

Probabilités sur un univers fini

Le programme de première année se limite à une expérience aléatoire n'ayant qu'un nombre fini d'issues possibles.

Le concept d'**expérience aléatoire** n'est pas mathématique. On donne ce nom à toute expérience matérielle ou expérience de pensée.

L'ensemble des résultats possibles d'une telle expérience est appelé son **univers**, noté généralement Ω . Les résultats possibles sont appelés **issues**.

Exemple 1

L'expérience d'un lancer de dé à 6 faces peut conduire à 6 résultats, selon la face obtenue. Pour modéliser un tel lancer, on peut choisir pour univers Ω l'ensemble $\llbracket 1, 6 \rrbracket$.

Exemple 2

L'expérience d'un lancer de pièce de monnaie 2 faces peut conduire à 2 résultats, selon la face obtenue. Pour modéliser un tel lancer, on peut choisir pour univers Ω l'ensemble $\{P, F\}$.

En MPSI, les univers sont des ensembles finis (sauf envie irrépressible du professeur).

Le problème de cette restriction, due à la difficulté technique des définitions, est que l'on ne peut pas

- De jouer à pile ou face indéfiniment,
- Suivre le nombre de personnes dans une queue,
- Étudier la durée de vie d'un atome radioactif,
- Le nombre de voitures franchissant un point donné sur une route par période de temps,
- Les prix de certaines denrées.

1 EXPÉRIENCE ALÉATOIRE ET UNIVERS

Définition 1 : Univers

On appelle **univers** l'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire. Cet univers sera noté Ω .

Les singletons de Ω sont appelés les **événements élémentaires** de Ω .

L'événement Ω est appelé l'**événement certain** et l'événement $\emptyset$ l'**événement impossible**.

Dans le cas d'un univers fini, on appelle **événement** toute partie de Ω .

issues = résultats = réalisation

Exemple 3

- Si on lance dix fois un dé, on peut poser $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^{10}$.

- Si on tire 3 boules, avec remise, dans une urne contenant 10 boules numérotées de 1 à 10, on peut poser $\Omega = \llbracket 1, 10 \rrbracket^3$.
- Dans une urne contenant 4 boules noires et une boule blanche, si on tire une boule, sans remise, jusqu'à l'obtention de la boule blanche, on peut poser $\Omega = \{B, NB, NNB, NNNB, NNNNB\}$.

Définition 2 : Opération sur les événements

Soit Ω un univers fini, et A et B deux événements.

Intersection d'événements On appelle événement " A et B " l'événement $A \cap B$.
C'est l'ensemble des issues telles que la condition A et la condition B soient réalisées simultanément.

Union d'événements On appelle événement " A ou B " l'événement $A \cup B$.
C'est l'ensemble des issues telles que la condition A soit réalisée ou la condition B soit réalisée.

Contraire d'un événement On appelle événement contraire de A l'événement $\bar{A} = \Omega \setminus A$

Événements incompatibles est donné à deux parties de Ω disjointes, $A \cap B = \emptyset$

Ce sont les mêmes définitions qu'en théorie des ensembles.

Exemple 4

Soient A, B, C trois événements d'un univers fini. Pour que

- Aucun des événements A, B ou C ne soit réalisé, il faut que la réalisation soit dans $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$.
- Un seul des trois événements A, B ou C soit réalisé, il faut que la réalisation soit dans $(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$.
- Au moins deux des trois événements A, B ou C soient réalisés, il faut que la réalisation soit dans $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$.
- Pas plus de deux des trois événements A, B ou C soient réalisés, il faut que la réalisation soit dans $\overline{A \cap B \cap C}$.

Définition 3 : Système complet d'événements

On appelle **système complet d'événements** tout p -uplet $(A_1, \dots, A_p)$ d'événements deux à deux incompatibles, non vides, tels que la réunion forme tout Ω .

⚠ ATTENTION L'adjectif "**disjoint**" n'est pas là pour décorer !

En pratique

On appelle cela une partition de Ω , théorie des ensembles, soit

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad A_i \neq \emptyset, \quad \text{et} \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, \quad (i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset) \quad \text{et} \quad \bigcup_{i=1}^p A_i = \Omega$$

Un système complet d'événements permet donc de "découper" Ω en sous-cas disjoints. C'est très utile lorsque l'expérience se fait en deux étapes, dont la deuxième dépend du résultat de la première.

Exemple 5

Supposons que l'on tire une boule dans une urne avec 10 boules rouges et 10 boules bleues numérotées de 0 à 9. Les événements

- A_1 : "tirer une boule avec un chiffre pair",
- A_2 : "tirer une boule bleue avec un nombre premier impair",
- A_3 : "tirer une boule rouge avec un chiffre impair",
- A_4 : "tirer une boule bleue avec un chiffre de valeur absolue congrue à 1 modulo 10",

forment un système complet d'événements.

2 VARIABLES ALÉATOIRES

Définition 4 : Variable aléatoire

Une variable aléatoire X , souvent notée v.a., est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E .

Si $E \subset \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite réelle.

Si $A \subset E$ une partie de E , on note l'événement $(X \in A) = \{X \in A\} := X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in A\}$.

Exemple 6

On effectue 6 lancers d'un dé équilibré. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^6$.

On définit X la variable aléatoire donnant le nombre de fois où 1 apparaît.

On définit Y la variable aléatoire qui vaut la somme des lancers de E .

On définit U la variable aléatoire qui à un événement associe le point dont la première coordonnée est la somme des trois premiers lancers, et la deuxième coordonnée la somme des trois derniers lancers. Ici, U n'est pas une variable aléatoire réelle.

Si A est un singleton $\{x\}$, on emploie plutôt les notations $\{X = x\}$ ou $(X = x)$, soit

$$\{X = x\} = X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}.$$

Cas des variables aléatoires réelles

Lorsque X est une variable aléatoire réelle, c'est-à-dire que $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, on peut aussi noter de la manière suivante les événements

$$\{X \leq x\} = X^{-1}(]-\infty, x]) \quad \text{et} \quad \{X = x\} = X^{-1}(\{x\}).$$

Exemple 7

Exemples d'inclusion.

- ① On lance deux fois un dé. Soit B , l'événement "La somme des deux résultats est paire" et A , l'événement "Les deux résultats sont pairs". On a alors $A \subset B$.
- ② On lance une fois un dé. Soit X la variable aléatoire réelle qui, à chaque réalisation, associe le résultat du dé. Alors $\{X \geq 3\} \subset \{X \geq 2\}$.

3 ESPACES PROBABILISÉS FINIS

Définition 5 : Probabilité, espace probabilisé

Une **probabilité** sur un univers fini Ω est une application $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$, telle que

- $P(\Omega) = 1$.
- Pour tous événements A, B incompatibles de Ω , on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Un **espace probabilisé** fini est un couple (Ω, P) où Ω est un univers fini et P une probabilité sur Ω .

En simplifié

C'est un ensemble fini, où on a ajouté une probabilité. C'est tout.
En particulier, $P(\emptyset) = P(\emptyset \cup \emptyset) = P(\emptyset) + P(\emptyset)$, donc $P(\emptyset) = 0$.

Exemple 8

Reprenons l'exemple 6

La probabilité la plus évidente celle qui à un élément de $\mathcal{P}(\Omega)$ associe son cardinal multiplié par $\frac{1}{6^6}$. Mais on peut aussi probabiliser l'ensemble avec d'autres probabilités ! Par exemple, $P_p : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$, telle que, si on pose A_p l'ensemble des réalisations composés de nombres pairs seulement, pour tout $A \in \mathcal{P}(A)$,

$$P_p(A) = \text{Card}(A \cap A_p) \times \frac{1}{3^6}.$$

Montrer que c'est bien une probabilité !

Vers la deuxième année

Des difficultés apparaissent dans le cas où Ω est infini. On ne peut pas se contenter de réunion d'événements élémentaires. Dans le cas d'une cible Ω , si A est un sous-ensemble de Ω , difficile de calculer la probabilité de A grâce à $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$.

Proposition 1

Soit (Ω, P) un univers probabilisé fini, et A, B deux événements. Alors

Complémentaire $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$,

Différence $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$,

Croissance si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$,

Additivité $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,

En général, $P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k)$, où $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$, et plus précisément,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) \quad (\text{Formule du crible}).$$

⚠ ATTENTION On regarde les objets mathématiques que l'on manipule !

Ne pas confondre les ensembles et les opérations sur les ensembles ($\cap, \cup, \bar{A} \dots$) et les opérations sur les probabilités qui sont des réels ($+, -$). On n'écrira pas

~~$P(\bar{A})$~~

~~$P(A) \cap P(B)$~~

~~$P(A \cup B)$~~

Preuve.

Complémentaire et Différence Comme $A = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B)$, alors $P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$.
Ainsi $P(\bar{A}) = P(\Omega \setminus A) = P(\Omega) - P(\Omega \cap A) = 1 - P(A)$, mais aussi $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$.

Croissance Si $A \subset B$, alors $B = A \sqcup (B \setminus A)$.
Donc, par définition, $P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A) + 0 = P(A)$.

Additivité On a $A = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B)$ et $A \cup B = (A \setminus B) \sqcup B$.
Donc, par définition, $P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$. On étend ensuite ce premier cas de sous-additivité à davantage d'événements par récurrence.

□

Événements équiprobables deux événements A et B ,
tels que $P(A) = P(B)$.

Probabilité uniforme l'application $P_U : A \mapsto \frac{|A|}{|\Omega|}$

Intuition

La probabilité uniforme est la probabilité qui donne à chaque singleton la même mesure, soit $\frac{1}{|\Omega|}$, si Ω est fini.

On a donc, pour tout événement A , $P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas possibles au total dans } \Omega}$.

Exemple 9

Bien sûr, le jeté d'une pièce ou d'un dé bien équilibrés, forment des événements équiprobables. Donnons deux exemples supplémentaires où on peut utiliser les probabilités uniformes.

- Une urne contient a boules blanches, et b boules noires. On tire au hasard n boules, en supposant que $n \leq \min(a, b)$. On note X la variable aléatoire qui à chaque poignée associe le nombre de boules blanches que contient cette poignée. On soit que l'expérience qui consiste à tirer une boule au hasard est équiprobable et suit donc une probabilité uniforme. Donc tirer une boule blanche a pour probabilité $\frac{\text{nombre de blanches}}{\text{nombre de boules au total}}$.
On a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(X = k) = \begin{cases} 0, & \text{si } k > n \\ \frac{a(a-1) \cdots (a-k+1) \cdot b(b-1) \cdots (b-n+k+1)}{(a+b)(a+b-1) \cdots (a+b-n+1)}, & \text{si } k \leq n \end{cases}$$

- On prend deux dés équilibrés non discernables. On cherche à obtenir la probabilité d'avoir une somme égale à 6. On cherche alors le nombre de réalisations favorables, soit 5, puisque les réalisations sont $(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$, et le nombre de réalisations dans Ω , soit 36, puisque les réalisations sont $\llbracket 1, 6 \rrbracket^2$. La probabilité est alors égale à $\frac{5}{36}$.

⚠ ATTENTION Méfiez-vous. Vérifiez toujours de l'équiprobabilité!

Dans le dernier exemple, on peut penser résoudre comme suit.

Les dés ne sont pas discernables : on range les résultats par ordre croissant. Il y a comme résultats possibles : $(1, 1), \dots, (1, 6); (2, 2), \dots, (2, 6), \dots, (6, 6)$, soit : $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ cas possibles.

Les couples solutions sont $\{(1, 5)\}, \{(2, 4)\}$ et $\{(3, 3)\}$. La probabilité est donc avec ce raisonnement de $\frac{3}{21} = \frac{1}{7}$.

L'erreur a été de penser que les événements dans Ω sont équiprobables.

Proposition 2

Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ un univers fini.

(1) Soit P une probabilité sur Ω . On pose pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $p_i = P(\{\omega_i\})$. Alors

$$(1.a) \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad p_i \geq 0$$

$$(1.b) \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

(2) Réciproquement, toute famille de réels $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$ vérifiant les deux conditions (1a) et (1b) définit de manière unique une probabilité P sur Ω telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(\{\omega_i\}) = p_i$

On appelle **distribution de probabilités** sur un ensemble fini E toute famille de réels positifs indexée par cet ensemble et de somme 1. Cela permet de définir donc une probabilité sur E .

Intuition

Autrement dit, une probabilité sur un univers fini est entièrement définie par les images des singletons. Cela revient à dire, qu'une application est exactement définie par l'image de chacun des éléments de l'ensemble de départ... Pas incroyable donc.

Preuve.

($\Leftarrow$) $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $p_i = P(\{\omega_i\}) \geq P(\emptyset) = 0$, par croissance.

$$\text{De plus, } \sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n P(\{\omega_i\}) = P\left(\bigsqcup_{i=1}^n \{\omega_i\}\right) = P(\Omega) = 1.$$

($\Rightarrow$) Supposons que l'on a une distribution de probabilité $(p_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$.

$$\text{Alors } P(\Omega) = P\left(\bigsqcup_{i=1}^n \{\omega_i\}\right) = \sum_{i=1}^n P(\{\omega_i\}) = \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

De plus, pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $A = \bigsqcup_{w \in A} \{w\}$. Posons $I_A := \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \omega_i \in A\}$.

$$\text{Donc } P(A) = P\left(\bigsqcup_{i \in I_A} \{\omega_i\}\right) = \sum_{i \in I_A} P(\{\omega_i\}) = \sum_{i \in I_A} p_i \in [0, 1], \text{ par définition des } p_i.$$

Enfin, pour deux événements A, B incompatibles, posons I_A et I_B comme précédemment. Alors, comme $A \cap B = \emptyset$, on a $I_A \cap I_B = \emptyset$. Donc

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P\left(\bigsqcup_{i \in I_A \cup I_B} \{\omega_i\}\right) = \sum_{i \in I_A \cup I_B} P(\{\omega_i\}) = \sum_{i \in I_A} P(\{\omega_i\}) + \sum_{i \in I_B} P(\{\omega_i\}) = P\left(\bigsqcup_{i \in I_A} \{\omega_i\}\right) + P\left(\bigsqcup_{i \in I_B} \{\omega_i\}\right) \\ &= P(A) + P(B). \end{aligned}$$

P est donc bien une probabilité.

□

Exemple 10

Soit un dé tel que la probabilité d'obtenir un 1 est de $1/12$, un 2 de $1/24$, un 3 de $1/24$, un 4 de $1/12$, un 5 de $1/6$. Donner la probabilité d'obtenir un 6. Quelle est la probabilité d'avoir un nombre pair? un multiple de 3?

Exemple 11

Il est parfois plus simple de calculer $P(\bar{A})$ puis d'en déduire $P(A)$.

Soit $(n \in \mathbb{N}^*)$. On lance un dé équilibré n fois. Soit X la variable aléatoire réelle donnant le nombre de fois où un "6" apparaît. Pour calculer $P(X \geq 1)$, on peut passer par son complémentaire

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0).$$

Or $P(X = 0) = P(\llbracket 1, 5 \rrbracket^n) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$, d'où $P(X \geq 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

4 PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

4.1 DÉFINITIONS

Le fait de connaître un événement B peut changer la probabilité d'un événement A , car on "restreint" les issues possibles si on sait que B a lieu.

Par exemple, la probabilité de victoire d'une équipe n'est pas la même, si l'on sait que certains de ses meilleurs joueurs ne sont pas présents.

Définition 6 : Probabilité conditionnelle

Soit (Ω, P) un univers probabilisé fini et $B \subset \Omega$ un événement tel que $P(B) > 0$.

La probabilité conditionnelle de l'événement A sachant que B est réalisé, noté $P(A | B)$ ou $P_B(A)$, est définie par

$$P(A | B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Exemple 12

La probabilité P_p définie dans l'exemple 8 est une probabilité conditionnelle. Par rapport à quelle événement ?

Principe statistique

On effectue 1000 fois une expérience. L'événement B intervient 400 fois. L'événement A intervient 100 fois avec B , et 50 fois sans B .

Si je sais que B a lieu, j'estime la probabilité d'avoir A à $\frac{100}{400}$, soit $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Si je sais que A a lieu, j'estime la probabilité d'avoir B à $\frac{100}{150}$, soit $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Convention

$P(A | B) = 0$ si $P(B) = 0$. Bien que le premier terme n'ait pas de sens, ce produit devrait vérifier $P(A \cap B) \leq P(B) = 0 \dots$

Proposition 3

Soit B un événement de probabilité non nulle. L'application P_B est une probabilité sur Ω .

Preuve. On vérifie la définition.

- $P_B(\Omega) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$.
- Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \leq \frac{P(B)}{P(B)} = 1$, car $A \cap B \subset \Omega$, et $P_B(A) \geq 0$.
- Pour tout $A, C \in \mathcal{P}(\Omega)$, tels que $A \cap C = \emptyset$. On a

$$P_B(A \cup C) = \frac{P((A \cup C) \cap B)}{P(B)} = \frac{P((A \cap B) \sqcup (C \cap B))}{P(B)} = \frac{P(A \cap B) + P(C \cap B)}{P(B)} = P_B(A) + P_B(C).$$

□

Exemple 13

On considère deux urnes. La première U_1 contient 3 boules blanches (B) et 7 noires (N); la deuxième urne U_2 contient 4 blanches et 6 noires.

On choisit une urne les yeux bandés et on tire deux boules simultanément dans l'urne choisie.

Quelle est la probabilité d'avoir une boule noire et une boule blanche sachant qu'on a choisi l'urne U_1 ? Même chose avec U_2 .

Exemple 14

On considère un jeu de 32 cartes, et une main de 5 cartes pour Alice.

- ① Quelle est la probabilité pour qu'Alice ait au moins un as?
- ② Quelle est la probabilité pour qu'Alice ait au moins un as sachant que la dernière carte du paquet restant est un as?
- ③ Quelle est la probabilité pour qu'Alice ait au moins un as et que la dernière carte du paquet soit un as?

4.2 FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES**Proposition 4 : Formule des probabilités totales**

Soit (Ω, P) un univers probabilisé fini, et $(A_1, \dots, A_p)$ un système complet d'événements. Alors pour tout événement B de Ω

$$P(B) = \sum_{i=1}^p P_{A_i}(B) \cdot P(A_i) = P_{A_1}(B) \cdot P(A_1) + P_{A_2}(B) \cdot P(A_2) + \dots + P_{A_p}(B) \cdot P(A_p) .$$

C'est exactement la méthode de fonctionnement d'un arbre de probabilités !

Preuve. Avec les notations de l'énoncé,

$$P(B) = P(B \cap \Omega) = P\left(B \cap \left(\bigsqcup_{i=1}^p A_i\right)\right) = P\left(\bigsqcup_{i=1}^p B \cap A_i\right) = \sum_{i=1}^p P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^p P_{A_i}(B) \cdot P(A_i)$$

□

Exemple 15

On reprend l'exemple 13 et on cherche à savoir la probabilité pour tirer une boule noire et une boule blanche. On pourra faire l'arbre des probabilités.

Cas d'un seul évènement

Soit $A \subset \Omega$ de probabilité différente de 0 et de 1. Alors, pour tout $B \subset \Omega$, on a

$$P(B) = P(B \mid A)P(A) + P(B \mid \bar{A})P(\bar{A}) .$$

Exemple 16

Calculons la probabilité que la somme des résultats du lancer de deux dés usuels soit égale à 9. L'espace probabilisé est construit avec l'univers $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$ muni de la probabilité uniforme. L'événement qui nous intéresse est

$$B = \{(x, y) \in \Omega \mid x + y = 9\}$$

et on considère la partition de Ω obtenue avec les événements $A_k = \{k\} \times \llbracket 1, 6 \rrbracket$ pour $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$.

La formule des probabilités totales donne alors $P(B) = \sum_{k=1}^6 P(B \mid A_k) P(A_k)$.

Or, pour tout $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$, $P(A_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega|} = \frac{1}{6}$, donc

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 P(B \mid A_k) \\ &= \frac{1}{6} (P(\emptyset) + P(\emptyset) + P(\{3, 6\}) + P(\{4, 5\}) + P(\{5, 4\}) + P(\{6, 3\})) = \frac{1}{9} . \end{aligned}$$

On aurait pu bien évidemment calculer directement cette probabilité en dénombrant B .

Proposition 5 : Formule des probabilités composées

Soit (Ω, P) un univers probabilisé fini, et p événements $B_1, \dots, B_p$. Alors

$$P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_p) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(B_2) \cdot P_{B_1 \cap B_2}(B_3) \cdot \dots \cdot P_{B_1 \cap \dots \cap B_{p-1}}(B_p)$$

C'est exactement la façon dont vous procédez pour lire la probabilité d'une feuille d'un arbre : C'est la formule à utiliser lorsqu'un tirage dépend des résultats des précédents.

Preuve. Par récurrence sur p . $\square$

Exemple 17

Une urne contient 8 boules blanches et deux boules noires. On tire sans remise et successivement 5 boules de cette urne. On note N_i , l'évènement de tirer une boule noire au i -ième tirage et B_i , l'évènement de tirer une boule blanche au i -ième tirage. Alors,

$$\begin{aligned} P(B_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap B_4 \cap B_5) &= P(B_1) \cdot P_{B_1}(N_2) \cdot P_{B_1 \cap N_2}(N_3) \cdot P_{B_1 \cap N_2 \cap N_3}(B_4) \cdot P_{B_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap B_4}(B_5) \\ &= \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot 1 \cdot 1 \\ &= \frac{2}{90} \end{aligned}$$

Proposition 6

Soit A, B deux événements d'un univers probabilisé fini tels que $P(B) > 0$. Alors

$$P_B(A) = \frac{P_A(B) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Si $(A_i)_{1 \leq i \leq p}$ est un système complet d'événements et si B est un événement de probabilité non nulle, alors

$$\forall j \in [1, p], \quad P_B(A_j) = \frac{P_{A_j}(B) \cdot P(A_j)}{\sum_{i=1}^p P_{A_i}(B) \cdot P(A_i)} = \frac{P_{A_j}(B) \cdot P(A_j)}{P(B)}$$

Interprétation

Supposons que A soit une cause possible de B . On sait que B a eu lieu, et on cherche la probabilité que cette cause précise ait eu lieu.

Ce conditionnement "remonte donc le cours du temps de l'évènement aléatoire". En revanche, $P_A(B)$ va dans le sens chronologique.

La formule de Bayes est parfois appelé formule des probabilités des causes et s'utilise lorsqu'on cherche la probabilité d'un événement "précédent".

Exemple 18

Un test permet de dépister une pièce frauduleuse, mais ce test n'est pas fiable. Il détecte une pièce défectueuse dans 95 cas sur 100 et il détecte qu'une pièce est saine dans 90 cas sur 100.

Un lot de 100 pièces contient 8% de pièces défectueuses. Une pièce, prise au hasard est déclarée défectueuse après le test. Quelle est la probabilité qu'elle le soit réellement?

Posons les événements

D : la pièce est défectueuse.

T : le test est positif, soit la pièce est testée défectueuse.

Ici on veut alors calculer la probabilité $P_T(D)$. Grâce à la proposition précédente, on a

$$P_T(D) = \frac{P_D(T) \cdot P(D)}{P_D(T) \cdot P(D) + P_{\bar{D}}(T) \cdot P(\bar{D})} = \frac{\frac{95}{100} \cdot \frac{8}{100}}{\frac{95}{100} \cdot \frac{8}{100} + \frac{10}{100} \cdot \frac{92}{100}} = \frac{19}{42}.$$

5 LOI D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

5.1 DÉFINITIONS

Définition 7 : Loi d'une variable aléatoire

Soit Ω un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur Ω .

On appelle loi de la variable aléatoire X noté P_X la suite donnée par les $(P(X = x))_{x \in E}$. La loi définit la probabilité de chacun des résultats possibles pour la variable aléatoire

Exemple 19

On lance deux dés équilibrés. Soit X la variable aléatoire égale à la somme des numéros des résultats.

Alors $X : \Omega \rightarrow \llbracket 2, 12 \rrbracket$. De plus, pour tout $k \in \llbracket 2, 12 \rrbracket$, on a

$$P_X(2) = P(X = 2) = 1/36$$

$$P_X(6) = P(X = 6) = 5/36$$

$$P_X(10) = P(X = 10) = 3/36$$

$$P_X(3) = P(X = 3) = 2/36$$

$$P_X(7) = P(X = 7) = 6/36$$

$$P_X(11) = P(X = 11) = 2/36$$

$$P_X(4) = P(X = 4) = 3/36$$

$$P_X(8) = P(X = 8) = 5/36$$

$$P_X(12) = P(X = 12) = 1/36$$

$$P_X(5) = P(X = 5) = 4/36$$

$$P_X(9) = P(X = 9) = 4/36$$

On vérifie bien que la somme des probabilités trouvées est égale à 1.

Exemple 20

Une urne contient $a \geq n$ boules blanches, et $b \geq n$ boules noires. On tire simultanément n boules. Soit X le nombre de boules blanches tirées.

Alors $X : \Omega \rightarrow \llbracket 0, n \rrbracket$. De plus, le nombre de manières de tirer simultanément n boules parmi $a + b$, est le nombre de n -combinaisons, soit $\binom{a+b}{n}$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, le nombre de manières d'obtenir k boules blanches et $n - k$ boules noires est $\binom{a}{k} \cdot \binom{b}{n-k}$. Les tirages de boules étant équiprobables, on a

$$P(X = k) = \binom{a}{k} \cdot \binom{b}{n-k} \cdot \binom{a+b}{n}^{-1} = \frac{a! \, b! \, n! \, (a+b-n)!}{k! \, (a-k)! \, (n-k)! \, (b-n+k)! \, (a+b)!}.$$

On vérifie que $\binom{a+b}{n} \sum_{k=0}^n P(X = k) = \sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \cdot \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$.

De quelle formule s'agit-il ?

Notations Soit X et Y . On note $X \sim Y$ la relation $P_X = P_Y$, c'est-à-dire si les deux variables aléatoires ont même loi.

⚠ ATTENTION La loi ne définit **jamais** la variable aléatoire.

Si on joue à pile ou face, les variables X_0 et X_1 aléatoire qui associe à **Pile**, 0 et 1 respectivement, et à **Face**, 1 et 0 respectivement ont la même loi ! Pourtant ce ne sont pas les mêmes variables aléatoires.

5.2 IMAGE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

Définition 8

Soit (Ω, P) un univers probabilisé fini, X une variable aléatoire de Ω sur E , et f une application de E dans F . Alors $Y = f \circ X$ noté $Y = f(X)$ est une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans F . La loi de Y est la donnée des probabilités $(P(Y = y))_{y \in F}$, c'est-à-dire

$$P(Y = y) = P(X \in f^{-1}(\{y\})) = \sum_{\substack{x_k \in E \\ f(x_k) = y}} P(X = x_k)$$

Exemple 21

L'expérience est celle de la roulette. On lance une bille sur une roulette ayant des numéros de 0 à 49. A chaque case, on associe un gain : Soit $f : 0 \mapsto 0; 1 \mapsto 2; 2 \mapsto 0; 3 \mapsto 2; 4 \mapsto 0 \dots, 13 \mapsto 100; 14 \mapsto 0 \dots, 49 \mapsto 100$.

Soit X la variable aléatoire contenant la valeur de la case sélectionnée par la bille, et on pose $Y = f(X)$. Alors Y représente la gain pour un lancer. On a

$$P(Y = 0) = P(X \in 2\mathbb{N}) = \sum_{\substack{x_k \in [0, 49] \\ x_k \text{ pair}}} P(X = x_k) = 25/50 = 1/2$$

Proposition 7

Soit X, Y deux variables aléatoires sur (Ω, P) à valeurs dans E , et $f : E \rightarrow F$ une application.

$$\text{Si } X \sim Y, \quad \text{alors } f(X) \sim f(Y)$$

Preuve. On suppose que, pour tout $k \in E$, $P(X = k) = P(Y = k)$.

On a alors, pour tout $l \in F$,

$$P(f(X) = l) = \sum_{\substack{x_k \in E \\ f(x_k) = l}} P(X = x_k) = \sum_{\substack{x_k \in E \\ f(x_k) = l}} P(Y = x_k) = P(f(Y) = l).$$

□

5.3 LOIS USUELLES

Certaines situations typiques reviennent de manière récurrente. Elles n'ont pas lieu dans les mêmes situation (pile/face, ou urne, ou...) mais la modélisation en probabilité est la même.

Définition 9 : Loi uniforme

C'est la loi où chaque possibilité a autant de "chance" d'apparaître qu'une autre.

Exemple 22

- Dés non pipés.
- roulette parfaite équilibré.
- Une urne contient 5 boules de 5 couleurs : Bleu, Rouge, Vert, Noir, Jaune.
La probabilité de tirer la boule rouge est de $1/5$. On peut justifier cela en disant que le tirage d'une boule est équiprobable.

⚠ ATTENTION Deuxième et dernier avertissement ! On a déjà vu que tout n'a pas une probabilité uniforme ! On se convainc toujours de la loi de probabilité suivie !

Définition 10 : Loi de Bernoulli

On dit qu'une variable aléatoire réelle $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ suit une **loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$** , et on notera $X \sim \mathcal{B}(p)$ si

$$X(\Omega) = \{0, 1\} \text{ et si } P(X = 1) = p.$$

Probabilités

On a donc $P(X = 0) = 1 - p = q$, pour que $P(X \in \{0, 1\}) = 1$.

La situation typique de cette modélisation est une variable n'ayant que deux possibilités, un succès avec une probabilité p , et un échec.

Une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli est donc une fonction indicatrice d'un événement A , qui correspond à l'ensemble des événements amenant un succès

$$X : \Omega \rightarrow \{0, 1\}, \text{ et } A = X^{-1}(\{1\}) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = 1\}$$

Exemple 23

- Lancer d'une pièce, parfois déséquilibrée, avec gain si pile.
- Une urne ayant a boules blanches, b boules noires. Soit X la variable aléatoire qui est égale à 1 si on tire une boule blanche, 0 sinon. Alors X suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{a}{a+b}$.
- On suppose maintenant la même urne, avec des boules blanches numérotées de 1 à a , et b boules noires. On tire une poignée de $n \leq a + b$ boules dans l'urne. Soit X_i la variable aléatoire réelle qui vaut 1 si la boule blanche numéro i sort, et 0 sinon. Alors $P(X_i = 1) = \frac{\binom{a+b-1}{n-1}}{\binom{a+b}{n}} = \frac{n}{a+b}$.

$$\text{Ainsi, } X_i \sim \mathcal{B}\left(\frac{n}{a+b}\right)$$

Définition 11 : Loi binomiale

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.

On dit que X suit une **loi binomiale de paramètre (n, p)** si

- ① $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.
- ② $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ où $q = 1 - p$.

On note alors $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Exemple 24

Soit $p \in [0, 1]$. Prenons une urne U contenant en proportion p boules blanches et $q := 1 - p$ boules noires. On effectue n tirages successifs en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées au cours des n tirages. On a donc $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.

Si $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, l'événement $(X = k)$ est réalisé lorsque k boules blanches sont tirées et $n - k$ boules noires. Il y a $\binom{n}{k}$ possibilités de choisir le rang des k boules blanches tirées.

Posons A_j l'événement "au j -ième tirage, on tire une boule blanche". On cherche la probabilité que k boules blanches soient tirées dans les k premiers tirages. On a alors $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k \cap \overline{A_{k+1}} \cap \dots \cap \overline{A_n}) = p^k (1 - p)^{n-k}$ par la formule des probabilités composées, sachant que les tirages précédents n'influent pas sur le tirage en cours. Si les k

boules blanches ont lieu à d'autres tirages, le calcul de probabilité est le même. Ainsi, par union disjointe d'événements, on a

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Lien entre Bernoulli et Binomiale

Si $n = 1$, on retombe sur une loi de Bernoulli, soit $\mathcal{B}(1, p) = \mathcal{B}(p)$. Une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ s'interprète comme le nombre de succès lors d'une répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre p , ou de tirages avec remise dans un modèle avec des urnes.

Exemple 25

Soit n clients indépendants, et m caisses d'un supermarché. Les clients choisissent les caisses au hasard.

On note X le nombre de clients se présentant à la caisse numéro 1.

On note $p = \frac{1}{m}$ la probabilité (de succès) qu'un client choisisse la caisse 1. On a n épreuves de Bernoulli, donc la variable X suit une loi binomiale de paramètres (n, p) .

5.4 LOI CONDITIONNELLE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE SACHANT UN ÉVÉNEMENT

Définition 12

Soit (Ω, P) un espace fini probabilisé, X une variable aléatoire à valeurs dans E , et A un événement de probabilité non nulle. On appelle loi conditionnelle de X sachant A la suite donnée par les $(P_A(X = x))_{x \in E}$.

⚠ ATTENTION Toutes les variable aléatoire ne suivent pas des lois classiques!

Méthode

Pour une variable aléatoire réelle X , dans certains cas (notamment si X est défini comme un min ou un max), il est parfois plus simple de trouver : $P(X \leq x_k)$ pour en déduire $P(X = x_k)$.

Exemple 26

On considère le lancer de 2 dés. Soit X la variable aléatoire qui donne le maximum des deux résultats obtenus. Notons D_i , pour $i = 1, 2$, la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu à chaque lancer.

Pour calculer la loi de X , on peut calculer, pour tout $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$,

$$P(X \leq k) = P(\max(D_1, D_2) \leq k) = P((D_1 \leq k) \cap (D_2 \leq k)) = P(D_1 \leq k) \cdot P(D_2 \leq k).$$

Or $P(D_i \leq k) = \frac{k}{6}$, d'où $P(X \leq k) = \frac{k^2}{36}$. Pour avoir $P(X = k)$, il suffit alors d'écrire $P(X \leq k) = P((X \leq k-1) \sqcup (X = k))$, donc

$$P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1) = \frac{k^2}{36} - \frac{(k-1)^2}{36} = \frac{2k-1}{36}.$$

6 INDÉPENDANCE

6.1 INDÉPENDANCE D'ÉVÉNEMENTS

Définition 13 : Indépendance d'événements

Soit (Ω, P) un univers probabilisé fini. Deux événements A et B sont dits indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Soit (Ω, P) un univers probabilisé. Les événements $A_1, \dots, A_n$ sont dits mutuellement indépendants si et seulement si : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall (i_1, \dots, i_k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^k, i_1, \dots, i_k$ 2 à 2 distincts,

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$$

Autre écriture

Si $P(B) > 0$, l'indépendance des deux événements s'écrit : $P_B(A) = P(A)$, ce qui fait ressortir l'idée originelle : B n'influence pas A .

⚠ ATTENTION Les événements mutuellement indépendants sont deux à deux indépendants. L'inverse est **faux** en général.

Exemple 27

Un enquêteur arrive dans une maison avec deux enfants. On définit les événements suivants :

A : "la fratrie est mixte"

B : "l'aînée est une fille"

C : "le cadet est un garçon"

Les événements A, B et C sont deux à deux indépendants, mais pas mutuellement indépendants. En effet,

- $P(A) = \frac{1}{2}$
- $P(C) = \frac{1}{2}$
- $P(A \cap C) = \frac{1}{4}$
- $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$
- $P(B) = \frac{1}{2}$
- $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$
- $P(B \cap C) = \frac{1}{4}$

Proposition 8

Si A et B sont deux à deux indépendants, alors A et $\bar{B}$ le sont aussi.

De même, si $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants, alors la famille formée en prenant pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ l'événement A_i ou son complémentaire forme une famille d'événements mutuellement indépendants.

Preuve.

Vérification immédiate de la définition. $\square$

6.2 INDÉPENDANCE DE VARIABLES ALÉATOIRES

Il est fréquent d'une expérience aléatoire fasse intervenir non pas une mais plusieurs variables aléatoires réelles, et que l'étude de leur lien soit le principal intérêt. Exemple : étude du nombre de ventes de plusieurs produits concurrents.

Définition 14

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un univers probabilisé fini. On appelle couple de variables aléatoires réelles sur Ω , noté (X, Y) toute application $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $\forall \omega \in \Omega, Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$.

Définition 15

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un univers probabilisé fini. $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes si

$$\forall (A_1, \dots, A_n) \in \prod_{i=1}^n \mathcal{P}(X_i(\Omega)), \quad P\left((X_i \in A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in A_i)$$

Exemple 28

Dans une urne avec 50 boules numérotées. On effectue des tirages sans remise.

On note X_1 le résultat du premier tirage et X_2 le résultat du deuxième tirage.

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) = 0$, car le tirage est sans remise. Il est pourtant clair que $P(X_1 = 1)$ et $P(X_2 = 1)$ sont non-nulles, donc les deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes.

Définition 16 : Loi conjointe

Soit Ω un univers probabilisé fini et (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles.

Soit $E_1 = X(\Omega)$ et $E_2 = Y(\Omega)$ deux ensembles finis.

La loi conjointe du couple (X, Y) est la donnée des

$$P((X, Y) = (x, y)) = P(X = x, Y = y) \text{ pour tout } (x, y) \in E_1 \times E_2$$

Exemple 29

Soit une urne contenant a boules blanches, et b boules noires. On effectue deux tirages successifs sans remise. Soit X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la i -ème boule est blanche, 0 sinon, pour $i = 1, 2$. La loi conjointe des deux variables est donnée par

$$\bullet P((X_1, X_2) = (1, 1)) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a-1}{a+b-1}$$

$$\bullet P((X_1, X_2) = (1, 0)) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b-1}$$

$$\bullet P((X_1, X_2) = (0, 1)) = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b-1}$$

$$\bullet P((X_1, X_2) = (0, 0)) = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{b-1}{a+b-1}$$

Définition 17

Soit Ω un univers probabilisé fini et (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles.

Soit $E_1 = X(\Omega)$ et $E_2 = Y(\Omega)$ deux ensembles finis. Les lois marginales de X et de Y sont les lois des deux variables aléatoires (séparément). Elles sont données par

$$P(X = x) = \sum_{y \in E_2} P(X = x, Y = y) \quad \text{et} \quad P(Y = y) = \sum_{x \in E_1} P(X = x, Y = y).$$

Exemple 30

Reprenons l'exemple précédent. On a, par exemple,

$$P(X_1 = 0) = P((X_1, X_2) = (0, 0)) + P((X_1, X_2) = (0, 1)) = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{b-1}{a+b-1} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b-1} = \frac{b}{a+b}, \text{ ce qui n'est pas trop étonnant...}$$

⚠ ATTENTION Les lois marginales ne permettent **pas** en général de reconstituer la loi conjointe.

Ces notions peuvent être étendues à un n -uplet de variables aléatoires réelles $(X_1, \dots, X_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. On obtient les mêmes définitions de lois conjointes, marginales.

Définition 18

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires défini sur un univers probabilisé Ω fini. On pose $E_1 = X(\Omega)$ et $E_2 = Y(\Omega)$. On dit que les deux variables X et Y sont indépendantes si

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E_1) \times \mathcal{P}(E_2), \quad P((X, Y) \in A \times B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B).$$

c'est-à-dire qu'il y a indépendance des événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ pour tout couple d'événements (A, B) . On note alors $X \perp Y$ pour dire que les deux variables sont indépendantes.

Indépendance et loi conjointe

Lorsque les variables aléatoires sont indépendantes, les lois marginales permettent de retrouver la loi conjointe.

Proposition 9

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires défini sur un univers probabilisé Ω fini. On pose $E_1 = X(\Omega)$ et $E_2 = Y(\Omega)$. Les deux variables X et Y sont indépendantes si et seulement si

$$\forall (x, y) \in E_1 \times E_2, \quad P(X = x \text{ et } Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$$

Vous verrez souvent "Soit $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ des v.a.i. (variables aléatoires indépendantes) de même loi", lorsqu'on modélise n expériences aléatoires indépendantes,

Proposition 10

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires indépendantes, et $f : E_1 \rightarrow E'_1$, et $g : E_2 \rightarrow E'_2$. Alors les variables $(f(X), g(Y))$ sont aussi indépendantes.

Preuve. Pour tout $(A', B') \in \mathcal{P}(E'_1) \times \mathcal{P}(E'_2)$,
 $P(f(X) \in A' \text{ et } g(Y) \in B') = P(X \in f^{-1}(A') \text{ et } Y \in g^{-1}(B'))$ et on utilise l'indépendance de X et Y . $\square$

Proposition 11

Soient $1 \leq m \leq n$. Si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi, quelques soient les fonctions f et g .

Preuve. Par récurrence. $\square$

Exemple 31

Soit $n \geq 1$. Montrons qu'il n'existe pas deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{0, \dots, n\}$ dont la somme suit une loi uniforme sur $\{0, \dots, 2n\}$.

Par l'absurde, supposons que ces deux variables aléatoires existent, et notons les X et Y .

Posons $Z = X + Y$, $a_k = P(X = k)$, $b_k = P(Y = k)$ et $c_k = P(Z = k)$. Pour chaque k , on a

$$c_k = P(Z = k) = \sum_{i+j=k} P((X = i, Y = j)) = \sum_{i+j=k} a_i b_j,$$

puisque les variables aléatoires X et Y sont indépendantes. Pour $k = 0, k = 2n$ et $k = n$, on obtient alors

$$\frac{1}{2n+1} = a_0 b_0, \quad \frac{1}{2n+1} = a_n b_n, \quad \text{et} \quad \frac{1}{2n+1} \geq a_0 b_n + a_n b_0.$$

On alors $a_0 b_0 a_n b_n (2n+1)^2 = 1$, mais aussi $(2n+1)a_0 b_n < 1$ et $(2n+1)a_n b_0 < 1$, grâce à l'inéquation, ce qui est absurde.

Proposition 12 : Lien Bernoulli-Binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit n variables aléatoires mutuellement indépendantes $X_1, \dots, X_n$, suivant la loi de Bernoulli de paramètre p . Alors

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p).$$

Preuve. Par récurrence sur n . L'initialisation pour $n = 1$ a été remarquée lors de la définition de la loi binomiale. Supposons la propriété au rang n . Soit $n+1$ variables aléatoires mutuellement indépendantes $X_1, \dots, X_{n+1}$, suivant une loi de Bernoulli de paramètre p . Soit $k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$. On pose $Y_n = X_1 + \dots + X_n$. On cherche la probabilité de l'événement $(X_1 + \dots + X_{n+1} = k) = (Y_{n+1} = k)$. Or les événements $(X_{n+1} = 0)$ et $(X_{n+1} = 1)$ forment un système complet d'événements. Par formule de probabilité totales, on a

$$P(Y_{n+1} = k) = P(Y_{n+1} = k \mid X_{n+1} = 1) \cdot P(X_{n+1} = 1) + P(Y_{n+1} = k \mid X_{n+1} = 0) \cdot P(X_{n+1} = 0).$$

Or $P_{X_{n+1}=1}(Y_{n+1} = k) = P_{X_{n+1}=1}(Y_n = k - 1)$.

Puis on utilise l'indépendance des variables Y_n et X_{n+1} . On a alors, $P_{X_{n+1}=1}(Y_{n+1} = k) = P(Y_n = k - 1)$.

Ainsi

$$P(Y_{n+1} = k) = P(Y_n = k-1) \cdot P(X_{n+1} = 1) + P(Y_n = k) \cdot P(X_{n+1} = 0) .$$

Par hypothèse, $Y_n \sim \mathcal{B}(n, p)$, donc

$$P(Y_{n+1} = k) = \binom{n}{k-1} p^{k-1} q^{n-k+1} \cdot p + \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \cdot q = p^k q^{n-k+1} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) = \binom{n+1}{k} p^k q^{n+1-k} .$$

□