16 por utilização das funções indicatrizes dos subconjuntos de índices envolvidos.

Ex IV.2.7 Consideremos $\mathbb{N}$ como conjunto de índices e, para cada $p\in\mathbb{N}$, seja $f_p\colon\mathbb{N}\to[0,+\infty[$ a sucessão definida por

$$f_p(n)=\begin{cases}1, & \text{se } n=p\\ 0, & \text{se } n\neq p\end{cases}$$

(a função indicatriz do conjunto $\{p\}$). Verificar que, para cada índice $p\in\mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to+\infty}f_p(n)=0$$

e que, para cada $n\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{p\in\mathbb{N}}f_p(n)=1$$

e concluir, em particular que

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\sum_{p\in\mathbb{N}}f_p(n)\Big)\neq\sum_{p\in\mathbb{N}}\Big(\lim_{n\to+\infty}f_p(n)\Big).$$

Por que razão não se pode aplicar neste caso o segundo teorema da convergência monótona nem o teorema da convergência dominada?

Ex IV.2.8 **(Para quem conheça a noção de conjunto numerável e as propriedades básicas desta)** Seja $(x_j)_{j\in J}$ uma família de números reais $x_j \geq 0$ tal que $\sum\limits_{j\in J} x_j < +\infty$. Sendo $J' \subset J$ o conjunto dos índices j para os quais $x_j > 0$, mostrar que J' é finito ou numerável. **Sugestão:** Mostrar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto J_n dos índices j tais que $x_j \geq \frac{1}{n}$ é finito.

Ex IV.2.9 Seja, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{p}{n}}}{2^p}.$$

Verificar que se tem $x_n < +\infty$ e que a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente e com $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

Ex IV.2.10 **(Nova prova da divergência da série harmónica)** Para cada $p \in \mathbb{N}$, seja $A_p \subset \mathbb{N}$ o conjunto com 2^p elementos,

$$A_p = \{n \in \mathbb{N} \mid 2^p \leq n < 2^{p+1}\},$$

e consideremos a sua função indicatriz $\mathbb{I}_{A_p}\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$ (cf. IV.2.12). Verificar que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\,\mathbb{I}_{A_p}(n) = \sum_{n\in A_p} \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2}$$

e que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{p\to+\infty} \frac{1}{n}\,\mathbb{I}_{A_p}(n) = 0$ e deduzir daqui, tendo em conta o teorema da convergência dominada, que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} = +\infty$.

Ex IV.2.11 Tendo em conta o facto de se ter

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = +\infty,$$

verificar que, para as seguintes somas parciais,

$$\sum_{n \text{ par}} \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots = +\infty,$$
$$\sum_{n \text{ ímpar}} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots = +\infty.$$

Sugestão: Reparar que a segunda soma é maior ou igual à primeira e que, multiplicando por 2 os termos da primeira, obtém-se os trmos da série harmónica.

Ex IV.2.12 Para cada par $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ seja $x_{m,n}\in[0,+\infty[$ e suponhamos que, para cada n, $\sum\limits_{m=1}^{\infty} x_{m,n}<+\infty$. Verificar que se tem então

$$\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\sum_{n=1}^{m} x_{m,n}\Big)=\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\sum_{m=n}^{\infty} x_{m,n}\Big),$$

onde com a notação "tipo série" $\sum\limits_{m=n}^{\infty} x_{m,n}$ estamos naturalmente a significar o somatório com o índice m a variar no conjunto $\{n,n+1,n+2\dots\}$.
Sugestão: Reparar na igualdade, envolvendo funções indicatrizes,

$$\mathbb{I}_{\{1,2,\dots,m\}}(n)=\mathbb{I}_{\{n,n+1,\dots\}}(m),$$

e aplicar o teorema de Fubini em IV.2.9 à família indexada em $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ constituída pelos $x_{m,n}\times\mathbb{I}_{\{1,2,\dots,m\}}(n)$.

Ex IV.2.13 Lembrar que, como se viu no exercício IV.2.3, a função zeta de Riemann $\zeta\colon]1,+\infty[\to]0,+\infty[$ está definida por

$$\zeta(\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha},$$

Verificar que esta função é estritamente decrescente e utilizar o teorema da convergência dominada para mostrar que

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\zeta(\alpha)=1.$$

Ex IV.2.14 **a)** Verificar que, para cada $p\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,e^{-\frac{n}{p}}<+\infty.$$

Sugestão: Calcular a soma $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n}{p}}$, reparando que se trata de uma série geométrica (cf. III.4.35) multiplicada por uma constante.
b) Utilizar o segundo teorema da convergência monótona para mostrar que se tem

$$\lim_{p\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,e^{-\frac{n}{p}}=+\infty.$$

§3. Somatórios arbitrários de números reais.

IV.3.1 **(Famílias somáveis de números reais)** Se J é um conjunto finito ou infinito de índices dizemos que uma família $(x_j)_{j\in J}$ de números reais é uma *família somável* se se tiver $\sum\limits_{j\in J}|x_j| < +\infty$. Para uma tal família podemos então considerar famílias associadas de números reais (x_j^+) e (x_j^-) com

(1) $$0 \le x_j^+ \le |x_j|, \quad 0 \le x_j^- \le |x_j|, \quad x_j = x_j^+ - x_j^-,$$

definidas por

(2) $$x_j^+ = \begin{cases} x_j, & \text{se } x_j \ge 0 \\ 0, & \text{se } x_j < 0 \end{cases}, \quad x_j^- = \begin{cases} 0, & \text{se } x_j \ge 0 \\ -x_j, & \text{se } x_j < 0 \end{cases}.$$

Tem-se então

$$\sum_{j\in J} x_j^+ \le \sum_{j\in J}|x_j| < +\infty, \quad \sum_{j\in J} x_j^- \le \sum_{j\in J}|x_j| < +\infty,$$

o que nos permite definir o somatório

$$\sum_{j\in J} x_j \in \mathbb{R}, \quad \sum_{j\in J} x_j = \Big(\sum_{j\in J} x_j^+\Big) - \Big(\sum_{j\in J} x_j^-\Big).$$

Repare-se que no caso em que o conjunto de índices J é finito esta soma coincide com a que examinámos na secção IV.1, tendo em conta a terceira igualdade em (1) e as propriedades básicas das somas finitas (cf. IV.1.9 e IV.1.14).

Repare-se também que no caso em que o conjunto de índices é arbitrário mas $x_j \ge 0$ para cada j, esta soma coincide com a que definimos na secção IV.2, uma vez que para cada j vem $x_j^+ = x_j$ e $x_j^- = 0$.

IV.3.2 **(Condição necessária para a somabilidade)** Seja $(x_j)_{j\in J}$ uma família somável de números reais. Para cada $\delta > 0$ existe então uma parte finita $I \subset J$ tal que $|x_j| < \delta$ para cada $j \in J \setminus I$. [215]

Dem: Tendo em conta a definição da soma $\sum\limits_{j\in J} |x_j| < +\infty$ como um supremo, podemos considerar uma parte finita $I \subset J$ tal que

$$\sum_{j\in I} |x_j| > \sum_{j\in J} |x_j| - \delta,$$

[215] Comparar com o resultado III.4.33, sobre as séries convergentes.

e portanto, por ser $\sum\limits_{j\in J}|x_j| = \sum\limits_{j\in I}|x_j| + \sum\limits_{j\in J\setminus I}|x_j|$,

$$\sum_{j\in J\setminus I}|x_j| = \sum_{j\in J}|x_j| - \sum_{j\in I}|x_j| < \delta.$$

Para cada $j_0 \in J \setminus I$ tem-se então

$$|x_{j_0}| \le \sum_{j\in J\setminus I}|x_j| < \delta. \qquad \square$$

IV.3.3 Se $(x_j)_{j\in J}$ é uma família somável de números reais, então

$$\left|\sum_{j\in J} x_j\right| \le \sum_{j\in J}|x_j|.$$

Dem: Tem-se, uma vez que $x_j^+ \le |x_j|$,

$$\sum_{j\in J} x_j = \Big(\sum_{j\in J} x_j^+\Big) - \Big(\sum_{j\in J} x_j^-\Big) \le \sum_{j\in J} x_j^+ \le \sum_{j\in J}|x_j|$$

e, uma vez que $x_j^- \le |x_j|$,

$$-\sum_{j\in J} x_j = \Big(\sum_{j\in J} x_j^-\Big) - \Big(\sum_{j\in J} x_j^+\Big) \le \sum_{j\in J} x_j^- \le \sum_{j\in J}|x_j|$$

pelo que, uma vez que $\left|\sum\limits_{j\in J} x_j\right|$ é um dos dois números reais $\sum\limits_{j\in J} x_j$ e $-\sum\limits_{j\in J} x_j$, concluímos a desigualdade do enunciado. $\square$

IV.3.4 **(Mudança no conjunto de índices)** Sejam J e K dois conjuntos de índices e $\varphi\colon K \to J$ uma função bijetiva. Dada uma família somável $(x_j)_{j\in J}$ de reais, vem também $\sum\limits_{k\in K}|x_{\varphi(k)}| = \sum\limits_{j\in J}|x_j| < +\infty$ e

$$\sum_{j\in J} x_j = \sum_{k\in K} x_{\varphi(k)}.$$

Dem: Temos uma consequência direta da definição e do correspondente resultado IV.2.3 sobre somatórios de números positivos. $\square$

O lema que examinamos em seguida vai servir para a demonstração da propriedade de aditividade dos somatórios.

IV.3.5 **(Lema)** Seja $(x_j)_{j\in J}$ uma família somável de números reais e sejam $(x'_j)_{j\in J}$ e (x''_j) duas família de reais positivos com $x_j = x'_j - x''_j$ para cada j e

$\sum_{j\in J} x'_j < +\infty$ e $\sum_{j\in J} x''_j < +\infty$. [216] Tem-se então

$$\sum_{j\in J} x_j = \Big(\sum_{j\in J} x'_j\Big) - \Big(\sum_{j\in J} x''_j\Big).$$

Dem: Considerando as famílias $(x_j^+)_{j\in J}$ e $(x_j^-)_{j\in J}$ utilizadas na definição da soma, do facto de se ter

$$x_j^+ - x_j^- = x_j = x'_j - x''_j$$

deduzimos que $x_j^+ + x''_j = x'_j + x_j^-$ e portanto, tendo em conta IV.2.10,

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{j\in J} x_j^+\Big) + \Big(\sum_{j\in J} x''_j\Big) &= \sum_{j\in J} (x_j^+ + x''_j) = \\ &= \sum_{j\in J} (x'_j + x_j^-) = \Big(\sum_{j\in J} x'_j\Big) + \Big(\sum_{j\in J} x_j^-\Big)\end{aligned}$$

donde

$$\sum_{j\in J} x_j = \Big(\sum_{j\in J} x_j^+\Big) - \Big(\sum_{j\in J} x_j^-\Big) = \Big(\sum_{j\in J} x'_j\Big) - \Big(\sum_{j\in J} x''_j\Big). \qquad \square$$

IV.3.6 **(Aditividade e distributividade)** Sejam $(x_j)_{j\in J}$ e $(y_j)_{j\in J}$ duas famílias somáveis de números reais e $a \in \mathbb{R}$. São então também somáveis as famílias $(x_j + y_j)_{j\in J}$ e $(ax_j)_{j\in J}$ e tem-se

$$\sum_{j\in J} (x_j + y_j) = \Big(\sum_{j\in J} x_j\Big) + \Big(\sum_{j\in J} y_j\Big),$$
$$\sum_{j\in J} ax_j = a\sum_{j\in J} x_j.$$

Em particular concluímos também que é somável a família $(x_j - y_j)_{j\in J}$ e que

$$\sum_{j\in J} (x_j - y_j) = \Big(\sum_{j\in J} x_j\Big) - \Big(\sum_{j\in J} y_j\Big).$$

Dem: O facto de termos famílias somáveis resulta de que

$$|x_j + y_j| \le |x_j| + |y_j|, \quad |ax_j| = |a||x_j|,$$

donde

[216] Estas condições são verificadas pelos x_j^+ e pelos x_j^- utilizados na definição do somatório.

$$\sum_{j\in J}|x_j+y_j| \le \sum_{j\in J}(|x_j|+|y_j|) = \Big(\sum_{j\in J}|x_j|\Big) + \Big(\sum_{j\in J}|y_j|\Big) < +\infty,$$
$$\sum_{j\in J}|ax_j| = \sum_{j\in J}|a||x_j| = |a|\sum_{j\in J}|x_j| < +\infty.$$

Reparamos agora que, usando as notações da definição em IV.3.1, as igualdades $x_j = x_j^+ - x_j^-$ e $y_j = y_j^+ - y_j^-$ implicam que

$$x_j + y_j = (x_j^+ + y_j^+) - (x_j^- + y_j^-),$$

com $x_j^+ + y_j^+ \geq 0$, $x_j^- + y_j^- \geq 0$ e

$$\sum_{j\in J}(x_j^+ + y_j^+) = \Big(\sum_{j\in J}x_j^+\Big) + \Big(\sum_{j\in J}y_j^+\Big) < +\infty,$$
$$\sum_{j\in J}(x_j^- + y_j^-) = \Big(\sum_{j\in J}x_j^-\Big) + \Big(\sum_{j\in J}y_j^-\Big) < +\infty,$$

pelo que, aplicando o lema IV.3.5[217],

$$\begin{aligned}\sum_{j\in J}(x_j+y_j) &= \Big(\sum_{j\in J}(x_j^+ + y_j^+)\Big) - \Big(\sum_{j\in J}(x_j^- + y_j^-)\Big) = \\ &= \Big(\Big(\sum_{j\in J}x_j^+\Big) - \Big(\sum_{j\in J}x_j^-\Big)\Big) + \Big(\Big(\sum_{j\in J}y_j^+\Big) - \Big(\sum_{j\in J}y_j^-\Big)\Big) = \\ &= \Big(\sum_{j\in J}x_j\Big) + \Big(\sum_{j\in J}y_j\Big).\end{aligned}$$

Analogamente, no caso em que $a \geq 0$, tem-se $ax_j = ax_j^+ - ax_j^-$ com $ax_j^+ \geq 0$, $ax_j^- \geq 0$ e

$$\sum_{j\in J}(ax_j^+) = a\sum_{j\in J}x_j^+ < +\infty, \quad \sum_{j\in J}(ax_j^-) = a\sum_{j\in J}x_j^- < +\infty$$

donde

$$\sum_{j\in J}ax_j = \Big(\sum_{j\in J}ax_j^+\Big) - \Big(\sum_{j\in J}ax_j^-\Big) = a\left(\Big(\sum_{j\in J}x_j^+\Big) - \Big(\sum_{j\in J}x_j^-\Big)\right) = a\sum_{j\in J}x_j$$

e, no caso em que $a < 0$, tem-se $ax_j = -ax_j^- - (-ax_j^+)$ com $-ax_j^- \geq 0$, $-ax_j^+ \geq 0$ e

[217] A necessidade de aplicar o lema vem de que nada nos diz que $x_j^+ + y_j^+$ tenha que ser a "parte positiva" de $x_j + y_j$ e analogamente para $x_j^- + y_j^-$. Isso certamente não acontece, por exemplo, no caso em que $x_j > 0$ e $y_j < 0$.

$$\sum_{j\in J}(-ax_j^-) = -a\sum_{j\in J}x_j^- < +\infty, \quad \sum_{j\in J}(-ax_j^+) = -a\sum_{j\in J}x_j^+ < +\infty$$

donde

$$\sum_{j\in J}ax_j = \Big(\sum_{j\in J}-ax_j^-\Big) - \Big(\sum_{j\in J}-ax_j^-\Big) =$$
$$= -a\left(\Big(\sum_{j\in J}x_j^-\Big) - \Big(\sum_{j\in J}x_j^+\Big)\right) = a\sum_{j\in J}x_j.$$

Por fim, as conclusões envolvendo a diferença de duas famílias somáveis resultam do que já estabelecemos se reparmos que a diferença de dois números é igual à soma do primeiro com o produto do segundo por -1. □

IV.3.7 **(Propriedade de monotonia)** Sejam $(x_j)_{j\in J}$ e $(y_j)_{j\in J}$ duas famílias somáveis de números reais com $y_j \le x_j$ para cada j. Tem-se então

$$\sum_{j\in J} y_j \le \sum_{j\in J} x_j,$$

tendo-se mesmo $\sum\limits_{j\in J} y_j < \sum\limits_{j\in J} x_j$ no caso em que exista um índice j_0 com $y_{j_0} < x_{j_0}$.[218]

Dem: Basta atender a que se tem $x_j = y_j + (x_j - y_j)$ e portanto

$$\sum_{j\in J} x_j = \Big(\sum_{j\in J} y_j\Big) + \Big(\sum_{j\in J}(x_j - y_j)\Big),$$

onde $x_j - y_j \ge 0$ e, no caso em que $y_{j_0} < x_{j_0}$, $x_{j_0} - y_{j_0} > 0$. □

IV.3.8 **(Somas totais e somas parciais)** Seja $(x_j)_{j\in J}$ uma família somável de números reais. Tem-se então:

a) Para cada $J' \subset J$ a família $(x_j)_{j\in J'}$ é também somável.

b) Se $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma *sucessão crescente de subconjuntos* de J (isto é, com $J_n \subset J_{n+1}$ para cada n) tal que $J = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} J_n$ então

$$\sum_{j\in J} x_j = \lim_{n\to+\infty}\Big(\sum_{j\in J_n} x_j\Big).$$

Dem: A conclusão de a) resulta de que, a família $(x_j)_{j\in J}$ sendo somável, tem-se

[218]Trata-se da propriedade que corresponde à enunciada na alínea a) de IV.2.5 no contexto dos números positivos. É claro que a propriedade correspondente à enunciada na alínea b) desse resultado não tem paralelo no contexto dos números reais arbitrários.

$$\sum_{j\in J'}|x_j| \le \sum_{j\in J}|x_j| < +\infty.$$

Quanto a b), nas notações da definição em IV.3.1, tem-se

$$\sum_{j\in J} x_j = \Big(\sum_{j\in J} x_j^+\Big) - \Big(\sum_{j\in J} x_j^-\Big)$$

onde, como vimos em IV.2.6

$$\sum_{j\in J} x_j^+ = \lim_{n\to+\infty}\Big(\sum_{j\in J_n} x_j^+\Big), \quad \sum_{j\in J} x_j^- = \lim_{n\to+\infty}\Big(\sum_{j\in J_n} x_j^-\Big)$$

e portanto

$$\sum_{j\in J} x_j = \lim_{n\to+\infty}\Big(\Big(\sum_{j\in J_n} x_j^+\Big) - \Big(\sum_{j\in J_n} x_j^-\Big)\Big) = \lim_{n\to+\infty}\Big(\sum_{j\in J_n} x_j\Big). \qquad \square$$

IV.3.9 **(Séries e famílias somáveis)** Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma família somável, indexada no conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. É então convergente a correspondente série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ e tem-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n.$$

Dem: Por definição de soma da série (cf. III.4.32), tem-se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = \lim\limits_{p\to+\infty} S_p$ onde os S_p são as somas parciais

$$S_p = \sum_{n=1}^{p} x_n = \sum_{n\in\{1,\ldots,p\}} x_n..$$

Uma vez que os subconjuntos $\{1,\ldots,p\}$ de $\mathbb{N}$ constituem uma sucessão crescente cuja união é $\mathbb{N}$, resulta de IV.3.8 que o limite da sucessão das somas parciais S_p é também igual a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$. $\square$

IV.3.10 **(Nota)** Ao contrário do que sucedia no contexto dos reais positivos, não estamos de modo nenhum a afirmar que, no contexto do números reais arbitrários e quando o conjunto dos índices é $\mathbb{N}$, a noção de família somável seja equivalente à de série convergente. O que o resultado precedente afirma é que, quando a família é somável, a soma da família coincide com a soma da série mas pode perfeitamente acontecer que para uma série convergente a correspondente família de termos não seja somável. Um exemplo típico desta situação é o da *série harmónica alternada* (cf. III.4.40) que verificámos ser convergente e com soma

$$\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{p+1}\,\frac{1}{p}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{p+1}\frac{1}{p}+\cdots=\ln(2);$$

No entanto a família dos termos desta série não é somável uma vez que a soma dos valores absolutos dos seus termos é

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p}+\cdots=+\infty.$$

Às séries que correspondem a famílias somáveis de números reais, isto é, àquelas cuja soma dos valores absolutos dos termos é finita, costuma-se dar o nome de *séries absolutamente convergentes*.
O que estamos a fazer nesta secção é assim desistir provisoriamente de considerar as séries que são convergentes mas não absolutamente convergentes ganhando com isso a possibilidade de trabalhar no contexto mais manejável das família somáveis onde, para além de termos mais liberdade no conjunto de índices, podemos utilizar propriedades como a mudança no conjunto de índices que não são válidas em geral.

Antes de prosseguirmos o estudo das somas de famílias somáveis, vamos examinar ainda um resultado que aplica o que temos estudado no contexto destas à construção de séries convergentes que não são necessariamente absolutamente convergentes

IV.3.11 **(Séries alternadas decrescentes)** Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sucessão decrescente (no sentido lato) de reais maiores ou iguais a 0. Então:
a) Para a família de números positivos $a_n - a_{n+1}$, com n ímpar, vem

$$\begin{aligned}0 \leq a_1-a_2 \leq \sum_{n\text{ ímpar}}(a_n-a_{n+1}) =\\ =(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+(a_5-a_6)+\cdots \leq a_1 < +\infty.\end{aligned}$$

b) No caso em que se tem, além das hipóteses acima, $a_n \to 0$, vem convergente a série

$$\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{p-1}a_p = a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots$$

(embora não necessariamente absolutamente convergente, como vimos no exemplo referido na nota IV.3.10), tendo-se

$$\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{p-1}a_p=\sum_{n\text{ ímpar}}(a_n-a_{n+1}),$$

e portanto

$$0 \le a_1 - a_2 \le \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p-1} a_p \le a_1.$$ [219]

Às séries deste tipo é usual dar o nome de *séries alternadas decrescentes*.

Dem: a) Considerando, para cada $p \ge 1$, o conjunto dos ímpares menores ou iguais a $2p-1$, obtemos uma sucessão crescente de conjuntos cuja união é o conjunto dos ímpares pelo que, tendo em conta IV.3.8, $\sum\limits_{n \text{ ímpar}} (a_n - a_{n+1})$ é o limite da sucessão que a p associa

$$S_p = \sum_{\substack{n \text{ ímpar} \\ n \le 2p-1}} (a_n - a_{n+1}).$$

A conclusão de a) resulta então de que, para cada p,

$$\begin{aligned} 0 \le a_1 - a_2 \le S_p &= (a_1 - a_2) + \cdots + (a_{2p-1} - a_{2p}) = \\ &= a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2p-2} - a_{2p-1}) - a_{2p} \le a_1. \end{aligned}$$

b) Notemos $\widehat{S}_n$ a soma parcial de ordem n da série alternada decrescente, portanto

$$\widehat{S}_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n.$$

Nas notações utilizadas na prova de a), tem-se, para cada $p \ge 1$, $\widehat{S}_{2p} = S_p$ e $\widehat{S}_{2p-1} = S_p + a_{2p}$ pelo que, por ser, por mudança de variáveis $a_{2p} \to 0$, vemos que as sucessões que a p associam $\widehat{S}_{2p}$ e $\widehat{S}_{2p\text{-}1}$ têm ambas a soma $\sum\limits_{n \text{ ímpar}} (a_n - a_{n+1})$ como limite, por outras palavras, mais uma vez por mudança de variáveis, as funções $(\widehat{S}_n)_{n \text{ par}}$ e $(\widehat{S}_n)_{n \text{ ímpar}}$ têm ambas aquela soma como limite o que, por I.5.8, implica que a sucessão $(\widehat{S}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tem ainda essa soma como limite. □

IV.3.12 **(Propriedade associativa geral)** Seja $(x_j)_{j \in J}$ uma família somável de números reais e suponhamos que o conjunto de índices J é uma união, finita ou infinita, de subconjuntos J_β disjuntos dois a dois, onde $\beta \in B$. Tem-se então:

$$\sum_{j \in J} x_j = \sum_{\beta \in B} \Big(\sum_{j \in J_\beta} x_j\Big),$$

onde estamos a afirmar, em particular, que cada somatório no segundo membro corresponde a uma família somável.

Dem: Consideremos as famílias de reais positivos $(x_j^+)_{j \in J}$ e $(x_j^-)_{j \in J}$

[219] Ver o exercício IV.3.3, no fim da secção, para desigualdades mais gerais, embora menos simples, que as enunciadas nestas duas alíneas.

referidas na definição do somatório em IV.3.1. Já sabemos que, para cada $\beta \in B$, a família $(x_j)_{j\in J_\beta}$ é somável, tendo-se, por definição,

$$\sum_{j\in J_\beta} x_j = \Big(\sum_{j\in J_\beta} x_j^+\Big) - \Big(\sum_{j\in J_\beta} x_j^-\Big).$$

Sabemos também que

$$\Big|\sum_{j\in J_\beta} x_j\Big| \le \sum_{j\in J_\beta} |x_j|$$

e, lembrando a associatividade no contexto positivo examinada em IV.2.8, vemos que

$$\sum_{\beta\in B}\Big|\sum_{j\in J_\beta} x_j\Big| \le \sum_{\beta\in B}\Big(\sum_{j\in J_\beta}|x_j|\Big) = \sum_{j\in J}|x_j| < +\infty,$$

ou seja a família que a β associa $\sum\limits_{j\in J_\beta} x_j$ é somável, e que

$$\sum_{\beta\in B}\Big(\sum_{j\in J_\beta} x_j^+\Big) = \sum_{j\in J} x_j^+ < +\infty,$$
$$\sum_{\beta\in B}\Big(\sum_{j\in J_\beta} x_j^-\Big) = \sum_{j\in J} x_j^- < +\infty,$$

pelo que, usando mais uma vez o lema IV.3.5, vem

$$\sum_{\beta\in B}\big(\sum_{j\in J_\beta} x_j\big) = \sum_{\beta\in B}\Big(\sum_{j\in J_\beta} x_j^+\Big) - \sum_{\beta\in B}\Big(\sum_{j\in J_\beta} x_j^-\Big) =$$
$$= \Big(\sum_{j\in J} x_j^+\Big) - \Big(\sum_{j\in J} x_j^-\Big) = \sum_{j\in J} x_j. \qquad \square$$

Repare-se que para a conclusão do resultado precedente é necessário fazer a hipótese de a família de todos os elementos envolvidos ser somável. Pode perfeitamente acontecer que o segundo membro faça sentido (isto é todos os somatórios correspondam a famílias somáveis) sem que o primeiro membro o faça. Um exemplo é a família indexada em $\mathbb{N}$ que a n associa $(-1)^n$: Esta família não é somável, uma vez que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \big|(-1)^n\big| = \sum_{n\in\mathbb{N}} 1 = +\infty,$$

e, no entanto, podemos considerar $\mathbb{N}$ como a união disjunta dos subconjuntos $J_p = \{2p-1, 2p\}$ com $p \in \mathbb{N}$ tendo-se $\sum\limits_{n\in J_p} (-1)^n = -1+1 = 0$ e portanto

$$\sum_{p\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{n\in J_p}(-1)^n\Big)=\sum_{p\in\mathbb{N}}0=0.$$

No entanto, no caso em que o conjunto de índices é uma união finita de subconjuntos, o que acabamos de referir já não pode suceder:

IV.3.13 **(Complemento no caso das uniões finitas)** No caso em que $J=\bigcup\limits_{\beta\in B}J_\beta$ com os J_β disjuntos dois a dois e B conjunto finito, dada uma família de números reais $(x_j)_{j\in J}$ tal que para cada $\beta\in B$ a família $(x_j)_{j\in J_\beta}$ seja somável, podemos concluir que $(x_j)_{j\in J}$ é somável e portanto, por IV.3.12,

$$\sum_{j\in J}x_j=\sum_{\beta\in B}\big(\sum_{j\in J_\beta}x_j\big).$$

Dem: Tendo em conta IV.2.8, vem

$$\sum_{j\in J}|x_j|=\sum_{\beta\in B}\Big(\sum_{j\in J_\beta}|x_j|\Big)<+\infty$$

(soma de uma família finita de números positivos). □

Tal como acontecia no contexto dos somatórios com parcelas positivas, a propriedade de associatividade admite várias consequências importantes.

IV.3.14 **(Propriedade de Fubini para somatórios)** Sejam J e K dois conjuntos, finitos ou infinitos, de índices e $(x_{j,k})_{(j,k)\in J\times K}$ uma família somável de números reais. Tem-se então

$$\sum_{j\in J}\big(\sum_{k\in K}x_{j,k}\big)=\sum_{(j,k)\in J\times K}x_{j,k}=\sum_{k\in K}\big(\sum_{j\in J}x_{j,k}\big),$$

onde todos os somatórios correspondem a famílias de números reais que são somáveis.

Dem: Tal como acontecia em IV.2.9, vamos ter uma consequência da propriedade associativa com o auxílio de mudanças convenientes nos conjuntos de índices: Começamos por reparar que, por mudança no conjunto de índices, podemos concluir que para cada $j\in J$ fixado tem-se

$$\sum_{k\in K}x_{j,k}=\sum_{(j',k)\in\{j\}\times K}x_{j',k}.$$

Reparando que $J\times K$ é a união disjunta dos subconjuntos $\{j\}\times K$ com $j\in J$ e aplicando a propriedade associativa em IV.3.12 podemos assim concluir que

$$\sum_{j\in J}\Big(\sum_{k\in K} x_{j,k}\Big) = \sum_{j\in J}\Big(\sum_{(j',k)\in\{j\}\times K} x_{j',k}\Big) = \sum_{(j',k)\in J\times K} x_{j',k} = \sum_{(j,k)\in J\times K} x_{j,k},$$

o que prova a primeira igualdade. A prova da segunda é análoga, utilizando agora o facto de $J \times K$ ser a união disjunta dos conjuntos $J \times \{k\}$ com $k \in K$. □

IV.3.15 **(Produto de dois somatórios)** Sejam $(x_j)_{j\in J}$ e $(y_k)_{k\in K}$ duas famílias somáveis de números reais. Tem-se

$$\Big(\sum_{j\in J} x_j\Big) \times \Big(\sum_{k\in K} y_k\Big) = \sum_{(j,k)\in J\times K} (x_j \times y_k),$$

onde a família do segundo membro também é somável.

Dem: Começamos por reparar que, tendo em conta IV.2.14,

$$\sum_{(j,k)\in J\times K} |x_j \times y_k| = \sum_{(j,k)\in J\times K} (|x_j| \times |y_k|) = \Big(\sum_{j\in J} |x_j|\Big) \times \Big(\sum_{k\in K} | y_k|\Big) < +\infty,$$

o que mostra que a família envolvida no segundo membro também é somável. Podemos agora, como no caso positivo, escrever

$$\Big(\sum_{j\in J} x_j\Big) \times \Big(\sum_{k\in K} y_k\Big) = \sum_{j\in J}\Big(x_j \times \sum_{k\in K} y_k\Big) = \sum_{j\in J}\Big(\sum_{k\in K} (x_j \times y_k)\Big) =$$
$$= \sum_{(j,k)\in J\times K} (x_j \times y_k).$$ □

IV.3.16 **(Somas parciais e a função indicatriz)** Sejam $(x_j)_{j\in J}$ uma família de números reais e $J' \subset J$ e consideremos a correspondente função indicatriz $\mathbb{I}_{J'}\colon J \to \{0,1\}$ (cf. IV.2.12). Tem-se então que a família $(x_j \times \mathbb{I}_{J'}(j))_{j\in J}$ é somável se, e só se, a família $(x_j)_{j\in J'}$ for somável e, nesse caso,

$$\sum_{j\in J'} x_j = \sum_{j\in J} (x_j \times \mathbb{I}_{J'}(j)).$$

Dem: A primeira afirmação é uma consequência de que, como se viu em IV.2.12,

$$\sum_{j\in J'} |x_j| = \sum_{j\in J} (|x_j| \times \mathbb{I}_{J'}(j)) = \sum_{j\in J} (|x_j \times \mathbb{I}_{J'}(j)|).$$

A segunda resulta da propriedade associativa em IV.3.12, considerando J como a união disjunta de J' e $J \setminus J'$ e reparando que para $j \in J'$ vem

$x_j \times \mathbb{I}_{J'}(j) = x_j$ e para $j \in J \setminus J'$ vem $x_j \times \mathbb{I}_{J'}(j) = 0$, portanto

$$\sum_{j\in J} (x_j \times \mathbb{I}_{J'}(j)) = \sum_{j\in J'} (x_j \times \mathbb{I}_{J'}(j)) + \sum_{j\in J\setminus J'} (x_j \times \mathbb{I}_{J'}(j)) =$$
$$= \sum_{j\in J'} x_j + \sum_{j\in J\setminus J'} 0 = \sum_{j\in J'} x_j. \qquad \square$$

Mostra a experiência que o teorema da convergência monótona é um resultado que se aplica essencialmente apenas no contexto das somas de parcelas positivas. É o teorema da convergência dominada que interessa generalizar ao contexto dos somatórios gerais de números reais.

IV.3.17 **(Teorema da convergência dominada)** Sejam J um conjunto, finito ou infinito, de índices e $(y_j)_{j\in J}$ uma família de reais positivos com $\sum_{j\in J} y_j < +\infty$ (a *família dominadora*). Consideremos, para cada $j \in J$, uma sucessão $f_j: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ admitindo limite finito

$$x_j = \lim_{n\to+\infty} f_j(n) \in \mathbb{R}$$

e tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $|f_j(n)| \le y_j$ (a *condição de dominação*). São então somáveis a família $(x_j)_{j\in J}$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, a família $(f_j(n))_{j\in J}$ e, sendo

$$f(n) = \sum_{j\in J} f_j(n) \in \mathbb{R},$$

tem-se

$$\lim_{n\to+\infty} f(n) = \sum_{j\in J} x_j,$$

ou seja, é válida a "passagem ao limite"

$$\lim_{n\to+\infty} \Big(\sum_{j\in J} f_j(n)\Big) = \sum_{j\in J} \Big(\lim_{n\to+\infty} f_j(n)\Big).$$

Dem: O facto de para cada $n \in \mathbb{N}$ a família $(f_j(n))_{j\in J}$ ser somável resulta de se ter

$$\sum_{j\in J} |f_j(n)| \le \sum_{j\in J} y_j < +\infty.$$

Do mesmo modo, de se ter $|f_j(n)| \to |x_j|$ concluímos que $|x_j| \le y_j$ e portanto

$$\sum_{j\in J} |x_j| \le \sum_{j\in J} y_j < +\infty$$

pelo que a família $(x_j)_{j\in J}$ é somável. Reparemos agora que

$$\Big|f(n) - \sum_{j\in J} x_j\Big| = \Big|\sum_{j\in J} f_j(n) - \sum_{j\in J} x_j\Big| = \Big|\sum_{j\in J} (f_j(n) - x_j)\Big| \le$$
$$\le \sum_{j\in J} |f_j(n) - x_j|$$

pelo que, uma vez que para cada $j \in J$ se tem $\lim\limits_{n\to+\infty} |f_j(n) - x_j| = 0$ e

$$|f_j(n) - x_j| \le |f_j(n)| + |x_j| \le 2y_j,$$

com $\sum\limits_{j\in J} 2y_j = 2\sum\limits_{j\in J} y_j < +\infty$, podemos concluir do teorema da convergência dominada no contexto positivo (cf. IV.2.18)

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j\in J} |f_j(n) - x_j| = 0$$

donde também $\lim\limits_{n\to+\infty} \Big|f(n) - \sum\limits_{j\in J} x_j\Big| = 0$ e portanto, por I.5.42,

$$\lim_{n\to+\infty} f(n) = \sum_{j\in J} x_j. \qquad \square$$

O teorema da convergência dominada admite uma generalização trivial, que é aquela que será aplicada com maior frequência, em que os limites de sucessões são substituídos por limites de funções num ponto aderente ao seu domínio.

IV.3.18 **(Teorema da convergência dominada para limites de funções)** Sejam J um conjunto, finito ou infinito, de índices e $(y_j)_{j\in J}$ uma família de reais positivos com $\sum\limits_{j\in J} y_j < +\infty$ (a *família dominadora*). Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ aderente a X e, para cada $j \in J$, $f_j \colon X \to \mathbb{R}$ um função admitindo limite finito

$$\lim_{x\to a} f_j(x) = x_j \in \mathbb{R}$$

e verificando $|f_j(x)| \le y_j$ para cada x (a *condição de dominação*). São então somáveis a família $(x_j)_{j\in J}$ e, para cada $x \in X$, a família $(f_j(x))_{j\in J}$ e, sendo

$$f(x) = \sum_{j\in J} f_j(x) \in \mathbb{R},$$

a função $f\colon X \to \mathbb{R}$ assim definida verifica

$$\lim_{x\to a} f(x) = \sum_{j\in J} x_j,$$

ou seja, é válida a “passagem ao limite”

$$\lim_{x\to a} \Bigl(\sum_{j\in J} f_j(x)\Bigr) = \sum_{j\in J} \bigl(\lim_{x\to a} f_j(x)\bigr).$$

Dem: Como na versão para as sucessões, o facto de para cada $x \in X$ a família $(f_j(x))_{j\in J}$ ser somável resulta de se ter

$$\sum_{j\in J} |f_j(x)| \le \sum_{j\in J} y_j < +\infty$$

e o facto de se ter $\lim\limits_{x\to a} |f_j(x)| = |x_j|$ implica que $|x_j| \le y_j$, e portanto

$$\sum_{j\in J} |x_j| \le \sum_{j\in J} y_j < +\infty,$$

o que mostra que a família $(x_j)_{j\in J}$ é somável. O facto de se ter

$$\lim_{x\to a} f(x) = \sum_{j\in J} x_j$$

resulta agora da caracterização de Heine dos limites (cf. I.5.50) visto que, qualquer que seja a sucessão (u_n) de elementos de X com limite a, o que vimos em IV.3.17 garante que a sucessão $(f(u_n))$ tem limite $\sum\limits_{j\in J} x_j$. □

Os dois resultados seguintes, que são consequências simples do teorema da convergência dominada para limites de funções, vão-nos explicitar hipóteses sob as quais se podem tirar conclusões sobre a continuidade e derivabilidade de funções definidas como somatórios de outras.

IV.3.19 **(Continuidade dum somatório de funções)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, J um conjunto de índices arbitrário e, para cada $j \in J$, $f_j\colon X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Suponhamos que existe uma família $(y_j)_{j\in J}$ de reais positivos com $\sum\limits_{j\in J} y_j < +\infty$ tal que para cada $j \in J$ e $x \in X$ se tenha $|f_j(x)| \le y_j$ (a *condição de dominação*). Fica então bem definida uma função contínua $f\colon X \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \sum_{j\in J} f_j(x).$$

Dem: O facto de f estar bem definida corresponde à afirmação de que, para cada $x \in X$ a família $(f_j(x))_{j\in J}$ é somável e isso é uma das conclusões do teorema IV.3.18. O facto de a função f ser contínua corresponde a afirmar que, para cada $a \in X$, $f(a) = \sum\limits_{j\in J} f_j(a)$ é o limite de $f(x)$ quando $x \to a$ e isso é mais uma vez uma consequência do mesmo teorema uma vez que, pela continuidade das funções f_j, cada $f_j(a)$ é o limite de $f_j(x)$ quando $x \to a$. □

IV.3.20 **(Derivabilidade dum somatório de funções)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo, J um conjunto de índices e, para cada $j \in J$, $f_j\colon X \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Suponhamos que para cada $x \in X$ a família $(f_j(x))_{j\in J}$ é somável e que existe uma família $(y_j)_{j\in J}$ de reais positivos com $\sum\limits_{j\in J} y_j < +\infty$ tal que para cada $j \in J$ e $x \in X$ se tenha $|f'_j(x)| \le y_j$ (a *condição de dominação*). Tem-se então que a função $f\colon X \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sum_{j\in J} f_j(x)$$

é derivável e com

$$f'(x) = \sum_{j\in J} f'_j(x)$$

para cada $x \in X$.

Dem: Seja $a \in X$ arbitrário. Para cada $j \in J$, tem-se

$$f'_j(a) = \lim_{x\to a} \frac{f_j(x) - f_j(a)}{x - a}$$

e, lembrando o corolário do teorema de Lagrange em III.2.9 [220], tem-se, para um certo c entre x e a,

$$\left|\frac{f_j(x) - f_j(a)}{x - a}\right| = |f'_j(c)| \le y_j.$$

Uma vez que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \sum_{j\in J} \frac{f_j(x) - f_j(a)}{x - a},$$

deduzimos agora de IV.3.18 que se tem

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \sum_{j\in J} f'_j(a). \qquad \square$$

[220] É para poder aplicar esse resultado que estamos a exigir que o domínio X seja um intervalo.

Vamos agora dar um exemplo de aplicação dos resultados precedentes a uma construção estritamente no contexto da Análise Matemática de funções “gémeas” das funções trigonométricas seno e cosseno, que nos apareceram inicialmente como funções definidas num contexto de Geometria e cujas propriedades foram naturalmente estabelecidas nesse contexto (cf. o que foi referido em I.4.28). Vamos utilizar para as funções que vamos construir designações análogas às das funções “gémeas” mas escrevendo a letra inicial em maiúscula quando for importante sublinhar o contexto em que estamos a considerá-las.

IV.3.21 **(As funções trigonométricas “gémeas”)** Para cada $x \in \mathbb{R}$ podem definir-se números reais $\mathrm{Sen}(x)$ e $\mathrm{Cos}(x)$ como somas das seguintes famílias somáveis:

$$\mathrm{Sen}(x) = \sum_{p\in\mathbb{N}_0} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots,$$
$$\mathrm{Cos}(x) = \sum_{p\in\mathbb{N}_0} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots.$$

tendo-se trivialmente $\mathrm{Sen}(0) = 0$ e $\mathrm{Cos}(0) = 1$ assim como as “propriedades de paridade”

$$\mathrm{Sen}(-x) = -\mathrm{Sen}(x), \quad \mathrm{Cos}(-x) = \mathrm{Cos}(x).$$

As funções

$$\mathrm{Sen}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{Cos}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

assim definidas são de classe C^∞ e verificam

$$\mathrm{Sen}'(x) = \mathrm{Cos}(x), \quad \mathrm{Cos}'(x) = -\mathrm{Sen}(x).$$

Dem: O facto de termos famílias somáveis resulta de que, tendo em conta a série para a função exponencial referida em III.4.41, vem

$$\sum_{p\in\mathbb{N}_0} \left|(-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}\right| = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n \text{ ímpar}}} \frac{|x|^n}{n!} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{|x|^n}{n!} = e^{|x|} < +\infty$$

e, analogamente,

$$\sum_{p\in\mathbb{N}_0} \left|(-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!}\right| = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}_0 \\ n \text{ par}}} \frac{|x|^n}{n!} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{|x|^n}{n!} = e^{|x|} < +\infty.$$

Para verificarmos a validade dos valores indicados para as derivadas destas funções (em particular a sua continuidade) basta examinar o que se passa com a restrição destas funções a intervalos do tipo $]-R, R[$, com $R > 0$

arbitrário, uma vez que, dado $a \in \mathbb{R}$, podemos escolher R tal que $a \in\,]-R,R[$ e então a existência e o valor da derivada no ponto a de uma função definida em $\mathbb{R}$ são equivalentes aos da sua restrição a $]-R,R[$. [221]
Reparemos agora que, definindo para cada $n \in \mathbb{N}_0$ a função $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!},$$

estas funções são deriváveis em cada ponto e com $f_0'(x) = 0$ e, para $n \geq 1$, $f_n'(x) = f_{n-1}(x)$. Uma vez que

$$\mathrm{Sen}(x) = \sum_{p \in \mathbb{N}_0} (-1)^p f_{2p+1}(x)$$

onde, para $x \in\,]-R,R[$

$$\left|(-1)^p f_{2p+1}'(x)\right| = \left|f_{2p}(x)\right| \leq \frac{R^{2p}}{(2p)!}$$

e

$$\sum_{p \in \mathbb{N}_0} \frac{R^{2p}}{(2p)!} = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}_0 \\ n \text{ par}}} \frac{R^n}{n!} \leq \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{R^n}{n!} = e^R < +\infty,$$

deduzimos de IV.3.20 que a função Sen é derivável em cada $x \in\,]-R,R[$ e com

$$\mathrm{Sen}'(x) = \sum_{p \in \mathbb{N}_0} (-1)^p f_{2p+1}'(x) = \sum_{p \in \mathbb{N}_0} (-1)^p f_{2p}(x) = \mathrm{Cos}(x).$$

Analogamente, uma vez que

$$\mathrm{Cos}(x) = \sum_{p \in \mathbb{N}_0} (-1)^p f_{2p}(x)$$

onde, para $x \in\,]-R,R[$, $\left|(-1)^0 f_0'(x)\right| = 0$ e, se $p \geq 1$,

$$\left|(-1)^p f_{2p}'(x)\right| = \left|f_{2p-1}(x)\right| \leq \frac{R^{2p-1}}{(2p-1)!}$$

e

[221]Trata-se de uma propriedade geral da noção de limite já que a não é aderente ao complementar $\mathbb{R} \setminus\,]-R,R[$ (cf. a alínea b) de I.5.8).
Mostra a experiência que é frequente não se conseguir aplicar diretamente os resultados IV.3.19 e IV.3.20 para provar a continuidade ou derivabilidade de funções definidas como somatórios de outras por não se conseguirem estabelecer globalmente as necessárias desigualdades de dominação mas que se consegue tornear essa dificuldade à custa de considerar restrições a subconjuntos convenientes do domínio.

$$0+\sum_{p\in\mathbb{N}}\frac{R^{2p-1}}{(2p-1)!}=\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}_0\\ n\text{ ímpar}}}\frac{R^n}{n!}\le\sum_{n\in\mathbb{N}_0}\frac{R^n}{n!}=e^R<+\infty,$$

deduzimos de IV.3.20 que a função Cos é derivável em cada $x\in\,]-R,R[$ e com

$$\begin{aligned}\mathrm{Cos}'(x)&=0+\sum_{p\in\mathbb{N}}(-1)^p f'_{2p}(x)=\sum_{p\in\mathbb{N}}(-1)^p f_{2p-1}(x)=\\&=\sum_{q\in\mathbb{N}_0}(-1)^{q+1}f_{2q+1}(x)=-\mathrm{Sen}(x).\end{aligned}$$

Ficou assim provado que as funções Sen e Cos são deriváveis em cada ponto e com a derivadas indicadas no enunciado, em particular com derivadas contínuas e resulta agora por indução em k que estas funções são de classe C^k para todo o $k\in\mathbb{N}$, ou seja, são de classe C^∞. □

Repare-se que, se nos situarmos no contexto geométrico onde as funções trigonométricas usuais sen e cos foram definidas, o que verificámos em III.2.14 (ou, alternativamente, os desenvolvimentos em série de Maclaurin obtidos no exercício III.4.13) mostra-nos que se tem $\mathrm{Sen}(x)=\mathrm{sen}(x)$ e $\mathrm{Cos}(x)=\cos(x)$. Por esse motivo, passado o que estamos a fazer nesta secção em que o objetivo é sublinhar o diferente ponto de vista em que nos colocamos, as notações $\mathrm{Sen}(x)$ e $\mathrm{Cos}(x)$ serão abandonadas e substituídas pelas notações usuais $\mathrm{sen}(x)$ e $\cos(x)$.
Faz naturalmente sentido perguntarmo-nos se será possível verificar que as funções Sen e Cos verificam propriedades que conhecemos para as funções "gémeas" sem precisarmos de passar pelo conhecimento destas últimas. É a verificação de algumas dessas propriedades que faremos a seguir, notando desde já que, com a exceção de uma delas, não utilizaremos explicitamente as caracterizações destas funções como somas das séries mas apenas as propriedades de derivabilidade referidas em IV.3.21.

IV.3.22 **(Relação fundamental entre as funções trigonométicas)** Para cada $x\in\mathbb{R}$ tem-se

$$\mathrm{Sen}^2(x)+\mathrm{Cos}^2(x)=1,$$

em particular $|\mathrm{Sen}(x)|\le 1$ e $|\mathrm{Cos}(x)|\le 1$.
Dem: Seja $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a função definida por $f(x)=\mathrm{Sen}^2(x)+\mathrm{Cos}^2(x)$. Tendo em conta as propriedades de derivabilidade referidas em IV.3.21, obtemos

$$\begin{aligned}f'(x)&=2\mathrm{Sen}(x)\mathrm{Sen}'(x)+2\mathrm{Cos}(x)\mathrm{Cos}'(x)=\\&=2\mathrm{Sen}(x)\mathrm{Cos}(x)-2\mathrm{Cos}(x)\mathrm{Sen}(x)=0\end{aligned}$$

o que nos garante que a função f é constante, e portanto

$$\mathrm{Sen}^2(x) + \mathrm{Cos}^2(x) = \mathrm{Sen}^2(0) + \mathrm{Cos}^2(0) = 1.$$

Uma vez que $\mathrm{Cos}^2(x) \geq 0$ e $\mathrm{Sen}^2(x) \geq 0$, a igualdade precedente implica que $\mathrm{Sen}^2(x) \leq 1$ e $\mathrm{Cos}^2(x) \leq 1$, ou seja, $|\mathrm{Sen}(x)| \leq 1$ e $|\mathrm{Cos}(x)| \leq 1$. □

IV.3.23 **(Lema — Funções com comportamento semelhante a Sen e Cos)**[222] Sejam $S\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $C\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções deriváveis em cada $x \in \mathbb{R}$ e com

(1) $$S'(x) = C(x), \quad C'(x) = -S(x).$$

Existem então duas constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

(2) $$\begin{aligned} S(x) &= a\mathrm{Sen}(x) + b\mathrm{Cos}(x),\\ C(x) &= a\mathrm{Cos}(x) - b\mathrm{Sen}(x), \end{aligned}$$

em particular se for $S(0) = 0$ e $C(0) = 1$ tem-se necessariamente $S(x) = \mathrm{Sen}(x)$ e $C(x) = \mathrm{Cos}(x)$.

Dem: Consideremos duas funções auxiliares $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{Sen}(x)S(x) + \mathrm{Cos}(x)C(x),\\ g(x) &= \mathrm{Cos}(x)S(x) - \mathrm{Sen}(x)C(x). \end{aligned}$$

Por derivação, obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{Cos}(x)S(x) + \mathrm{Sen}(x)C(x) - \mathrm{Sen}(x)C(x) - \mathrm{Cos}(x)S(x) = 0,\\ g'(x) &= -\mathrm{Sen}(x)S(x) + \mathrm{Cos}(x)C(x) - \mathrm{Cos}(x)C(x) + \mathrm{Sen}(x)S(x) = 0, \end{aligned}$$

pelo que temos duas funções constantes ou seja, existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que para cada $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathrm{Sen}(x)S(x) + \mathrm{Cos}(x)C(x) &= a,\\ \mathrm{Cos}(x)S(x) - \mathrm{Sen}(x)C(x) &= b. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os membros da primeira igualdade por $\mathrm{Sen}(x)$, ambos os membros da segunda por $\mathrm{Cos}(x)$ e somando os resultados, obtemos

$$\begin{aligned} &\mathrm{Sen}^2(x)S(x) + \mathrm{Sen}(x)\mathrm{Cos}(x)C(x) + \mathrm{Cos}^2(x)S(x) - \mathrm{Sen}(x)\mathrm{Cos}(x)C(x) =\\ &= a\mathrm{Sen}(x) + b\mathrm{Cos}(x), \end{aligned}$$

ou seja, tendo em conta IV.3.22, $S(x) = a\mathrm{Sen}(x) + b\mathrm{Cos}(x)$. A segunda igualdade em (2), resulta desta última por derivação. Por fim, se for $S(0) = 0$ e $C(0) = 1$, deduzimos de (2) que

[222] Comparar com a versão análoga para as versões geométricas das funções trigonométricas estabelecida em III.2.14, versão essa cuja demonstração vai ser praticamente decalcada adiante.

$$\begin{aligned}0 &= S(0) = a\text{Sen}(0) + b\text{Cos}(0) = b,\\ 1 &= C(0) = a\text{Cos}(0) - b\text{Sen}(0) = a,\end{aligned}$$

e portanto, mais uma vez por (2), $S(x) = \text{Sen}(x)$ e $C(x) = \text{Cos}(x)$. □

IV.3.24 **(Propriedades de aditividade e de duplicação)** Quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{aligned}\text{Sen}(x+y) &= \text{Sen}(x)\text{Cos}(y) + \text{Cos}(x)\text{Sen}(y),\\ \text{Cos}(x+y) &= \text{Cos}(x)\text{Cos}(y) - \text{Sen}(x)\text{Sen}(y).\end{aligned}$$

Em particular, no caso em que tomamos $y = x$, obtemos as fórmula habituais para o argumento duplo

$$\begin{aligned}\text{Sen}(2x) &= 2\text{Sen}(x)\text{Cos}(x),\\ \text{Cos}(2x) &= \text{Cos}^2(x) - \text{Sen}^2(x) =\\ &= 2\text{Cos}^2(x) - 1 =\\ &= 1 - 2\text{Sen}^2(x).\end{aligned}$$

Dem: Consideremos x fixado e definamos funções $S, C\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$S(y) = \text{Sen}(x+y), \quad C(y) = \text{Cos}(x+y).$$

Derivando, obtemos

$$S'(y) = \text{Cos}(x+y) = C(y), \quad C'(y) = -\text{Sen}(x+y) = -S(y)$$

pelo que, pelo lema IV.3.23, concluímos a existência de constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que para cada y

$$\begin{aligned}\text{Sen}(x+y) &= S(y) = a\text{Sen}(y) + b\text{Cos}(y),\\ \text{Cos}(x+y) &= C(y) = a\text{Cos}(y) - b\text{Sen}(y),\end{aligned}$$

e, considerando $y = 0$ nas fórmulas precedentes, verificamos que $b = \text{Sen}(x)$ e $a = \text{Cos}(x)$. □

IV.3.25 **(Lema)** Para cada $0 \le x \le 1$ tem-se $\text{Cos}(x) \ge \frac{1}{2}$ e $\text{Sen}(x) \ge \frac{5}{6}x$.

Dem: Tendo em conta a propriedade associativa dos somatórios (cf. IV.3.12) vem

$$\begin{aligned}\text{Cos}(x) &= \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + \left(\frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}\right) + \cdots =\\ &= \sum_{\substack{p\in\mathbb{N}_0\\ p\ \text{par}}} \left(\frac{x^{2p}}{(2p)!} - \frac{x^{2p+2}}{(2p+2)!}\right)\end{aligned}$$

e, uma vez que, sendo $0 \le x \le 1$, tem-se $x^2 \le 1$, e portanto $x^{2p+2} \le x^{2p}$, e $(2p+2)! \ge (2p)!$ donde

$$\frac{x^{2p}}{(2p)!} - \frac{x^{2p+2}}{(2p+2)!} \geq 0,$$

concluímos que

$$\text{Cos}(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Analogamente, e aplicando mais uma vez a propriedade associativa, vem

$$\begin{aligned}\text{Sen}(x) &= \Big(x - \frac{x^3}{3!}\Big) + \Big(\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\Big) + \cdots = \\ &= \sum_{\substack{p\in\mathbb{N}_0 \\ p \text{ ímpar}}} \Big(\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} - \frac{x^{2p+3}}{(2p+3)!}\Big)\end{aligned}$$

e portanto, uma vez que, sendo $0 \leq x \leq 1$, tem-se $x^{2p+3} \leq x^{2p+1}$ e $(2p+1)! \geq (2p-1)!$ donde

$$\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} - \frac{x^{2p+3}}{(2p+3)!} \geq 0,$$

concluímos que

$$\text{Sen}(x) \geq x - \frac{x^3}{6} \geq x(1 - \frac{1}{6}) = \frac{5}{6}x. \qquad \square$$

IV.3.26 **(O “gémeo” do Pi)** Fica bem definido um real Π pela condição de $\frac{\Pi}{2}$ ser o menor elemento do conjunto dos $x \geq 0$ tais que $\text{Cos}(x) = 0$. Tem-se então $2 < \Pi < 4$ e:

a) $\text{Sen}(\frac{\Pi}{2}) = 1$ e $\text{Cos}(\frac{\Pi}{2}) = 0$.

b) A restrição da função Sen a $[0, \frac{\Pi}{2}]$ é estritamente crescente e com $[0,1]$ como contradomínio. A restrição da função Cos a $[0, \frac{\Pi}{2}]$ é estritamente decrescente e com $[0,1]$ como contradomínio.

Dem: Vamos dividir a demonstração em várias alíneas:

1) Vamos começar por provar que o conjunto dos $x \geq 0$ tais que $\text{Cos}(x) = 0$ admite um mínimo x_0 e que $1 < x_0 < 2$. Isso provará em particular que Π fica bem definido pela condição do enunciado, tendo-se $\Pi = 2x_0$, e portanto $2 < \Pi < 4$.

Subdem: Tendo em conta a propriedade referida em II.1.14, o conjunto A dos $x \geq 0$ tais que $\text{Cos}(x) = 0$, que pode ser descrito como

$$A = \{x \in [0, +\infty[\ \mid \text{Cos}(x) \in \{0\}\},$$

é um conjunto fechado, e naturalmente minorado, e portanto, se verificarmos que ele não é vazio ele vai admitir um mínimo x_0, nomeadamente o seu ínfimo (cf. I.3.18). Ora, tendo em conta o lema IV.3.25 e a propriedade de duplicação em IV.3.24, tem-se

$$\mathrm{Cos}(2) = 1 - 2\mathrm{Sen}^2(1) \leq 1 - 2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{7}{18} < 0,$$

pelo que o teorema da Cauchy-Bolzano (cf. II.1.15) garante a existência de um elemento de A menor que 2. Como referimos isso arrasta a existência do mínimo x_0 de A, que verifica necessariamente $x_0 < 2$ e o facto de se ter $x_0 > 1$ resulta do lema referido, que garante que os elementos menores ou iguais a 1 não pertencem a A.

2) O facto de se ter $\frac{\Pi}{2} \in A$ diz-nos que $\mathrm{Cos}(\frac{\Pi}{2}) = 0$. Vamos agora verificar que a restrição de Sen a $[0, \frac{\Pi}{2}]$ é estritamente crescente e com $[0,1]$ como contradomínio, em particular que $\mathrm{Sen}(\frac{\Pi}{2}) = 1$.

Subdem: Para cada $x \in [0, \frac{\Pi}{2}[$ tem-se $\mathrm{Cos}(x) > 0$ visto que, se fosse $\mathrm{Cos}(x) \leq 0$ o teorema de Cauchy-Bolzano arrastava a existência de $y \in [0,x]$ com $\mathrm{Cos}(y) = 0$, contrariando o facto de $\frac{\Pi}{2}$ ser o mínimo de A. O facto de se ter $\mathrm{Sen}'(x) = \mathrm{Cos}(x) > 0$ para cada $x \in]0, \frac{\Pi}{2}[$ implica que a restrição de Sen a $[0, \frac{\Pi}{2}]$ é estritamente crescente, em particular $\mathrm{Sen}(x) > 0$ para cada $x \in]0, \frac{\Pi}{2}]$. Da igualdade

$$1 = \mathrm{Sen}^2(\frac{\Pi}{2}) + \mathrm{Cos}^2(\frac{\Pi}{2}) = \mathrm{Sen}^2(\frac{\Pi}{2})$$

podemos assim concluir que $\mathrm{Sen}(\frac{\Pi}{2}) = 1$ e portanto o contradomínio da restrição de Sen a $[0, \frac{\Pi}{2}]$, que por II.1.16 sabemos ser um intervalo, é necessariamente o intervalo $[0,1]$.

3) Vamos verificar por fim que a restrição da função Cos a $[0, \frac{\Pi}{2}]$ é estritamente decrescente e com $[0,1]$ como contradomínio.

Subdem: Ora o facto de termos uma função estritamente decrescente resulta de se ter

$$\mathrm{Cos}'(x) = -\mathrm{Sen}(x) < 0$$

para cada $x \in]0, \frac{\Pi}{2}[$ e daqui concluímos que o contradomínio da restrição referida que, como antes, é necessariamente um intervalo, é o intervalo

$$[\mathrm{Cos}(1), \mathrm{Cos}(0)] = [0,1]. \qquad \square$$

É claro que, quando nos situamos no contexto geométrico em que as funções trigonométricas originais aparecem, podemos concluir que a constante Π definida atrás coincide com a constante π definida nesse contexto. Como acontecia com as notações Sen e Cos para as funções gémeas de sen e cos, a utilização da maiúscula Π restringe-se apenas ao que fazemos nesta secção e posteriormente passar-se-á a utilizar de novo a notação π.

IV.3.27 **(Fórmulas de "redução ao primeiro quadrante")**

a) Para cada $x \in \mathbb{R}$ tem-se

$$\mathrm{Sen}(\frac{\Pi}{2}+x) = \mathrm{Cos}(x), \quad \mathrm{Cos}(\frac{\Pi}{2}+x) = -\mathrm{Sen}(x),$$

e, em consequência, também

$$\mathrm{Sen}(\frac{\Pi}{2}-x) = \mathrm{Cos}(x), \quad \mathrm{Cos}(\frac{\Pi}{2}-x) = \mathrm{Sen}(x).$$

b) Para cada $x \in \mathbb{R}$ tem-se

$$\mathrm{Sen}(\Pi+x) = -\mathrm{Sen}(x), \quad \mathrm{Cos}(\Pi+x) = -\mathrm{Cos}(x),$$

em particular $\mathrm{Sen}(\Pi) = 0$ e $\mathrm{Cos}(\Pi) = -1$.

c) Para cada $x \in \mathbb{R}$ tem-se

$$\mathrm{Sen}(2\Pi+x) = \mathrm{Sen}(x), \quad \mathrm{Cos}(2\Pi+x) = \mathrm{Cos}(x),$$

por outras palavras, as funções Sen e Cos são *periódicas* com 2Π como *período*.

Dem: Tendo em conta as propriedades de aditividade em IV.3.24, vem

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sen}(\frac{\Pi}{2}+x) &= \mathrm{Sen}(\frac{\Pi}{2})\mathrm{Cos}(x) + \mathrm{Cos}(\frac{\Pi}{2})\mathrm{Sen}(x) = \\
&= 1 \times \mathrm{Cos}(x) + 0 \times \mathrm{Sen}(x) = \mathrm{Cos}(x), \\
\mathrm{Cos}(\frac{\Pi}{2}+x) &= \mathrm{Cos}(\frac{\Pi}{2})\mathrm{Cos}(x) - \mathrm{Sen}(\frac{\Pi}{2})\mathrm{Sen}(x) = \\
&= 0 \times \mathrm{Cos}(x) - 1 \times \mathrm{Sen}(x) = -\mathrm{Sen}(x)
\end{aligned}$$

e as segundas fórmulas destacadas em a) resultam das primeiras tendo em conta as caracterizações de $\mathrm{Cos}(-x)$ e $\mathrm{Sen}(-x)$ em IV.3.21. As fórmulas na alínea b) resultam das primeiras que foram referidas na alínea a) se repararmos que se tem

$$\mathrm{Sen}(\Pi+x) = \mathrm{Sen}(\frac{\Pi}{2}+(\frac{\Pi}{2}+x)), \quad \mathrm{Cos}(\Pi+x) = \mathrm{Cos}(\frac{\Pi}{2}+(\frac{\Pi}{2}+x)).$$

Analogamente, as fórmulas em c) resultam das referidas em b) se repararmos que se tem

$$\mathrm{Sen}(2\Pi+x) = \mathrm{Sen}(\Pi+(\Pi+x)), \quad \mathrm{Cos}(2\Pi+x) = \mathrm{Cos}(\Pi+(\Pi+x)).$$

□

Tal como acontecia com as funções trigonométricas originais, as funções Sen e Cos vão admitir restrições injetivas a intervalos convenientes cujas inversas, importantes nas aplicações, são "gémeas" das funções arcsen e arccos referidas em II.1.25 e, naturalmente, coincidem com estas quando nos situamos no contexto geométrico.

IV.3.28 **(As funções trigonométricas inversas)** **a)** Tem-se $\mathrm{Cos}(x) \geq 0$ para cada $x \in [-\frac{\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2}]$ e a restrição da função Sen ao intervalo $[-\frac{\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2}]$ é estritamente crescente, em particular injetiva, e tem $[-1, 1]$ como contradomínio. Notamos

$$\mathrm{arcSen}\colon [-1, 1] \to [-\frac{\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2}]$$

(ou Sen^{-1}) a função inversa desta restrição, que é assim bijetiva e estritamente crescente e portanto contínua (cf. II.1.20). Esta função é derivável em cada $y \in]-1, 1[$ e com

$$\mathrm{arcSen}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

b) Tem-se $\mathrm{Sen}(x) \geq 0$ para cada $x \in [0, \Pi]$ e a restrição da função Cos ao intervalo $[0, \Pi]$ é estritamente decrescente, em particular injetiva, e tem $[-1, 1]$ como contradomínio. Notamos

$$\mathrm{arcCos}\colon [-1, 1] \to [0, \Pi]$$

(ou Cos^{-1}) a função inversa desta restrição, que é assim bijetiva e estritamente decrescente e portanto contínua. Esta função é derivável em cada $y \in]-1, 1[$ e com

$$\mathrm{arcCos}'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Dem: a) Já verificámos na alínea b) de IV.3.26 que $\mathrm{Cos}(x) \geq 0$ para cada $x \in [0, \frac{\Pi}{2}]$ e a identidade $\mathrm{Cos}(-x) = \mathrm{Cos}(x)$ implica que o mesmo sucede para $x \in [-\frac{\Pi}{2}, 0]$. Já sabemos que a restrição de Sen a $[0, \frac{\Pi}{2}]$ é estritamente crescente a tem $[0, 1]$ como contradomínio. Daqui deduzimos, tendo em conta a identidade $\mathrm{Sen}(x) = -\mathrm{Sen}(-x)$, que a restrição de Sen a $[-\frac{\Pi}{2}, 0]$ é também estritamente crescente e com $[-1, 0]$ como contradomínio e, juntando estes dois factos, podemos concluir que a restrição de Sen a $[-\frac{\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2}]$ é estritamente crescente e com contradomínio $[-1, 1]$ (reparar que, no caso em que $x < y$ em $[-\frac{\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2}]$ com $x < 0$ e $0 < y$, vem $\mathrm{Sen}(x) < \mathrm{Sen}(0) < \mathrm{Sen}(y)$). A derivabilidade de arcSen em cada $y \in]-1, 1[$ e o valor da sua derivada resultam agora com uma justificação decalcada pela feita em III.1.24 para a função "gémea" arcsen, onde o facto de se ter $\mathrm{Cos}(x) > 0$ para $x \in]-\frac{\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2}[$ é uma consequência de se ter $\mathrm{Cos}(-x) = \mathrm{Cos}(x)$.

b) Já verificámos na alínea b) de IV.3.26 que $\mathrm{Sen}(x) \geq 0$ para cada $x \in [0, \frac{\Pi}{2}]$ e a identidade $\mathrm{Sen}(\Pi - x) = -\mathrm{Sen}(-x) = \mathrm{Sen}(x)$ implica que o mesmo sucede para $x \in [\frac{\Pi}{2}, \Pi]$. Já sabemos que a restrição de Cos a $[0, \frac{\Pi}{2}]$ é estritamente decrescente a tem $[0, 1]$ como contradomínio. Uma vez que

$\text{Cos}(x) = -\text{Sen}(x - \frac{\Pi}{2})$ (uma identidade equivalente à identidade $\text{Cos}(\frac{\Pi}{2} + x) = -\text{Sen}(x)$) e que a restrição de Sen a $[0, \frac{\Pi}{2}]$ é estritamente crescente e com $[0, 1]$ como contradomínio, vemos que a restrição de Sen a $[\frac{\Pi}{2}, \Pi]$ é estritamente decrescente e com $[-1, 0]$ como contradomínio e, juntando os dois factos, podemos concluir que a restrição de Sen a $[0, \Pi]$ é estritamente decrescente e com contradomínio $[-1, 1]$. A derivabilidade de arcCos em cada $y \in]-1, 1[$ e o valor da sua derivada resultam agora com uma justificação decalcada pela feita em III.1.24 para a função "gémea" arccos, onde o facto de se ter $\text{Sen}(x) > 0$ para $x \in]0, \Pi[$ é uma consequência de se ter $\text{Sen}(x) = \text{Cos}(x - \frac{\Pi}{2})$ (uma identidade equivalente à identidade $\text{Sen}(\frac{\Pi}{2} + x) = \text{Cos}(x)$). □

IV.3.29 **(Parametrização da circunferência)** Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a^2 + b^2 = 1$.[223] Existe então um único $x \in]-\Pi, \Pi]$ tal que $a = \text{Cos}(x)$ e $b = \text{Sen}(x)$.

Dem: Comecemos por reparar que se tem $a^2 \leq 1$ e $b^2 \leq 1$, e portanto a e b pertencem a $[-1, 1]$.

1) Comecemos por supor que $b \geq 0$. Tendo em conta a alínea b) de IV.3.28, existe um único $x \in [0, \Pi]$ tal que $\text{Cos}(x) = a$ e então, por ser $\text{Sen}(x) \geq 0$ e $\text{Cos}^2(x) + \text{Sen}^2(x) = 1$, vemos que

$$\text{Sen}(x) = \sqrt{1 - \text{Cos}^2(x)} = \sqrt{1 - a^2} = b.$$

Note-se, além disso, que se tem $b = 0$ se, e só se, $a = \pm 1$, portanto se, e só se, $x = 0$ ou $x = \Pi$ e daqui deduzimos, em particular, que o único $x \in [0, \Pi]$ tal que $\text{Cos}(x) = a$ é também o único $x \in]-\Pi, \Pi]$ tal que $a = \text{Cos}(x)$ e $b = \text{Sen}(x)$, já que, se $x \in]-\Pi, 0[$, tem-se $-x \in]0, \Pi[$ e portanto

$$\text{Sen}(x) = -\text{Sen}(-x) < 0.$$

2) Suponhamos agora que $b < 0$. O que verificámos em 1) aplicado aos reais a e $-b$ garante a existência de um único $y \in]0, \Pi[$ tal que $\text{Cos}(y) = a$ e $\text{Sen}(y) = -b$ e então tem-se, para o elemento $x = -y \in]-\Pi, 0[$,

$$\text{Cos}(x) = \text{Cos}(y) = a, \quad \text{Sen}(x) = -\text{Sen}(y) = b$$

e este x é o único elemento de $]-\Pi, 0[$ (e portanto de $]-\Pi, \Pi]$) nestas condições visto que, se $x' \in]-\Pi, 0[$ verificasse as mesma propriedades, vinha $-x' \in]0, \Pi[$ e

$$\text{Cos}(-x') = \text{Cos}(x') = a, \quad \text{Sen}(-x') = -\text{Sen}(x') = -b,$$

portanto $-x' = y$, donde $x' = -y = x$. □

---

[223] Interpretando geometricamente, a e b são as coordenadas de um ponto da circunferência de centro na origem e raio 1.

A função trigonométrica tan também admite uma função "gémea" Tan definida de maneira análoga àquela mas com as funções Sen e Cos no lugar de sen e cos. Para simplificar o enunciado, e porque isso é suficiente para as aplicações mais importantes, vamos considerá-la apenas definida no intervalo $]-\frac{\Pi}{2},\frac{\Pi}{2}[$.

IV.3.30 Para cada $x\in\,]-\frac{\Pi}{2},\frac{\Pi}{2}[$ definimos $\mathrm{Tan}(x)\in\mathbb{R}$ por

$$\mathrm{Tan}(x)=\frac{\mathrm{Sen}(x)}{\mathrm{Cos}(x)}.$$

A função $\mathrm{Tan}\colon]-\frac{\Pi}{2},\frac{\Pi}{2}[\,\to\mathbb{R}$ assim definida é derivável em todos os pontos x e com derivada

$$\mathrm{Tan}'(x)=\frac{1}{\mathrm{Cos}^2(x)}=1+\mathrm{Tan}^2(x)$$

e é estritamente crescente e com contradomínio $\mathbb{R}$, em particular verifica

$$\lim_{x\to-\frac{\Pi}{2}}\mathrm{Tan}(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to\frac{\Pi}{2}}\mathrm{Tan}(x)=+\infty.$$

Dem: O facto de se ter $\mathrm{Cos}(x)>0$ para cada $x\in\,]-\frac{\Pi}{2},\frac{\Pi}{2}[$ é conhecido no caso em que $x\geq 0$ e para $x\leq 0$ é uma consequência da identidade $\mathrm{Cos}(-x)=\mathrm{Cos}(x)$. Usando as regras de derivação e o conhecimento das derivadas de Sen e de Cos, obtemos agora

$$\begin{aligned}\mathrm{Tan}'(x)&=\frac{\mathrm{Sen}'(x)\mathrm{Cos}(x)-\mathrm{Sen}(x)\mathrm{Cos}'(x)}{\mathrm{Cos}^2(x)}=\\&=\frac{\mathrm{Cos}^2(x)+\mathrm{Sen}^2(x)}{\mathrm{Cos}^2(x)}=\frac{1}{\mathrm{Cos}^2(x)}\end{aligned}$$

ou, alternativamente,

$$\mathrm{Tan}'(x)=\frac{\mathrm{Cos}^2(x)+\mathrm{Sen}^2(x)}{\mathrm{Cos}^2(x)}=1+\frac{\mathrm{Sen}^2(x)}{\mathrm{Cos}^2(x)}=1+\mathrm{Tan}^2(x).$$

Qualquer das fórmulas obtidas mostra que se tem $\mathrm{Tan}'(x)>0$ para cada x, e portanto temos uma função estritamente crescente. O facto de o contradomínio ser $\mathbb{R}$ é equivalente ao facto de a função ter os limites referidos quando $x\to-\frac{\Pi}{2}$ e quando $x\to\frac{\Pi}{2}$, facto que é consequência de se ter $\mathrm{Cos}(x)>0$,

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to-\frac{\Pi}{2}}\mathrm{Sen}(x)=\mathrm{Sen}(-\frac{\Pi}{2})=-1,\quad &&\lim_{x\to-\frac{\Pi}{2}}\mathrm{Cos}(x)=\mathrm{Cos}(-\frac{\Pi}{2})=0,\\&\lim_{x\to\frac{\Pi}{2}}\mathrm{Sen}(x)=\mathrm{Sen}(\frac{\Pi}{2})=1,&&\lim_{x\to\frac{\Pi}{2}}\mathrm{Cos}(x)=\mathrm{Cos}(\frac{\Pi}{2})=0.\end{aligned}\qquad\square$$

IV.3.31 Tendo em conta as propriedades referidas para a função Tan, podemos considerar a função inversa desta, notada

$$\mathrm{arcTan}\colon \mathbb{R} \to \left]-\frac{\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2}\right[,$$

que é também contínua e estritamente crescente e tem limites

$$\lim_{y\to-\infty} \mathrm{arcTan}(y) = -\frac{\Pi}{2}, \quad \lim_{y\to+\infty} \mathrm{arcTan}(y) = \frac{\Pi}{2}.$$

Com justificação decalcada pela feita em III.1.24 para a função "gémea" arctan, vemos que esta função é derivável em cada $y \in \mathbb{R}$ e com

$$\mathrm{arcTan}'(y) = \frac{1}{1+y^2}.$$ [224]

IV.3.32 **(Nota sobre o "retorno às origens")** A partir de agora, e como já referimos anteriormente, vamos voltar a utilizar as notações habituais $\mathrm{sen}(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$ e π no lugar das notações $\mathrm{Sen}(x)$, $\mathrm{Cos}(x)$, $\mathrm{Tan}(x)$ e Π utilizadas nesta secção quando era importante sublinhar o facto de estarmos a considerar as definições analíticas em vez das definições geométricas. Analogamente, voltaremos a utilizar para as funções trigonométricas inversas as notações $\mathrm{arcsen}(x)$, $\arccos(x)$ e $\arctan(x)$ em vez de $\mathrm{arcSen}(x)$, $\mathrm{arcCos}(x)$ e $\mathrm{arcTan}(x)$. O que fizémos nesta secção deverá ter sido suficiente para convencer o estudante que as noções envolvidas podem ser consideradas como fazendo sentido num contexto puramente analítico, portanto sem nenhum apelo às respetivas definições geométricas, tanto no que diz respeito às suas definições como à prova das suas propriedades básicas.
Este retorno às notações habituais aplica-se, em particular, aos exercícios a seguir.

Exercícios

Ex IV.3.1 Lembrar que, se $0 \le r < 1$, a fórmula para a soma dos termos de uma série geométrica garante-nos que

$$\sum_{p\in\mathbb{N}_0} r^p = \frac{1}{1-r} < +\infty.$$

---

[224]Valerá a pena referir o facto de só agora sabermos, num contexto puramente analítico, a existência de uma primitiva para a função "puramente analítica" $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que a y associa $\frac{1}{1+y^2}$. Analoga observação poderia ter sido feita, relativamente à função $]-1,1[\, \to \mathbb{R}$ que a y associa $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, a propósito de IV.3.28.

Tendo isso em conta, mostrar que se $x \in \mathbb{R}$ verifica $|x| < 1$ então

$$\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n}\Big)(1-x) = x - \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)} x^n,$$

ondo os somatórios envolvidos correspondem a famílias somáveis de números reais. **Nota:** Apesar de, como se verificou na alínea b) de III.4.40, o somatório envolvido no primeiro membro ter como soma $-\ln(1-x)$, isso é irrelevante para a resolução do exercício, que involve apenas a utilização das propriedades das famílias somáveis estudadas nesta secção.

Ex IV.3.2 Lembremos que a fórmula para a soma dos termos de uma série geométrica diz-nos que, se $x \in \mathbb{R}$ com $|x| < 1$, então

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x^p = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

Calcular de duas maneiras distintas o somatório

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0} x^{p+q}$$

de modo a deduzir a igualdade

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Ex IV.3.3 **(Complementos sobre as desigualdades envolvendo a séries alternadas decrescentes)** Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sucessão decrescente (no sentido lato) de reais maiores ou iguais a 0. Generalizando o que foi estabelecido em IV.3.11, mostrar que:

a) Para cada $p \geq 1$,

$$\sum_{\substack{n \text{ ímpar} \\ n\leq 2p-1}} (a_n - a_{n+1}) \leq \sum_{n \text{ ímpar}} (a_n - a_{n+1}) \leq \sum_{\substack{n \text{ ímpar} \\ n\leq 2p-3}} (a_n - a_{n+1}) + a_{2p-1}.$$

Sugestão: De preferência a adaptar a demonstração feita para provar o caso particular na alínea a) do resultado referido, será mais simples utilizar a propriedade associativa das somas de reais positivos e aplicar as desigualdades já estabelecidas à sucessão decrescente que a k associa $b_k = a_{2p-2+k}$.

b) Deduzir de a) que, no caso em que se tem também $a_n \to 0$, notando

$$\widehat{S}_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n$$

a soma parcial de ordem n da série alternada decrescente $\sum\limits_{p=1}^{\infty} (-1)^{p-1} a_p$, tem-se, para cada $p \geq 1$,

$$\widehat{S}_{2p} \leq \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p-1} a_p \leq \widehat{S}_{2p-1}$$

(a soma da série é maior ou igual a qualquer soma parcial de ordem par e menor ou igual a qualquer soma parcial de ordem ímpar).

Ex IV.3.4 **(Generalidades sobre $\boldsymbol{\zeta(2)}$)**[225] Lembrar que, como foi referido no exercício IV.2.3, tem-se

$$\zeta(2) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots,$$

onde a soma envolvida é a de uma família somável de números positivos. Utilizar uma mudança no conjunto de índices para mostrar que

$$\frac{1}{4}\zeta(2) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \text{ par}}} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \cdots$$

e deduzir daqui que

$$\frac{3}{4}\zeta(2) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \text{ ímpar}}} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots,$$

$$\frac{1}{2}\zeta(2) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots.$$

Ex IV.3.5 a) **(Um lema combinatório)** Lembrando a fórmula do binómio de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} {}^nC_p \, a^p b^{n-p},$$

onde ${}^nC_p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ são os coeficientes combinatórios, deduzir para cada $n \geq 1$ as identidades

$$\sum_{p=0}^{n} {}^nC_p = 2^n, \quad \sum_{\substack{p=0 \\ p \text{ ímpar}}}^{n} {}^nC_p = \sum_{\substack{p=0 \\ p \text{ par}}}^{n} {}^nC_p = 2^{n-1}.$$

Sugestão: No primeiro caso considerar $a = b = 1$ e no segundo caso considerar $a = -1$ e $b = 1$.

★ **b)** Lembrar que para cada $x \in \mathbb{R}$ os reais $\operatorname{sen}(x)$ e $\cos(x)$ podem ser

---

[225] Teremos ocasião de verificar adiante, no exercício IV.3.12, que se tem $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

caracterizados como as somas das famílias somáveis de números reais

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{p\in\mathbb{N}_0} (-1)^p \, \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!},$$
$$\cos(x) = \sum_{p\in\mathbb{N}_0} (-1)^p \, \frac{x^{2p}}{(2p)!}.$$

Calcular de duas maneiras diferentes o somatório

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0} (-1)^{p+q} \, \frac{x^{2p+1}\times x^{2q}}{(2p+1)!(2q)!}$$

de modo a obter de novo a fórmula

$$\operatorname{sen}(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x).$$

Ex IV.3.6 **(Visão alternativa sobre a decomposição em série de $\ln(1-x)$)**
a) Verificar que se pode definir uma função $\varphi\colon]-1,1[\, \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^{k-1} \, \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots,$$

onde o somatório envolvido é o de uma família somável, e que esta função é derivável e com

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Sugestão: Apesar de não se conseguir aplicar diretamente o resultado de derivabilidade das funções definidas como somas (cf. IV.3.20), isso já é possível se considerarmos a restrição de φ a um intervalo do tipo $]-r,r[$, onde $0<r<1$ é arbitrário.
b) Deduzir de a) que, para cada $x\in\,]-1,1[$

$$\ln(1+x) = \varphi(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots,$$

tendo em conta o facto de termos funções com uma mesma derivada e que coincidem para $x=0$.
★ **c)** Utilizando a propriedade associativa, concluir que se tem, para cada x em $[0,1[$,

$$\ln(1+x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} f_k(x),$$

onde

$$f_k(x) = \frac{x^{2k-1}}{2k-1} - \frac{x^{2k}}{2k} \geq 0$$

e que cada $f_k\colon [0,1[\to [0,+\infty[$ é crescente e tem limite $\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}$ quando $x \to 1$. Considerando uma sucessão crescente de reais em $[0,1[$ com limite 1, utilizar o teorema da convergência monótona (cf. IV.2.16) para deduzir que

$$\ln(2) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right),$$

onde o somatório é o de uma família somável de parcelas positivas.
★ **d)** Reobter a partir de c) e de IV.3.11 a decomposição em série[226]

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\,\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

(a série é convergente, embora não tenhamos uma família somável).

Ex IV.3.7 **(Visão alternativa sobre a decomposição em série de arctan($\boldsymbol{x}$))**
a) Verificar que se pode definir uma função $\varphi\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^{k-1}\,\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots,$$

onde o somatório envolvido é o de uma família somável, e que esta função é derivável e com

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Sugestão: Apesar de não se conseguir aplicar diretamente o resultado de derivabilidade das funções definidas como somas (cf. IV.3.20), isso já é possível se considerarmos a restrição de φ a um intervalo do tipo $]-r,r[$, onde $0 < r < 1$ é arbitrário.
b) Deduzir de a) que, para cada $x \in]-1,1[$

$$\arctan(x) = \varphi(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots,$$

tendo em conta o facto de termos funções com uma mesma derivada e que coincidem para $x = 0$.
★ **c)** Utilizando a propriedade associativa, concluir que se tem, para cada x em $[0,1[$,

[226]Comparar com o que foi feito na alínea c) de III.4.40.

$$\arctan(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} f_k(x),$$

onde

$$f_k(x) = \frac{x^{4k-3}}{4k-3} - \frac{x^{4k-1}}{4k-1} \geq 0$$

e que cada $f_k\colon [0,1[\to [0,+\infty[$ é crescente e tem limite $\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k-1}$ quando $x \to 1$. Considerando uma sucessão crescente de reais em $[0,1[$ com limite 1, utilizar o teorema da convergência monótona (cf. IV.2.16) para deduzir que

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \Big(\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k-1}\Big),$$

onde o somatório é o de uma família somável de parcelas positivas.
★ **d)** Reobter a partir de c) e de IV.3.11 a decomposição em série[227]

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\,\frac{1}{2k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

(a série é convergente, embora não tenhamos uma família somável).

Ex IV.3.8 **(Um curso rápido sobre os números complexos)** O estudante que encontrou os números complexos no ensino secundário poderá ter ficado com a ideia de que eles são algo de misterioso e que não têm nada a ver com os números reais que temos vindo a estudar neste curso. O objetivo deste exercício é apontar para uma construção explícita dos números complexos a partir do números reais, que faz, em particular, com que aqueles se possam considerar no contexto da Análise Matemática, em que estes têm um papel central.
Do ponto de vista que nos interessa, um *número complexo* é simplesmente um par ordenado (a,b) de números reais (par esse que se verá em breve corresponder ao número complexo que é usualmente escrito na forma $a+bi$). No conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos define-se uma soma e uma multiplicação do seguinte modo (que no caso da multiplicação parecerá um pouco artificial):

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d),$$
$$(a,b) \times (c,d) = (ac-bd, ad+bc).$$

Identifica-se ainda cada número real a com o número complexo $(a,0)$ e usa-se a notação i para o número complexo $(0,1)$.
a) Verificar as propriedades comutativas, associativas e distributiva das operações atrás definidas[228]:

[227]Comparar com o que foi feito no exercício III.4.14.
[228]Nenhuma das verificações é difícil mas algumas podem exigir alguma paciência.

$$\begin{aligned}(a,b)+(c,d) &= (c,d)+(a,b),\\ (a,b)\times(c,d) &= (c,d)\times(a,b),\\ ((a,b)+(c,d))+(x,y) &= (a,b)+((c,d)+(x,y)),\\ ((a,b)\times(c,d))\times(x,y) &= (a,b)\times((c,d)\times(x,y)),\\ ((a,b)+(c,d))\times(x,y) &= (a,b)\times(x,y)+(c,d)\times(x,y).\end{aligned}$$

Verificar ainda que $0=(0,0)$ é elemento neutro da soma, que $1=(1,0)$ é elemento neutro da multiplicação e que o complexo $i=(0,1)$ verifica

$$i\times i=(-1,0)=-1.$$

b) Verificar que a identificação de um número real a com o número complexo $(a,0)$ é compatível com as operações, isto é, que se tem

$$\begin{aligned}(a,0)+(c,0) &= (a+c,0),\\ (a,0)\times(c,0) &= (ac,0).\end{aligned}$$

Verificar ainda, utilizando estas identificações, as fórmulas

$$\begin{aligned}a\times(c,d) &= (ac,ad),\\ a+bi &= (a,b).\end{aligned}$$

c) Para cada complexo $z=(a,b)=a+bi$, define-se o seu *conjugado* $\overline{z}=(a,-b)=a-bi$. Verificar que, dados $z=(a,b)$ e $w=(c,d)$, tem-se

$$\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w},\quad \overline{z\times w}=\overline{z}\times\overline{w}$$

e que

$$z+\overline{z}=2a,\quad z\times\overline{z}=a^2+b^2$$

(dois números reais, o segundo dos quais é maior ou igual a 0 e é 0 apenas para $z=0$).
d) Verificar que, analogamente ao que acontece no contexto dos reais, a soma e a multiplicação admitem operações inversas (a segunda parcialmente definida). Mais precisamente, dados $z=a+bi$ e $w=c+di$ existe um único complexo que somado com w dá z, nomeadamente

$$z-w=(a-c)+(b-d)i$$

e, no caso em que $w\neq 0$, existe um único complexo que multiplicado por w dá z, nomeadamente

$$\frac{z}{w}=\frac{1}{w\times\overline{w}}\times(z\times\overline{w})$$

(a fração no segundo membro refere o inverso de $w\times\overline{w}$ enquanto número real).
★ **e)** Define-se o *módulo* ou *valor absoluto* do complexo $z=(a,b)=a+bi$ por

$$|z| = \sqrt{z \times \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Verificar que, no caso em que $z = (a, 0)$ é real, esta definição coincide com a de valor absoluto de um número real e que, dados $z = (a, b) = a + bi$ e $w = (c, d) = c + di$, tem-se

$$|z \times w| = |z| \times |w|, \quad |z + w| \le |z| + |w|.$$

Sugestão: A igualdade resulta facilmente da caracterização do valor absoluto que envolve a multiplicação pelo conjugado. A desigualdade tem uma justificação geométrica simples mas a justificação puramente analítica é um pouco mais artificiosa. Para a obter, elevar ambos os membros ao quadrado, simplificar, elevar de novo ambos os membros ao quadrado e justificar e utilizar a igualdade

$$(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

para concluir que

$$(ac + bd)^2 \le (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

Ex IV.3.9 **(A forma trigonométrica dos números complexos revisitada)**

a) Seja $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, um número complexo diferente de 0 e seja $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ o seu valor absoluto. Deduzir de IV.3.29 a existência de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$z = r(\cos(\alpha) + i\mathrm{sen}(\alpha))$$

(*forma trigonométrica* de z), número α esse que pode sempre ser escolhido em $]-\pi, \pi]$.

b) Deduzir das fórmulas de aditividade das funções trigonométricas em IV.3.24 que se tem

$$(\cos(\alpha) + i\mathrm{sen}(\alpha)) \times (\cos(\beta) + i\mathrm{sen}(\beta)) = (\cos(\alpha + \beta) + i\mathrm{sen}(\alpha + \beta))$$

e deduzir daqui que

$$\frac{1}{(\cos(\alpha) + i\mathrm{sen}(\alpha))} = \cos(-\alpha) + i\mathrm{sen}(-\alpha) = \overline{(\cos(\alpha) + i\mathrm{sen}(\alpha))}.$$

c) Deduzir de b), por indução em $n \in \mathbb{N}$, a *fórmula de Moivre*

$$(\cos(\alpha) + i\mathrm{sen}(\alpha))^n = \cos(n\alpha) + i\mathrm{sen}(n\alpha)$$

e concluir seguidamente que esta fórmula é válida, mais geralmente, para $n \in \mathbb{Z}$.

d) Verificar que para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ existe um, e um só, $p \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha - 2p\pi \in]-\pi, \pi]$ e que então, sendo $\alpha_0 = \alpha - 2p\pi$,

$$\cos(\alpha) + i\mathrm{sen}(\alpha) = \cos(\alpha_0) + i\mathrm{sen}(\alpha_0).$$

Sugestão: Se $\frac{\alpha+\pi}{2\pi} \in \mathbb{Z}$ tomar $p = \frac{\alpha+\pi}{2\pi} - 1$, caso contrário tomar

$$p = \mathrm{int}\big(\frac{\alpha + \pi}{2\pi}\big).$$

e) Mostrar que, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\cos(\alpha) + i\mathrm{sen}(\alpha) = \cos(\beta) + i\mathrm{sen}(\beta)$$

se, e só se, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha - \beta = 2q\pi$.

Ex IV.3.10 **(Soma de n termos de uma progressão geométrica de números complexos)** Sejam z e w números complexos, com $w \neq 1$, e consideremos a *progressão geométrica* de n termos com primeiro termo z e razão w, isto é, a sequência dos n números complexos

$$z\,,\; z \times w\,,\; z \times w^2\,, \cdots,\; z \times w^{n-1}.$$

Adaptar trivialmente o que foi feito, no contexto dos reais, em IV.1.15 de modo a deduzir que, também neste caso, a soma dos termos da progressão é

$$z + z \times w + z \times w^2 + \cdots + z \times w^{n-1} = \frac{z \times (1 - w^n)}{1 - w}.$$

★ Ex IV.3.11 **(Exemplo de soma de uma série trigonométrica)** Seja $r \in \mathbb{R}$ com $|r| < 1$. Mostrar que, para cada $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos(2n\pi x) &= \frac{1 - r\cos(2\pi x)}{(1 - r\cos(2\pi x))^2 + r^2\mathrm{sen}^2(2\pi x)} = \\ &= \frac{1 - r\cos(2\pi x)}{1 + r^2 - 2r\cos(2\pi x)},\end{aligned}$$

onde a soma no primeiro membro é a de uma família somável de números reais. Reparar que esta igualdade implica trivialmente que

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(2n\pi x) = \frac{r\cos(2\pi x) - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(2\pi x)}.$$

Sugestão: Apesar de a fórmula a demonstrar só envolver números reais, a sua justificação mais natural passa pela consideração de números complexos. Reparar que a soma pedida pode ser calculada como o limite para $p \to +\infty$ das somas parciais

$$S_p = \sum_{n=0}^{p} r^n \cos(2n\pi x),$$

e que estas são as partes reais das somas de números complexos

$$\widehat{S}_p = \sum_{n=0}^{p} r^n \left(\cos(2n\pi x) + i\mathrm{sen}(2n\pi x)\right),$$

que envolvem uma progressão geométrica de $p+1$ parcelas com primeira parcela igual a 1 e razão $r\left(\cos(2\pi x) + i\mathrm{sen}(2\pi x)\right)$. Utilizando a fórmula para a soma dos termos de uma tal progressão geométrica, e recorrendo ao método habitual de transformar o denominador num número real, obter a fórmula

$$S_p = \frac{1 - r\cos(2\pi x) - r^{p+1}\cos(2(p+1)\pi x) + r^{p+2}\cos(2p\pi x)}{(1 - r\cos(2\pi x))^2 + r^2\mathrm{sen}^2(2\pi x)}.$$

★★ Ex IV.3.12 **($\boldsymbol{\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}}$)** Tendo presente a definição e as propriedades de $\zeta(2)$ referidas no exercício IV.3.4, verificar que, para cada $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$,

$$x^2 = \frac{1}{2\pi^2}\,\zeta(2) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \,\frac{1}{\pi^2 n^2}\cos(2n\pi x)$$

e, considerando $x = \frac{1}{2}$ na igualdade anterior, deduzir que se tem $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.
Sugestão generosa: Percorrer sucessivamente os seguintes passos:
a) Definir uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\textbf{(1)} \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi^2}\,\zeta(2) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \,\frac{1}{\pi^2 n^2}\cos(2n\pi x),$$

reparar que $f(0) = 0$ e que f é uma função par e deduzir do resultado IV.3.19, sobre a continuidade dum somatório, que f é uma função contínua.
b) Tendo em conta a paridade e a continuidade de f, para estabelecer a identidade pretendida basta provar que ela é válida quando x toma uma valor x_0 arbitrário em $]0, \frac{1}{2}[$ e para isso bastará provar que, dado $\delta > 0$ arbitrário, tem-se $|f(x_0) - x_0^2| < \delta$. No que se segue considerar-se-á $x_0 \in\,]0, \frac{1}{2}[$ e $\delta > 0$ fixados.
c) Para cada $0 < r < 1$ definir uma função $f_r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\textbf{(2)} \qquad f_r(x) = \frac{1}{2\pi^2}\,\zeta(2) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, r^n \,\frac{1}{\pi^2 n^2}\cos(2n\pi x)$$

(comparar com (1)). Utilizar o teorema da convergência dominada para limites de funções (cf. IV.3.18) para verificar que, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \lim_{r \to 1} f_r(x)$$

e deduzir do teorema de derivação de somatórios (cf. IV.3.20) e das fórmulas obtidas no exercício IV.3.11 que cada f_r é duas vezes derivável e com

$$\begin{aligned} f_r'(x) &= -2\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n\,\frac{1}{\pi n}\,\text{sen}(2n\pi x),\\ f_r''(x) &= -4\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n\cos(2n\pi x)\\ &= \frac{4r\cos(2\pi x)+4r^2}{1+r^2+2r\cos(2\pi x)}, \end{aligned}$$

em particular $f_r'(0)=0$.

d) Deduzir de c) que, para cada $x\in[0,x_0]$,

$$|f_r''(x)-2| = \frac{2-2r^2}{(1-r)^2+2r(1+\cos(2\pi x))} \le \frac{2-2r^2}{2rm},$$

onde $m>0$ é o mínimo de $1+\cos(2\pi x)$ para $x\in[0,x_0]$. Concluir que se pode fixar $0<r<1$ de modo que

$$|f(x_0)-f_r(x_0)|<\frac{\delta}{3},\quad |f_r(0)|=|f_r(0)-f(0)|<\frac{\delta}{3}$$

e $|f_r''(x)-2|<\delta$ para cada $x\in[0,x_0]$ e, aplicando a fórmula de Maclaurin de ordem 1, com o resto na forma de Lagrange, à função $x\mapsto f_r(x)-x^2$, deduzir que se tem, como se pretendia,

$$\begin{aligned} |f(x_0)-x_0^2| &\le |f(x_0)-f_r(x_0)|+|f_r(x_0)-x_0^2|\le\\ &< \frac{\delta}{3}+|f_r(0)+(f_r''(c)-2)\frac{x_0^2}{2}|<\frac{2\delta}{3}+\frac{\delta}{8}<\delta. \end{aligned}$$

§4. Propriedades elementares das séries de potências. Funções analíticas.

IV.4.1 Seja $(a_p)_{p\ge 0}$ uma família de números reais, indexada no conjunto $\mathbb{Z}_{\ge 0}$ dos inteiros positivos. A uma tal família fica associada uma função $f\colon X\to\mathbb{R}$ definida por

$$\textbf{(1)}\qquad f(x)=\sum_{p\ge 0}a_p\,x^p = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_px^p+\cdots,$$

cujo domínio X será considerado como sendo o conjunto dos $x\in\mathbb{R}$ para os quais a soma referida corresponde a uma família somável.[229] Repare-se que é trivial que esse domínio X inclui, pelo menos, o número real 0 (tendo-se

[229] Por vezes considera-se um domínio que pode ser "ligeiramente" maior, nomeadamente aquele que é constituído pelos x para os quais se obtém uma série convergente (onde o

$f(0) = a_0$). Dizemos que a função f definida por (1) é a função determinada pela *série de potências* associada à família $(a_p)_{p\geq 0}$ (seria mais próprio dizer "soma de potências" mas o uso consagrou a primeira das expressões) e que X é o *domínio de somabilidade* (ou *intervalo de somabilidade*[230]) da série de potências.

Tal como acontecia quando introduzimos a noção de série em III.4.32, podemos considerar que a série de potências é simplesmente a família $(a_p)_{p\geq 0}$ mas ao referi-la como série de potências queremos significar que é a função associada f que nos interessa sendo então frequente referirmos a série de potências pela expressão

$$\sum_{p\geq 0} a_p\, x^p,$$

ou

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_px^p + \cdots$$

podendo naturalmente omitir-se o coeficente a_p no caso em que este seja 1. Esta expressão também designa o valor da função f associada num ponto x do domínio X, sendo normalmente claro do contexto em qual dos dois sentidos a utilizamos (comparar mais uma vez com o que foi dito em III.4.32, no contexto das séries, a propósito da notação $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$).

IV.4.2 É cómodo, com frequência, considerar como séries de potências certas somas do mesmo tipo mas em que o conjunto dos índices é uma parte própria de $\mathbb{Z}_{\geq 0}$, como, por exemplo,

$$\sum_{p\geq 5} \frac{1}{p}\, x^p \quad \text{ou} \quad \sum_{p \text{ ímpar}} x^p.$$

Ao fazê-lo, estamos a subentender que consideramos a série de potências cujos coeficientes correspondentes aos índices não explicitados são todos iguais a 0. Repare-se que, tendo em conta as propriedades de associatividade dos somatórios (cf. IV.3.13), o intervalo de somabilidade da série de potências que está implícita coincide com o conjunto dos x para os quais a família explicitada é somável e, para os valores de x nesse intervalo, o valor em x da função associada coincide com a soma da família explicitada (a soma dos termos omitidos é igual a 0).

Como caso particular deste tipo de séries de potências com um conjunto de índices estritamente contido em $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ temos aquele em que o conjunto de índices é finito (trata-se, de certo modo, de séries de potências "degene-

---

termo de ordem n é $a_{n-1}x^{n-1}$), mas não é o que faremos adiante. Pelo contrário, não há inconveniente, e por vezes é útil, em considerar por restrição um domínio mais reduzido.

[230]Vamos verificar em IV.4.3 que se trata de um intervalo.

radas”). É claro que, para uma tal série de potências o domínio de somabilidade é $\mathbb{R}$ e a função $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que ela define é uma função polinomial.

IV.4.3 **(O raio de convergência)** Seja $(a_p)_{p\geq 0}$ uma família de números reais e consideremos a correspondente série de potências

$$\sum_{p\geq 0} a_p x^p.$$

Seja $\mathcal{R}$ a classe dos reais $r \geq 0$ tais que o conjunto dos $|a_p|r^p$, com $p \geq 0$, é majorado. Tem-se então que $\mathcal{R}$ é um intervalo com elemento mínimo 0 e, sendo $0 \leq R \leq +\infty$ o supremo de $\mathcal{R}$, o intervalo de somabilidade X da série de potências é um dos intervalos $]-R, R[$ ou $[-R, R]$. Dizemos que R é o *raio de convergência* (ou *raio de somabilidade*) da série de potências.

Dem: É imediato que $0 \in \mathcal{R}$, sendo portanto o mínimo de $\mathcal{R}$. O facto de $\mathcal{R}$ ser um intervalo resulta de que, se $r \in \mathcal{R}$ e $0 \leq r' \leq r$, então vem também $r' \in \mathcal{R}$, por ser $|a_p|r'^p \leq |a_p|r^p$, para cada p. Vamos dividir em três partes a justificação de que o intervalo de somabilidade X é efetivamente um dos intervalos indicados.

1) Suponhamos que x pertence ao intervalo de somabilidade X da série de potências. O que vimos em IV.3.2 garante a existência de uma parte finita I de $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $|a_p x^p| \leq 1$ para cada $p \notin I$ e então o máximo entre 1 e o maior dos reais $|a_p x^p|$ com $p \in I$ é um majorante do conjunto dos $|a_p||x|^p = |a_p x^p|$. Concluímos assim $|x|$ é um dos elementos de $\mathcal{R}$, portanto $|x| \leq R$.

2) Suponhamos agora que $|x| < R$. Podemos então considerar $r \in \mathcal{R}$ tal que $|x| < r$, portanto $\frac{|x|}{r} < 1$. Considerando $M \geq 0$ tal que, para cada $p \geq 0$, $|a_p|r^p \leq M$, vemos agora, reparando que $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ é a união da sucessão crescente de subconjuntos $\{0, 1, \ldots, n\}$ com $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e lembrando a fórmula para a soma dos termos de uma progressão geométrica, que

$$\begin{aligned}
\sum_{p\geq 0} |a_p x^p| &= \sum_{p\geq 0} |a_p||x|^p = \sum_{p\geq 0} |a_p|\, r^p \left(\frac{|x|}{r}\right)^p \leq \sum_{p\geq 0} M \left(\frac{|x|}{r}\right)^p = \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} M \left(\frac{|x|}{r}\right)^p = \lim_{n\to+\infty} \frac{M\left(1 - \left(\frac{|x|}{r}\right)^{n+1}\right)}{1 - \frac{|x|}{r}} = \\
&= \frac{M}{1 - \frac{|x|}{r}} < +\infty,
\end{aligned}$$

por outras palavras, a família dos $a_p x^p$ é somável, ou seja, $x \in X$.

3) Verificámos assim que $]-R, R[\subset X \subset [-R, R]$, e portanto, uma vez que $x \in X \Leftrightarrow -x \in X$ (por ser $|a_p x^p| = |a_p(-x)^p|$), X é um dos intervalos $[-R, R]$ ou $]-R, R[$, conforme R pertença ou não a X. □

IV.4.4 **(Nota)** O mesmo raciocínio que foi feito na parte 1) da demonstração, mas utilizando III.4.33 em vez de IV.3.2, mostra que se a família dos $a_p x^p$ definir uma série convergente (mesmo que não tenhamos uma família somável), tem-se ainda $x \in [-R, R]$. O domínio "ligeiramente maior" referido na nota de pé de página 229 (a que se costuma dar o nome de *domínio de convergência* ou *intervalo de convergência*) só pode assim ser diferente do intervalo de somabilidade X quando este último for o intervalo aberto $]-R, R[$, com $R < +\infty$. Nesse caso, aquele pode ser qualquer dos intervalos $]-R, R[$, $]-R, R]$, $[-R, R[$ ou $[-R, R]$ (o domínio de convergência já não é necessariamente simétrico). Fica assim explicada a palavra "ligeiramente" que aparece na referida nota de pé de página.

Vamos agora estudar alguns critérios que permitem com frequência determinar de forma mais efetiva o raio de convergência de uma série de potências. O primeiro critério será estudado em IV.4.5 numa versão com hipóteses desnecessariamente fortes, tendo em atenção o estudante que se sinta atemorizado com a noção de sublimite superior de uma sucessão que, apesar de introduzida neste texto na secção I.6, não foi muito utilizada desde essa introdução. Estudaremos adiante em IV.4.8 a versão mais geral deste critério que, do ponto de vista formal, torna inútil o resultado particular IV.4.5.

IV.4.5 **(Critério da raíz)** Seja $(a_p)_{p\geq 0}$ uma família de números reais e consideremos a correspondente série de potências

$$\sum_{p\geq 0} a_p x^p.$$

Suponhamos que existe o limite

$$\lim_{\substack{p\to+\infty \\ p\geq 1}} \sqrt[p]{|a_p|} = a \in [0, +\infty].$$

Tem-se então:
a) Se $a \in]0, +\infty[$, então o raio de convergência da série de potências é $R = \frac{1}{a}$.
b) Se $a = 0$, então o raio de convergência da série de potências é $R = +\infty$, por outras palavras, o intervalo de somabilidade é $\mathbb{R}$.
c) Se $a = +\infty$, então o raio de convergência da série de potências é $R = 0$, por outras palavras, o intervalo de somabilidade é $\{0\}$.
Dem: Vamos dividir a demonstração em várias partes:
1) Vamos começar por provar que, se $a < +\infty$ e $r \geq 0$ é tal que $ra < 1$, então o conjunto dos $|a_p|r^p$, com $p \geq 0$, é majorado, isto é, nas notações de IV.4.3, $r \in \mathcal{R}$.
Subdem: Uma vez que

$$\lim_{\substack{p\to+\infty\\ p\ge 1}} r\sqrt[p]{|a_p|} = ra < 1,$$

podemos considerar uma vizinhança de ra constituída por reais menores que 1 e deduzir a existência de $p_0 \ge 1$ tal que, para cada $p \ge p_0$, $r\sqrt[p]{|a_p|} < 1$, e portanto também

$$|a_p|\, r^p = \left(r\sqrt[p]{|a_p|}\right)^p < 1.$$

O máximo entre 1 e o maior dos $|a_p|\, r^p$ com $p < p_0$ é assim um majorante do conjunto de todos os $|a_p|\, r^p$.

2) Vamos agora mostrar que, se $a = +\infty$ e $r > 0$ ou se $a < +\infty$ e $ra > 1$, então $r \notin \mathcal{R}$.

Subdem: Em ambos os casos tem-se

$$\lim_{\substack{p\to+\infty\\ p\ge 1}} r\sqrt[p]{|a_p|} > 1$$

(no primeiro caso o limite é $+\infty$ e no segundo caso é ra) pelo que podemos fixar $b \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{\substack{p\to+\infty\\ p\ge 1}} r\sqrt[p]{|a_p|} > b > 1$$

e, considerando uma vizinhança do limite constituída por reais maiores que b, vemos que existe $p_0 \ge 1$ tal que, para cada $p \ge p_0$, $r\sqrt[p]{|a_p|} > b$, e portanto também

$$|a_p|\, r^p = \left(r\sqrt[p]{|a_p|}\right)^p > b^p.$$

Uma vez que $b^p \to +\infty$ concluímos que se tem também $|a_p|\, r^p \to +\infty$, em particular o conjunto dos $|a_p|\, r^p$ não é majorado e portanto $r \notin \mathcal{R}$.

3) Vamos agora verificar como as conclusões de 1) e 2) implicam as afirmações feitas no enunciado.

Comecemos por examinar o caso em que $0 < a < +\infty$. O que vimos em 1) implica que $R \ge \frac{1}{a}$ visto que, se isso não acontecesse, podíamos considerar r com $R < r < \frac{1}{a}$ e então, por ser $ra < 1$, vinha $r \in \mathcal{R}$, contrariando o facto de r ser maior que o supremo R de $\mathcal{R}$. O que vimos em 2) implica que para cada $r \in \mathcal{R}$ tem $ra \le 1$, donde $r \le \frac{1}{a}$ e daqui resulta que o supremo R de $\mathcal{R}$ verifica também $R \le \frac{1}{a}$, e portanto $R = \frac{1}{a}$.

Examinemos agora o caso em que $a = 0$. Para cada $r \ge 0$ em $\mathbb{R}$ tem $ra = 0 < 1$ pelo que, tendo em conta o que foi visto em 1), $r \in \mathcal{R}$, o que implica que $\mathcal{R} = [0, +\infty[$ e $R = +\infty$.

Examinemos enfim o caso em que $a = +\infty$. O que vimos em 2) diz-nos que se tem $r \notin \mathcal{R}$ para cada $r > 0$, e portanto $\mathcal{R} = \{0\}$ e $R = 0$. □

IV.4.6 **(Critério da razão)** Seja $(a_p)_{p\geq 0}$ uma família de números reais, com $a_p \neq 0$, e consideremos a correspondente série de potências

$$\sum_{p\geq 0} a_p x^p.$$

Suponhamos que existe o limite

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{|a_p|}{|a_{p+1}|} = R \in [0, +\infty].$$

Tem-se então que R é o raio de convergência da série de potências.
Dem: Considerando o inverso da sucessão referida, restrita a $\mathbb{N}$, vemos que

$$\lim_{\substack{p\to+\infty\\ p\geq 1}} \frac{|a_{p+1}|}{|a_p|} = a \in [0, +\infty],$$

com $a = \frac{1}{R}$, se $R \in]0, +\infty[$, $a = +\infty$, se $R = 0$, e $a = 0$, se $R = +\infty$, pelo que, tendo em conta II.2.19, tem-se também

$$\lim_{\substack{p\to+\infty\\ p\geq 1}} \sqrt[p]{|a_p|} = a.$$

A conclusão resulta agora diretamente de IV.4.5. □

IV.4.7 **(Exemplos) a)** Consideremos a série de potências

$$\sum_{p\geq 0} \frac{1}{p+1}\, x^p.$$

O critério mas simples de aplicar para determinar o raio de convergência é o da razão. Com efeito

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{a_p}{a_{p+1}} = \lim \frac{\frac{1}{p+1}}{\frac{1}{p+2}} = \lim \frac{p+2}{p+1} = 1,$$

o que nos permite concluir que o raio de convergência é 1. Uma vez que, para $x = 1$, obtemos a soma

$$\sum_{p\geq 0} \frac{1}{p+1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} = +\infty,$$

concluímos que o intervalo de somabilidade desta série é $]-1, 1[$.
b) Consideremos a série de potências

$$\sum_{p\geq 3} \frac{1}{p^2}\, x^p.$$

Mais uma vez o critério da razão é o mais fácil de utilizar, embora tenhamos que ter algum cuidado uma vez que este pressupõe que os coeficientes a_p são todos diferentes de 0 e neste caso $a_0 = a_1 = a_2 = 0$. O que podemos fazer para ultrapassar esta dificuldade é reparar que, tendo em conta as propriedades de associatividade (cf. IV.3.13) os valores de x para os quais esta família é somável coincidem com aqueles para os quais é somável qualquer família $\sum\limits_{p\geq 0} a_p x^p$ com $a_p = \frac{1}{p^2}$ para $p \geq 3$ podendo, por exemplo, considerar-se aquela com $a_0 = a_1 = a_2 = 1$, que são diferentes de 0. Obtemos então

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{a_p}{a_{p+1}} = \lim_{\substack{p\to+\infty\\ p\geq 3}} \frac{a_p}{a_{p+1}} = \lim_{\substack{p\to+\infty\\ p\geq 3}} \frac{\frac{1}{p^2}}{\frac{1}{(p+1)^2}} = \lim_{\substack{p\to+\infty\\ p\geq 3}} \frac{(p+1)^2}{p^2} = 1$$

e, uma vez que, para $x = 1$, $\sum\limits_{p\geq 3} \frac{1}{p^2} < +\infty$, como já verificámos em vários exercícios, concluímos que o intervalo de somabilidade da série é $[-1, 1]$.

c) Consideremos a série de potências

$$\sum_{p\geq 0} \frac{1}{p!}\, x^p.$$

Tem-se

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{a_p}{a_{p+1}} = \lim \frac{\frac{1}{p!}}{\frac{1}{(p+1)!}} = \lim\, (p+1) = +\infty$$

pelo que, mais uma vez pelo critério da razão, o intervalo de somabilidade é $\mathbb{R}$. Este resultado não é de espantar, tendo em conta o estudo da série de Maclaurin da função exponencial feito em III.4.41. Note-se que, se quisermos ser cuidadosos, e uma vez que as séries foram então estudadas tendo $\mathbb{N}$ como conjunto de índices, devemos utilizar uma mudança de índices:

$$\sum_{p\geq 0} \frac{1}{p!}\, x^p = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(n-1)!}\, x^{n-1} = e^x.$$

d) Consideremos a série de potências

$$\sum_{p\geq 0} p!\, x^p.$$

Tem-se

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{a_p}{a_{p+1}} = \lim \frac{p!}{(p+1)!} = \lim \frac{1}{p+1} = 0$$

pelo que, ainda pelo critério da razão, o intervalo de somabilidade é $\{0\}$.
e) Consideremos agora a série de potências

$$\sum_{p\geq 0} a_p\, x^p,$$

onde

$$a_p = \begin{cases} \frac{1}{2^p}, & \text{se } p \text{ é par} \\ \frac{1}{2^{p+2}}, & \text{se } p \text{ é ímpar}' \end{cases}$$

série cujos primeiros termos são assim

$$1 + \frac{1}{8}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{32}x^3 + \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{128}x^5 + \frac{1}{64}x^6 + \cdots.$$

Tem-se

$$\frac{a_p}{a_{p+1}} = \begin{cases} 8, & \text{se } p \text{ é par} \\ \frac{1}{2}, & \text{se } p \text{ é ímpar}' \end{cases}$$

o que mostra que a sucessão das razões $\frac{a_p}{a_{p+1}}$ admite os sublimites distintos 8 e $\frac{1}{2}$ e não tem assim limite. O critério da razão não é portanto aplicável. Podemos, no entanto, aplicar o critério da raíz para determinar o raio de convergência: Tem-se, para cada $p \geq 1$,

$$\sqrt[p]{|a_p|} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } p \text{ é par} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p+2}{p}}, & \text{se } p \text{ é ímpar} \end{cases}$$

pelo que a sucessão destas raízes tem limite $\frac{1}{2}$, por isso suceder às suas restrições ao conjunto dos pares maiores ou iguais a 2 e ao conjunto dos ímpares. Podemos assim concluir que esta série tem raio de convergência igual a 2. De facto, é fácil concluir que o intervalo de somabilidade é o intervalo aberto $]-2,2[$ visto que quando se substitui x por 2 obtém-se uma família que a cada p associa 1, se p é par, e $\frac{1}{4}$, se p é ímpar, família que não é somável por ter todos os termos maiores a iguais a $\frac{1}{4}$ (alternativamente, por ter infinitos termos maiores ou iguais a 1).

IV.4.8 **(Critério da raíz revisitado)** Seja $(a_p)_{p\geq 0}$ uma família de números reais e consideremos a correspondente série de potências

$$\sum_{p\geq 0} a_p x^p.$$

Consideremos o sublimite máximo

$$\limsup_{\substack{p\to+\infty\\ p\geq 1}} \sqrt[p]{|a_p|} = a \in [0,+\infty]\,.^{231}$$

Tem-se então:
a) Se $a \in]0,+\infty[$, então o raio de convergência da série de potências é $R = \frac{1}{a}$.
b) Se $a = 0$, então o raio de convergência da série de potências é $R = +\infty$, por outras palavras, o intervalo de somabilidade é $\mathbb{R}$.
c) Se $a = +\infty$, então o raio de convergência da série de potências é $R = 0$, por outras palavras, o intervalo de somabilidade é $\{0\}$.[232]
Dem: Vamos dividir a demonstração em várias partes:
1) Vamos começar por provar que, se $a < +\infty$ e $r \geq 0$ é tal que $ra < 1$, então o conjunto dos $|a_p|r^p$, com $p \geq 0$, é majorado, isto é, nas notações de IV.4.3, $r \in \mathcal{R}$.
Subdem: Tendo em conta a caracterização do sublimite máximo de uma sucessão na alínea a) de I.6.10, podemos definir, para cada $p \geq 1$

$$b_p = \sup\left\{\sqrt[k]{|a_k|}\right\}_{k\geq p}$$

e então a sucessão dos b_p é decrescente e com a como ínfimo do conjunto dos seus termos. Afastando já o caso trivial em que $r = 0$ (sabemos que $0 \in \mathcal{R}$), o facto de se ter $a < \frac{1}{r}$ implica a existência de $p_0 \geq 1$ tal que $b_{p_0} < \frac{1}{r}$ e então para cada $p \geq p_0$ vem

$$\sqrt[p]{|a_p|} \leq b_p \leq b_{p_0} < \frac{1}{r},$$

donde $r\sqrt[p]{|a_p|} < 1$, e portanto também

$$|a_p|\, r^p = \left(r\sqrt[p]{|a_p|}\right)^p < 1.$$

O máximo entre 1 e o maior dos $|a_p|\, r^p$ com $p < p_0$ é assim um majorante do conjunto de todos os $|a_p|\, r^p$.
2) Vamos agora mostrar que, se $a = +\infty$ e $r > 0$ ou se $a < +\infty$ e $ra > 1$, então $r \notin \mathcal{R}$.
Subdem: Vamos utilizar o facto de o sublimite máximo, como qualquer sublimite, ser o limite da restrição da sucessão a um subconjunto I de $\mathbb{N}$ ao qual $+\infty$ é aderente, isto é, um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. Em ambos os casos tem-se

[231] Este, ao contrário do limite em IV.4.5, pode sempre ser considerado. É claro que, quando existe limite, o limite coincide com o sublimite máximo.
[232] Reapre-se que as conclusões são exatamente as mesmas que em IV.4.5.

$$\lim_{\substack{p\to+\infty\\ p\in I}} r\sqrt[p]{|a_p|} > 1$$

(no primeiro caso o limite é $+\infty$ e no segundo caso é ra) pelo que podemos fixar $b \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{\substack{p\to+\infty\\ p\in I}} r\sqrt[p]{|a_p|} > b > 1$$

e, considerando uma vizinhança do limite constituída por reais maiores que b, vemos que existe $p_0 \in I$ tal que, para cada $p \geq p_0$ em I, $r\sqrt[p]{|a_p|} > b$, e portanto também

$$|a_p|\, r^p = \left(r\sqrt[p]{|a_p|}\right)^p > b^p.$$

Uma vez que

$$\lim_{\substack{p\to+\infty\\ p\in I}} b^p = +\infty,$$

concluímos que se tem também

$$\lim_{\substack{p\to+\infty\\ p\in I}} |a_p|\, r^p = +\infty,$$

em particular o conjunto dos $|a_p|\, r^p$ não é majorado e portanto $r \notin \mathcal{R}$.

3) Vamos agora verificar como as conclusões de 1) e 2) implicam as afirmações feitas no enunciado.[233]

Comecemos por examinar o caso em que $0 < a < +\infty$. O que vimos em 1) implica que $R \geq \frac{1}{a}$ visto que, se isso não acontecesse, podíamos considerar r com $R < r < \frac{1}{a}$ e então, por ser $ra < 1$, vinha $r \in \mathcal{R}$, contrariando o facto de r ser maior que o supremo R de $\mathcal{R}$. O que vimos em 2) implica que para cada $r \in \mathcal{R}$ tem $ra \leq 1$, donde $r \leq \frac{1}{a}$ e daqui resulta que o supremo R de $\mathcal{R}$ verifica também $R \leq \frac{1}{a}$, e portanto $R = \frac{1}{a}$.

Examinemos agora o caso em que $a = 0$. Para cada $r \geq 0$ em $\mathbb{R}$ tem $ra = 0 < 1$ pelo que, tendo em conta o que foi visto em 1), $r \in \mathcal{R}$, o que implica que $\mathcal{R} = [0, +\infty[$ e $R = +\infty$.

Examinemos enfim o caso em que $a = +\infty$. O que vimos em 2) diz-nos que se tem $r \notin \mathcal{R}$ para cada $r > 0$, e portanto $\mathcal{R} = \{0\}$ e $R = 0$. □

---

[233]Esta parte da demonstração é decalcada, sem qualquer modificação, da correspondente parte da demonstração de IV.4.5.

IV.4.9 **(Exemplo)** Consideremos a série de potências

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2n-1}\, x^{2n-1} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots,$$

ou seja, a definida pela família $(a_p)_{p\geq 0}$ com $a_p = 0$ se p é par e $a_p = \frac{1}{p}$ se p é ímpar. Vamos determinar o intervalo de somabilidade desta série de dois modos distintos.

1) Para cada $p \geq 1$, tem-se $\sqrt[p]{|a_p|} = 0$ se p é par e $\sqrt[p]{|a_p|} = \sqrt[p]{\frac{1}{p}}$ se p é ímpar. Uma vez que, para a sucessão $\sqrt[p]{\frac{1}{p}}$, com $p \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\frac{\frac{1}{p+1}}{\frac{1}{p}} = \frac{p}{p+1} \to 1,$$

concluímos, por II.2.19, que $\sqrt[p]{\frac{1}{p}} \to 1$. Vemos assim que a restrição da sucessão dos $\sqrt[p]{|a_p|}$, com $p \geq 1$, tem uma restrição ao conjunto dos ímpares com limite 1 e uma restrição ao conjunto dos pares identicamente 0, e portanto com limite 0, o que nos permite concluir que esta sucessão não tem limite mas tem 0 e 1 como únicos sublimites (cf I.6.6), tendo-se assim

$$\limsup_{p\geq 1} \sqrt[p]{|a_p|} = 1.$$

Podemos assim utilizar a versão do critério da raíz em IV.4.8 para deduzir que o raio de convergência desta série de potências é igual a 1. De facto, podemos afirmar que o intervalo de somabilidade é o intervalo aberto $]-1, 1[$ visto que, tomando $x = 1$, obtém-se a soma de números positivos

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$$

que é infinita uma vez que, se fosse finita também o seria a soma, com os termos majorados pelos daquela,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots$$

o que arrastava, pela propriedade associativa, que era finita a soma da série harmónica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots,$$

o que sabemos não acontecer.

2) Há uma maneira alternativa de determinar o intervalo de somabilidade desta série de potências. Começamos por observar que este intervalo coincide com o intervalo de somabilidade da série de potências

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2n-1}\, x^{2n-2} = 1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 + \cdots$$

visto que 0 está em qualquer intervalo de somabilidade e, se $x \neq 0$, cada uma das somas se obtém da outra multiplicando-a por uma constante (x ou $\frac{1}{x}$). Ora, esta última pode ser obtida a partir da soma

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2n-1}\, y^{n-1} = \sum_{p\geq 0} \frac{1}{2p+1}\, y^p$$

substituindo y por x^2. Uma vez que esta última pode ser estudada muito facilmente por utilização do critério da razão, concluindo-se que o seu intervalo de somabilidade é $]-1,1[$ (ter-se-ia que fazer um estudo análogo ao feito no método referido em 1) para deduzir que o intervalo é aberto), podemos concluir que o intervalo de somabilidade da série de que partimos é constituído pelos x tais que $x^2 \in\,]-1,1[$, sendo assim também o intervalo $]-1,1[$.

IV.4.10 **(Continuidade nas séries de potências)** Seja $(a_p)_{p\geq 0}$ uma família de números reais, indexada no conjunto $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ dos inteiros positivos e a correspondente função $f\colon X \to \mathbb{R}$ definida por

(1) $$f(x) = \sum_{p\geq 0} a_p\, x^p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_p x^p + \cdots,$$

cujo domínio X é o intervalo de somabilidade da série. Tem-se então que f é uma função contínua.

Dem: Vamos começar por supor que o intervalo de somabilidade X é fechado, isto é, que $X = [-R, R]$, onde R é o raio de convergência da série de potências. Tem-se assim $\sum\limits_{p\geq 0} y_p < +\infty$, para $y_p = |a_p| R^p$. Tem-se então, para cada $x \in X$, $f(x) = \sum\limits_{p\geq 0} f_p(x)$, onde as funções $f_p\colon X \to \mathbb{R}$, definidas por $f_p(x) = a_p x^p$, são contínuas e verificam $|f_p(x)| \leq y_p$. Aplicando IV.3.19, podemos assim concluir que $f\colon X \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Vamos agora supor que o intervalo de somabilidade X é aberto, isto é, que $X = \,]-R, R[$. Provemos a continuidade de f num ponto $x_0 \in X$ arbitrário. Fixemos r tal que $|x_0| < r < R$. Sendo $\varepsilon = r - |x_0| > 0$, a vizinhança $V_\varepsilon(x_0)$ está contida em $]-r, r[$ e não intersecta assim o conjunto $X \setminus\,]-r, r[$. Para provar a continuidade em x_0 de f basta assim provar a continuidade em x_0 da restrição de f a $]-r, r[$. Ora isso resulta, como no caso examinado no início da demonstração, de IV.3.19 uma vez que $\sum\limits_{p\geq 0} y_p < +\infty$, para $y_p = |a_p| r^p$, onde as funções contínuas restrições de f_p a $]-r, r[$ verificam $|f_p(x)| \leq y_p$, para cada $x \in\,]-r, r[$. □

IV.4.11 **(Série de potências derivada)** Seja $(a_p)_{p\geq 0}$ uma família de números reais, indexada no conjunto $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ dos inteiros positivos e consideremos a correspondente série de potências

$$\sum_{p\geq 0} a_p x^p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots.$$

Chamamos *série de potências derivada* desta à série

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots,$$

isto é, à correspondente à família $(b_p)_{p\geq 0}$ com $b_p = (p+1)a_{p+1}$.
Tem-se então que estas duas séries de potências têm o mesmo raio R de convergência e, sendo X e X', respetivamente, os seus intervalos de somabilidade, tem-se $X' \subset X$. Em particular, o único caso em que se tem $X \neq X'$ é aquele em que $0 < R < +\infty$, $X = [-R, R]$ e $X' =]-R, R[$.
Dem: Sejam R e R', respetivamente, os raios de convergência da série de potências original e da série derivada.
Comecemos por mostrar que $X' \subset X$. Ora, se $x \in X'$, tem-se

$$\sum_{p\geq 0} (p+1)|a_{p+1}x^p| = \sum_{p\geq 0} |b_p x^p| < +\infty$$

donde também

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1} |a_n x^n| = \sum_{p\geq 0} |a_{p+1}x^{p+1}| \leq \sum_{p\geq 0} (p+1)|a_{p+1}x^{p+1}| = \\ = |x| \sum_{p\geq 0} (p+1)|a_{p+1}x^p| < +\infty\end{aligned}$$

e portanto

$$\sum_{n\geq 0} |a_n x^n| = |a_0| + \sum_{n\geq 1} |a_n x^n| < +\infty,$$

ou seja, $x \in X$. Em particular, sabemos já que $R' \leq R$.
Para mostrar a igualdade dos dois raios de convergência vamos supor, por absurdo, que se tem $R' < R$. Podemos então considerar $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $R' < x < y < R$. Uma vez que $\sqrt[n]{n} \to 1$, por ser $\frac{n+1}{n} \to 1$ (cf. II.2.19), podemos concluir que $\sqrt[n]{n}\, x \to x$ e portanto, considerando uma vizinhança de x constituída por reais menores que y, podemos garantir a existência de $n_0 \geq 1$ tal que para cada $n \geq n_0$ venha $\sqrt[n]{n}\, x < y$, o que, por ser $y \in X$, implica que

$$\sum_{n\geq n_0} n\,|a_n|\,x^n = \sum_{n\geq n_0} |a_n| \left(\sqrt[n]{n}\, x\right)^n \leq \sum_{n\geq n_0} |a_n\, y^n| \leq \sum_{n\geq 0} |a_n\, y^n| < +\infty$$

e portanto

$$\sum_{p\ge 0} |b_p x^p| = \frac{1}{x}\sum_{p\ge 0}(p+1)|a_{p+1}|x^{p+1} = \frac{1}{x}\sum_{n\ge 1} n|a_n|x^n =$$
$$= \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{n_0-1} n|a_n|x^n + \frac{1}{x}\sum_{n\ge n_0} n|a_n|x^n < +\infty.$$

Chegámos assim à conclusão que $x \in X'$, que é absurdo, uma vez que $x > R'$. □

IV.4.12 **(Derivabilidade nas séries de potências)** Seja $(a_p)_{p\ge 0}$ uma família de números reais e consideremos a correspondente série de potências

$$\sum_{p\ge 0} a_p x^p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

e a série de potências derivada

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots = \sum_{p\ge 0}(p+1)a_{p+1}x^p$$

assim como as correspondentes funções $f\colon X \to \mathbb{R}$ e $g\colon X' \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \sum_{p\ge 0} a_p\, x^p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$
$$g(x) = \sum_{p\ge 0}(p+1)a_{p+1}\, x^p = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots,$$

cujos domínios X e X' são os respetivos intervalos de somabilidade. Tem-se então que, para cada $x \in X' \subset X$, a função f é derivável em x e com $f'(x) = g(x)$.

Dem: Vamos começar por supor que o intervalo de somabilidade X' é fechado, isto é, que $X' = [-R, R]$, onde R é o raio de convergência comum das duas séries de potências. Tem-se assim $\sum\limits_{p\ge 0} y_p < +\infty$, para

$$y_p = (p+1)|a_{p+1}|R^p,$$

donde também, pondo $z_0 = 0$ e, para cada $p \ge 1$, $z_p = y_{p-1} = p|a_p|R^{p-1}$,

$$\sum_{p\ge 0} z_p = z_0 + \sum_{n\ge 1} z_n = 0 + \sum_{p\ge 0} y_p < +\infty.$$

Tem-se então, para cada $x \in X' \subset X$, $f(x) = \sum\limits_{p\ge 0} f_p(x)$, onde as funções $f_p\colon X' \to \mathbb{R}$, definidas por $f_p(x) = a_p x^p$, são deriváveis e com derivadas $f_0'(x) = 0$ e, para $p \ge 1$, $f_p'(x) = pa_p x^{p-1}$, que verificam $|f_p'(x)| \le z_p$. Aplicando IV.3.20, podemos assim concluir que $f\colon X \to \mathbb{R}$ é derivável em cada

$x \in X'$ e com

$$f'(x) = \sum_{p\geq 0} f'_p(x) = 0 + \sum_{p\geq 1} p\, a_p\, x^{p-1} = g(x).$$

Suponhamos agora que o intervalo de somabilidade X' é aberto, isto é, que $X' =]-R, R[$. Provemos a derivabilidade de f num ponto $x_0 \in X'$ arbitrário e calculemos a respetiva derivada. Fixemos r tal que $|x_0| < r < R$. Sendo $\varepsilon = r - |x_0| > 0$, a vizinhança $V_\varepsilon(x_0)$ está contida em $]-r, r[$ e não intersecta assim o conjunto $X \setminus]-r, r[$. Para estudar a derivabilidade em x_0 de f basta assim estudar a derivabilidade em x_0 da restrição de f a $]-r, r[$. Ora isso resulta, como no caso examinado no início da demonstração, de IV.3.20 uma vez que $\sum\limits_{p\geq 0} z_p < +\infty$, para $z_0 = 0$ e, se $p \geq 1$, $z_p = p|a_p|r^{p-1}$, onde as funções contínuas restrições de f_p a $]-r, r[$ verificam $|f'_p(x)| \leq z_p$, para cada $x \in]-r, r[$. □

IV.4.13 **(Exemplos) a)** Partimos da série de potências

$$\sum_{p\geq 0} x^p = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

cujo raio de convergência se verifica pelo critério da razão ser igual a 1 e cujo intervalo de somabilidade se verifica ser o intervalo $]-1, 1[$, uma vez que para $x = 1$ temos uma família com todos os termos iguais a 1, que não é portanto somável. Relembremos também que, pelo exame do limite da sucessão das somas parciais, que são somas de termos de progressões geométricas, já determinámos antes que, para cada $x \in]-1, 1[$,

$$\sum_{p\geq 0} x^p = \frac{1}{1-x}$$

(cf. III.4.35). Reparemos que a série de potências precedente é a série de potências derivada da série de potências

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{p\geq 0} b_p\, x^p,$$

com $b_0 = 0$ e $b_p = \frac{1}{p}$ para cada $p \geq 1$. Os resultados precedentes garantem que se pode definir $f\colon]-1, 1[\to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{p\geq 1} \frac{x^p}{p}$$

e que se tem $f'(x) = \frac{1}{1-x}$, o que, em conjunto com o facto de ser $f(0) = 0$, implica que

$$\sum_{p\geq 1} \frac{x^p}{p} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots = -\ln(1-x)$$

(o segundo membro também é uma primitiva de $\frac{1}{1-x}$ que toma o valor 0 em 0), resultado a que já chegáramos, com um pouco mais de trabalho, em III.4.40, no contexto das séries de Maclaurin.

b) Partimos, mais uma vez, da série de potências

$$\sum_{p\geq 0} x^p = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

cujo intervalo de somabilidade é $]-1,1[$, e que já referimos em a) ter soma

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{p\geq 0} x^p = \frac{1}{1-x}$$

para cada $x \in\,]-1,1[$. Utilizando mais uma vez os resultados precedentes, mas considerando agora a série de potências derivada desta, podemos concluir que, para cada $x \in\,]-1,1[$,

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \sum_{p\geq 0} (p+1)x^p = \frac{1}{(1-x)^2},$$

uma conclusão a que já chegáramos no exercício IV.3.2 por um método mais artificioso.

c) Partimos mais uma vez do facto de se ter, para cada $x \in\,]-1,1[$,

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{p\geq 0} x^p = \frac{1}{1-x}.$$

Substituindo x por $-y^2$, deduzimos daqui que, para cada $y \in\,]-1,1[$,

$$1 - y^2 + y^4 - y^6 + \cdots = \sum_{p\geq 0} (-1)^p\, y^{2p} = \frac{1}{1+y^2}$$

e deduzimos daqui que, considerando uma série de potências que tem esta como série derivada, pode-se definir uma função $g\colon]-1,1[\, \to \mathbb{R}$ por

$$g(y) = y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + \cdots = \sum_{p\geq 0} (-1)^p\, \frac{y^{2p+1}}{2p+1},$$

para a qual se tem $g(0) = 0$ e $g'(y) = \frac{1}{1+y^2}$ o que, pelo argumento já utilizado em a) permite deduzir que, para cada $y \in\,]-1,1[$,

$$\sum_{p\geq 0} (-1)^p\, \frac{y^{2p+1}}{2p+1} = y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + \cdots = \arctan(y).$$

Mais uma vez, reencontrámos por um processo mais organizado uma conclusão já obtida no exercício IV.3.7 assim como, de forma mais artificiosa e no contexto das séries de Maclaurin, no exercício III.4.14.

IV.4.14 **(As séries de potências definem funções de classe C^∞)** Seja $(a_p)_{p\geq 0}$ uma família de números reais e consideremos a correspondente série de potências

$$\sum_{p\geq 0} a_p x^p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

cujo raio de convergência R supomos ser estritamente positivo. Tem-se então que a correspondente função $f\colon]-R, R[\to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \sum_{p\geq 0} a_p\, x^p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

é de classe C^∞ e, para cada $p \geq 0$, a derivada de ordem p em 0 é

$$f^{(p)}(0) = p!a_p.$$

Por outras palavras, tem-se $a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}$, ou seja, a série de potências é a série de Maclaurin da função f.
Temos assim, em particular, um resultado de unicidade da decomposição de uma função como soma de uma série de potências nalgum intervalo $]-\varepsilon, \varepsilon[$, com $\varepsilon > 0$, contido no seu domínio: Então ε é menor ou igual ao raio de convergência da série de potências e esta é necessariamente a série de Maclaurin da função.
Dem: Provemos, por indução em $p \geq 0$, que uma função deste tipo é de classe C^p e com derivada de ordem p em 0 igual ao produto de $p!$ pelo coeficiente de x^p. Para $p = 0$, temos uma consequência do teorema de continuidade em IV.4.10 e do facto de se ter

$$f(0) = a_0 + \sum_{p\geq 1} 0 = a_0.$$

Suponhamos o resultado verdadeiro para um certo $p \geq 0$. Tendo em conta IV.4.12, sabemos que f é derivável em todo o $x \in]-R, R[$ e com

$$f'(x) = \sum_{p\geq 0} (p+1)a_{p+1}\, x^p = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots,$$

por outras palavras, a função $f'\colon]-R, R[\to \mathbb{R}$ é a correspondente à série de potências determinada pela família $(b_p)_{p\geq 0}$ com $b_p = (p+1)a_{p+1}$, série cujo raio de convergência é também R. Pela hipótese de indução $f'\colon]-R, R[\to \mathbb{R}$ é de classe C^p, e portanto f é de classe C^{p+1}, e

$$f^{(p+1)}(0) = f'^{(p)}(0) = p!b_p = p!(p+1)a_p = (p+1)!a_p. \qquad \square$$

IV.4.15 **(Linearidade nas séries de potências)** Sejam $(a_p)_{p\geq 0}$ e $(b_p)_{p\geq 0}$ duas famílias de números reais definindo séries de potências cujos intervalos de somabilidade contenham ambos um certo conjunto X, isto é, tais que se possam definir funções $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \sum_{p\geq 0} a_p\, x^p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$
$$g(x) = \sum_{p\geq 0} b_p\, x^p = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots.$$

Seja ainda $c \in \mathbb{R}$. Tem-se então que as funções $f+g\colon X \to \mathbb{R}$ e $cf\colon X \to \mathbb{R}$ estão definidas por

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sum_{p\geq 0} (a_p + b_p) x^p,$$
$$(cf)(x) = cf(x) = \sum_{p\geq 0} (ca_p) x^p,$$

ou seja, estão definidas pelas séries de potências associadas às famílias $(a_p + b_p)_{p\geq 0}$ e $(ca_p)_{p\geq 0}$, as quais têm portanto também intervalos de somabilidade contendo X.
Por este motivo, costuma-se dar o nome de *série de potências soma* das duas primeiras e *série de potências produto* da primeira pelo real c a estas duas séries, respetivamente.
Dem: Temos uma consequência direta das propriedades de aditividade e distributividade em IV.3.6. □

IV.4.16 **(Série de potências dos módulos)** Consideremos uma série de potências correspondente a uma família $(a_p)_{p\geq 0}$, com intervalo de somabilidade X e função associada $f\colon X \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{p\geq 0} a_p\, x^p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots.$$

Chamamos *série de potências dos módulos* da primeira à determinada pela família $(|a_p|)_{p\geq 0}$. Esta série tem o mesmo intervalo de somabilidade X e a função associada $\overline{f}\colon X \to \mathbb{R}$,

$$\overline{f}(x) = \sum_{p\geq 0} |a_p|\, x^p = |a_0| + |a_1| x + |a_2| x^2 + \cdots$$

verifica a desigualdade

$$|f(x)| \leq \overline{f}(|x|)$$

para cada $x \in X$.
Dem: O facto de os intervalos de somabilidade coincidirem é uma consequência da definição da família somável em IV.3.1, uma vez que se tem

$$|a_p x^p| = ||a_p| x^p|.$$

Quanto à desigualdade, resulta de IV.3.3 que, para cada $x \in X$,

$$|f(x)| = \Big|\sum_{p\geq 0} a_p x^p\Big| \leq \sum_{p\geq 0} |a_p x^p| = \sum_{p\geq 0} |a_p|\, |x|^p = \overline{f}(|x|). \qquad \square$$

IV.4.17 **(Produto de séries de potências)** Sejam $(a_p)_{p\geq 0}$ e $(b_p)_{p\geq 0}$ duas famílias de números reais definindo séries de potências cujos intervalos de somabilidade contenham ambos um certo conjunto X, isto é, tais que se possam definir funções $f, g \colon X \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \sum_{p\geq 0} a_p\, x^p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$
$$g(x) = \sum_{p\geq 0} b_p\, x^p = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots.$$

Tem-se então que a função $f \times g \colon X \to \mathbb{R}$ está definida por

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = \sum_{p\geq 0} c_p\, x^p = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots,$$

onde

$$c_p = \sum_{\substack{j,k\geq 0\\ j+k=p}} a_j b_k.$$

Em particular, a série de potências associada à família $(c_p)_{p\geq 0}$, a que se costuma dar o nome de *série de potências produto* das primeiras, tem um intervalo de somabilidade que contém X. Repare-se que os primeiros coeficentes da série de potências produto são

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 b_0,\\ c_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0,\\ c_2 &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0,\\ c_3 &= a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0. \end{aligned}$$

Dem: Mudando os conjuntos de índices e aplicando IV.3.15, vemos que para cada $x \in X$

$$f(x) g(x) = \sum_{j,k\geq 0} a_j b_k x^{j+k}.$$

Reparemos agora que o conjunto J dos pares (j,k) com $j \geq 0$ e $k \geq 0$ é a união da família de subconjuntos disjuntos dois a dois J_p, com p inteiro maior ou igual a 0, onde J_p é o conjunto dos pares (j,k) com $j + k = p$. Tendo em conta a propriedade associativa em IV.3.12 deduzimos agora que para cada $x \in X$

$$f(x)g(x) = \sum_{p\geq 0} \Big(\sum_{j+k=p} a_j b_k\, x^{j+k} \Big) = \sum_{p\geq 0} \Big(\sum_{j+k=p} a_j b_k \Big)\, x^p = \sum_{p\geq 0} c_p\, x^p,$$

como queríamos. □

IV.4.18 **(Potência duma série de potências)** Seja $(a_p)_{p\geq 0}$ uma família de números reais definindo uma série de potências que supomos ter um raio de convergência R estritamente positivo, e seja $X \subset \mathbb{R}$ o seu intervalo de somabilidade, podendo portanto definir-se uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \sum_{p\geq 0} a_p\, x^p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots.$$

Dado um inteiro $n \geq 0$ existe então uma única família $(c_p^{(n)})_{p\geq 0}$ de números reais tal que para cada $x \in X$

$$f(x)^n = \sum_{p\geq 0} c_p^{(n)}\, x^p.$$

Em particular, a série de potências associada à família referida, à qual damos o nome de série de potências *potência* n da série de partida, tem um intervalo de somabilidade que contém X.

Consideremos, além disso, a série de potências dos módulos, definida por $(|a_p|)_{p\geq 0}$ e a função associada $\overline{f}\colon X \to \mathbb{R}$ definida por

$$\overline{f}(x) = \sum_{p\geq 0} |a_p|\, x^p = |a_0| + |a_1| x + |a_2| x^2 + \cdots$$

e notemos, para cada $n \geq 0$, $(\overline{c}_p^{(n)})_{p\geq 0}$ a série de potências potência n da série de potências dos módulos, portanto aquela para a qual

$$\overline{f}(x)^n = \sum_{p\geq 0} \overline{c}_p^{(n)}\, x^p.$$

Tem-se então

$$|c_p^{(n)}| \leq \overline{c}_p^{(n)}.$$

Dem: Comecemos por notar que a unicidade de uma tal família $(c_p^{(n)})_{p\geq 0}$ é uma consequência da última afirmação em IV.4.14.[234] Passemos então à justificação, por indução em n, da existência de tais famílias e das desigualdades referidas. Para o caso em que $n = 1$, basta tomar $c_p^{(1)} = a_p$, e consequentemente também $\overline{c}_p^{(1)} = |a_p|$, em particular a desigualdade é verifi-

[234]É para podermos aplicar este resultado que fazemos a hipótese de termos um raio de convergência maior que 0.

cada como igualdade. O caso em que $n = 0$ é também trivial uma vez que $f(x)^0 = 1 = \overline{f}(x)^0$ pelo que basta tomar $c_0^{(0)} = \overline{c}_0^{(0)} = 1$ e $c_p^{(0)} = \overline{c}_p^{(0)} = 0$ para cada $p \geq 1$, série de potências essa cujo intervalo de somabilidade é $\mathbb{R}$. Suponhamos que as conclusões são válidas para um certo $n \geq 1$. Para cada $x \in X$ vem

$$f(x)^{n+1} = f(x)^n \times f(x), \quad \overline{f}(x)^{n+1} = \overline{f}(x)^n \times \overline{f}(x),$$

pelo que, por IV.4.17,

$$f(x)^{n+1} = \sum_{p \geq 0} c_p^{(n+1)}\, x^p,$$

com

$$c_p^{(n+1)} = \sum_{j+k=p} c_j^{(n)}\, a_k,$$

e também

$$\overline{f}(x)^{n+1} = \sum_{p \geq 0} \overline{c}_p^{(n+1)}\, x^p,$$

com

$$\overline{c}_p^{(n+1)} = \sum_{j+k=p} \overline{c}_j^{(n)}\, |a_k|,$$

e vemos, utilizando a hipótese de indução, que

$$|c_p^{(n+1)}| = \Big| \sum_{j+k=p} c_j^{(n)}\, a_k \Big| \leq \sum_{j+k=p} |c_j^{(n)}|\, |a_k| \leq \sum_{j+k=p} \overline{c}_j^{(n)}\, |a_k| = \overline{c}_p^{(n+1)},$$

o que mostra que as conclusões são válidas para o inteiro $n+1$. □

IV.4.19 **(Composta de séries de potências)** Seja $(a_p)_{p \geq 0}$ uma família de números reais definindo uma série de potências, que supomos ter um raio de convergência R estritamente positivo, e seja $X \subset \mathbb{R}$ o seu intervalo de somabilidade, podendo portanto definir-se uma função $f \colon X \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \sum_{p \geq 0} a_p\, x^p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots.$$

Consideremos também a série de potências dos valores absolutos $(|a_p|)_{p \geq 0}$, que tem trivialmente os mesmos raio de convergência e intervalo de somabilidade (já que $||a_p|x^p| = |a_p x^p|$) assim como a correspodente função $\overline{f} \colon X \to \mathbb{R}$ definida por

$$\overline{f}(x) = \sum_{p\geq 0} |a_p|\, x^p = |a_0| + |a_1|x + |a_2|x^2 + \cdots.$$

Seja $(b_n)_{n\geq 0}$ uma segunda família de números reais, definindo uma série de potências, que supomos ter um raio de convergência estritamente positivo e seja $0 < \delta \leq +\infty$ menor ou igual a esse raio de convergência, podendo portanto definir-se uma função $g\colon]-\delta,\delta[\to \mathbb{R}$ por

$$g(y) = \sum_{n\geq 0} b_n\, y^n = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \cdots.$$

Suponhamos enfim que $|a_0| < \delta$. Seja $X' \subset X$ o conjunto dos $x \in X$ tais que $\overline{f}(|x|) \in]-\delta,\delta[$. Tem-se então:
a) Existe $\varepsilon > 0$ tal que $]-\varepsilon,\varepsilon[\subset X'$;
b) Para cada $x \in X'$ tem-se $f(x) \in]-\delta,\delta[$;
c) Existe uma família $(c_p)_{p\geq 0}$ de números reais tal que, para cada $x \in X'$,

$$g(f(x)) = \sum_{p\geq 0} c_p\, x^p,$$

em particular a série de potências determinada por esta família tem um intervalo de somabilidade contendo X' (e portanto um raio de convergência maior ou igual a ε).
Nas hipóteses anteriores diz-se que a série de potências determinada pela família $(c_p)_{p\geq 0}$ é a *série de potências composta* das séries de potências determinadas pelas famílias $(b_p)_{p\geq 0}$ e $(a_p)_{p\geq 0}$.[235]
Dem: Comecemos por reparar que, tendo em conta IV.4.10, a função $\overline{f}\colon X \to \mathbb{R}$ é contínua, e portanto o mesmo acontece com a função $X \to \mathbb{R}$ que a x associa $\overline{f}(|x|)$. Uma vez que esta função aplica 0 em $|a_0| < \delta$ deduzimos, considerando uma vizinhança de $|a_0|$ constituída por reais menores que δ, que existe ε com $0 < \varepsilon < R$ tal que para cada $x \in]-\varepsilon,\varepsilon[$ venha $\overline{f}(|x|) < \delta$, ou seja, $x \in X'$. Provámos assim a conclusão de a) e a de b) resulta de que, como referido em IV.4.16, $|f(x)| \leq \overline{f}(|x|)$ e portanto $f(x) \in]-\delta,\delta[$ sempre que $\overline{f}(|x|) \in]-\delta,\delta[$.
Tendo em conta IV.4.18, podemos, para cada $n \geq 0$, considerar séries de potências determinadas por famílias $(c_p^{(n)})_{p\geq 0}$ e $(\overline{c}_p^{(n)})_{p\geq 0}$, com $|c_p^{(n)}| \leq \overline{c}_p^{(n)}$, tais que, para cada $x \in X$,

[235]Repare-se que resulta da última afirmação em IV.4.14 que os c_p ficam perfeitamente determinados pelas séries de potências $(a_p)_{p\geq 0}$ e $(b_n)_{n\geq 0}$. Resumindo o que foi dito anteriormente, as hipóteses que permitem definir a composta das duas séries de potências é que ambas tenham raios de convergência maiores que 0 e que $|a_0|$ seja inferior ao raio de convergência da série determinada pela família $(b_p)_{p\geq 0}$.

$$f(x)^n = \sum_{p\geq 0} c_p^{(n)}\, x^p, \quad \overline{f}(x)^n = \sum_{p\geq 0} \overline{c}_p^{(n)}\, x^p.$$

Em particular, para cada $x \in X'$, o facto de se ter $\overline{f}(|x|) \in\,]-\delta, \delta[$ implica, tendo em conta o teorema de Fubini em IV.2.9, que

$$\begin{aligned}\sum_{n,p} |b_n|\,|c_p^{(n)}|\,|x|^p &\leq \sum_{n,p} |b_n|\,\overline{c}_p^{(n)}\,|x|^p = \sum_{n\geq 0}\Big(\sum_{p\geq 0} |b_n|\,\overline{c}_p^{(n)}\,|x|^p\Big) = \\ &= \sum_{n\geq 0} |b_n|\,\overline{f}(|x|)^n < +\infty\end{aligned}$$

(igual a $g(\overline{f}(|x|))$). Podemos agora aplicar a versão do teorema de Fubini em IV.3.14 para deduzir que, para cada $x \in X'$,

$$\textbf{(1)}\quad \begin{aligned} g(f(x)) &= \sum_{n\geq 0} b_n\, f(x)^n = \sum_{n\geq 0} b_n \Big(\sum_{p\geq 0} c_p^{(n)}\, x^p\Big) = \sum_{n,p} b_n\, c_p^{(n)}\, x^p = \\ &= \sum_{p\geq 0}\Big(\sum_{n\geq 0} b_n\, c_p^{(n)}\, x^p\Big).\end{aligned}$$

Para cada $p \geq 0$, o facto de a família dos $b_n c_p^{(n)} x^p$, com $n \geq 0$, ser somável para cada $x \in X'$ pemite-nos, considerando $x \neq 0$ em X' e multiplicando por $\frac{1}{x^p}$, deduzir que é também somável a família dos $b_n c_p^{(n)}$, com $n \geq 0$. Podemos assim definir, para cada $p \geq 0$,

$$c_p = \sum_{n\geq 0} b_n c_p^{(n)}$$

e deduzimos da igualdade (1) que, para cada $x \in X'$,

$$g(f(x)) = \sum_{p\geq 0} c_p x^p$$

o que prova a afirmação em c). □

IV.4.20 **(Notas) 1)** A demonstração do resultado precedente não nos fornece um método efetivo simples para determinar os coeficientes c_p da série de potências composta. Com frequência, quando for fácil obter as derivadas de ordem superior da função $g \circ f_{/]-\varepsilon,\varepsilon[}\colon]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$, para determinar estes coeficientes atendemos ao facto de, como referido em IV.4.14, a série de potências composta ser a série de Maclaurin daquela composta. Trata-se de um processo de certo modo oposto ao que encontrámos em situações como a da alínea c) de IV.4.13 situações em que, não sendo prático obter explicitamente as derivadas de ordem superior de uma função, a série de potências que a define (série de Maclaurin) foi obtida diretamente a partir do conhecimentos das séries de potências associadas a outras funções mais simples.

2) Em muitas aplicações do resultado precedente, aquilo que conhecemos são as funções f e g e não temos uma expressão explícita para a função $\overline{f}$, associada à série de potências dos módulos. Esse facto dificulta por vezes a determinação de $\varepsilon > 0$ para o qual tenhamos a certeza que a composta $g \circ f$ admita uma decomposição em série de potências em $]-\varepsilon, \varepsilon[$. Um caso em que esta dificuldade não aparece é aquele em que a série $(b_n)_{n\geq 0}$, que determina a função g, tem um raio de convergência $+\infty$, e portanto tem $\mathbb{R}$ como intervalo de somabilidade. Nesse caso o que foi referido em IV.4.19 diz-nos simplesmente que o domínio de somabilidade para a série de potências composta contém o domínio de somabilidade da série de potências $(a_p)_{p\geq 0}$, que determina a função f. Um exemplo desta situação (e também da referida na nota 1) é aquele que examinamos a seguir no estudo da convergência da série binomial.

IV.4.21 **(A série binomial)** Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Por analogia com a definição dos coeficientes combinatórios bem conhecidos

$$^{n}C_p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}$$

(onde $0 \leq p \leq n$ são inteiros e, para a segunda igualdade, é cómodo supor $p \geq 1$), e generalizando esta, definimos $^{\alpha}C_0 = 1$ e, para cada inteiro $p \geq 1$,

$$^{\alpha}C_p = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-p+1)}{p!}$$

(reparar que, quando α é um inteiro positivo, a segunda definição dá $^{\alpha}C_p = 0$ para cada $p > \alpha$).

Chamamos *série binomial* de expoente α à série determinada pela família $(^{\alpha}C_p)_{p\geq 0}$. Afastado o caso trivial em que α é um inteiro maior ou igual a 0, esta série tem raio de convergência 1 e, para cada $x \in \,]-1, 1[$, a sua soma é

$$\begin{aligned}(1+x)^{\alpha} &= \sum_{p\geq 0} {}^{\alpha}C_p\, x^p = \\ &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots.\end{aligned}$$ [236]

Dem: Uma vez que, por α não ser um inteiro positivo, os coeficientes combinatórios são todos diferentes de 0, podemos tentar utilizar o critério da razão (cf. IV.4.6) para determinar o raio de convergência. Ora,

[236]No caso em que $\alpha = n$ é um inteiro maior ou igual a 0, tem-se $^{\alpha}C_p = 0$ para $p > n$ pelo que o raio de convergência é $+\infty$ e a soma da série é simplesmente o valor dum polinómio, sendo ainda igual a $(1+x)^n$ pela fórmula do binómio de Newton (cf. o exercício III.4.9).

$$\frac{|{}^{\alpha}C_p|}{|{}^{\alpha}C_{p+1}|} = \frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-p+1)|}{p!} \times \frac{(p+1)!}{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-p+1)(\alpha-p)|}$$
$$= \frac{p+1}{|\alpha-p|} = \frac{1+\frac{1}{p}}{|\frac{\alpha}{p}-1|} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

pelo que o raio de convergência é efetivamente igual a 1. Consideremos agora a função $h\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$ de classe C^∞ definida por $h(x) = (1+x)^\alpha$, para a qual se verifica facilmente por indução que as derivadas de ordem $p \geq 0$ são dadas por $h^{(0)}(x) = (1+x)^\alpha$ e, para $p \geq 1$,

$$h^{(p)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-p+1)(1+x)^{\alpha-p},$$

tendo-se, em particular, ${}^{\alpha}C_p = \frac{1}{p!}\, h^{(p)}(0)$, por outras palavras, a série referida no enunciado é a série de Maclaurin da função h. Tendo em conta IV.4.14, para provar a asserção do enunciado basta provar a existência de uma série de potências associada a uma família $(c_p)_{p\geq 0}$ de reais e com raio de convergência maior ou igual a 1 tal que, para cada $x \in]-1,1[$,

$$h(x) = (1+x)^\alpha = \sum_{p\geq 0} c_p x^p = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots.$$

Ora, isso é uma consequência direta de IV.4.19 (lembrar a nota 2 em IV.4.20) visto que, para $x \in]-1,1[$, podemos escrever

$$h(x) = e^{\alpha \ln(1+x)} = g(f(x)),$$

onde $g(y) = e^y$ e $f(x) = \alpha \ln(1+x)$, com

$$g(y) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\, y^n$$

para cada $y \in \mathbb{R}$ (raio de convergência $+\infty$, cf. a alínea c) de IV.4.7 e III.4.41) e

$$f(x) = \sum_{p\geq 1} (-1)^{p+1}\, \frac{\alpha}{p}\, x^p = \alpha x - \frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{\alpha}{3}x^3 - \cdots$$

(raio de convergência 1, cf. a alínea a) de IV.4.13 com a substituição de x por $-x$). □

Apesar de no estudo das funções que podem ser definidas por séries de potências o ponto 0 do domínio ter um papel privilegiado, este estudo permite-nos facilmente definir as funções analíticas, nas quais esse papel privilegiado já não aparece.

IV.4.22 Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função.

a) Se $0 \in X$, diz-se que f é *analítica em* 0 se existir $\varepsilon > 0$ com $]-\varepsilon, \varepsilon[\subset X$ e uma série de potências $(a_p)_{p\geq 0}$ cujo domínio de somabilidade contenha $]-\varepsilon, \varepsilon[$ tais que para cada $x \in\,]-\varepsilon, \varepsilon[$ se tenha

$$f(x) = \sum_{p\geq 0} a_p\, x^p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots.$$

b) Mais geralmente, se $x_0 \in X$, podemos considerar o intervalo aberto $X_{x_0} = X - x_0$, que contém 0, cujos elementos são os $x - x_0$ com $x \in X$ (ou, o que é o mesmo, os $y \in \mathbb{R}$ tais que $x_0 + y \in X$) e a função $f_{x_0}\colon X_{x_0} \to \mathbb{R}$ definida por $f_{x_0}(y) = f(x_0 + y)$ e dizemos que f é *analítica em* x_0 se f_{x_0} é analítica em 0 (repare-se que, no caso em que $x_0 = 0$, esta definição é equivalente à dada em a).

c) Diz-se que f é *analítica* se for analítica em todos os pontos $x_0 \in X$.

IV.4.23 **(Caracterização equivalente)** A definição de função analítica num ponto $x_0 \in X$, apresentada na alínea b) de IV.4.22, pode ser apresentada de forma equivalente sem referir explicitamente a função f_{x_0}: A função $f\colon X \to \mathbb{R}$ é analítica em $x_0 \in X$ se, e só se, existir $\varepsilon > 0$ com $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset X$ e uma série de potências $(a_p)_{p\geq 0}$ cujo domínio de somabilidade contenha $]-\varepsilon, \varepsilon[$ tais que

$$f(x) = \sum_{p\geq 0} a_p\,(x - x_0)^p = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots$$

para cada $x \in\,]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ (reparar que $f(x) = f_{x_0}(x - x_0)$). Repare-se que, tendo em conta IV.4.14 e III.4.18, uma tal série de potências $(a_p)_{p\geq 0}$ é única, uma vez que se tem necessariamente

$$a_p = \frac{1}{p!}\, f_{x_0}^{(p)}(0) = \frac{1}{p!}\, f^{(p)}(x_0)$$

por outras palavras, a série destacada é a série de Taylor de f centrada no ponto x_0 (cf. III.4.38)

O próximo resultado apresenta-nos um primeiro exemplo de função analítica, que não é tão evidente como poderia parecer à primeira vista.

IV.4.24 **(As séries de potências definem funções analíticas)** Seja $(a_p)_{p\geq 0}$ uma família de números reais cuja série de potências associada tenha um raio de convergência $R > 0$. Tem-se então que a função $f\colon]-R, R[\to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \sum_{p\geq 0} a_p x^p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

é uma função analítica.

Dem: O que é consequência imediata da definição é que a função f é analítica em 0. Para verificarmos que f é analítica num ponto x_0 arbitrário, isto é que $f_{x_0}: X - x_0 \to \mathbb{R}$ é analítica em 0, atendemos a que $f_{x_0}(x) = f(x_0 + x)$ e aplicamos IV.4.19 para garantir a existência de $(c_p)_{p\geq 0}$ e de $\varepsilon > 0$ tal que para cada $x \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ se tenha $x_0 + x \in]-R, R[$ e

$$f_{x_0}(x) = f(x_0 + x) = \sum_{p\geq 0} c_p\, x^p.$$ [237] □

IV.4.25 **(Exemplos de funções analíticas) a)** As funções constantes, a função identidade e, mais geralmente, qualquer função polinomial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_N x^N,$$

são funções analíticas. De facto elas são as associadas a séries de potências "degeneradas", com intervalo de somabilidade $\mathbb{R}$.
b) A função exponencial $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$, e as funções trigonométricas $\mathrm{sen}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções analíticas. Basta, com efeito, recordar as respetivas caracterizações como séries de potências, com intervalos de somabilidade $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{1}{2}\, x^2 + \frac{1}{3!}\, x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}\, x^n + \cdots,\\
\mathrm{sen}(x) &= x - \frac{1}{3!}\, x^3 + \frac{1}{5!}\, x^5 - \cdots + (-1)^n\, \frac{1}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} + \cdots,\\
\cos(x) &= 1 - \frac{1}{2}\, x^2 + \frac{1}{4!}\, x^4 - \cdots + (-1)^n\, \frac{1}{(2n)!}\, x^{2n} + \cdots.
\end{aligned}$$

c) A função $f:]-1, 1[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

é uma função analítica. Trata-se, com efeito, da função definida pela série geométrica

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{p\geq 0} x^p$$

cujo intervalo de somabilidade é $]-1, 1[$ (cf. III.4.35).
d) O que vimos em IV.4.21 (série binomial) mostra-nos que, se $\alpha \in \mathbb{R}$,

[237] A série de potências que em IV.4.19 era notada f é aqui a série "degenerada", com domínio de somabilidade $\mathbb{R}$, correspondente à função $x \mapsto x_0 + x$, isto é, aquela com x_0 como coeficiente de índice 0, 1 como coeficiente de índice 1 e todos os restantes coeficientes iguais a 0

podemos considerar uma função analítica $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots.$$

IV.4.26 **(Restrição de uma função analítica)** Sejam X um intervalo aberto, $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função e $X' \subset X$ outro intervalo aberto. A função f é analítica num ponto $x_0 \in X'$ se, e só se, então a restrição $f_{/X'}\colon X' \to \mathbb{R}$ é analítica em x_0.

Em consequência, se f é analítica, então também $f_{/X'}\colon X' \to \mathbb{R}$ é analítica.

Dem: É evidente que se a restrição $f_{/X'}\colon X' \to \mathbb{R}$ é analítica em x_0 então o mesmo acontece à função $f\colon X \to \mathbb{R}$ visto que sendo $\varepsilon > 0$ tal que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset X'$ e que exista uma série de potências $(a_p)_{p\geq 0}$ cujo domínio de somabilidade contenha $]-\varepsilon, \varepsilon[$ tal que

$$f(x) = \sum_{p\geq 0} a_p\,(x-x_0)^p = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots$$

para cada $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, tem-se também $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset X$.

Suponhamos agora que $f\colon X \to \mathbb{R}$ é analítica em x_0 e seja $\varepsilon > 0$ tal que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset X$ e que exista uma série de potências $(a_p)_{p\geq 0}$ cujo domínio de somabilidade contenha $]-\varepsilon, \varepsilon[$ tal que

$$f(x) = \sum_{p\geq 0} a_p\,(x-x_0)^p = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots$$

para cada $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$. A única questão que nos impede de concluir imediatamente que a restrição de f também é analítica em x_0 é o facto de não se ter necessariamente $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset X'$. Para ultrapassarmos isso, lembramos que o complementar $\mathbb{R} \setminus X'$ é um conjunto fechado, pelo que existe $\varepsilon' > 0$ tal que $]x_0 - \varepsilon', x_0 + \varepsilon'[$ não tem pontos de $\mathbb{R} \setminus X'$, por outras palavras, $]x_0 - \varepsilon', x_0 + \varepsilon'[\subset X'$, Sendo agora $\varepsilon'' > 0$ o menor dos dois números ε e ε', é claro que ainda se tem $]x_0 - \varepsilon'', x_0 + \varepsilon''[\subset X'$ e, para cada $x \in]x_0 - \varepsilon'', x_0 + \varepsilon''[$ tem-se

$$f(x) = \sum_{p\geq 0} a_p\,(x-x_0)^p = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots. \qquad \square$$

IV.4.27 **(Operações envolvendo funções analíticas)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ duas funções e $c \in \mathbb{R}$. Se f e g são analíticas num ponto $x_0 \in X$, então são também analíticas em x_0 as funções $f+g$, $f \times g$ e cf, que a x associam respetivamente $f(x)+g(x)$, $f(x) \times g(x)$ e $cf(x)$. Em consequência, se f e g são analíticas, então também $f+g$, $f \times g$ e cf são analíticas.

Como consequência da afirmação envolvendo o produto, vemos, por indução em n que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se $f\colon X \to \mathbb{R}$ é analítica num ponto $x_0 \in X$ (respetivamente f é analítica), o mesmo acontece com a função $x \mapsto f(x)^n$.

Dem: Basta examinarmos o que sucede com $f+g$ e $f\times g$ uma vez que cf é o caso particular do produto em que tomamos para g a função constante de valor c. Se repararmos que, nas notações na alínea b) de IV.4.22, tem-se $(f+g)_{x_0} = f_{x_0} + g_{x_0}$ e $(f\times g)_{x_0} = f_{x_0}\times g_{x_0}$, ficamos reduzidos a examinar o caso em que $x_0 = 0$. Ora, nesse caso, podemos considerar $\varepsilon > 0$, $\varepsilon' > 0$ e séries de potências $(a_p)_{p\ge 0}$ e $(b_p)_{p\ge 0}$ com $]-\varepsilon,\varepsilon[\subset X$, $]-\varepsilon',\varepsilon'[\subset X$, tais que, para cada $x\in\,]-\varepsilon,\varepsilon[$,

$$f(x) = \sum_{p\ge 0} a_p\, x^p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$$

e, para cada $x\in\,]-\varepsilon',\varepsilon'[$,

$$g(x) = \sum_{p\ge 0} b_p\, x^p = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots.$$

Sendo $\varepsilon'' > 0$ o menor dos dois números ε e ε', tem-se $]-\varepsilon'',\varepsilon''[\subset X$ e deduzimos de IV.4.15 e IV.4.17 a existência de séries de potências $(c_p)_{p\ge 0}$ e $(d_p)_{p\ge 0}$ cujos intervalos de somabilidade contenham $]-\varepsilon'',\varepsilon''[$ e tais que, para cada $x\in\,]-\varepsilon'',\varepsilon''[$,

$$f(x)+g(x) = \sum_{p\ge 0} c_p\, x^p = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots,$$
$$f(x)\times g(x) = \sum_{p\ge 0} d_p\, x^p = d_0 + d_1x + d_2x^2 + \cdots.$$

□

IV.4.28 **(A composta de funções analíticas)** Sejam X e Y intervalos abertos e $f\colon X\to Y$ e $g\colon Y\to\mathbb{R}$ duas funções. Se f é analítica num ponto $x_0\in X$ e g analítica no ponto $y_0 = f(x_0)$, então a função composta $g\circ f\colon X\to\mathbb{R}$ é analítica em x_0. Em consequência, se f e g são analíticas, então também $g\circ f$ é analítica.

Dem: 1) Comecemos por examinar o caso em que $x_0 = 0$ e $y_0 = f(x_0) = 0$. Sejam $(b_n)_{n\ge 0}$ uma série de potências e $\delta > 0$ menor ou igual ao seu raio de somabilidade tais que para cada $y\in\,]-\delta,\delta[$ se tenha $y\in Y$ e

$$g(y) = \sum_{n\ge 0} b_n y^n = b_0 + b_1y + b_2y^2 + \cdots.$$

Analogamente, consideremos $\varepsilon' > 0$ e uma série de potências $(a_p)_{p\ge 0}$ cujo intervalo de somabilidade contenha $]-\varepsilon',\varepsilon'[$ tais que, para cada $x\in\,]-\varepsilon',\varepsilon'[$, se tenha $x\in X$ e

$$f(x) = \sum_{p\ge 0} a_p\, x^p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots,$$

em particular $a_0 = f(0) = 0$. Aplicando IV.4.19, concluímos a existência de $0 < \varepsilon \le \varepsilon'$ e de uma série de potências $(c_p)_{p\ge 0}$ tais que para cada $x\in\,]-\varepsilon,\varepsilon[$

se tenha $\sum\limits_{p\geq 0} a_p\,x^p \in\,]-\delta,\delta[$ e

$$g(f(x)) = g\Bigl(\sum_{p\geq 0} a_p\,x^p\Bigr) = \sum_{p\geq 0} c_p\,x^p,$$

o que mostra que $g\circ f\colon X\to\mathbb{R}$ é efetivamente analítica em 0.

2) Vamos agora examinar o caso geral em que x_0 não é necessariamente 0 e $y_0 = f(x_0)$ não é necessariamente 0. Por definição é analítica em 0 a função $f_{x_0}\colon X - x_0\to\mathbb{R}$ definida por $f_{x_0}(x) = f(x_0+x)$ e portanto também o é a função $\tilde{f}\colon X - x_0\to\mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{f}(x) = f_{x_0}(x) - y_0 = f(x_0+x) - y_0,$$

para a qual se tem $\tilde{f}(0) = f(x_0) - y_0 = 0$ assim como $\tilde{f}(X)\subset Y - y_0$. Do mesmo modo, é analítica em 0 a função $g_{y_0}\colon Y - y_0\to\mathbb{R}$ definida por $g_{y_0}(y) = g(y_0+y)$ e portanto, pelo caso particular examinado em 1), vem também analítica em 0 a função $g_{y_0}\circ\tilde{f}\colon X - x_0\to\mathbb{R}$, a qual está definida por

$$g_{y_0}\circ\tilde{f}(x) = g_{y_0}(f(x_0+x) - y_0) = g(f(x_0+x)) = (g\circ f)_{x_0}(x).$$

Concluímos assim que $(g\circ f)_{x_0}\colon X - x_0\to\mathbb{R}$ é analítica em 0, ou seja, $g\circ f\colon X\to\mathbb{R}$ é analítica em x_0. □

Com a ajuda do resultado precedente podemos, em particular, utilizar o exemplo estudado na alínea d) de IV.4.25 para provar a analiticidade de certas funções importantes.

IV.4.29 Para cada $\alpha\in\mathbb{R}$, é analítica a função $f_\alpha\colon]0,+\infty[\,\to\mathbb{R}$ definida por

$$f_\alpha(y) = y^\alpha.$$

Em particular, tomando $\alpha = -1$, vemos que a função $g = f_{-1}\colon]0,+\infty[\,\to\mathbb{R}$ definida por

$$g(y) = \frac{1}{y}$$

é analítica.

Dem: Lembremos que, como referido na alínea d) de IV.4.25, é analítica a função $f\colon]-1,1[\,\to\mathbb{R}$ definida por $f(x) = (1+x)^\alpha$. Seja agora y_0 arbitrário em $]0,+\infty[$ e provemos que é analítica em y_0 a restrição de f_α ao intervalo aberto $]0,2y_0[$, que contém y_0 e está contido em $]0,+\infty[$ o que, como referido em IV.4.26, será suficiente para garantir que $f_\alpha\colon]0,+\infty[\,\to\mathbb{R}$ é analítica em y_0. Ora, para cada $y\in\,]0,2y_0[$, tem-se $\frac{y}{y_0}\in\,]0,2[$, portanto $\frac{y}{y_0} - 1\in\,]-1,1[$, e vem

$$f_\alpha(y) = y_0^\alpha \times \big(\frac{y}{y_0}\big)^\alpha = y_0^\alpha \times f(\frac{y}{y_0} - 1)$$

o que implica que a restrição referida é analítica por ser o produto da constante y_0^α pela composta da função $f\colon]-1, 1[\to \mathbb{R}$ com a função polinomial (e portanto analítica) $]0, 2y_0[\to]-1, 1[$ que a y associa $\frac{y}{y_0} - 1$. □

IV.4.30 **(O inverso e a potência de uma função analítica)** Seja $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto.

a) Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f\colon X \to]0, +\infty[$ é uma função analítica num ponto $x_0 \in X$ (respetivamente uma função analítica) então o mesmo acontece com a função $X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)^\alpha$.

b) Se $f\colon X \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é uma função analítica num ponto $x_0 \in X$ (respetivamente uma função analítica) então o mesmo acontece com a função $X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$.

Dem: a) Basta atender a que a função referida é a composta da função $f\colon X \to]0, +\infty[$ com a função analítica $]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $y \mapsto y^\alpha$.

b) Uma vez que f é uma função contínua num intervalo que não toma o valor 0, o teorema de Cauchy-Bolzano garante que se tem $f(X) \subset]0, +\infty[$ ou $f(X) \subset]-\infty, 0[$. No primeiro caso a conclusão resulta do que verificámos em a), com $\alpha = -1$. No segundo caso, podemos reduzirmo-nos à conclusão do primeiro se repararmos que a função $x \mapsto -f(x)$ é analítica e toma valores em $]0, +\infty[$ e que se tem

$$f(x) = -\frac{1}{-f(x)}.$$ □

IV.4.31 **(Exemplos) a)** A função trigonométrica $\tan\colon]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ é analítica. De facto, uma vez que, como já referimos, $\mathrm{sen}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são analíticas, e portanto o mesmo acontece às suas restrições ao intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, basta reparar que se tem

$$\tan(x) = \frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)} = \mathrm{sen}(x) \times \frac{1}{\cos(x)},$$

e portanto temos o produto de duas funções analíticas, a segunda tendo em conta IV.4.30.

b) A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

é analítica. Temos, com efeito, o inverso de uma função analítica que nunca toma o valor 0 (uma função polinomial). Observe-se que, apesar de o domínio desta função analítica ser $\mathbb{R}$, ela não pode ser globalmente definida a partir da construção referida em IV.4.24, visto que a única série de potências cuja soma é $f(x)$ nalguma vizinhança de 0 é a sua série de Maclaurin, que como verificámos na alínea c) de IV.4.13 é

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \sum_{p \geq 0} (-1)^p \, x^{2p},$$

série de potências cujo intervalo de somabilidade é $]-1, 1[$, e portanto não pode ter soma $f(x)$ para valores de x fora desse intervalo.

IV.4.32 **(Derivada de uma função analítica)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f: X \to \mathbb{R}$ uma função analítica. Tem-se então que f é derivável, em particular contínua, em todos os pontos de X e a função $f': X \to \mathbb{R}$ é também analítica. Em consequência, uma função analítica $f: X \to \mathbb{R}$ é mesmo de classe C^∞.

Dem: Seja $x_0 \in X$ arbitrário. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset X$ e que exista uma série de potências $(a_p)_{p \geq 0}$ cujo domínio de somabilidade contenha $]-\varepsilon, \varepsilon[$ tal que para cada $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$,

$$f(x) = \sum_{p \geq 0} a_p (x - x_0)^p.$$

Tendo em conta IV.4.11 e IV.4.12, podemos concluir que a restrição de f a $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ é derivável em cada x e com derivada nesse ponto igual a

$$\sum_{p \geq 0} (p + 1) a_{p+1} (x - x_0)^p$$

e, tendo em conta o facto de os elementos de $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ não serem aderentes a

$$X \setminus]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset]-\infty, x_0 - \varepsilon] \cup [x_0 + \varepsilon, +\infty[,$$

podemos aplicar III.1.11 para garantir que $f: X \to \mathbb{R}$ é também derivável em cada $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, em particular em x_0, e com

$$f'(x) = \sum_{p \geq 0} (p + 1) a_{p+1} (x - x_0)^p.$$

Tendo em conta a arbitrariedade de x_0, f é derivável em todos os pontos de X e a igualdade precedente, válida para todo o $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ mostra que $f': X \to \mathbb{R}$ é analítica em x_0. Mais uma vez pela arbitrariedade de x_0, concluímos que $f': X \to \mathbb{R}$ é analítica. É agora simples mostrar, por indução em p, que as funções analíticas são de classe C^p para todo o p (lembrar que se f' é de classe C^p então f é de classe C^{p+1}) e portanto são também de classe C^∞. □

IV.4.33 **(Exemplo de função não analítica)** A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ considerada na alínea b) do exercício III.4.19, apesar de ser de classe C^∞, não é analítica em 0, em particular não é analítica. Com efeito, se isso acontecesse, existiria $\varepsilon > 0$ e uma família $(a_p)_{p \geq 0}$ de reais tais que para cada $x \in]-\varepsilon, \varepsilon[$

$$f(x) = \sum_{p\geq 0} a_p\, x^p$$

e sabemos que nestas condições $a_p = f^{(p)}(0) = 0$. Concluíamos assim que teria que ser $f(x) = 0$ para cada $x \in\,]-\varepsilon, \varepsilon[$ em contradição com o facto de se ter $f(x) > 0$ para cada $x > 0$.

IV.4.34 **(Primitiva de uma função analítica)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função analítica. Seja $F\colon X \to \mathbb{R}$ uma primitiva de f, isto é, uma função derivável e com $F'(x) = f(x)$ para cada $x \in X$. Tem-se então que F é também uma função analítica.
Dem: Seja $x_0 \in X$ arbitrário. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\, \subset X$ e que exista uma série de potências $(a_p)_{p\geq 0}$ cujo domínio de somabilidade contenha $]-\varepsilon, \varepsilon[$ tal que para cada $x \in\,]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$,

$$f(x) = \sum_{p\geq 0} a_p (x - x_0)^p.$$

Tendo em conta IV.4.11, podemos considerar uma série de potências $(b_p)_{p\geq 0}$ cujo domínio de somabilidade também contém $]-1, 1[$ definida por $b_0 = F(x_0)$ e $b_p = \frac{a_{p-1}}{p}$ para $p \geq 1$ (a série de potências derivada desta é a primeira). Podemos assim definir uma função $\widehat{F}\colon]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\, \to \mathbb{R}$ por

$$\widehat{F}(x) = \sum_{p\geq 0} b_p (x - x_0)^p$$

que, lembrando IV.4.12, é derivável em cada $x \in\,]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ e com

$$\widehat{F}'(x) = \sum_{p\geq 0} (p+1) b_{p+1} (x - x_0)^p = \sum_{p\geq 0} a_p (x - x_0)^p = f(x).$$

Constatamos assim que $\widehat{F}$ e a restrição de F a $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ são duas primitivas da restrição de f a esse intervalo o que implica a existência de uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) = \widehat{F}(x) + c$ para cada $x \in\,]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$. O facto de se ter $F(x_0) = b_0 = \widehat{F}(x_0)$ implica que $c = 0$. Concluímos assim que para cada $x \in\,]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$

$$F(x) = \widehat{F}(x) = \sum_{p\geq 0} b_p (x - x_0)^p$$

o que mostra que F é uma função analítica em x_0. □

IV.4.35 **(Exemplos) a)** A função $\arctan\colon \mathbb{R} \to\,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ é analítica. Com efeito, sabemos que a sua derivada é a função $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ a qual é analítica por ser a inversa da função analítica $x \mapsto 1 + x^2$.
b) A função $\arcsin\colon]-1, 1[\, \to\,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ é analítica. Com efeito, sabemos que a sua derivada em cada x é

$$\operatorname{arcsen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

pelo que o facto de a função derivada ser analítica é uma consequência da alínea a) de IV.4.30, com $\alpha = -\frac{1}{2}$.

Vamos agora examinar alguns resultados que conduzirão a uma propriedade de certo modo surpreendente das funções analíticas: Se duas funções analíticas coincidirem num subconjunto do domínio, com certas propriedades que detalharemos, então têm que coincidir em todo o seu domínio. Começamos por examinar um lema.

IV.4.36 **(Lema)** Sejam X um intervalo aberto e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função analítica. Seja $Z \subset X$ o conjunto dos zeros de f, isto é o conjunto dos $x \in X$ tais que $f(x) = 0$. Se $x_0 \in X$ for um ponto de acumulação do conjunto Z, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\subset Z$. [238]

Dem: Vamos demonstrar o resultado pelo métodode passagem ao contrarrecíproco. Suponhamos então que não existe $\varepsilon > 0$ nas condições referidas. Sejam $\varepsilon > 0$ e $(a_p)_{p\ge 0}$ uma família de números reais tais que $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\subset X$ e que se tenha

$$f(x) = \sum_{p\ge 0} a_p(x-x_0)^p = a_0 + a(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots$$

para cada $x \in]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$. Uma vez que estamos a supor que $f(x)$ não é sempre 0 neste intervalo, tem que existir algum $a_p \neq 0$ e podemos notar p_0 o menor dos índices p nessas condições. Tem-se então para cada x neste intervalo

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{p\ge p_0} a(x-x_0)^p = (x-x_0)^{p_0} \times \sum_{p\ge p_0} a_p(x-x_0)^{p-p_0} = \\ &= (x-x_0)^p\, g(x), \end{aligned}$$

com

$$g(x) = \sum_{p\ge p_0} a_p(x-x_0)^{p-p_0} = \sum_{q\ge 0} a_{p_0+q}\,(x-x_0)^q$$

para cada $x \in]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$ (esta série de potências tem o mesmo raio de convergência que a que define $f(x)$ uma vez que os valores $x \neq x_0$ para os quais ela converge são os mesmos[239]). Tendo em conta IV.4.10, a função

[238]Esta propriedade é classificada como um lema uma vez que a que enunciamos a seguir utiliza-a na sua demonstração mas afirma mais com as mesmas hipóteses.

[239]Cada uma obtém-se da outra multiplicando cada parcela por $(x-x_0)^p$ ou por $1/(x-x_0)^p$.

$g\colon]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\to \mathbb{R}$ é contínua e portanto, por ser $g(x_0) = a_{p_0} \neq 0$, existe $\varepsilon' > 0$ tal que, para cada $x \in]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$ na vizinhança $V_{\varepsilon'}(x_0)$, $g(x) \neq 0$ (considerar uma vizinhança de a_{p_0} que não contenha 0). Sendo $\varepsilon'' > 0$ o menor dos números ε e ε', vemos agora que, para cada $x \neq x_0$ em $V_{\varepsilon''}(0)$, tem-se $g(x) \neq 0$, e portanto $f(x) = (x-x_0)^p g(x) \neq 0$, ou seja, $x \notin Z$, o que mostra que x_0 não é um ponto de acumulação de Z. □

IV.4.37 **(Resultado mais forte)** Sejam X um intervalo aberto e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função analítica. Seja $Z \subset X$ o conjunto dos zeros de f, isto é o conjunto dos $x \in X$ tais que $f(x) = 0$. Se $x_0 \in X$ for um ponto de acumulação do conjunto Z, então $Z = X$, isto é, $f(x) = 0$ para todo o $x \in X$.

Dem: Seja $X =]a, b[$, onde cada uma das extremidades a e b pode ser finita ou infinita. Já sabemos, pelo lema precedente, que existe $\varepsilon > 0$ tal que $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\subset Z$. Vamos dividir a prova de que $Z = X$ em duas partes, provando primeiro que $[x_0, b[\subset Z$ e depois que $]a, x_0] \subset Z$.

1) Consideremos o supremo $c > x_0$ do conjunto dos $x \in X$ com $x \geq x_0$ e $[x_0, x] \subset Z$, conjunto que contém todos os reais entre x_0 e $x_0 + \varepsilon$, e comecemos por provar que $[x_0, c[\subset Z$. Ora, isso resulta de que se $x \in [x_0, c[$ o facto de c ser um supremo garante a existência de $x' \in X$ com $x' > x$ e $[x_0, x'] \subset Z$ e então o facto de se ter $x \in [x_0, x']$ implica que se tem efetivamente $x \in Z$. Provemos agora que se tem $c = b$, o que provará que $[x_0, b[\subset Z$, o nosso objetivo nesta alínea. Ora, se fosse, por absurdo, $c < b$ vinha $c \in X$ e c, sendo ponto de acumulação de $[x_0, c[$, era também ponto de acumulação de Z pelo que, mais uma vez pelo lema precedente, existia $\varepsilon' > 0$ tal que $]c-\varepsilon', c+\varepsilon'[\subset Z$ de onde deduzíamos que qualquer y em $]c, c+\varepsilon'[$ verificava $[x_0, y] \subset Z$, portanto pertencia ao conjunto que considerámos com supremo c, um absurdo.

2) A prova de que se tem também $]a, x_0] \subset Z$ pode ser feita de modo análogo e poderia ser interessante o estudante tentar fazer por si essa adaptação do que foi feito em 1). No entanto, se quisermos poupar trabalho (o que é também instrutivo), poderemos aplicar o que já verificámos a uma função analítica auxiliar, nomeadamente a função $\widehat{f}\colon]-b, -a[\to \mathbb{R}$ definida por $\widehat{f}(x) = f(-x)$: Para cada $x \in]-x_0-\varepsilon, -x_0+\varepsilon[$ tem-se $-x \in]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$, portanto $\widehat{f}(x) = f(-x) = 0$, o que implica, em particular, que $-x_0$ é um ponto de acumulação do conjunto dos zeros de $\widehat{f}$. O que vimos em 1) garante assim que todos os elementos $y \in [-x_0, -a[$ são zeros de $\widehat{f}$ e daqui decorre que todos os $x \in]a, x_0]$ são zeros de f. □

IV.4.38 **(Corolário)** Sejam X um intervalo aberto e $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ duas funções analíticas tais que exista um conjunto $A \subset X$, admitindo um ponto de acumulação $x_0 \in X$, tal que $f(x) = g(x)$ para todo o $x \in A$. Então $f = g$, isto é, tem-se mesmo $f(x) = g(x)$ para todo o $x \in X$.

Dem: A função analítica $X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - g(x)$ toma o valor 0 em todos os pontos de A e portanto x_0, que é ponto de acumulação de A, é também poto de acumulação do conjunto dos zeros daquela função analítica.

Aplicando IV.4.37, vemos que para cada $x \in X$ tem-se $f(x) - g(x) = 0$, donde $f(x) = g(x)$. □

Exercícios

Ex IV.4.1 Determinar os raios de convergência das seguintes séries de potências e, quando os resultados estudados no curso o permitirem, identificar os seus intervalos de somabilidade.

a) $\displaystyle\sum_{p\geq 0} p^2 x^p$,

b) $\displaystyle\sum_{p\geq 2} \frac{1}{p-1} x^p$,

c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^{n-1}} x^n$,

d) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2+\cos(n\pi))^n} x^n$,

★ **e)** $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n!}{n^n} x^n$.

Ex IV.4.2 Identificar os valores de x para os quais os somatórios seguintes correspondem a famílias somáveis.

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} x^{3n}$,

b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \sqrt{n}\,(\sqrt{x})^n$,

c) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}(x+1)^{2n}$.

Ex IV.4.3 Lembrar que, como se verificou no exemplo a) em IV.4.13, para cada $x \in \,]-1,1[$ tem-se

$$\sum_{p\geq 1} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x).$$

a) Mostrar que se pode definir uma função contínua $F\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ por

$$F(x) = \sum_{p\geq 1} \frac{1}{p(p+1)} x^{p+1}$$

e que esta função é derivável em cada $x \in]-1, 1[$ e com

$$F'(x) = -\ln(1-x).$$

Concluir que se tem para cada $x \in]-1, 1[$

$$\sum_{p\geq 1} \frac{1}{p(p+1)} x^{p+1} = F(x) = (1-x)\ln(1-x) + x.$$

b) Deduzir de a) que se tem

$$\sum_{p\geq 1} \frac{(-1)^{p+1}}{p(p+1)} = 2\ln(2) - 1$$

e

$$\sum_{p\geq 1} \frac{1}{p(p+1)} = 1,$$

reparando que a segunda conclusão também se pode obter a partir da igualdade $\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$, pelo exame das somas parciais da série (comparar com IV.2.15).

Ex IV.4.4 Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função analítica num ponto $x_0 \in X$. Mostrar que existe $\varepsilon > 0$ tal que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset X$ e que a restrição de f a $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ seja uma função analítica.
Sugestão: Lembrar IV.4.24.

Ex IV.4.5 Sejam X um intervalo aberto, $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função analítica, $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$ menor ou igual ao raio de convergência da série de potências determinada pela família $(\frac{1}{p!} f^{(p)}(x_0))_{p\geq 0}$ e tal que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset X$. Pode então concluir-se que $f(x)$ é a soma da sua série de Taylor nesse intervalo, isto é, que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{p\geq 0} \frac{1}{p!} f^{(p)}(x_0)\,(x-x_0)^p = \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)\,(x-x_0)^2 + \cdots \end{aligned}$$

para cada $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$.
Porque razão esta conclusão não é uma consequência direta da definição de função analítica e de que forma ela pode ser deduzida facilmente de IV.4.38?

Índice de Símbolos

Índice Remissivo

Bibliografia

[1] ANDRÉ, Carlos e FERREIRA, Fernando, *Matemática Finita*, Universidade Aberta, 203, Lisboa, 2000.

[2] APOSTOL, Tom M., *Calculus, Vol I*, Blaisdell Publishing Company, 1967.

[3] BATTY, Charles e WOODHOUSE, Nick, *HOW DO UNDERGRADUATES DO MATHEMATICS? A guide to studying mathematics at Oxford University*, http://www.maths.ox.ac.uk/files/study-guide/guide.pdf .

[4] CAMPOS FERREIRA, Jaime, *Introdução à Análise Matemática*, Fundação Calouste Gulbenkian, 1985.

[5] CARTAN, Henri, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, Paris, 1961.

[6] COSTA PEREIRA, Nuno, *Exponencial Complexa, Funções Circulares e Desenvolvimentos em Série, Textos de Matemática*, Departamento de Matemática da FCUL, 2000.

[7] FIGUEIRA, Mário, *Fundamentos de Análise Infinitesimal, Textos de Matemática*, Departamento de Matemática da FCUL, 1996.

[8] GUERREIRO, J. S., *Curso de Análise Matemática*, Escolar Editora, 2007.

[9] LIMA, Elon Lages, *Análise Real, Vol I*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2004.

[10] LIMA, Elon Lages, *Curso de Análise, Vol I*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2009.

[11] SARRICO, C. *Análise Matemática, Leituras e exercícios*, Gradiva 1997.