

Instituto Politécnico

Universidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de

Resistencia de materiales 4º TCO

Resistencia
de materiales

Cód. 20401-15

Ing. Rosa Lefevre
Arq. Damián Villar



Dpto. de Construcciones

Masterización: RECURSOS PEDAGÓGICOS



RESISTENCIA DE MATERIALES

Basándonos en las propiedades de los materiales a utilizar y en los conocimientos adquiridos en Estática, tema dado en Física de 3º año, varios serán los objetivos de esta asignatura:

Dimensionar: conocidos los esfuerzos a los que se encuentra sometida una estructura, darle a la misma las dimensiones y la forma necesaria para que no se deforme en forma excesiva y/o llegue a la rotura.

Determinar la carga máxima: conocidas la forma y dimensiones de la estructura, determinar cuál es la carga máxima que puede soportar sin sufrir deformaciones excesivas o llevar a la rotura.

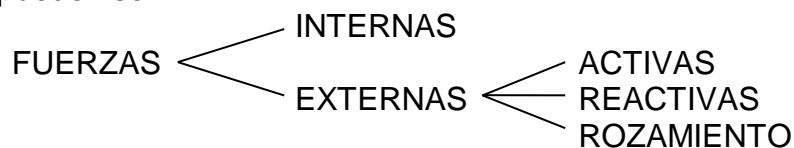
Determinar las deformaciones: se podrá determinar cuáles serán las deformaciones que se producirán en la estructura bajo las cargas externas.

Para poder lograr estos objetivos, la Resistencia de Materiales se basa en un modelo teórico con determinadas hipótesis de cálculo que desarrollaremos en su momento.

00 Repaso de estática:

La Estática estudia las condiciones que cumplen todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo para que éste se encuentre en equilibrio.

Las fuerzas pueden ser:



Internas: se generan en las partes componentes de un cuerpo y tienen su origen en la atracción molecular no presentando manifestación exterior.

Externas: son las que actúan sobre el cuerpo y producen alteraciones en su estado de reposo.

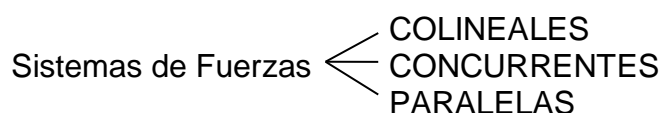
Activas: pueden actuar en forma permanente o en intervalos de tiempo con dirección e intensidad constante o variable.

Reactivas: también llamadas fuerzas de vínculo o reacciones, se presentan sólo cuando el cuerpo accionado por fuerzas activas tiende a desplazarse según direcciones determinadas a las que los vínculos se oponen. Se llama vínculo a toda sujeción que limita los desplazamientos posibles de un cuerpo.

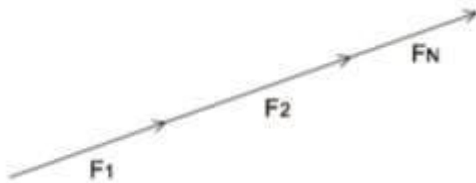
Fuerzas de rozamiento: son las que se oponen al movimiento de un cuerpo.

00 - 01 Sistemas de fuerzas

Conjunto de fuerzas que actúan sobre un cuerpo cuando este esté en contacto con otro.

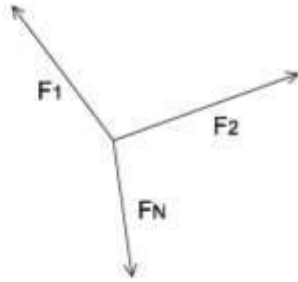


Sistema de fuerzas colineales:



$$R = \sum F_i$$

Sistema de fuerzas concurrentes:

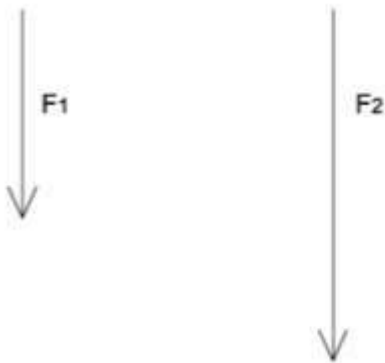


$$R_x = \sum F_{xi}$$

$$R_y = \sum F_{yi}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

Sistema de fuerzas paralelas:



$$R = F_1 + F_2$$

Para determinar el punto de paso de la resultante se aplica el teorema de Varignon:

“El momento de la resultante de un sistema de fuerzas con respecto a un punto es igual a la suma de los momentos de todas las fuerzas del sistema respecto a ese punto.”

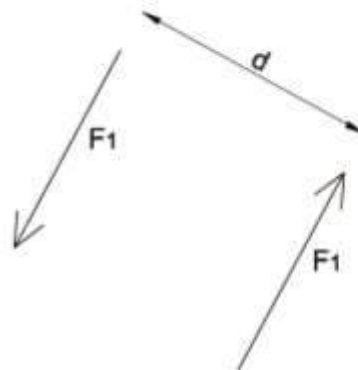
$$M_R = \sum M_{F_i}$$

$$R \times d_R = \sum F_i \times d_i$$

00 - 02 Cupla:

Es un sistema de dos fuerzas paralelas de igual intensidad y sentido contrario. Este sistema está caracterizado por lo que llamamos momento de la cupla:

$$M_{\text{cupla}} = F_1 \times d$$





El momento de una cupla es invariable cualquiera sea el centro de momento que se considere.

El efecto que le produce una cupla a un cuerpo libre es el de una rotación.-

Cupla no puede ser sustituida por una fuerza resultante ya que los efectos generados por una cupla y una fuerza son distintos.

01 - 01 Equilibrio:

Una fuerza actuante sobre un cuerpo altera sus dimensiones, la forma del mismo o su estado de reposo. Pero cuando varias fuerzas actúan simultáneamente sus efectos pueden compensarse entre sí, cuando esto sucede se dice que el cuerpo está en equilibrio.

Podemos decir entonces que para que un cuerpo esté en equilibrio la resultante de todas las fuerzas que sobre él actúan debe ser nula y el momento resultante de todas las fuerzas actuantes respecto a un punto cualquiera también debe ser nulo (para que no exista rotación).

$$\left\{ \begin{array}{l} R_x = \sum F_x = 0 \\ R_y = \sum F_y = 0 \\ M_R = \sum M_F = 0 \end{array} \right. \quad \text{ECUACIONES DE EQUILIBRIO}$$

Cuerpo libre:

Es aquél que es susceptible a sufrir algún desplazamiento. Cualquier condición que limite posibilidad en el desplazamiento del cuerpo se denomina vínculo.

Grados de libertad:

Un punto material en el espacio tiene 3 grados de libertad (traslación vertical y horizontal, giro). Un cuerpo en el espacio queda determinado por 3 puntos por lo que pensando en esos 3 puntos en forma independiente tendríamos 9 grados de libertad, pero un cuerpo rígido nos está indicando que debemos considerar que las distancias entre esos puntos permanecen invariables, entonces se constituyen en 3 condiciones de vínculo (vínculos de rigidez) limitadas. Podemos concluir entonces que el cuerpo en el espacio tiene 6 grados de libertad.

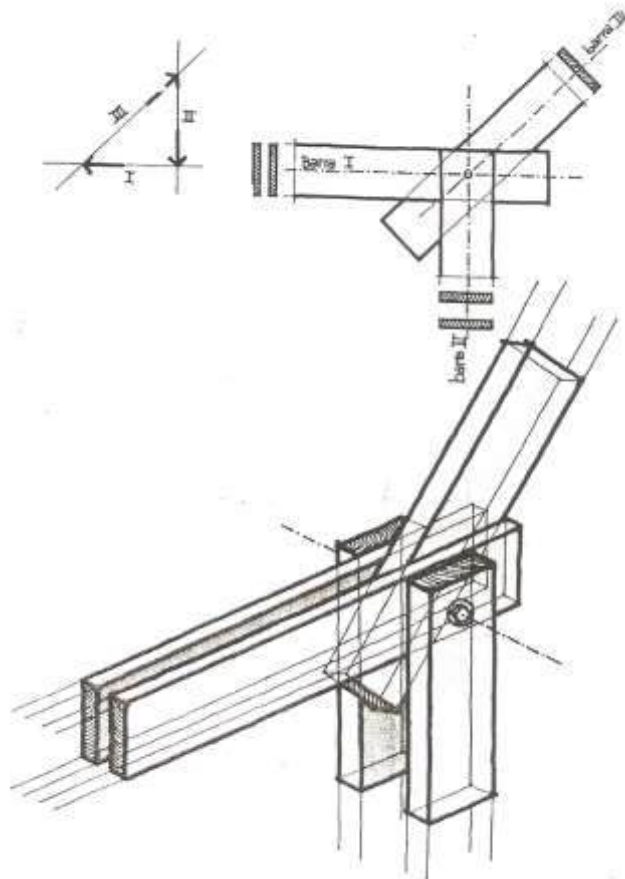
Chapa: superficie indeterminada plana que posee 3 grados de libertad.

Es importante remarcar que se habla de chapa como un elemento estructural genérico que puede ser representado por diversos elementos que se utilizan en la construcción como pueden ser vigas de hormigón armado, losas de viguetas, columnas de acero, techos de chapa etc. Es así que trataremos el tema de manera general y no referido a un elemento o material en particular.

01 - 02 Vínculos:

Dijimos que vínculo es toda sujeción que limita los desplazamientos posibles de un cuerpo. Básicamente tenemos dos tipos de vínculos: internos y externos

Internos: son los que limitan la posibilidad de desplazamientos relativos entre los puntos constituyentes de un cuerpo o sistema de cuerpos. Para el análisis de estas estructuras vinculadas se comienza analizando todo el sistema y luego cada parte que separa el vínculo interno por separado.



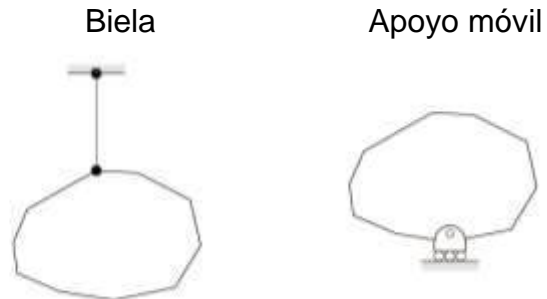
Externos: limitan posibilidades de movimiento de los puntos de un cuerpo respecto a la tierra o a otro cuerpo. Estos vínculos externos pueden ser simples, dobles o triples según limiten uno, dos o tres grados de libertad.

Resulta importante mencionar que la resolución de vínculos en la construcción resulta sumamente importante, ya que allí es donde se producen los mayores problemas. Es para ello que se deberá tener en cuenta el material de los elementos a vincular, y todas las características que este posee. En este curso solo se verán cuestiones genéricas, pero tratando de tener en cuenta la referencia constante a situaciones de la realidad.

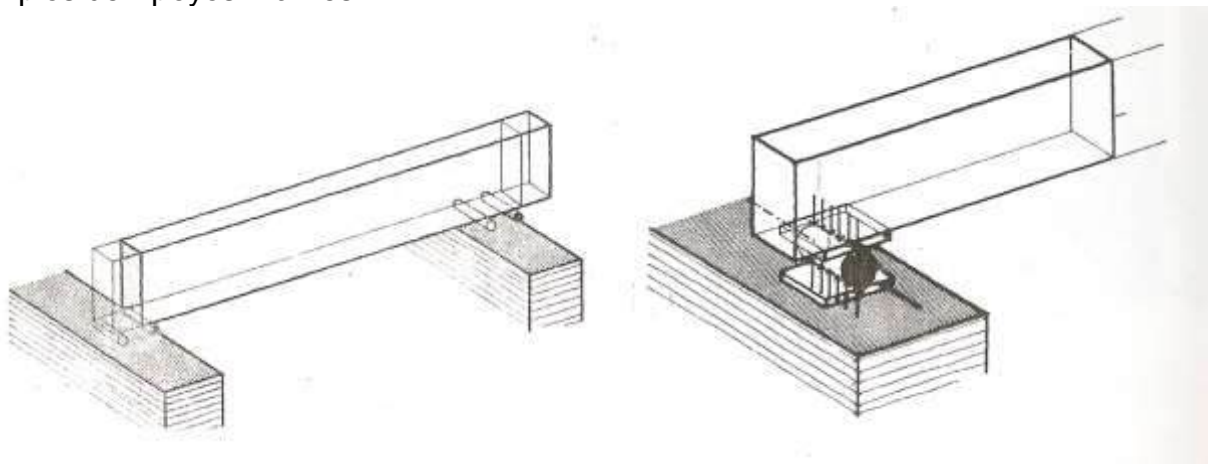


Simples:

Ambos proveen una reacción de vínculo de dirección conocida.

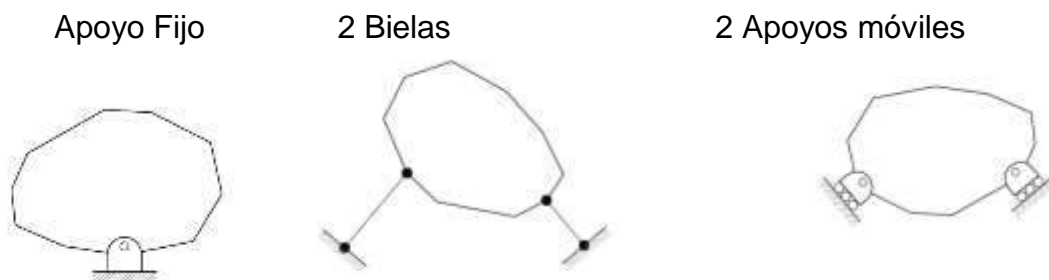


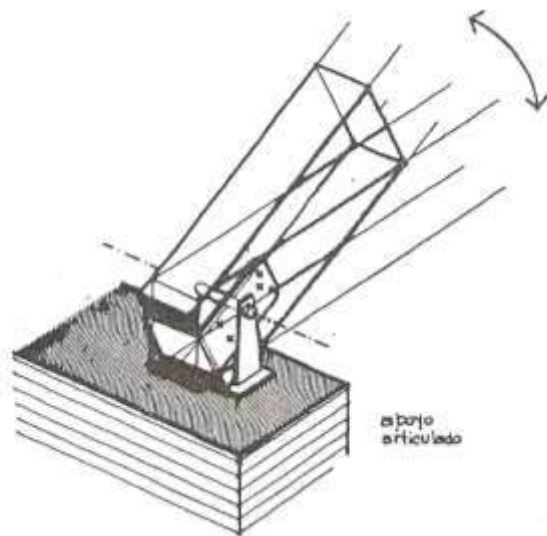
Ejemplos de Apoyos móviles



Dobles:

Apoyo fijo: provee una reacción de vínculo de dirección desconocida (es decir que limita dos grados de libertad al descompones la reacción en un sistema de ejes ortogonales).





Triples:

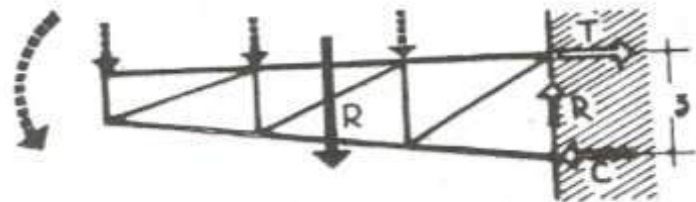
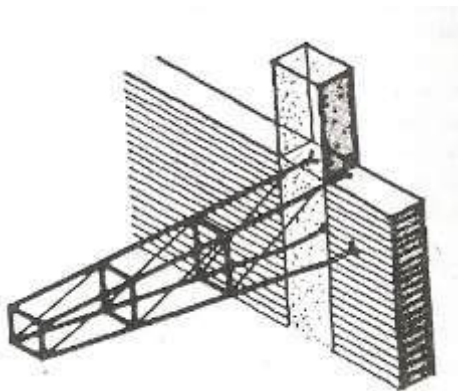
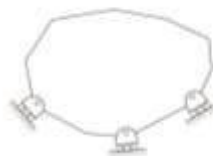
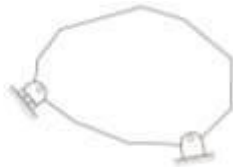
Empotramiento: provee tres reacciones de vínculo (es decir limita tres grados de libertad: traslación vertical, horizontal y rotación)

Empotramiento

Apoyo fijo y Móvil

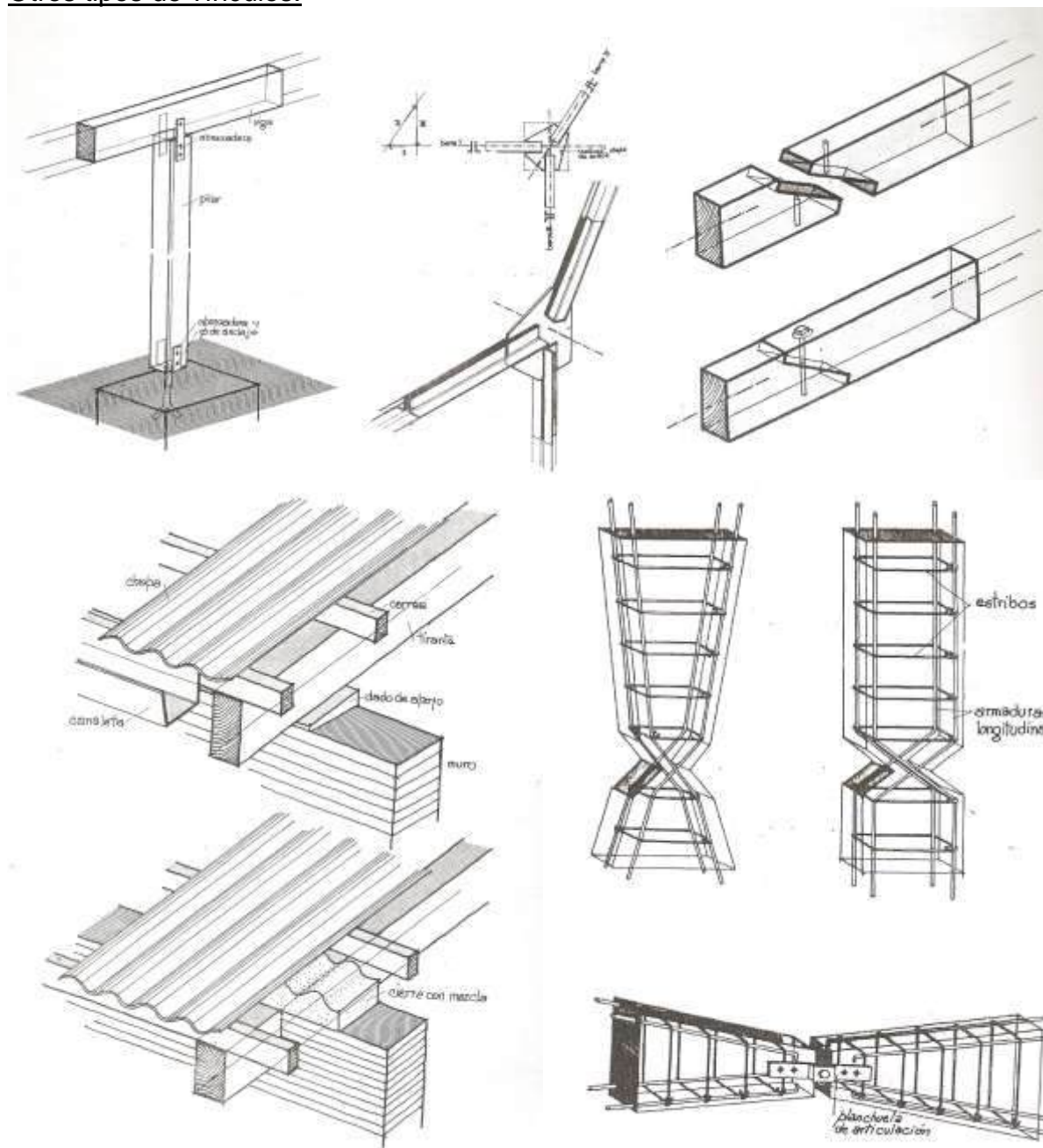
Apoyos móviles

3 Bielas





Otros tipos de vínculos:



Cuando los vínculos son sólo necesarios para restringir los grados de libertad del cuerpo, el sistema se llama “isostático”.

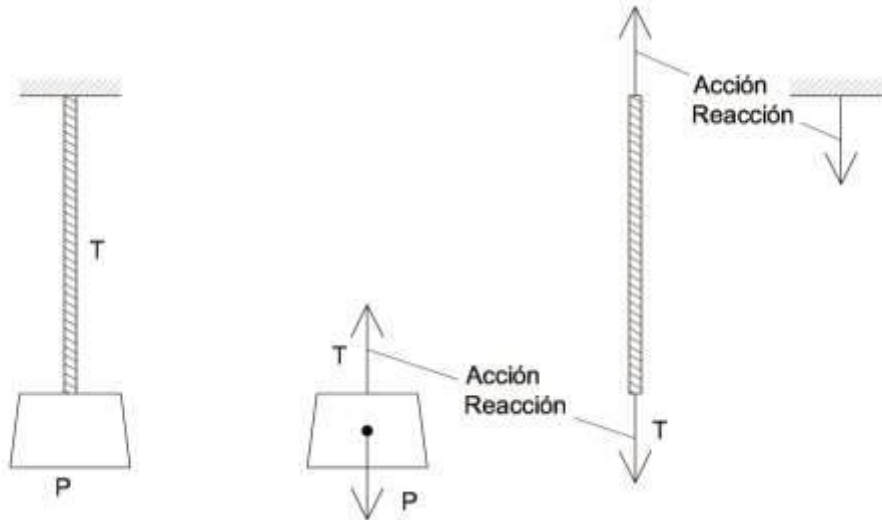
Si existen más vínculos de los necesarios, entonces el sistema se llama “hiperestático”.

Si existen menos vínculos de los necesarios, el sistema se denomina “hipostático”.

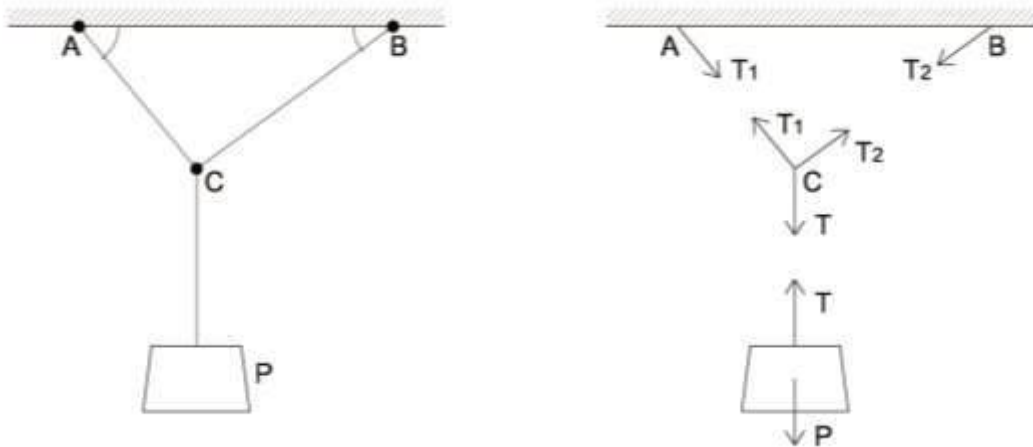
Supongamos ahora que tenemos un cuerpo cualquiera sobre el que actúa un sistema de fuerzas cualquiera. Nuestro primer objetivo será evaluar las reacciones de vínculo, ya que conocidas todas las fuerzas activas y reactivas actuantes sobre el cuerpo podremos luego analizar los efectos que ellas producen y llegar al diseño y dimensionamiento del elemento en estudio.

Para proceder a calcular las reacciones de vínculo lo primero que debemos realizar es el diagrama de cuerpo libre (aislar el elemento), y luego a partir de éste plantear las ecuaciones de equilibrio.

Veamos los siguientes ejemplos:



Como sobre el bloque sólo hay fuerzas verticales planteamos:



Igual que en el ejemplo anterior sobre el bloque sólo hay fuerzas verticales, por lo que planteamos:

$$F_x = 0$$

Procedemos luego a plantear el equilibrio en el nudo C

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

De estas ecuaciones obtenemos las tensiones en los cables, cabe acotar que si nos dieran negativas deberemos cambiar el sentido asignado a las incógnitas.



02 – 01 Hipótesis de cálculo:

A los efectos de poder simplificar los cálculos que se deben realizar en esta materia (recordemos que el objetivo de Resistencia era llegar al dimensionamiento de los elementos, verificación de las deformaciones que ellos experimentan o cálculo de la carga máxima admisible por dichos elementos), será necesario hacer determinadas hipótesis respecto a las propiedades del material, a las cargas y el carácter de su interacción con las piezas.

1. El material se considera continuo, o sea no tendremos en cuenta la discontinuidad de la materia, ya que los granos de los materiales de construcción son muy pequeños.
2. Se considerará al material homogéneo, o sea con las mismas propiedades en todos los puntos. Si bien es cierto que determinados materiales como la madera o el hormigón no son realmente homogéneos el error que se comete con esta suposición es despreciable.
3. El material es isótropo, es decir con las mismas propiedades en todas las direcciones. Aunque esto no es real, en el caso de materiales de granos finos, las propiedades de las distintas direcciones se igualan, debido a la gran cantidad de cristales orientados.
4. Se supondrá que las fuerzas de atracción y repulsión entre las partículas del material son nulas antes de la aparición de las cargas externas. Esto no es cierto por ejemplo en el acero, ya que existen fuerzas producidas por el enfriamiento no uniforme, en la madera por el secado no homogéneo, y en el hormigón debido al fraguado. Sin embargo estas fuerzas no serán tenidas en cuenta en los cálculos exigiéndose que se verifiquen las condiciones adecuadas para lograr minimizar estos efectos.
5. Se considerará que el efecto producido por la acción de un sistema de fuerzas es igual a la superposición de las acciones producidas por cada una de las fuerzas aplicadas en cualquier orden.
6. Las secciones planas de la pieza consideradas antes de la deformación permanecen planas durante y después de ella.
7. Dentro de ciertos límites, la deformación que un esfuerzo produce es directamente proporcional a la intensidad del esfuerzo.

Deformación:

Habíamos dicho que entre los átomos constituyentes del material se producían fuerzas de atracción y repulsión que daban la cohesión al mismo. Si no actuaran fuerzas externas el estado de equilibrio entre dichas fuerzas permanecería por tiempo indefinido sin modificar la forma y dimensiones del cuerpo.

Al actuar las fuerzas externas se rompe el equilibrio interno, variando las fuerzas de atracción y repulsión, es decir se producirán nuevas fuerzas internas que trataran de restablecer el equilibrio, manteniendo la cohesión del material.

De acuerdo con el tipo y cantidad de material que tengamos, las fuerzas internas podrán equilibrar a las externas impidiendo que la deformación continúe y el cuerpo rompa.

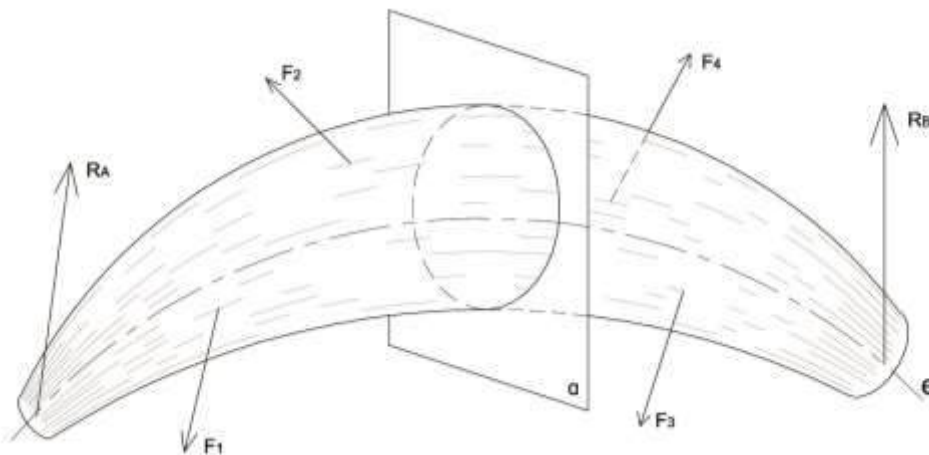
Según la magnitud de las fuerzas aplicadas, el tipo de material y las dimensiones de la pieza, será la magnitud y característica de la deformación. Podemos decir entonces que si al suprimir la carga, el cuerpo retoma su forma y dimensiones originales, la deformación es elástica. Cuando ello no ocurre la deformación es plástica.

Aquellos materiales que poseen escasa capacidad de deformación plástica, se los denomina frágiles, su rotura se produce en forma brusca (por ejemplo: los aceros de alta resistencia, la fundición, el hormigón); en cambio aquellos que alcanzan la rotura después de experimentar una importante deformación plástica se los denomina dúctiles (aceros con bajo contenido de carbono).

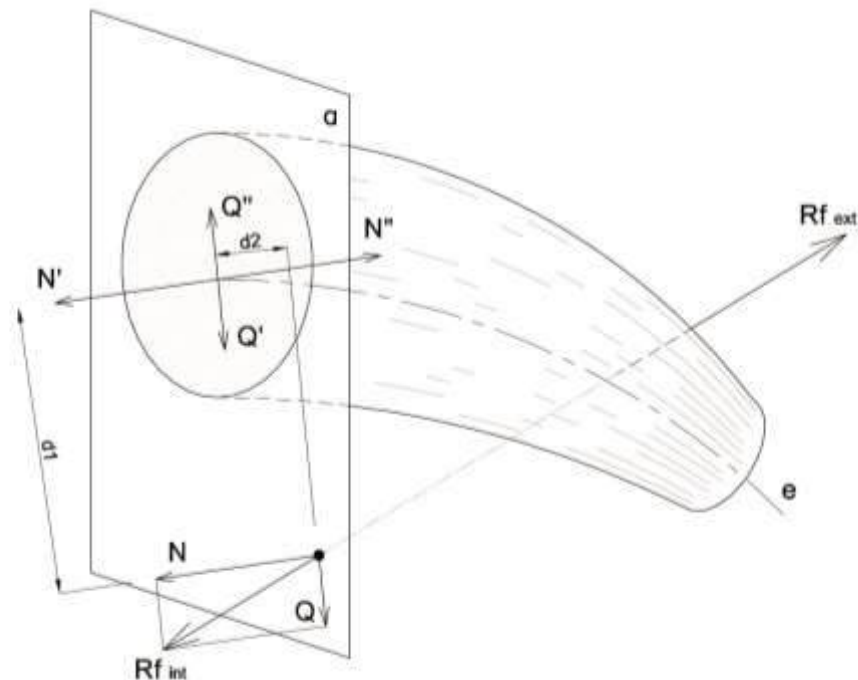
La capacidad de deformarse elásticamente o plásticamente, varía según el material, las condiciones en que se apliquen las cargas y la temperatura a la que esté expuesto.

02 – 02 Esfuerzos internos:

Podemos analizar qué es lo que ocurre internamente en un cuerpo cualquiera que se encuentra sometido a la acción de un sistema de fuerzas cualquiera. Este sistema de fuerzas activas (F_1, F_2, \dots, F_n), genera las reacciones de vínculo R_a y R_b para lograr el equilibrio externo. Este sistema de fuerzas activas y reactivas provocará a su vez la aparición de fuerzas internas que se oponen a la deformación y procuran equilibrar a las fuerzas externas para impedir que la deformación continúe hasta la rotura.



Nos interesará conocer los esfuerzos en una sección transversal cualquiera, como por ejemplo la definida por un plano α perpendicular al eje e . Imaginemos que seccionamos el cuerpo y planteamos el equilibrio de una de las dos opciones en las que la pieza queda dividida, por ejemplo la que se halla a la derecha del plano α . Esta porción debe encontrarse en equilibrio bajo la acción de las cargas externas que están a la derecha del plano y de las fuerzas internas que actúan sobre las partículas que están en la sección transversal determinadas por la acción de las que están a la izquierda y vecinas a la sección para oponerse a la deformación.



Llamaremos con $R_{f_{der}}$ a la resultante de las fuerzas externas de ese sector, deberán entonces generarse fuerzas internas que equilibren a esta fuerza, la resultante de estas fuerzas internas deberá tener la misma recta de acción, la misma magnitud y sentido contrario a $R_{f_{der}}$ y la llamaremos $R_{f_{int}}$.

Utilizaremos ahora algunos principios de la Estática, que no modifican el efecto que produce el sistema de fuerzas internas definido por las cargas externas.

Llamamos con I al punto de intersección de la recta de acción de $R_{f_{int}}$ con el plano α y en dicho punto descomponemos $R_{f_{int}}$ en sus componentes: una perpendicular al plano (N) y otra tangencial a la sección transversal considerada (Q)

En el baricentro de la sección consideramos aplicadas dos fuerzas iguales y contrarias (equilibradas mutuamente) de dirección y magnitud igual a las N y Q respectivamente.

Tendremos entonces el siguiente conjunto de fuerzas:

- Una fuerza perpendicular a la sección N , con su recta de acción que tiene el punto I como punto de paso.
- Dos fuerzas de intensidad N , de igual dirección que la aplicada en I , de sentidos opuestos y con recta de acción pasante por el baricentro de la sección.
- Una fuerza tangencial a la sección Q , con recta de acción pasante por el punto I .
- Dos fuerzas de intensidad Q , tangentes a la sección y con la misma dirección que la aplicada en I , pasantes por el baricentro de la sección.

Definimos entonces los siguientes esfuerzos en la sección:

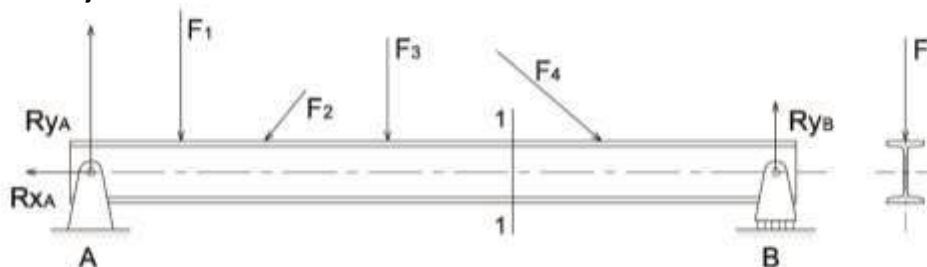
- Esfuerzo Normal: es el determinado por la fuerza N , perpendicular al plano de la sección cuya recta de acción pasa por el baricentro de la misma y que tiene el mismo sentido que la fuerza N que pasa por I . produce el alargamiento o acortamiento axial de la pieza (en el primer caso se llamará esfuerzo normal de tracción, siendo importante destacar que esto dependerá del sentido de la $R_{f_{ext}}$).

- Esfuerzo de Corte o Cizalladura: es el que determina la fuerza interna Q tangencial a la sección cuya recta de acción pasa por el baricentro de la misma y que tiene el mismo sentido que la fuerza Q que pasa por I . Produce el desplazamiento de la sección respecto a la infinitamente próxima en la dirección y sentido de Q .
- Esfuerzo de Flexión: es el que determinan la cupla compuesta por las dos fuerzas de intensidad N , cuyas rectas de acción están separadas una distancia $d1$, cuyo plano de acción es perpendicular a la de la sección transversal. El momento de esta cupla es el valor del esfuerzo y es lo que denominamos Momento Flector. $M_f = N \times d1$. Produce el giro de la sección alrededor de un eje coplanar a la misma, curvando el eje de la misma.
- Esfuerzo de Torsión: es el que determina la cupla compuesta por las dos fuerzas de intensidad Q , cuyas rectas de acción están separadas una distancia $d2$, cuyo plano de acción es el de la sección transversal. El momento de esta cupla, es la medida de la intensidad de esfuerzo y es el llamado momento torsor $M_t = Q \times d2$. Produce el giro de la sección en su plano alrededor de un punto.

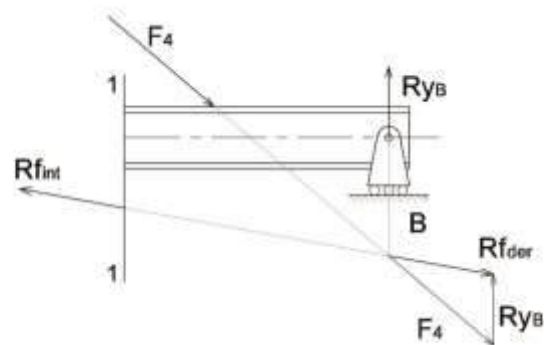
Es importante destacar que todos estos esfuerzos no siempre se presentan en forma simultánea; así por ejemplo podremos tener cuerpos solicitados a un único esfuerzo (esfuerzo simple) o a varios esfuerzos (esfuerzo compuesto).

03 - 01 Esfuerzos Internos en una Viga de Eje Recto:

Pretendemos analizar cuáles son los esfuerzos que se presenta en una viga de eje recto sometida a un estado general de cargas coplanarias, contenidas en un plano α que contiene al eje de la misma



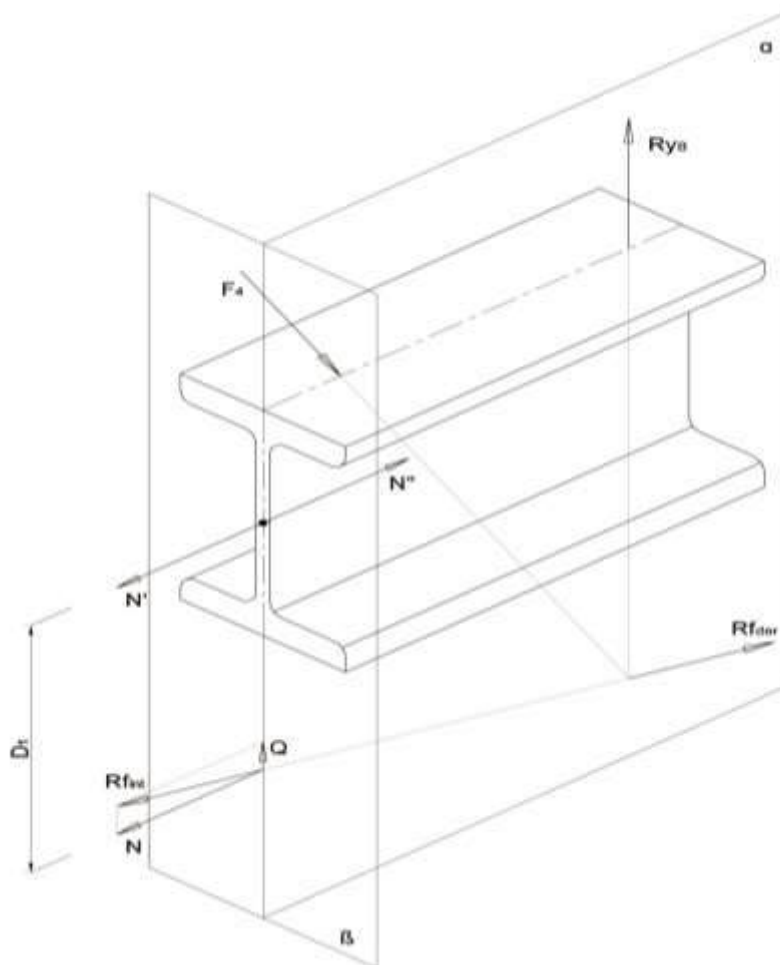
De la misma forma en que lo hicimos para un cuerpo cualquiera imaginemos cortar a la viga en una sección transversal por un plano β perpendicular a su eje. Queda la viga dividida en dos porciones, aislamos uno de los tramos por ejemplo el de la derecha. Para que se alcance el equilibrio la resultante de las fuerzas externas del tramo debe ser equilibrada por la resultante de fuerzas internas que los átomos pertenecientes al otro tramo y vecinos al plano seccionante generan sobre los átomos próximos que se encuentran en la sección de la porción aislada, o sea que la resultante de fuerzas internas debe tener la misma recta de acción, la misma magnitud y sentido contrario a la resultante de fuerzas externas de la derecha como se ve en la figura:



Como en el caso general aplicamos algunos principios de la estática: descomponemos la R_{fint} en sus dos componentes rectangulares N y Q , en las direcciones normal y tangencial al plano β , en el punto de intersección de dicha resultante con el plano.

Debemos destacar que, debido a que las fuerzas externas actúan en un plano que contiene al eje de la viga, la fuerza Q tiene su recta de acción pasante por el baricentro de la sección transversal considerada.

Agregamos en el baricentro de la sección dos fuerzas iguales y contrarias que tienen la misma intensidad y dirección que la fuerza N . nos quedan definidos entonces, los siguientes esfuerzos:



Esfuerzo Normal: generado por la fuerza N' aplicada en el baricentro de la sección.

Esfuerzo de Corte: generado por la fuerza Q .

Esfuerzo de Flexión: generado por la cúpla de fuerzas N y N'' y separadas una distancia d_1 .

Es de destacar la ausencia de momento torsor debido a la actuación de las cargas externas en el plano α , generando una distancia $d_2 = 0$ entre la dirección de Q y el centro de gravedad.

Podemos observar que la resultante de fuerzas externas será distinta según sea la sección considerada, por lo que podemos concluir que los esfuerzos internos también serán distintos a lo largo del eje de la viga y nos interesara conocer esta variación para poder llegar a determinar los valores máximos que puedan alcanzar para luego proceder al dimensionamiento o verificación de la sección.

Nos interesa ahora ver como relacionamos los esfuerzos internos con las cargas externas aplicadas, que serán el único dato con el que contaremos para realizar un problema particular.

Dado que una viga, es un cuerpo, cuya dimensión longitudinal es mucho más importante con relación a sus otras dos dimensiones fundamentales, puede considerarse que las fuerzas externas están aplicadas en puntos de su eje y en adelante la representaremos sólo por el mismo.

Dijimos que al actuar las cargas externas los vínculos reaccionaban quedando todo el sistema en equilibrio, por lo cual podemos asegurar que la resultante de fuerzas externas (activas y reactivas) de la izquierda se equilibra con; la resultante de las fuerzas externas (activas y reactivas) de la derecha de la sección ($R_{f_{der}}$). Pero también habíamos dicho que la $R_{f_{der}}$, se equilibraba con la $R_{f_{int}}$ de lo que resulta que la $R_{f_{int}}$ es igual a la resultante de fuerzas externas aplicadas a la izquierda de la sección. Podemos decir entonces que:

- La intensidad del esfuerzo normal N coincide con la proyección de la resultante de fuerzas externas de la izquierda de la sección, sobre un eje de igual dirección que el viaje de la viga.
- La intensidad del esfuerzo de corte Q coincide con la proyección de la resultante de fuerzas externas de la izquierda de la sección, sobre el eje tangencial a la sección transversal de la viga.
- La intensidad del momento flector será el momento estático de la resultante de fuerzas de la izquierda de la sección, respecto al baricentro de la misma.

Por otro lado, si recordamos de estática que la proyección sobre un eje de la resultante de un sistema de fuerzas, es igual a la suma algebraica de las proyecciones sobre el mismo eje de todas las fuerzas componentes del sistema y que el momento estático de la resultante de un sistema de fuerzas, con respecto a un punto, es igual a la suma algebraica de los momentos estáticos de todas las fuerzas componentes del sistema respecto del mismo centro, podemos calcular los esfuerzos internos como:

- Normal: suma algebraica de las proyecciones sobre el eje de la viga de todas las fuerzas externas, activas y reactivas, que se encuentran aplicadas a la izquierda de la sección considerada.



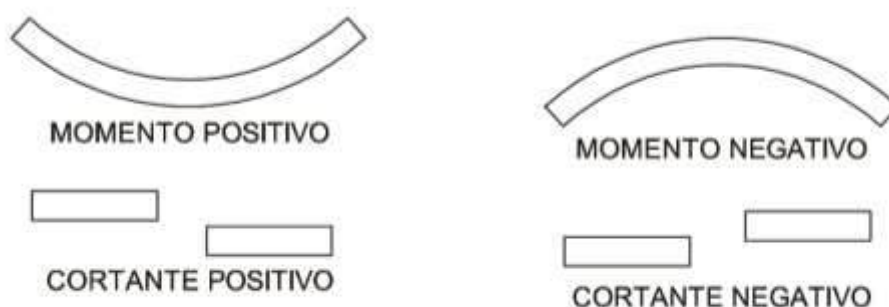
- Corte: suma algebraica de las proyecciones sobre el eje tangencial a la sección transversal de la viga, de todas las fuerzas externas activas y reactivas, que se encuentran aplicadas a la izquierda de la sección considerada.
- Momento flector: suma algebraica de los momentos estáticos, con respecto al centro de gravedad de la sección de todas las fuerzas externas, activas y reactivas, que se encuentran aplicadas a la izquierda de la sección considerada.

Si hubiéramos considerado el equilibrio del tramo de la viga situado a la izquierda de la sección, la resultante de las fuerzas internas hubiera tenido igual dirección y magnitud, difiriendo únicamente en el sentido por tratarse de fuerzas de interacción entre las partículas del material, entonces el procedimiento indicado para calcular los esfuerzos internos puede aplicárselo indistintamente considerando todas las fuerzas que están a la izquierda de la sección o bien considerando las fuerzas que están a la derecha de la misma teniendo que analizar en cada caso el sentido correspondiente (es decir que analizando por un lado o por el otro la magnitud del esfuerzo es la misma).

Para analizar el signo de los esfuerzos internos, consideramos un elemento de viga situado entre dos secciones rectas adyacentes y tomaremos por convención los signos que indican en la figura:



El esfuerzo normal será positivo cuando se trate de un esfuerzo de tracción. El esfuerzo de corte será positivo, cuando tenga un sentido horario de rotación respecto de un punto interior del cuerpo libre. El momento flector será positivo cuando produzca la tracción de las fibras inferiores y la compresión de las fibras superiores.



03 - 02 Diagrama de Esfuerzos Internos:

Se denomina así a la presentación grafica de los esfuerzos internos. Para realizarlos utilizamos un sistema de ejes de referencia, siendo el eje de las abscisas el que define la ubicación de la sección de la viga y como eje de ordenadas el correspondiente a cada esfuerzo interno.

Como dijimos que los esfuerzos internos variaban a lo largo del eje de la viga los diagramas nos permitirán conocer el valor del esfuerzo en cualquier sección de la misma con sólo medir la ordenada correspondiente y multiplicarla por la escala utilizada.

Los diagramas de esfuerzos serán distintos de acuerdo al tipo de carga que actúe sobre la viga, de manera que estudiaremos a continuación algunos casos particulares.

1) Carga Concentrada:

Consideremos una viga simplemente apoyada que se encuentra sometida a la acción de una carga concentrada P en un punto cualquiera de su eje.

Aplicando las ecuaciones de equilibrio obtendremos las reacciones de vínculo.

$$\sum M_A = 0$$

$$\sum M_B = 0$$

$$\sum F_x = 0$$

Trataremos de expresar los esfuerzos internos en función de la posición de la sección. Para eso pensamos que uno de los apoyos coincidirá con el origen de coordenadas y ubicaremos la posición de la sección en función de una abscisa genérica "X".

Con respecto al esfuerzo normal, al no haber componentes en la dirección del eje de la viga podemos decir que el mismo es cero.

Para poder hallar Q como $Q(x)$ analizaremos dos situaciones distintas: que la sección en la que pretendemos estudiar los esfuerzos se encuentra a la izquierda del punto de aplicación de la carga y que la sección se encuentre a la derecha del punto de aplicación de la misma y veamos en cada caso que expresión toma el corte:

$$\text{Si } 0 < X < a$$

$$Q(x) = R_A$$

$$\text{Si } a < X < L$$

$$Q(x) = R_A - P$$

Como vemos el esfuerzo de corte permanece constante en todo el tramo que está a la izquierda de la carga P y lo mismo ocurre a la derecha de la carga con lo cual concluimos que el diagrama de corte estará representado por rectas paralelas al eje de las abscisas con un salto debajo del punto de aplicación de P . Dicho salto representa la magnitud de la carga concentrada.

Realizamos un análisis similar para el momento flector:

$$\text{Si } 0 < X < a$$

$$M(x) = R_A \times X$$

$$\text{Si } a < X < L$$

$$M(x) = R_A \times X - P (X - a)$$



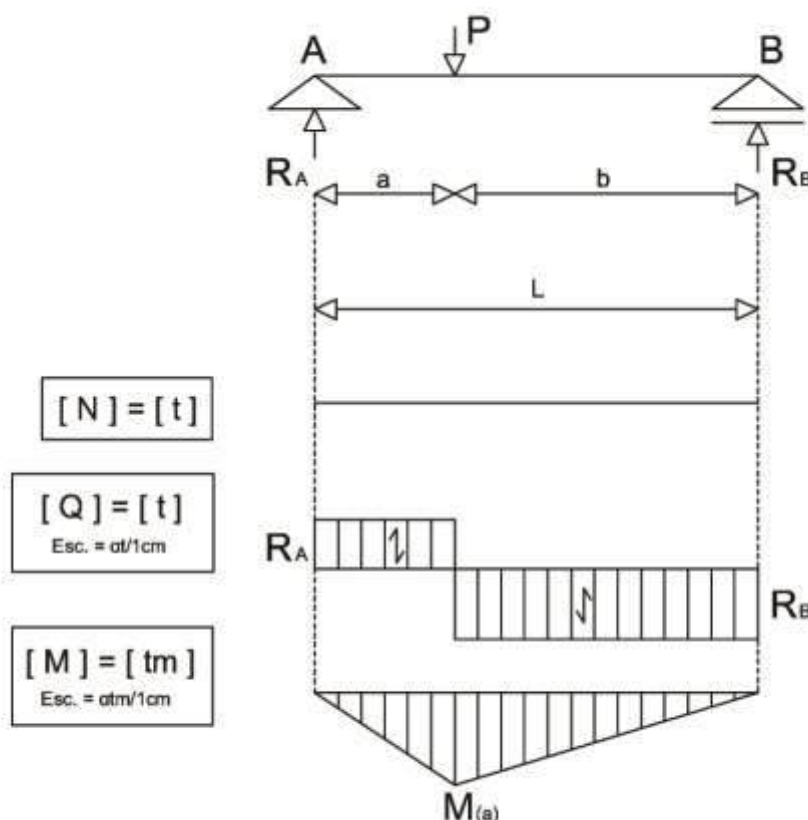
Convencionalmente se establece que el diagrama de momentos flectores se dibuja del lado de las fibras traccionadas tomándose como positivo si las fibras traccionadas son las de abajo, razón por la cual el diagrama de momentos no lleva signo.

Los diagramas quedarán completos con los valores característicos, los signos correspondientes (en aquellos que sean necesarios), la unidad en que fueron representados los esfuerzos, la escala utilizada y el rayado perpendicular al eje de la viga.

Debemos destacar que las escalas no tienen por qué ser las mismas para todos los esfuerzos, ni tampoco coincidir con la escala que se ha utilizado para la representación del eje de la viga.

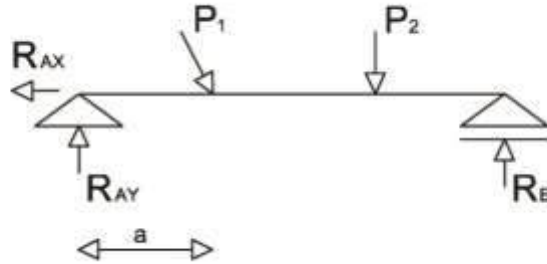
Con respecto al rayado se debe aclarar que cada una de las líneas realizadas representa el valor del esfuerzo en la sección correspondiente, razón por la cual se efectúa perpendicular al eje en la misma dirección en la que se mide dicho esfuerzo.

Por último debe tenerse en cuenta que los diagramas deben estar alineado quedando siempre el diagrama M y Q uno debajo del otro para poder analizar determinadas relaciones que estudiaremos luego.



2) Varias cargas concentradas:

Como siempre lo primero que hacemos es calcular las reacciones de vínculo para el estado de cargas considerado. Procedemos luego a expresar los esfuerzos internos en función de la posición de la sección "X":



$$\Sigma M_A = 0$$

$$\Sigma M_B = 0$$

$$\Sigma F_x = 0$$

Esfuerzo normal:

Si $0 < X < a$ $N(x) = R_{Ax}$ (esfuerzo de tracción)

Si $a < X < L$ $N(x) = 0$

Vemos que el esfuerzo normal es constante en el tramo comprendido entre las cargas que tienen una componente en la dirección del eje, siendo estas la reacción horizontal en A y la componente de P_1 .

Esfuerzo de corte:

Si $0 < X < a$ $Q(x) = R_{Ay}$

Si $a < X < b$ $Q(x) = R_{Ay} - P_1$

Si $b < X < L$ $Q(x) = R_{Ay} - P_1 - P_2$

Igual que antes el esfuerzo de corte resulta independiente de la posición de la sección permaneciendo constante en los tramos comprendidos entre los puntos de aplicación de las cargas concentradas y presentando una variación brusca en la intensidad del esfuerzo en estos puntos.

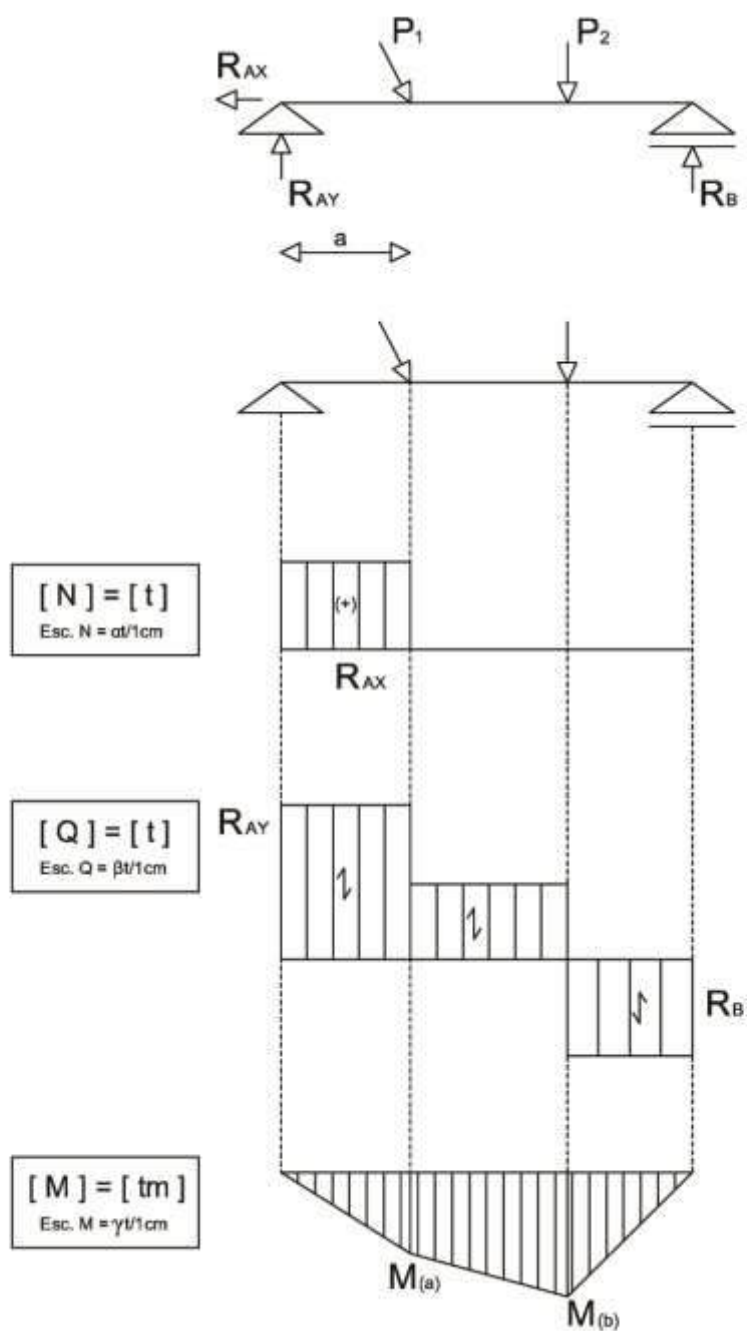
Momento flector:

Si $0 < X < a$ $M(x) = R_{Ay} \cdot X$

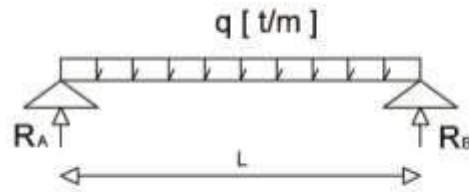
Si $a < X < b$ $M(x) = R_{Ay} \cdot X - P_1 \cdot (x - a)$

Si $b < X < L$ $M(x) = R_{Ay} \cdot X - P_1 \cdot (x - a) - P_2 \cdot (x - b)$

El momento flector varía linealmente con la posición de la sección de manera que el diagrama presentara un cambio de pendiente en los puntos de aplicación de las cargas. Podemos decir entonces que en correspondencia con una variación brusca en la intensidad del esfuerzo cortante hay una discontinuidad en la pendiente del gráfico del momento flector.



3) Carga uniforme:



Supongamos ahora una viga simplemente apoyada bajo la acción de una carga repartida q [t/m], calculamos las reacciones de vínculo:

$$\Sigma M_A = 0$$

$$\Sigma M_B = 0$$

Expresaremos los esfuerzos internos en función de la posición de una sección cualquiera a una distancia "X" del apoyo.

Esfuerzo normal: al no haber ninguna fuerza con componente en la dirección del eje de la viga, el esfuerzo normal es cero.

Esfuerzo de corte:

$$Q(x) = R_A - q \cdot X$$

Vemos que el esfuerzo de corte varía linealmente con la posición de la sección, de esta manera su gráfica será una recta:

$$\text{Si } X = 0 \quad Q(x) = R_A$$

$$\text{Si } X = L \quad Q(x) = R_A - q \cdot L = (q \cdot L)/2 - q \cdot L = -(q \cdot L)/2 = -R_B$$

Momento flector:

$$M(x) = R_A \cdot x - q \cdot x \cdot x/2 = (q \cdot L)/2 \cdot x - q \cdot x^2/2$$

Expresión de la que podemos concluir que el momento flector varía en función cuadrática con la distancia X, en la que se sitúa la sección considerada, por lo que el diagrama de momento flector resulta ser un arco de parábola que, en este caso por la simetría de cargas externas aplicadas, tendrá su ordenada máxima en $x = L/2$ para la cual resulta:

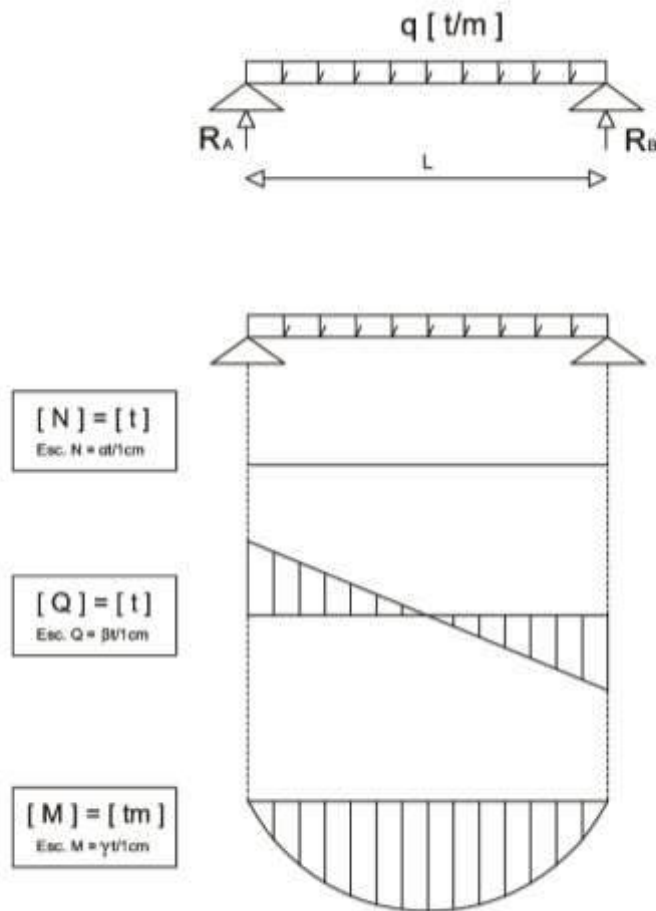
$$M(L/2) = (q \cdot L)/2 \cdot (L/2) - q \cdot (L/2)^2/2 = (q \cdot L^2)/8$$

$$M(0) = 0$$

$$M(L) = 0$$

Podremos observar que en coincidencia con la ordenada máxima de momento flector el esfuerzo de corte cambia de signo.

Para el trazado de la parábola se podrán usar cualquiera de los métodos desarrollados en Dibujo Técnico.



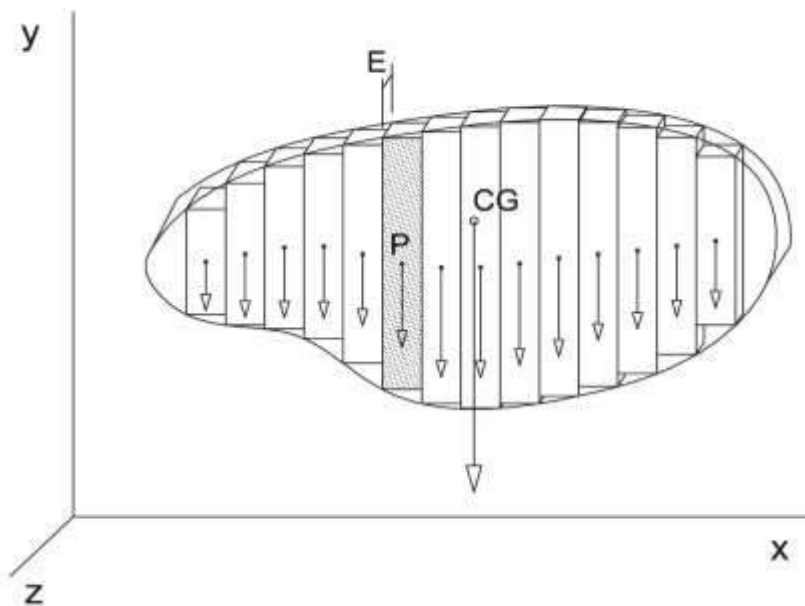
De acuerdo con lo analizado podríamos elaborar un método de trabajo para casos generales en los cuales se nos presenten cargas concentradas y repartidas simultáneamente. En primera instancia se calcularán las reacciones de vínculo correspondientes al estado de cargas actuales. Se determinarán secciones críticas en donde se evaluarán los esfuerzos internos que nos permitirán trazar los diagramas correspondientes. Consideraremos secciones críticas a aquellas que correspondan a vínculos, puntos de aplicación de cargas concentradas y/o cambio de magnitud de cargas repartidas. Conviene aclarar acá que, en el caso de cargas concentradas, tomaremos una sección a la izquierda del punto de aplicación de la misma, y otra a la derecha, ya que esto nos permitirá evaluar correctamente, la intensidad y el sentido del esfuerzo de corte. Analizados los esfuerzos internos (en magnitud y signo correspondiente) en las secciones mencionadas, se procederá al trazado de los diagramas teniendo presente las características generales de los mismos según el tipo de carga actuante, así por ejemplo, si tenemos carga concentrada debemos recordar que el esfuerzo de corte se representaba por una línea paralela al eje, constante entre cargas y el momento flector presentaba una variación lineal, mientras que si la carga era repartida uniforme, el esfuerzo de corte presentaba variación lineal y el momento flector variación cuadrática, no debiendo olvidar que en correspondencia con la ordenada máxima de momento debe existir un cambio de signo del esfuerzo de corte.

04 - 01 Baricentro o Centro de Gravedad de una superficie plana:

Se denomina centro de gravedad de un cuerpo a un punto que pertenece a la recta de acción de la fuerza peso del cuerpo, independientemente de la posición que tenga éste en el espacio.

Si consideramos el cuerpo constituido por pequeñas partículas, la fuerza peso será la resultante de todas las fuerzas peso de cada una de las partículas componentes, originadas por la acción gravitatoria que ejerce la tierra. Podemos aceptar que todas estas fuerzas constituyen un sistema de fuerzas paralelas, de dirección vertical y con sentido hacia el centro de la tierra. Luego para determinar la posición del centro de gravedad del cuerpo, será suficiente fijar la recta de acción de la fuerza peso para dos posiciones diferentes del mismo; el punto de intersección de dichas rectas será el Centro de Gravedad buscado.

Veamos ahora como determinamos analíticamente la posición del centro de gravedad. Supongamos una chapa plana de espesor uniforme y de un determinado material cuyo peso específico denominamos γ . El centro de gravedad, ha de encontrarse en un punto del plano medio de la chapa, por lo cual sólo queda por definir las coordenadas X_{cg} e Y_{cg} . Imaginemos que dividimos la chapa en prismas cuyo peso y centro de gravedad conocemos (γ_i, x_i, y_i).



Para determinar la recta de acción de la fuerza peso de la chapa planteamos el momento estático de la misma y recordando que el momento estático de la resultante de un sistema de fuerzas es igual a la suma de los momentos estáticos de las fuerzas componentes será

$$X_{CG} \cdot P = \sum P_i \cdot X_i \text{ de donde resultará}$$

$$X_{CG} = (\sum P_i \cdot X_i) / P = (\sum P_i \cdot X_i) / \sum P$$

Si recordamos que el peso es igual al producto del peso específico por el volumen del cuerpo, y además el volumen es el producto del espesor por la sección será:

$$X_{CG} = \sum \gamma \cdot A_i \cdot e \cdot x_i / \sum \gamma \cdot A_i \cdot e = \gamma \cdot e \sum A_i \cdot x_i / \gamma \cdot e \sum A_i = \sum A_i \cdot x_i / \sum A_i$$

De la misma forma, si ahora rotáramos la chapa 90° obtendríamos la coordenada Y_{cg} .

$$Y_{CG} = \sum A_i \cdot y_i / \sum A_i$$



De los resultados obtenidos podemos deducir que la posición del centro de gravedad es independiente del material de la chapa y del espesor de la misma, luego si consideramos una superficie plana como una chapa de espesor despreciable, las expresiones halladas definirán también las coordenadas del centro de gravedad de la superficie de igual forma.

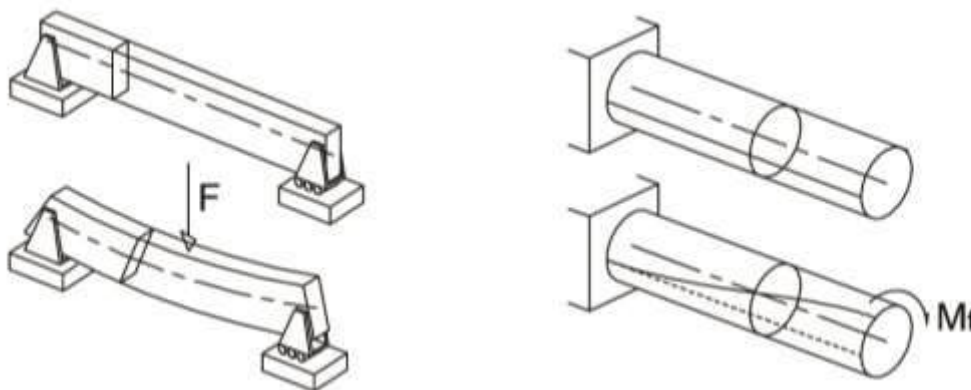
Debemos aclarar que por tratarse de una superficie carece de volumen, por lo tanto no posee peso, razón por la cual no podemos hablar de centro de gravedad; es así que al punto obtenido lo designaremos baricentro de la superficie.

El grado de aproximación en las coordenadas dependerá de la subdivisión que realicemos y será mayor cuanto menos porciones de superficie despreciemos, pudiendo pensar en hacer una subdivisión con superficies infinitamente pequeñas, pasando entonces al cálculo integral que nos llevaría a un valor exacto de las coordenadas.

En general para construcciones siempre podemos realizar una descomposición con figuras geométricas simples cuya área y baricentro son conocidos y cuya unión forma exactamente la superficie dada, razón por la cual podemos descartar el cálculo integral y utilizar las expresiones obtenidas a partir de la sumatoria. Debemos recordar también que existen tablas que nos brindan las fórmulas de las áreas y la posición del baricentro de figuras simples.

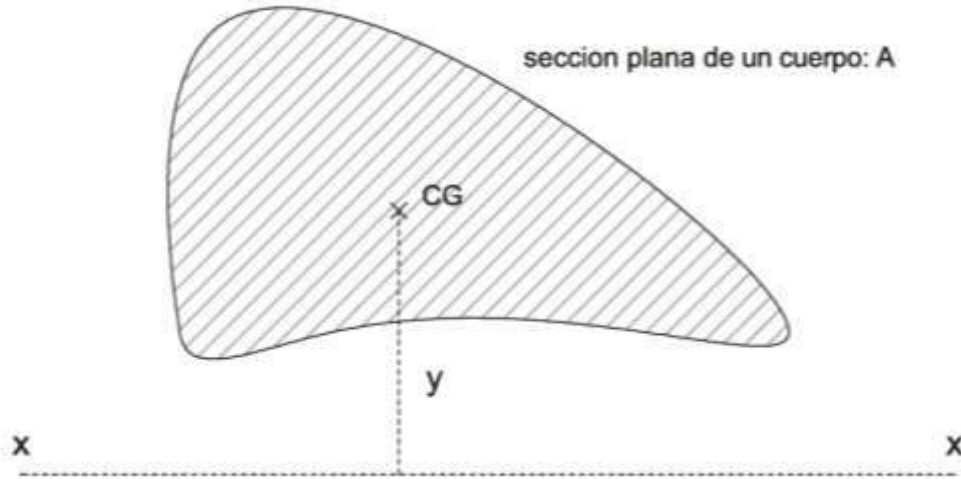
04 - 02 Momento de Inercia de una superficie plana:

Muchas veces no encontramos con vigas o ejes que sometidos a determinadas cargas se deforman motivando el giro de sus secciones transversales alrededor de un eje, (tal como es el caso de una viga flexionada) o alrededor de un punto (torsionada).



Vamos entonces a definir como momento de inercia de la sección transversal a la característica técnica de la misma que nos da una idea de la mayor o menor resistencia que opone la sección a girar alrededor de un eje.

Para una superficie cualquiera, sería de la siguiente manera:

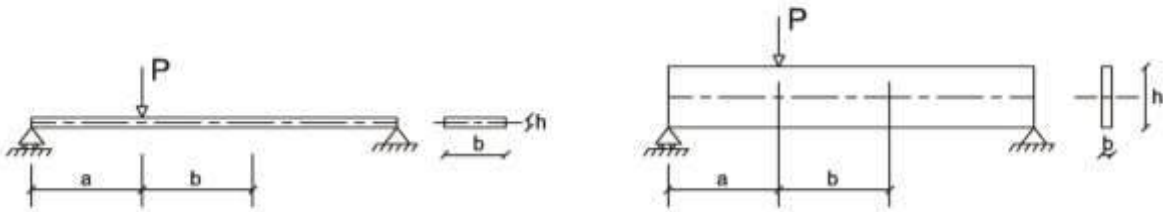


$$I_{xx} = y^2 \cdot A$$

De esta definición surge que el momento de inercia depende del eje considerado y de la forma y dimensiones de la sección. Podemos observar además que se necesita el cálculo integral pero al igual que lo que hemos expresado en el caso de baricentro, acá también podemos decir que existen tablas y manuales que nos permiten obtener los momentos de inercia respecto de los ejes baricéntricos para distintas secciones simples. Analicemos una viga simplemente apoyada en sus extremos y consideremos que se resuelve con la misma sección rectangular pero colocada en dos posiciones diferentes: La inersia respecto a los ejes baricéntricos será:

$$I_{xx} = (b \times h^3)/12$$

$$I_{yy} = (b \times h^3)/12$$



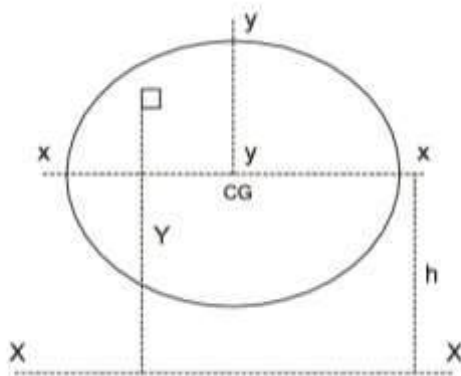
Si en ambas posiciones actúa la misma carga vemos que en el segundo caso es mayor la oposición al giro ya que el momento de inercia es mucho mayor pese a ser la misma sección.

Dado que el momento de inercia de una superficie es una medida de la resistencia al giro que es capaz de oponer la sección, podemos decir que si se trata de una sección compuesta, el momento de inercia está determinado por la suma algebraica de los momentos de inercia de las superficies que la componen, respecto del eje de giro. Como los momentos de inercia de las secciones simples que vienen expresados en los distintos manuales se refieren a los ejes baricéntricos surge la necesidad de calcular el momento de inercia de una superficie respecto a distintos ejes paralelos a los ejes baricéntricos.



Teorema de Steiner o de los ejes paralelos:

“El momento de inercia, de una superficie plana respecto de un eje paralelo a un eje baricéntrico es igual al momento de inercia de la superficie respecto de ese eje baricéntrico más el producto del área de la figura por el cuadrado de la distancia que separa a ambos ejes”.



Para demostrar este teorema debemos recurrir al cálculo de integrales, y a los fines de esta asignatura esto no es necesario, con lo cual solo se dará la formula final.

$$I_{xx} = I_{xx} + A \times h^2$$

04 - 03 Momento estático de una sección:

De la misma manera que el momento de Inercia, el momento estático es una característica geométrica de la sección referida a un eje. Si tomamos como referencia el eje baricéntrico, podemos expresarlo como el producto entre el área de uno de los sectores en los queda subdividida la pieza por la distancia entre el baricentro de dicha área y el centro de gravedad de toda la sección.



$$S_{xx} = A \times d$$

04 - 04 Momento o Módulo resistente de una sección:

Siguiendo con las características de las secciones podemos definir el Momento o Módulo Resistente como la razón de la Inercia de una sección respecto al Eje baricéntrico y la distancia de dicho eje a las fibras más alejadas de la sección. Se lo denomina como W_{nn} , siendo:

$$\begin{aligned} W_{xx} &= I_{xx} / Y_{max} && \text{para el eje X-X baricéntrico} \\ W_{yy} &= I_{yy} / X_{max} && \text{para el eje Y-Y baricéntrico} \end{aligned}$$

Si analizamos una sección rectangular, considerando que su Inercia respecto al eje X-X es: $I_{xx} = (b \times h^3)/12$ y teniendo en cuenta la definición de Módulo Resistente y que el $Y_{max} = h / 2$:

$$W_{yy} = ((b \times h^3)/12) / (h / 2) \quad \text{con lo que resulta simplificando la ecuación:}$$

$$W_{yy} = (b \times h^2)/6$$

05 - 01 Concepto de tensión: Definiremos como tensión al esfuerzo interno por unidad de superficie. De acuerdo con el carácter del esfuerzo tendremos tensiones normales y tensiones tangenciales. Así todos aquellos esfuerzos que actúen en forma normal a la sección considerada originaran tensiones normales σ (esfuerzo normal y esfuerzo de flexión), y aquellos que actúen tangencialmente a la sección originaran tensiones tangenciales ζ (esfuerzo de corte y esfuerzo de torsión).

05 - 02 Coeficiente de seguridad. Tensión admisible.

Si necesitamos dimensionar un elemento, debemos garantizar no sólo que no se produzca la rotura, sino también que las deformaciones que se generen sean de carácter elástico, razón por la cual la tensión a la que se encuentre trabajando el elemento debe ser inferior a la correspondiente al límite elástico. Pero si recordamos que las hipótesis de cálculo muchas veces se alejan de la realidad, que las condiciones en las que el material trabajará no serán exactamente las mismas que las representadas en los ensayos y que la valoración de las cargas actuantes muchas veces irá acompañada de una gran incertidumbre respecto a su real valor, se nos hace necesario definir un nuevo concepto que es el de tensión admisible.

La tensión admisible se obtendrá aplicando un coeficiente de seguridad a alguno de los límites característicos del material, tratando de cubrir todos los riesgos mencionados anteriormente. Resulta claro entonces que la tensión admisible dependerá del tipo de material (por ejemplo si consideramos la madera que es un elemento capaz de absorber agua y desprenderse de ella, lo que modifica sustancialmente sus propiedades, el coeficiente de seguridad adoptado será muy grande llegando a tomar valores entre 5 y 10), del tipo de cargas actuantes sobre la estructura y del tipo de sollicitación que ellas provocan.

En aquellos materiales que tengan período de fluencia, la tensión admisible se obtendrá como:

$$\sigma_{adm} = \sigma_{fl} / \mu \quad \mu = \text{coeficiente de seguridad}$$

Mientras que en los materiales frágiles será:

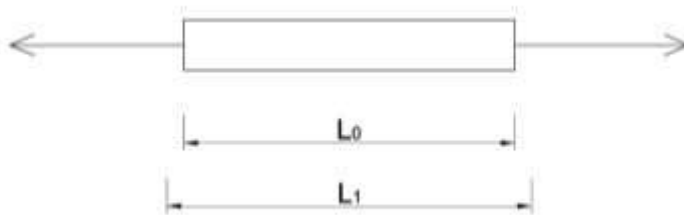
$$\sigma_{adm} = \sigma_{rot} / \mu$$

En general podemos decir que los coeficientes de seguridad son adoptados de acuerdo con los distintos reglamentos.



06 - 01 Esfuerzo Normal:

Supongamos una barra recta de longitud L_0 y sección transversal A , a la cual le aplicamos fuerzas colineales con el eje de la barra que definen un esfuerzo de tracción, veremos que la barra presentará un alargamiento que, por la constancia de volumen, irá acompañado de una variación de la sección transversal de la barra, alcanzando una longitud L_f . Llamaremos deformación longitudinal a la diferencia $L_f - L_0 = \Delta L$.



La magnitud de la deformación depende de las dimensiones de la barra, de la intensidad de la fuerza F , y del material con que está construida.

Vamos a definir entonces lo que llamaremos deformación longitudinal unitaria al cociente entre la deformación longitudinal y la longitud inicial de la barra

$$\varepsilon = \Delta L / L_0$$

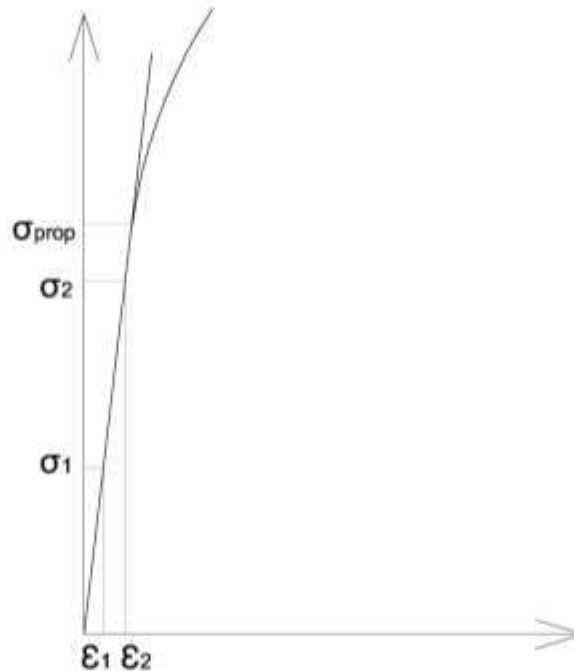
Esta magnitud representa la deformación por unidad de longitud de la barra.

06 - 02 Ley de Hooke:

Hooke ensayó a tracción barras construidas con distintos materiales y representó en un par de ejes de referencia las deformaciones que se producían al variar la intensidad de la fuerza aplicada obteniendo curvas que denominó gráficas fuerza-deformación. Dichas curvas tenían formas distintas según el material de la barra, aunque también para barras del mismo material pero de distintas longitudes las deformaciones experimentadas no eran iguales y lo mismo ocurría para barras de distintas secciones.

Para poder obtener información del material independientemente de la longitud y sección de la barra, representó los resultados en un sistema de ejes tensión-deformación unitaria llamando a la gráfica obtenida curva tensión - deformación unitaria. Recordando los conceptos de tensión y de deformación longitudinal unitaria, el pasar de un sistema de ejes al otro sólo significaba un cambio de escalas, no presentando modificaciones en el aspecto de la curva.

Hooke observó que en algunos materiales la gráfica presentaba un primer tramo recto, en el cual las deformaciones eran directamente proporcionales al esfuerzo aplicado. Por lo que si en ella se consideraban puntos cualesquiera, cuyos valores de tensión y deformación unitaria quedaban definidos se verificaba que:



$$\sigma_1/\epsilon_1 = \sigma_2/\epsilon_2 = \sigma_3/\epsilon_3$$

Con lo que concluyo que si la tensión permanecía por debajo del límite de proporcionalidad el cociente tensión-deformación unitaria era constante y a esa constante se la denomina Módulo de Elasticidad Longitudinal, o Módulo de Young, y se simboliza con la letra E.

De esta forma Hooke enunció su Ley:

$$\sigma = \epsilon \times E$$

Gráficamente se puede ver que el módulo elástico longitudinal coincide numéricamente con la tangente trigonométrica del ángulo, que el tramo recto define con el eje horizontal. Podemos concluir entonces que su valor dependerá del material con que esté hecha la barra. Si comparamos las gráficas de dos materiales distintos veremos que cuanto mayor es la pendiente del tramo recto de la gráfica, mayor resulta ser el módulo elástico longitudinal del material por lo que, cuanto mayor sea E menor será la deformación, pudiendo concluirse entonces que el módulo elástico longitudinal representa la resistencia que opone el material a deformarse en el período de proporcionalidad.

Cuando se trate de esfuerzos que originan tensiones tangenciales la ley de Hooke tiene la siguiente excepción:

$$\zeta = \gamma \times G$$

En donde γ representa la deformación transversal unitaria y G el Módulo de Elasticidad Transversal.



En la siguiente tabla damos algunos valores de módulos de elasticidad:

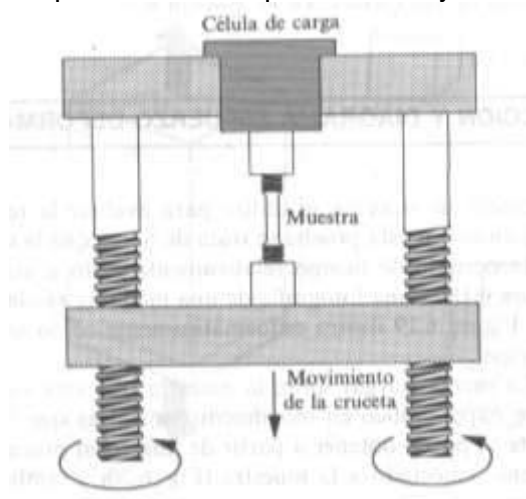
MODULOS DE ELASTICIDAD EN Kg/cm ²		
Material	E	G
Acero	2000000 a 2500000	
Acero dulce	1850000-a 2000000	800000 a 950000
Fundición de hierro	950000 a 1400000	400000 a 550000
Cobre	950000 a 1150000	320000 a 470000
Aluminio	640000 a 800000	180000 a 190000
Bronce	900000 a 1500000	350000 a 470000
Maderas duras	80000 a 140000	
Maderas semiduras	60000 a 80000	
Maderas blandas	40000 a 60000	
Piásticos de F. vidrio	180000 a 400000	

06 - 03 Ensayo de tracción de un acero dulce

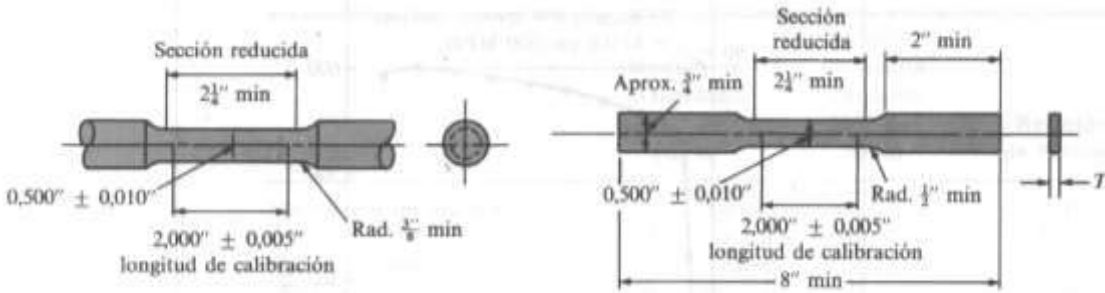
Si queremos conocer las propiedades mecánicas del material una vez finalizado el periodo de proporcionalidad analizamos lo que sucede en el ensayo de tracción que es el que define mejor las características del material.

El ensayo se realiza mediante una máquina capaz de aplicar dos fuerzas iguales y opuestas, colineales con el eje de la probeta que con intensidad creciente produce el progresivo aumento de la distancia entre dos puntos determinados en la muestra; con capacidad suficiente para producir la rotura de la pieza y dotada de un extensómetro que irá midiendo los alargamientos producidos y un dinamómetro que irá midiendo la intensidad de la fuerza aplicada.

Esquema de la máquina de ensayo

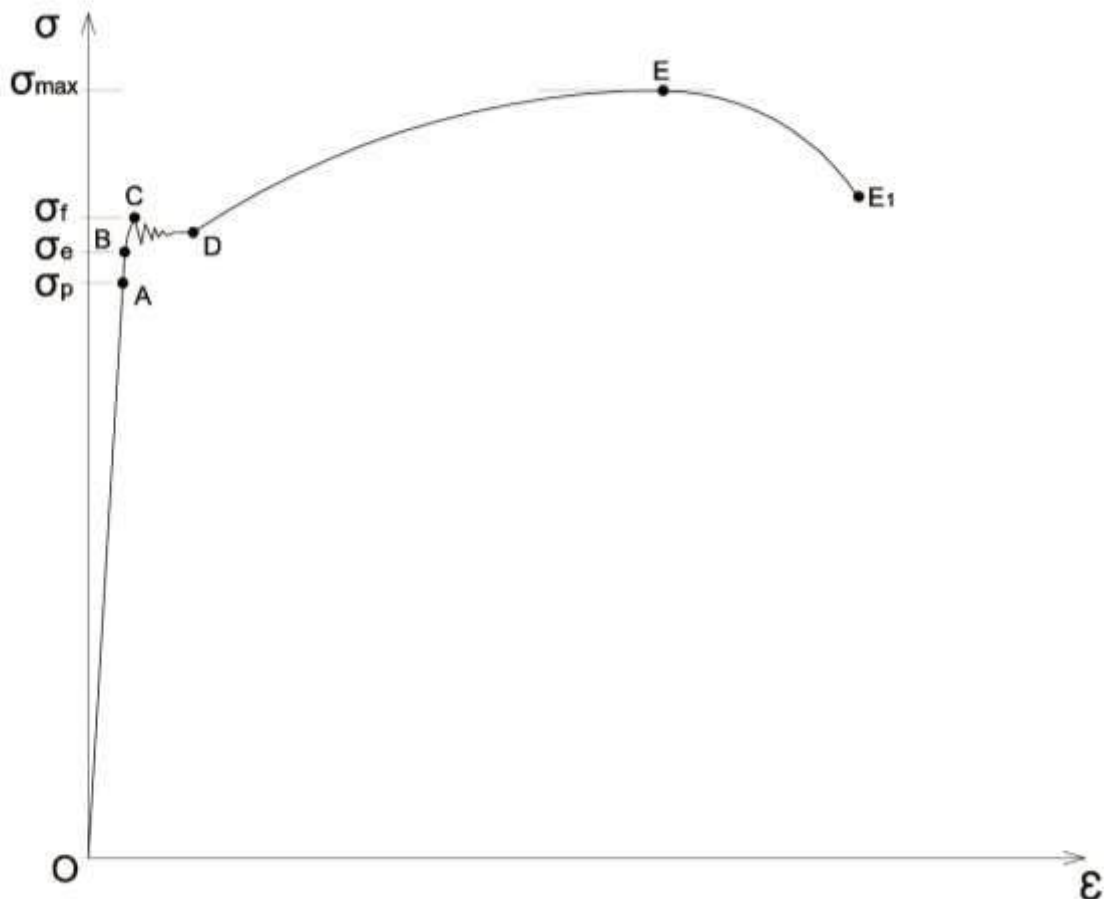


Ejemplos de formas geométricas de uso común en las probetas de ensayo a tracción



Por ser un ensayo deberá cumplir con determinadas características a saber: la aplicación de la carga se efectúa en forma lenta, en un lapso de minutos, de modo que las propiedades que surjan sean las que resultarían en condiciones rigurosamente estáticas (simulan cargas permanentes); la forma y dimensiones de las probetas están establecidas por los reglamentos.

La máquina registra la gráfica $F - \Delta L$, que luego se traducirá al correspondiente $\sigma = \epsilon$ mediante un simple cambio de escalas.

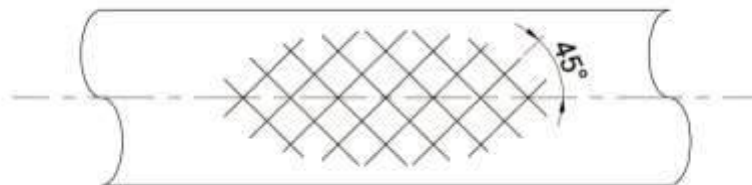




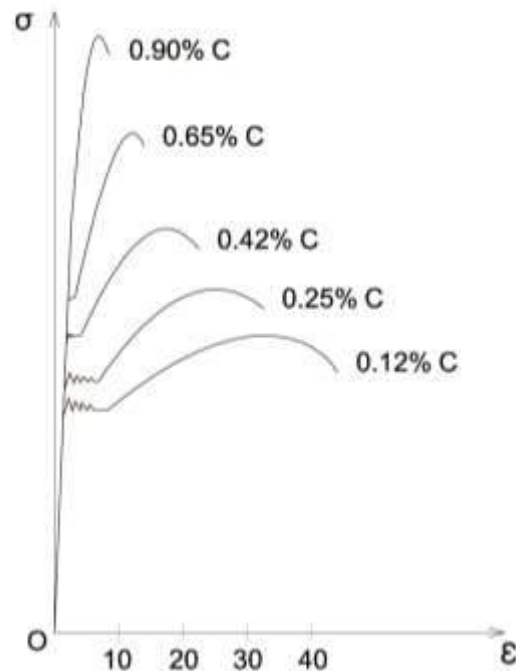
Durante el período inicial de carga, las pequeñas deformaciones que se verifican en la probeta, resultan ser proporcionales a la fuerza actuante, definiéndose el tramo recto OA del diagrama, llamándose al punto A Límite de Proporcionalidad σ_p período en el cual se verifica la ley de Hooke. Si se continúa aumentando la intensidad de carga, sin superar el punto B, podremos observar que las deformaciones crecen más rápido los incrementos de cargas y también se verá que si cesa la aplicación de la carga la probeta recupera la longitud inicial, o sea el material se comporta como perfectamente elástico, razón por la cual al punto B se lo denomina “Límite Elástico Aparente”, siendo este punto de fácil identificación durante el ensayo (como se verá a continuación) y muy usado en la práctica.

Siguiendo con el ensayo, se entra en el período CD, conocido como “Período de Fluencia”, caracterizado por un Límite Inferior de Fluencia y un Límite Superior de Fluencia (punto C). En este tramo el incremento de cargas pareciera detenerse sin ocurrir lo mismo con las deformaciones que continúan generándose (se dice que el material fluye libremente). Para el que presencia el ensayo, el inicio de este período es fácilmente detectable por dos hechos característicos:

- Si observa el dinamómetro verá que la aguja indicadora oscila entre dos valores (que corresponden al límite inferior y el límite superior de fluencia) mientras que la aguja testigo permanece fija marcando el valor correspondiente al límite superior de fluencia. Cabe observar que el límite inferior es de muy difícil determinación ya que la aguja se mueve permanentemente.
- Si se observa la probeta verá aparecer líneas que forman 45° con el eje que se conocen con el nombre de “Líneas de Luders” y que son consecuencia de deslizamientos relativos entre los cristales que forman el material.



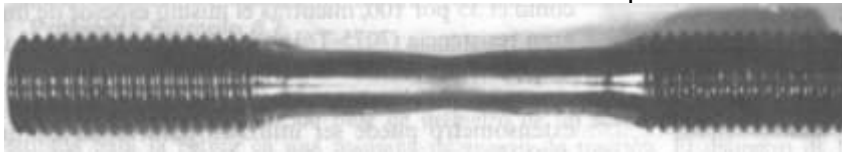
Es importante destacar que el período de fluencia de los aceros será más o menos prolongado dependiendo del mayor contenido de carbono, a menor contenido de carbono, mayor período de fluencia comprobándose que con contenidos superiores al 0,9% no existe fluencia



Pasado el período de fluencia el material adquiere nuevamente la capacidad de oponerse al alargamiento y el diagrama retorna a su trazado ascendente, con una gran deformación plástica hasta llegar al punto E donde la carga alcanza el máximo valor y la curva tiene allí recta tangente horizontal.

Todos los alargamientos experimentados por la probeta hasta el punto E fueron uniformes en toda la longitud, pero a partir de este punto las deformaciones se concentran en una zona donde se produce una contracción brusca que conduce a la rotura por descohesión del material en la sección contraída de la muestra.

Deformación localizada en la zona central de la probeta



Al período comprendido entre el punto E y el E1 se lo llama Período de Estricción. En el diagrama puede observarse que las cargas sufren una caída en su intensidad que resulta de la disminución de la sección, siendo la carga correspondiente al punto E la máxima carga resistida, razón por la cual al punto E se lo denomina Limite de rotura (esta carga queda registrada por la aguja testigo del dinamómetro).

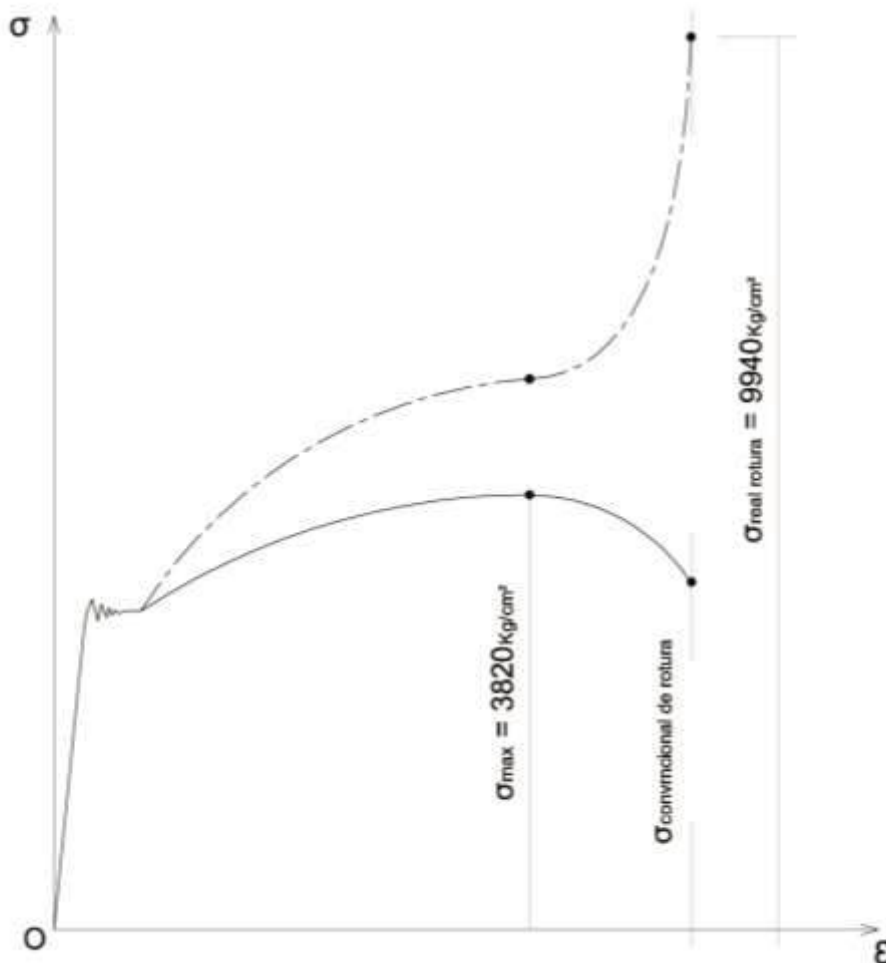
Diagrama real Tensión – Deformación Unitaria

El diagrama $\sigma = \epsilon$ suministrado por la máquina en un ensayo de tracción es obtenido a partir de las dimensiones originales de la probeta y por lo tanto las tensiones que se leen (fundamentalmente en el período de estricción) no son las tensiones que realmente se presentan en la probeta en el instante considerado ya que la sección transversal no es constante en todo el ensayo.



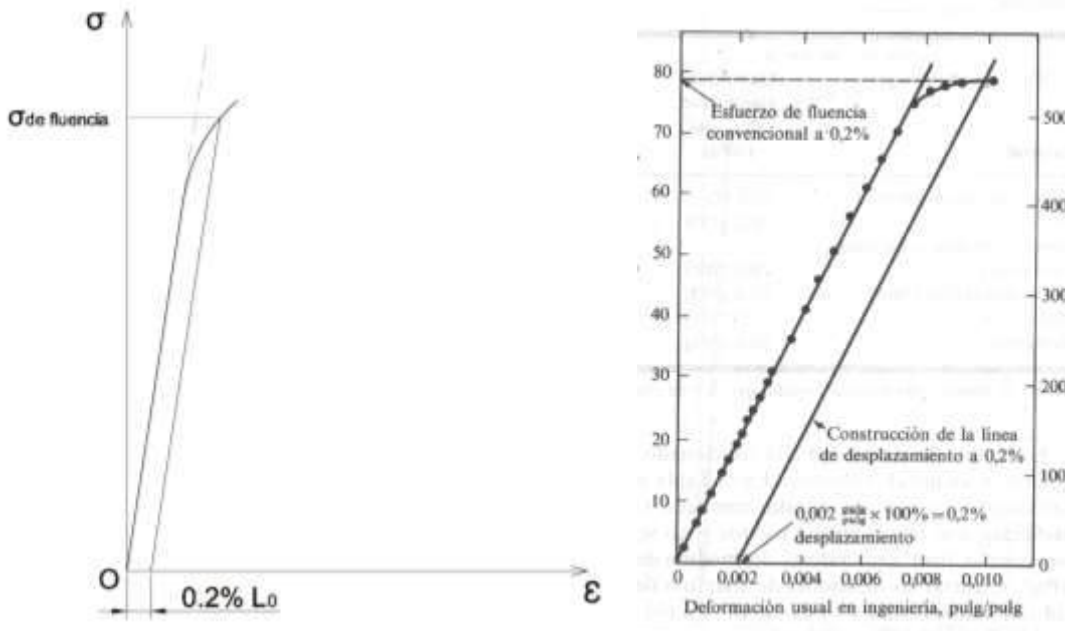
Si se construyera el diagrama considerando el valor de la sección en cada instante obtendríamos el diagrama real de tensiones que será distinto del diagrama suministrado por la máquina (diagrama convencional). Sin embargo el diagrama convencional resulta muy útil para determinar valores característicos del material: límite de proporcionalidad, límite de elasticidad, límite de rotura, etc.

En la siguiente figura se muestra la diferencia entre ambos diagramas.



Límite Convencional de Fluencia

Hemos dicho que los aceros de alto contenido de carbono no presentan período de fluencia y como la tensión de fluencia es muy usada para realizar cálculos, se define el “Límite Convencional de Fluencia” o “Límite 0,2” ($\sigma_{0.2}$), que es el que corresponde a la tensión que produce un alargamiento del 0,2% de la longitud inicial. Para su determinación, en el diagrama $\sigma = \epsilon$, se marcará a partir de $\sigma = 0,2\% = 0,002$, una paralela al módulo de Elasticidad y donde esta recta corte a la gráfica con una horizontal obtendremos el límite que buscamos.



Observaciones:

Podemos concluir entonces, que las características observadas en el ensayo de tracción variarán de acuerdo al tipo de material estudiado. Los materiales dúctiles romperán luego de experimentar deformaciones plásticas importantes, mientras que en los materiales frágiles la rotura se presentará cuando la deformación todavía es uniforme, es decir sin período de estricción.

También se ha visto que los aceros con alto contenido de carbono no presentan fluencia, mostrando una tensión de rotura mucho mayor pero sin existir prácticamente período plástico.

Por otro lado se debe tener en cuenta cómo se ha realizado el ensayo. Así, por ejemplo, si la probeta hubiera sido estirada inicialmente hasta tensiones superiores al límite de fluencia y luego vuelta a cargar, el límite de proporcionalidad aumentará. Este fenómeno se denomina endurecimiento por deformación en frío (se aumenta el límite de proporcionalidad disminuyendo la plasticidad del material). También surge de los ensayos, que la temperatura influye considerablemente en las propiedades de los materiales, particularmente en los aceros, puede observarse que hasta la temperatura de 300° tensión de rotura aumenta en un 20-30%, mientras que un ulterior aumento de temperatura disminuye bruscamente dicho valor. Los límites de fluencia y proporcionalidad disminuyen al crecer la temperatura (a 400° la tensión de fluencia representa el 60-70% del correspondiente a temperatura normal). También con el aumento de temperatura desaparece el período de fluencia.

La forma de actuar de las cargas estará determinando también los resultados obtenidos. En base a la velocidad de aplicación de las cargas podemos clasificarlas en estáticas y dinámicas. Las cargas estáticas son aquellas que actúan sobre el cuerpo en forma estable, permaneciendo invariables su dirección, sentido e intensidad, o bien son aplicadas en forma lenta y progresiva hasta alcanzar la máxima intensidad. Las dinámicas se manifiestan en forma instantánea (choque), o bien variando entre dos límites repitiéndose un número muy grande de veces (cíclicas). La experiencia muestra que un material que se encuentra sometido a cargas dinámicas (que originan tensiones



cíclicas) rompe a valores de tensión muy inferior al obtenido en un ensayo con cargas estáticas. La rotura originada por cargas cíclicas se denomina rotura por fatiga y se presenta en forma brusca sin deformación previa.

06 - 04 Dimensionamiento a Tracción – Compresión – Corte

Dijimos que el esfuerzo normal (de tracción o compresión), producía tensiones normales que podíamos calcular como: $\sigma = F / A$

También dijimos que las piezas a dimensionar no sólo deben soportar las cargas a las cuáles se encuentren sometidas sin romperse, sino que también debemos lograr que no se deformen plásticamente; todo esto en condiciones económicamente aceptables. Esto se cumplirá siempre que la tensión a la que se encuentre trabajando el elemento sea menor que la tensión admisible:

$$\sigma = F / A \leq \sigma_{adm} \quad (1)$$

De donde resulta que la sección mínima necesaria será:

$$A \geq F / \sigma_{adm}$$

Obtenida esta sección mínima y seleccionando el tipo de sección a adoptar (si se trata de sección circular, perfil, sección cuadrada o rectangular, etc.) se adoptará la sección definitiva mediante el uso de tablas o estableciendo sus dimensiones según los casos.

También a partir de la expresión (1) que podríamos llegar a verificar si secciones ya dimensionadas pueden soportar determinadas cargas o calcular la carga máxima admisible por esos elementos.

En cada caso, se trate de tracción o compresión, se utilizara la tensión admisible correspondiente. Sin embargo, cabe aclarar, que el dimensionamiento a compresión de piezas muy esbeltas será distinto, ya que deberá tenerse en cuenta el fenómeno de pandeo lo que se estudiara en cursos posteriores.

En el caso de esfuerzos de corte, dijimos que éste generaba tensiones tangenciales ζ , por lo tanto será:

$$\zeta = F / A \leq \zeta_{adm}$$

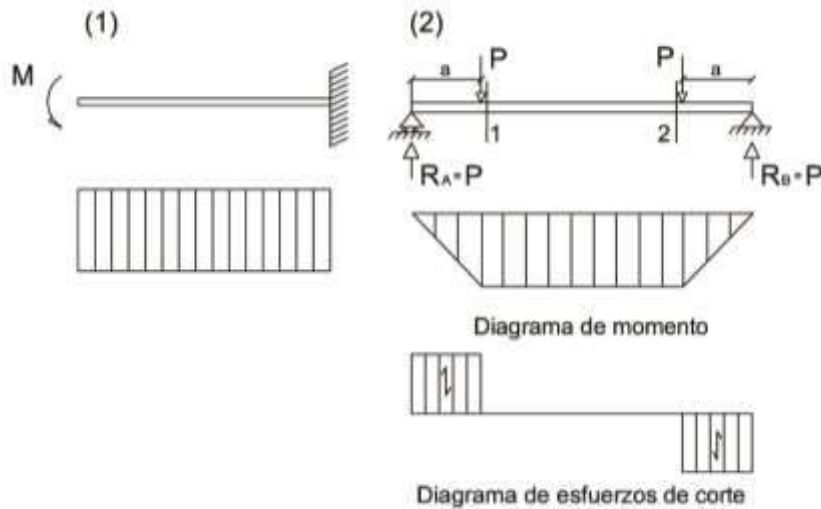
De donde se desprende que:

$$A \geq F / \zeta_{adm}$$

Este concepto de tensión tangencial se desarrollara con mayor profundidad en la siguiente unidad.

07 - 01 Tensiones debidas a flexión:

Para poder analizar las tensiones originadas por la flexión debemos analizar algún estado de cargas que solo produzca flexión y el resto de los esfuerzos internos sea nulo. Pensemos entonces en una ménsula sometida a una cupla o en una viga simplemente apoyada con dos cargas iguales cuyos puntos de aplicación se encuentran en los tercios de la luz o a igual distancia de los apoyos. En el primer caso tenemos sólo momento flector en toda la longitud de la viga, mientras que en el segundo tendremos sólo momento en el tramo comprendido entre las dos cargas.

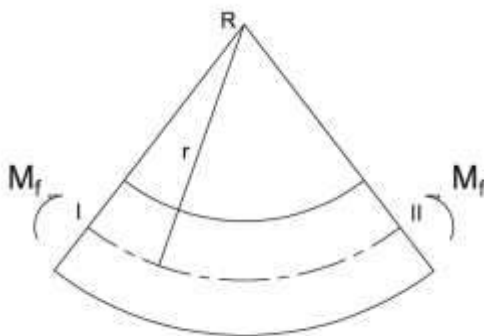


Cuando una viga está solicitada por momento flector con ausencia del esfuerzo de corte se denomina a esto flexión pura. Analizaremos entonces las tensiones que se producen por flexión pura para luego continuar con la determinación de las tensiones debidas al esfuerzo de corte y por último superponer los efectos.

Para poder establecer el estado de tensiones producido por flexión pura debemos examinar la deformación que tiene lugar en el interior del material. Aceptaremos las siguientes hipótesis:

- La viga tiene un plano axial de simetría
- Las cargas están contenidas en dicho plano de simetría
- Las secciones transversales permanecen planas luego de la flexión
- El material es homogéneo y obedece a la ley de Hooke, siendo el módulo de elasticidad en tracción igual que en compresión.

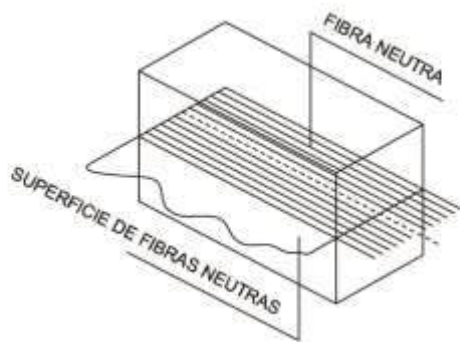
Siendo el momento flector el mismo en todas las secciones del tramo, podemos admitir que la viga se deformara, definiendo su eje un arco de circunferencia; las secciones transversales giran unas respecto de otras, efectuándose este giro, alrededor de un eje, coplanar con cada una de ellas, las fibras longitudinales del material se mantienen perpendiculares a cada sección de la viga:



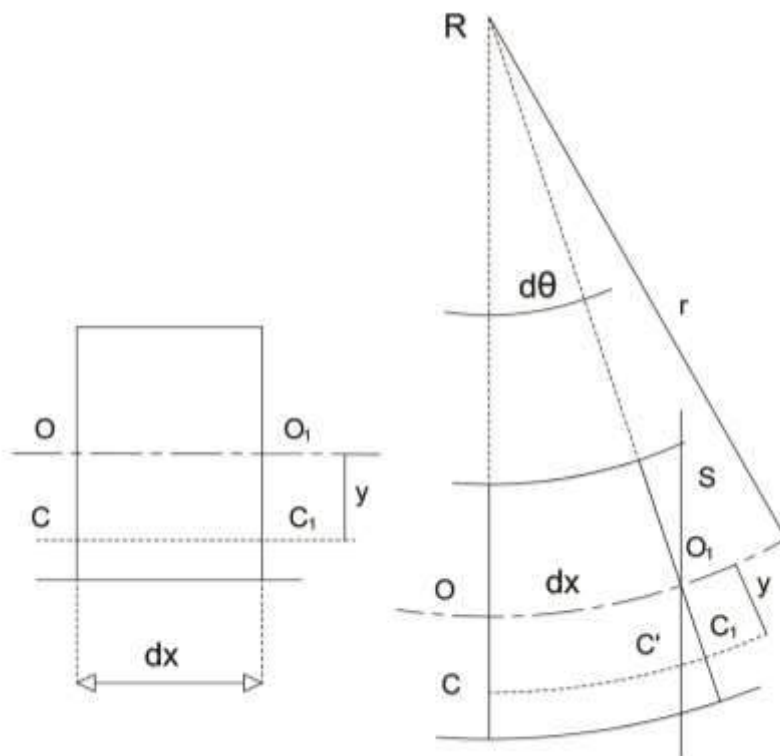
Como consecuencia de la deformación resulta que las fibras longitudinales que se encuentran en la parte inferior experimentan un alargamiento, mientras que las que se ubican en la parte superior se acortan. Como vemos la variación de longitud, no es la



misma para todas las fibras. Entre las fibras que experimentan el mínimo alargamiento existirán fibras que no modifican su longitud inicial como consecuencia de la deformación de la viga, a ellas se las denomina fibras neutras. El conjunto de fibras neutras, la cual al intersectarse con esta sección transversal determina al que denominamos eje neutro de la sección, eje alrededor del cual gira la misma al producirse la flexión.



Analicemos una porción de viga limitada por dos secciones separadas un dx y ubiquemos una fibra a distancia y de la superficie de fibras neutras, antes de la deformación.



Al deformarse la viga, las secciones giran y definen el ángulo $d\theta$ (diferencial θ) será entonces:

$$d\theta = dx / r$$

Si por el punto O_i trazamos la recta S paralela a la recta OC , que define la posición original de la sección, antes de flexionar la viga, vemos que la porción CC_i de la fibra en estudio sufre un alargamiento, que está representado por $C'C_i$ y resulta:

$$d\theta = C'C_i / y$$

pero como $d\theta = dx / r$, será:

$$dx / r = C'C_i / y$$

Y por lo tanto podemos escribir:

$$C'C_i / dx = y / r$$

Pero si recordamos la definición de alargamiento longitudinal unitario ϵ y observamos el primer miembro de la igualdad, resulta ser el alargamiento por unidad de longitud, para una fibra que se encuentra a una distancia y de la superficie neutra, o sea que:

$$\epsilon = y / r$$

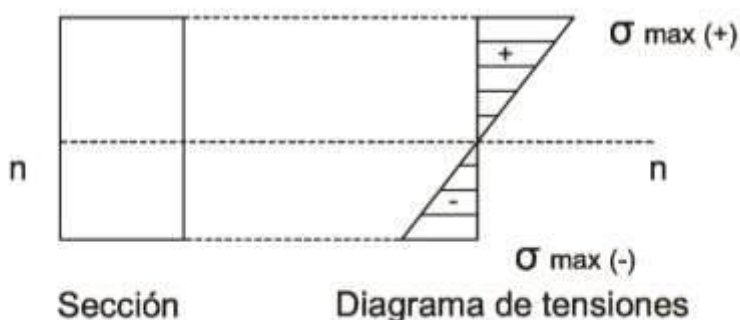
Si pensamos que la viga es un material y recordamos las hipótesis establecidas en la cual decíamos que el módulo de elasticidad E era el mismo a tracción que a compresión, podemos escribir:

$E\epsilon = E.y / r$ si estamos dentro del periodo de proporcionalidad es válida la ley de Hooke y podemos entonces decir:

$$\sigma = E.y / r$$

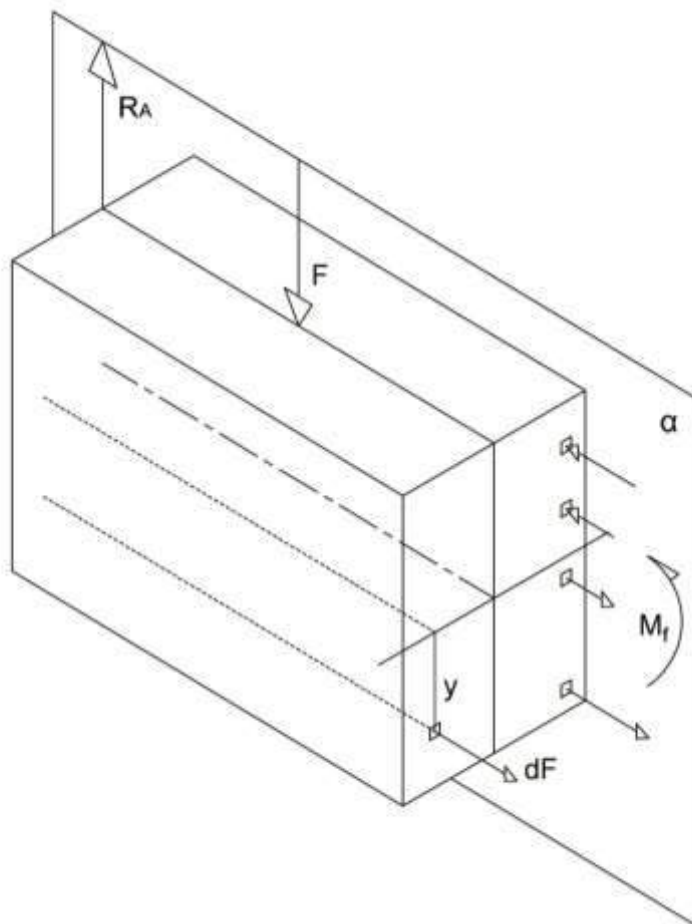
Expresión que nos define la tensión que se origina en la sección transversal de la viga por la sollicitación de flexión simple. Como podemos observar la tensión varía con la distancia al eje neutro y como ésta cambia de signo en el eje neutro, existirán puntos para los cuales la tensión es positiva y otros, para los cuales la tensión es negativa, resultando ser nula en el eje neutro y máxima en los puntos más alejados de él.

Podríamos entonces realizar un gráfico en el que se represente la variación de la tensión en la sección en función de la distancia al eje neutro. A este gráfico se lo denomina diagrama de tensiones y tiene la siguiente forma:



Como se puede observar en las fibras más alejadas del eje neutro se producen las máximas tensiones, presentándose un máximo positivo y un máximo negativo pasando por cero en dicho eje (n-n).

Veremos ahora cual es la posición del eje neutro.



Recordamos que habíamos partido de suponer que analizábamos el caso de flexión pura, razón por la cual en la sección transversal las fuerzas internas sólo deben generar una cupla, cuyo momento característico es el momento flector en la sección estudiada. Teniendo en cuenta que la tensión que se produce varía punto a punto, según sea la distancia al eje neutro, la intensidad y el sentido de las fuerzas internas es variable, por lo que al no existir una distribución uniforme de ellas deberemos definir la tensión mediante la siguiente expresión

$$\sigma = dF / dA$$

A partir de esta fórmula se requiere nuevamente de uso de diferenciales e integrales con lo cual solo se explicitará la conclusión

Se puede concluir que el eje neutro de la sección transversal de una viga, es un eje coplanar a la misma que pasa por su baricentro. Con respecto a su dirección, la misma dependerá del plano de acción de las cargas externas. Se puede demostrar que si la intersección de este plano con la sección de la viga es una recta que a su vez es el eje de simetría de la sección, entonces el eje neutro es perpendicular al mismo y la flexión recibe el nombre de flexión recta o normal, en los otros casos la flexión se denomina oblicua.

Como la expresión definida para la tensión debido a la flexión no nos resulta de fácil aplicación en la práctica trataremos de hallar una expresión que nos vincule a la misma con la intensidad del momento flector.

De acuerdo con la definición de inercia que hemos dado anteriormente y obviando la resolución matemática, podemos expresar:

$$M_f = E \cdot I_{nn} / r$$

Si multiplicamos ambos miembros de la igualdad por “y” será:

$$M_f y = E y \cdot I_{nn} / r$$

Reemplazando nuevamente $\sigma = E y / r$

$$y M_f = \sigma \cdot I_{nn}$$

De donde resulta que:

$$\sigma = M_f y / I_{nn}$$

Si denominamos con Y_{max} a la mayor distancia al eje neutro, definimos la tensión máxima determinada por el esfuerzo de flexión a:

$$\sigma_{max(+)} = M_f y_{max(+)} / I_{nn}$$

$$\sigma_{max(-)} = M_f y_{max(-)} / I_{nn}$$

Como dijimos en su momento cuando se definió el diagrama de tensiones si la sección es simétrica la tensión máxima positiva es igual a la tensión máxima negativa.

Si tomamos la definición de Modulo resistente (W_{nn}) vista anteriormente:

$$W_{nn} = I_{nn} / y_{max}$$

Nos quedará entonces la expresión de la tensión como:

$$\sigma = M_f / W_{nn}$$

De acuerdo con la definición del Módulo resistente podemos aclarar que es una característica de la sección transversal que no depende del material sino solamente de la forma de la misma.

07 - 02 Dimensionamiento a flexión:

Recordando lo ya visto en el dimensionamiento a tracción, compresión o corte, en flexión también debemos dimensionar los elementos de manera tal de no sobrepasar un valor de tensión que denominamos tensión admisible (tensión de rotura afectada de un coeficiente de seguridad), por lo que deberá cumplirse:

$$\sigma = M_f / W_{nn} \leq \sigma_{adm}$$

En donde M_f debe ser el máximo que se produce en la viga (recordemos que el momento máximo se producirá donde el esfuerzo de corte cambia de signo o se hace cero).

Con respecto al módulo resistente es de destacar que para el caso de secciones rectangulares o circulares se podrá obtener a partir de la expresión de inercia correspondiente y en el caso de perfiles se podrá obtener directamente de las tablas.

Verificación de secciones sometidas a flexión:

Como en la práctica diaria se nos puede presentar el problema inverso al del dimensionamiento, es decir, que ya tengamos dimensionado el elemento y necesitemos saber si nos resiste determinado esfuerzo, cabe señalar que se deberá evaluar el momento flector máximo, determinar el módulo resistente de la sección a analizar y calcular la tensión a la cual trabajará la sección verificando que ésta sea menor que la tensión admisible.

Debemos destacar que en el caso de tratarse de una sección compuesta deberá calcularse la posición del eje baricéntrico, calcular la inercia respecto de este eje



(recordamos que el eje neutro coincide con el eje baricéntrico) y luego hallar el modulo resistente como el cociente de la inercia dividido la distancia a la fibra más alejada del eje neutro.

También podría interesarnos conocer el esfuerzo máximo que es capaz de soportar la sección, en tal caso deberemos multiplicar el módulo resistente de la sección (respecto al eje neutro) por la σ_{adm} .

Verificación de la Tensión de Corte:

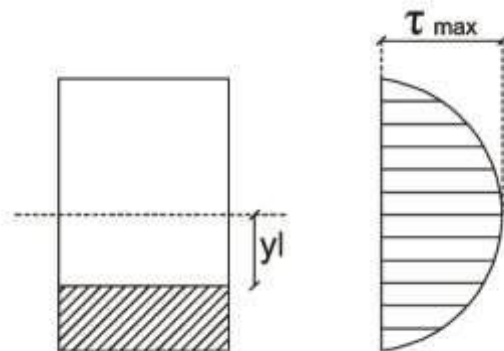
Cuando se definieron los esfuerzos internos en vigas de eje recto, se observó que generalmente la flexión siempre viene acompañada del corte. Si bien es cierto que el corte máximo no se produce en la misma sección de la viga donde se produce el momento flector máximo deberemos verificar que la sección de la viga que hemos dimensionado por flexión sea capaz de resistir el esfuerzo de corte máximo.

Para el caso de dimensionamientos realizados con secciones rectangulares o perfiles normales es una buena aproximación calcular la tensión de corte con la expresión:

$$\zeta = 3/2 Q_{max} / A \leq \zeta_{adm}$$

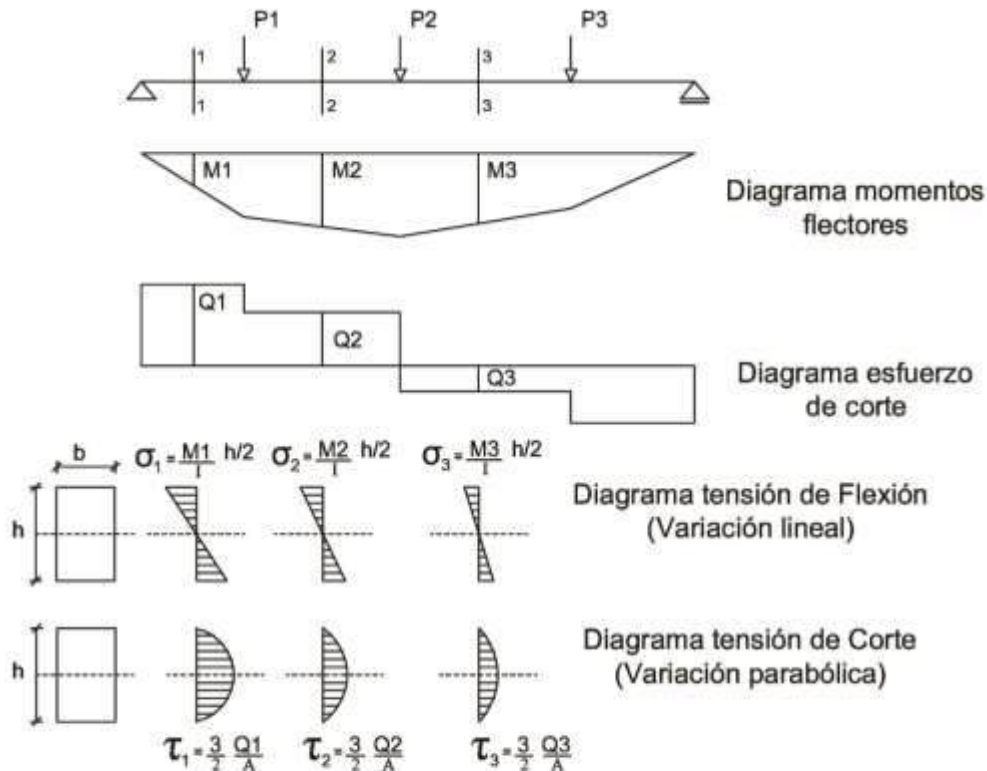
Donde A es la sección transversal.

Así como habíamos obtenido el diagrama de tensiones debido a flexión también podemos realizar el diagrama de tensiones debido a corte que tendrá una forma parecida a la que graficamos:



Vemos que el diagrama de tensiones de corte presenta una variación parabólica con su máximo en el eje neutro (exactamente al revés de lo que se producía en el diagrama de tensiones debido a flexión en donde los máximos se producían en las fibras más alejadas y el cero en el eje neutro).

También dijimos que el corte máximo se produce en una sección distinta a la que se produce el momento flector máximo, de manera que si, por ejemplo, quisiéramos graficar el diagrama de tensiones debido a la flexión y el de tensiones debido al corte a lo largo de la viga para un estado de cargas cualquiera obtendríamos lo siguiente:



Como se puede observar no se producen en forma simultaneas las máximas tensiones de corte y las máximas tensiones de flexión por lo cual nos bastara con verificar cada una de ellas por separado en la sección correspondiente al valor máximo. Solo en casos muy excepcionales deberán verificarse ambas tensiones en forma simultánea mediante una tensión de comparación:

$\sigma = (\sigma^2 + 3.\zeta^2)^{1/2} = \sigma_{adm}$ (esto se realizara solamente en el caso de vigas armadas en la unión del alma y alas por considerarse una sección critica, no resultando así en perfiles normales ni en secciones rectangulares; o en aquellos casos en que ambas tensiones σ y ζ resulten muy cercanas a las tensiones admisibles en la misma sección de la viga).

Resumiendo:

Una vez analizadas las cargas actuantes en una viga, se determinará el momento máximo (donde $Q = 0$), y se procede al dimensionamiento en la forma indicada. Una vez adoptada la sección se verificara que la tensión de corte máxima actuante sea menor que la admisible. En estas condiciones podemos decir que el dimensionamiento realizado es aceptable. Faltaría analizar que las deformaciones que se presenten en la viga debido a la flexión no sean excesivas, análisis que no es objeto de este curso y que tratará en su momento.



BIBLIOGRAFIA:

- SEARS, Francis W y ZEMANNISKY, Mark W, 1973, "Física general", Editorial Aguilar.
- WITTENBAUER, F. "Problemas de mecánica general y aplicada" Tomo segundo. Elasticidad y Resistencia de materiales. Editorial Labor SA
- TIMOSHENCKO, Stephen. y YOUNG, D. H. 1951. "Teoría de las estructuras". Acme Agency srl.
- TIMOSHENCKO, Stephen. 1957. "Resistencia de Materiales" Editorial Espasa – Calpe. Madrid.
- NASH, William A., "Resistencia de materiales (Teoría y problemas) Editorial Schaum
- PANSERI, Enrique. "Curso medio de Resistencia de Materiales", Editorial Construcciones Sudamericanas.
- STIOPIN, P. A. 1968. "Resistencia de Materiales" Editorial MIR
- RAMOS LOPEZ, Agustín. "La construcción metálica – Tomo 1: El cálculo, los materiales"
- DIAZ PUERTAS, Diego. 1979. "Introducción a la Estructura de los Edificios". Ediciones Summa.
- CRIBB A. Apuntes de la cátedra.