# Semaine du 24/11 au 30/11

## Fonctions réelles continues

Ici $f$ est une fonction réelle continue.

1. **Définition de limite et rappels.** Définition de la limite d'une fonction, notion de voisinage dans $\mathbb{R}$, d'adhérence dans $\mathbb{R}$.
   Unicité de la limite, limite à gauche et à droite, caractérisation de la limite par les limites à gauche et à droite, limite de la composée, inégalités et limites, caractérisation séquentielle de la limite, théorèmes d'encadrement, de majoration et de minoration, théorème de la limite monotone pour les fonctions.

2. **Définitions.** Continuité en un point, continuité à gauche et à droite en en point, Continuité sur un intervalle,

3. **Propriétés.** Caractérisation séquentielle de la continuité, Somme, produit quotient et composée de fonctions continues, prolongement par continuité.

4. **Théorèmes.** Théorème des valeurs intermédiaires, image d'un intervalle par $f$ est un intervalle, $f$ atteint ses bornes sur un intervalle fermé borné, Théorème de la bijection, et réciproque continue.

## Preuves

*Seules les preuves dans cette section sont à savoir par coeur par les étudiants. Les autres preuves peuvent être demandées, en proposant une méthode et/ou en aidant l'étudiant durant la réalisation de la preuve.*

La question de cours sera composée d'un énoncé rapide (définition, propriété ou théorème), suivi d'une démonstration (ou exemple) de cours choisie parmi :

1. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Définition de $\lim\limits_{+\infty} f = l$. Montrer que si $f(x) \to \ell$ et $f(x) \to \ell'$ quand $x \to +\infty$, alors $\ell = \ell'$.
   *Proposition de l'unicité de la limite*

2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$ un intervalle fermé borné.
   Montrer que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ si et seulement si $\forall (x_n) \subset I^{\mathbb{N}}$ telle que $(x_n) \to a$, on a $(f(x_n)) \to \ell$.
   *Caractérisation séquentielle de la limite*

3. Citer le théorème des valeurs intermédiaires.
   Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et telle que $f(I) \subset \mathbb{Q}$.
   Montrer que l'image de tout intervalle de $f$ est un intervalle, puis que $f$ est constante.