

**Resolução de Exame de Matemática –
12ª. Classe
Ano: 2018/ 2ª Época**



Exame de Matemática – 12ª classe, Ano: 2018/ 2ª Época**Resoluções****❖ Operações sobre proposições lógicas**

Na lógica matemática estuda-se as seguintes operações sobre proposições:

Negação de uma proposição

Conjunção de proposições

Disjunção de proposições

Implicação material

Equivalência material

Expressão algébrica

Uma expressão algébrica diz-se quando a variável aparece sob forma de um radicando.

Repare que a expressão do número 3, a variável aparece dentro do radical com índice 3, e a variável aparece também sob forma de denominador, visto que não existem um número real que pode anular o denominador, razão pelo qual todo número real define a expressão dada.

Equação

Já foi dito que uma equação é a comparação de duas expressões designatórias por meio de símbolo de igualdade.

Equação exponencial: é toda equação em que a incógnita aparece sob forma de um expoente de base a , sendo a positivo e diferente de unidade.

A representação da forma

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ chama-se}$$

determinante proveniente de uma matriz de 3 por 3

1. Resposta:

Vamos fazer a representação simbólica da seguinte proposição "O quadrado de todo número real não é negativo"

Antes de representar simbolicamente a proposição destacada, veja que nela está presente um quantificador universal "todo", na lógica matemática o símbolo deste quantificador é

$\forall$ e representemos o número real por x , sendo assim teremos: $\forall_{x \in \mathbb{R}} : x^2 \geq 0$

2. Resposta:

Vamos representar a expressão equivalente de $p \wedge (p \wedge \sim q)$ aplicando as propriedades das operações sobre as proposições lógicas, assim:

$$p \wedge (p \wedge \sim q) \Leftrightarrow (p \wedge p) \wedge \sim q \rightarrow \text{associatividade}$$

$$\Leftrightarrow p \wedge \sim q \rightarrow \text{reflexiva na } \wedge$$

3. Resposta:

Aqui pretende-se escolher uma igualdade verdadeira, porém a escolha não deve ser feita de uma forma arbitrária, deve ser feita de uma forma sistemática, assim,

$$\text{A. } (x-1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow (x-1)(x-1)(x-1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-1)(x-1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1)(x-1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1)(x-1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x + x - 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

Repare que este resultado não é verdadeiro. Vamos analisar a opção B:

$$\text{B. } (x-1)^3 = x^3 + 3x^2 - 3x + 1 \Leftrightarrow (x-1)(x-1)(x-1) = x^3 + 3x^2 - 3x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-1)(x-1) = x^3 + 3x^2 - 3x + 1 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1)(x-1) = x^3 + 3x^2 - 3x + 1$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1)(x-1) = x^3 + 3x^2 - 3x + 1 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x + x - 1 = x^3 + 3x^2 - 3x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^3 + 3x^2 - 3x + 1$$

Repare que este resultado não é verdadeiro. Vamos analisar a opção C:

$$\text{C. } (x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow (x+1)(x+1)(x+1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+1)(x+1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1)(x+1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1)(x+1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x + x + 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

A opção C é verdadeira, já não podemos verificar a opção D, visto que das quatro alternativas, existe uma alternativa apenas correcta.

4. Resposta:

Uma expressão diz-se algébrica racional inteira à toda expressão polinomial. Das alternativas apresentada, a que apresenta expressão algébrica racional inteira

$$\frac{x-12}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{3} - \frac{12}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{3} - 4$$

5. Resposta:

Razões trigonométricas de alguns arcos

x	0	30	45	60	90
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tag	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	0
ctg	ND	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	ND

Fórmula fundamental da trigonometria

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Outras relações trigonométricas

$$tg(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$ctg(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Módulo ou valor absoluto de um número real

Chama-se módulo ou valor absoluto de um número real x ao próprio número se este for não negativo ou ao seu simétrico se este for negativo.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

: é toda equação que por meio de princípios de equivalência é redutível a forma:

$$|x| = a$$

A solução da equação acima segue:

$$|x| = a \Leftrightarrow x = a \vee x = -a$$

O factorial de um número natural n é dado por:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$5! = 120$$

Permutação

A permutação de n elementos

Vamos determinar o domínio de existência da expressão $\sqrt[5]{x+1}$

A expressão dada é algébrica irracional, visto que a variável aparece sob forma de radical, mas temos que analisar o índice do radical da expressão, assim:

- i) Se o índice do radical for um número par, então o radicando não deve ser negativo;
- ii) Se o índice do radical for um número impar, então o radicando pode ser qualquer número real;

O índice do radical da expressão dada, é igual a 5, logo $D = IR$

6. Resposta:

Considere a equação $x^3 - 4x = 0$, como podemos ver, essa é uma equação do terceiro grau, pretendemos resolver-la analiticamente e depois determinar a soma das suas raízes reais:

$$x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm 2 \Rightarrow x_1 = -2 \vee x_2 = 0 \vee x_3 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S = x_1 + x_2 + x_3 \Leftrightarrow S = -2 + 0 + 2 = 0$$

7. Resposta:

Considere a equação $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$, como podemos ver, essa é uma equação do quarto grau e biquadrática, pretendemos encontrar as suas raízes reais analiticamente:

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^{2 \times 2} - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \vee x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \vee x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \pm\sqrt{1} \vee x^2 = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = \pm 1 \vee x = \pm 1$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -1 \vee x_2 = -1 \vee x_3 = 1 \vee x_4 = 1 \Rightarrow S = \{-1; 1\} \Leftrightarrow S = \{\pm 1\}$$

8. Resposta:

De um sistema linear de 3 equações e três incógnitas $(x; y; z)$ sabe-se que $\Delta = -7$; $\Delta_x = 7$; $\Delta_y = -28$; $\Delta_z = 14$ o pedido é determinar a soma:

$$S = x + y + z$$

$$\text{Sabes que } x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \text{ portanto,}$$

$$S = x + y + z = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta} + \frac{\Delta_y}{\Delta} + \frac{\Delta_z}{\Delta} \right)$$

$$S = x + y + z = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta} + \frac{\Delta_y}{\Delta} + \frac{\Delta_z}{\Delta} \right) \Leftrightarrow S = \frac{7}{-7} + \frac{-28}{-7} + \frac{14}{-7} \Leftrightarrow S = -1 + 4 + (-2) = 3 + (-2)$$

$$S = 1$$

9. Resposta:

Aqui pretendemos escolher uma opção **NÃO** verdadeira, mas essa escolha, não deve ser feita de uma forma arbitrária, mas sim sistemática:

$$A. \quad tg(90^\circ) = \infty \Leftrightarrow \frac{\sin(90^\circ)}{\cos(90^\circ)} = \infty \Leftrightarrow \frac{1}{0} = \infty \text{ Opção verdadeira;}$$

$$B. \quad \sin(0^\circ) = 1 \Leftrightarrow 0 = 1 \text{ Opção NÃO verdadeira, logo a resposta não verdadeira é B.}$$

10. Resposta:

Qual é o valor de $tg(1845^\circ)$?

O arco 1845° é do primeiro quadrante e no primeiro quadrante tangente é positiva,

$$tg(1845^\circ) = tg(1845^\circ - 5 \times 360^\circ) = tg(1845^\circ - 1800^\circ) = tg(45^\circ) = 1$$

11. Resposta:

A condição para que $|-2x + 1| = 2x - 1$. Pela definição do módulo de um número real



tomados p a p , é dado por:

$$P_n = n! \text{ ou}$$

$$P_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$$

$$n \equiv p$$

$$p_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$p_4 = 24$$

Aranjos Simples

Aranjos simples de n elementos tomados p a p é dado por:

$$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!}, n > p$$

Exemplo:

$$A_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} \Leftrightarrow A_2^4 = \frac{4!}{2!}$$

$$A_2^4 = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} \Leftrightarrow A_2^4 = 12$$

Combinação simples

Combinação simples de n elementos tomados p a p é dado por:

$$C_p^n = \frac{n!}{(n-p)! \times p!}, n > p$$

$$C_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!2!} \Leftrightarrow C_2^4 = \frac{4!}{2! \times 2!}$$

$$C_2^4 = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2 \times 1 \times 2!} \Leftrightarrow C_2^4 = \frac{12}{2}$$

$$C_2^4 = 6$$

Binómio de Newton

Binómio de Newton é uma expressão que envolve combinação simples, essa expressão é usada para desenvolver os polinómios que aparecem sob forma de binómios potenciais

$$(x+y)^n = C_0^n x^n + \dots + C_n^n y^n$$

Probabilidade

Se os acontecimentos elementares forem equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento A é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimento e o número de casos possíveis.

$$\text{temos: } |-2x+1| = \begin{cases} -2x+1, & \text{se } -2x+1 \geq 0 \\ -(-2x+1), & \text{se } -2x+1 < 0 \end{cases}$$

$$2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \leq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

12. Resposta:

Vamos determinar as raízes da equação modular $|6x-1|=17$

$$|6x-1|=17 \Leftrightarrow 6x-1=17 \vee 6x-1=-17 \Leftrightarrow 6x=17+1 \vee 6x=-17+1 \Leftrightarrow 6x=18 \vee 6x=-16$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{18}{6} \vee x = \frac{-16}{6} \Leftrightarrow x_1 = 3 \vee x_2 = -\frac{8}{3}$$

$$P = x_1 \times x_2 \Leftrightarrow P = 3 \times \left(-\frac{8}{3}\right) = -\frac{24}{3} = -8$$

13. Resposta:

O desenvolvimento de $(2x+3)^{10}$ tem $10+1$ termos que são 11 termos

14. Resposta:

Considerando U com n elementos. A cada um dos agrupamentos com p elementos, tal que $p < n$, que diferem pela ordem de colocação ou pela natureza de pelo menos um elemento damos o nome de **arranjos**.

15. Resposta:

Se na empresa há 7 trabalhadores e pretende se criar grupo de 3 trabalhadores, aqui esta bem claro que a ordem não interessa e pode se aplicar a fórmula da combinação para resolver este problema, por outro lado o número total de elementos é diferente em relação ao número de elementos no grupo.

$$C_3^7 = \frac{7!}{(7-3)! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 3!} = 35$$

16. Resposta:

$$n(S) = 10; n(\bar{C}) = 4 \Rightarrow P(\bar{C}) = \frac{n(\bar{C})}{n(S)} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

17. Resposta:

Uma sucessão a_n tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ diz se que é divergente.

18. Resposta:

O valor de $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é igual ao número de *Nepier* que é um número irracional e .

19. Resposta:

Se se $a_1 = -36$; $a_n = 209$ e $S_n = 4325$ e trata se de uma PA, então:

$$S_n = n \times \frac{a_1 + a_n}{2} \Rightarrow 4325 = n \times \frac{-36 + 209}{2} \Leftrightarrow 4325 = n \times \frac{173}{2} \Leftrightarrow 2 \times 4325 = 173n <$$

$$\Leftrightarrow 173n = 8650 \Leftrightarrow n = \frac{8650}{173} \Rightarrow n = 50$$

Foram somados 50 termos da sucessão

20. Resposta:

Dado que $a_1 \times a_3 = 81$; e o valor de a_2



$$P(A) = \frac{n(C.F)}{n(C.P)}, n(CF) \geq n(CP)$$

Limite de uma sucessão

Diz-se que uma sucessão (a_n) converge para um número real L (escreve-se $\lim a_n = L$)

Se, por muito pequeno que seja o número positivo δ se existir uma ordem p a partir da qual se tem

$|a_n - L| < \delta$, isto é, $|a_n - L|$ torna-se tão pequena quando se queira.

Uma sucessão (a_n) é uma progressão aritmética (P.A.) se existe um número real r , tal que

$$a_{n+1} - a_n = r, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ao número r chama-se diferença da progressão aritmética.

Termo geral de P.A:

$$a_n = a_1 + (n-1) \times r$$

A soma de n termos consecutivos de uma progressão aritmética é dada por:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \times r}{2} \times n$$

Progressão geométrica (P.G)

Uma sucessão (a_n) é uma progressão geométrica (P.G.) se existe um número real r , tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ao número r chama-se razão da progressão geométrica.

Termo geral de P.G:

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

A soma de n termos consecutivos de uma progressão geométrica é dada por:

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$$

Algumas operações

$$k \times \infty = \infty$$

$$\infty^k = \infty$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1} \Leftrightarrow a_1 \times a_3 = a_2 \times a_2 \Leftrightarrow 81 = a_2^2 \Leftrightarrow a_2^2 = 81 \Leftrightarrow a_2 = \pm\sqrt{81} \Leftrightarrow a_2 = \pm 9$$

Trata-se de uma PG de termos positivos, logo a solução negativa não serve: $a_2 = 9$

21. Resposta:

$$\text{Seja } a_1 = 6; a_2 = 12; a_3 = 24; \dots \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1} = q \Leftrightarrow \frac{24}{12} = \frac{12}{6} = 2 \Rightarrow q = 2$$

Trata-se de uma PG de termos positivos, com razão igual a 2. Vamos aplicar directamente a fórmula de soma de n termos de PG,

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow S_{10} = 6 \times \frac{1-2^{10}}{1-2} = 6 \times \frac{1-1024}{-1} = 6 \times \frac{-1023}{-1} = 6 \times 1023 = 6138$$

22. Resposta:

Observando o gráfico cuidadosamente, o domínio é $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

23. Resposta:

O contradomínio da função é $D'_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

24. Resposta:

A função é negativa para $x \in]-1, 0[$

25. Resposta:

A equação da assíntota horizontal é $y = 1$

26. Resposta:

Observando atentamente o gráfico, concluímos que o valor de $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$

27. Resposta

Uma função real de variável real $y = f(x)$ diz-se que é descontínua num ponto de abscissa $x = a$ se o limite dessa função nesse ponto é diferente com o valor da função no ponto $x = a$ simbolicamente fica:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$$

28. Resposta:

O valor de $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(4x)}{4}$, segue:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(4x)}{4} = \frac{\sin(4 \times \frac{\pi}{4})}{4} = \frac{\sin(\pi)}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

29. Resposta:

Vamos calcular o valor de $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{32x^5 - 6x + 11}}{x - 7}$, acompanhe os cálculos com muita

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{32x^5 - 6x + 11}}{x - 7} = \frac{\sqrt[5]{32 \times \infty^5 - 6 \times \infty + 11}}{\infty - 7} = \frac{\sqrt[5]{\infty}}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \text{ atenção:}$$

Este não é um número real.

Vamos levantar essa indeterminação redefinindo o limite:



$$\begin{aligned}\infty \times \infty &= \infty \\ k + \infty &= \infty \\ k - \infty &= -\infty \\ \frac{\infty}{k} &= \infty \\ \frac{k}{\infty} &= 0\end{aligned}$$

Limite de uma função real de variável real

Dada uma função $f(x)$ definida no domínio D_f , a , L são números reais. Diz-se, L é o limite da função $f(x)$ quando x tende para a (a não necessariamente pertencente ao domínio de $f(x)$) sse:

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

e escreve-se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Conheça alguns limites notáveis

• Limites Neperianos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{f(x)}\right)^{f(x)} = e^k$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

• Limites trigonométricos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Continuidade de funções reais variáveis reais

Uma função real de variável real é contínua num ponto de abscissa $x = a$ sse,

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Se existir a diferença entre os membros dessa igualdade, a função é descontínua no ponto de abscissa a

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{32x^5 - 6x + 11}}{x - 7} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{32x^5 - 6x + 11}{(x - 7)^5}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{x^5 \left(32 - \frac{6}{x^4} + \frac{11}{x^5}\right)}{\left(x \left(1 - \frac{7}{x}\right)\right)^5}} = \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{x^5 \left(32 - \frac{6}{x^4} + \frac{11}{x^5}\right)}{x^5 \left(1 - \frac{7}{x}\right)^5}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{\left(32 - \frac{6}{x^4} + \frac{11}{x^5}\right)}{\left(1 - \frac{7}{x}\right)^5}} = \sqrt[5]{\frac{\left(32 - \frac{6}{\infty^4} + \frac{11}{\infty^5}\right)}{\left(1 - \frac{7}{\infty}\right)^5}} = \\ \sqrt[5]{\frac{(32 - 0 + 0)}{(1 - 0)^5}} &= \\ = \sqrt[5]{\frac{32}{1}} &= \sqrt[5]{32} = 2\end{aligned}$$

30. Vamos calcular o valor de $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$, acompanhe os cálculos com muita atenção;

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} = \frac{\sqrt{2-1}-1}{2-2} = \frac{1-1}{2-2} = \left[\frac{0}{0}\right], \text{ Indeterminação. Vamos levantar essa indeterminação}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{((\sqrt{x-1})^2 - 1^2)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} = \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1-1}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} &= \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(\sqrt{x-1}+1)} = \frac{1}{(\sqrt{2-1}+1)} = \\ \frac{1}{(\sqrt{1}+1)} &= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

31. Resposta:

A fórmula correcta de cálculo da primeira derivada da função $f(x) = 4x + 1$ em $x=1$ é:

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x+1-5}{x-1} \Leftrightarrow f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x-4}{x-1}$$

32. Resposta:

Dada a função $f(x) = x^5 + 2x^3 + x$, vamos calcular a segunda derivada da função, vamos a isso caro leitor:



Cálculo diferencial

- Definição da derivada de uma função**

Dada uma função $F(x)$ definida no domínio D_F , sendo a abscissa de um ponto P , tal que $a \in D_F$. A derivada da função $F(x)$ no ponto P é dada pela expressão:

$$F'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{a-h} \quad \text{ou}$$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{x-h} = f'(x)$$

A função $f(x)$ chama-se a primeira derivada.

Regras de derivação imediata**Função constante**

$$f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0$$

Função potência

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

Função polinomial**Função composta**

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \Rightarrow$$

$$f'(x) = (a_0x^n)' + (a_1x^{n-1})' + \dots + (a_n)'$$

Derivada da soma

$$f(x) = u \pm v \Rightarrow f'(x) = u' \pm v'$$

Função afim

$$f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) = a$$

Função produto

$$f(x) = u \times v \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$$

Função quociente

$$f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Função composta

$$f(x) = u^n \Rightarrow f'(x) = nu^{n-1}u'$$

Derivada da função exponencial**Função exponencial de base e**

$$f(x) = e^u \Rightarrow f'(x) = u'e^u$$

Função exponencial de base a

$$f(x) = a^u \Rightarrow f'(x) = u'a^u \ln(a)$$

Derivada da função logarítmica**Função logarítmica de base e**

$$f'(x) = (x^5 + 2x^3 + x) \Leftrightarrow f'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 1$$

$$\Rightarrow f''(x) = (5x^4 + 6x^2 + 1)' \Leftrightarrow f''(x) = 20x^3 + 12x$$

33. Resposta:

A função não é derivável no ponto de abscissa $x = \frac{3}{2}$

34. Resposta:

A primeira derivada da função é nula no ponto de coordenadas $(0; -2)$.

35. Resposta:

A função tem primeira derivada positiva em $x \in \left]0; \frac{3}{2}\right[$

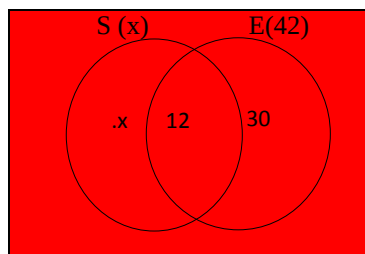
- Somente para Secção de Letras**

36. Resposta:

Se P e Q são dois conjuntos quaisquer, então o complementar da intersecção desses P e Q será igual a reunião de complementares, simbolicamente fica:

$$\overline{P \cap Q} = \overline{P} \cup \overline{Q}$$

37. Resposta ao problema:



$$n(U) = 76$$

$$n(S) = ?$$

$$\Rightarrow n(S) + n(E) + n(S \cap E) = n(U)$$

$$x + 30 + 12 = 76$$

$$x = 76 - 42 \Rightarrow x = 34$$

São 34 pessoas que tinham acesso a sai

38. Resposta:

Se rectas paralelas ao eixo das abscissas não intersectarem o gráfico de uma função

$y = f(x)$ em mais do que um ponto diz-se que a função é injectiva

39. Resposta:

De acordo com o gráfico se $x \in]2; +\infty[$ então $f(x) = 3 \Rightarrow f'(4) = 0$

40. Resposta:

Dada a função lucro semanal $f(x) = 50 - x^2$

$$f(x) = 50x - x^2 \Rightarrow f'(x) = 50 - 2x; -2x = -50 \Leftrightarrow x = \frac{-50}{-2} \Leftrightarrow x = 25$$

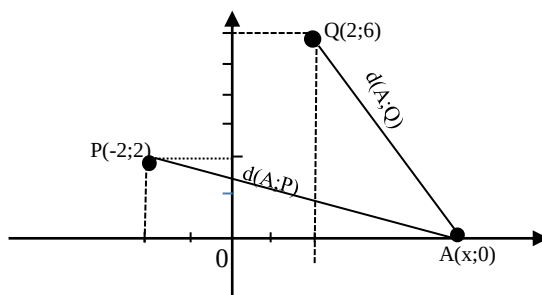
$$f(25) = 50 \times 25 - 25^2 \Leftrightarrow f(25) = 1250 - 625 = 625$$

O lucro máximo semanal é igual a 625 meticais.

- Somente para Secção de Ciências**

36. Resposta

Para resolver este problema, vamos fazer um esboço:



$$d(A; Q) = d(A; P) \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x - x_Q)^2 + (y - y_Q)^2} = \sqrt{(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2}$$

$$(x - 2)^2 + (0 - 6)^2 = (x + 2)^2 + (0 - 2)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + 36 = x^2 + 4x + 4 + 4 \Leftrightarrow$$

$$-8x = -32 \Rightarrow x = \frac{-32}{-8} \Leftrightarrow x = 4$$

O ponto procurado é $(4; 0)$



$$f(x) = \ln(u) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{u}$$

Função logarítmica de base a

$$f(x) = \log_a(a) \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{u'}{u \ln(a)}$$

Derivada da função trigonométrica

Função seno

$$f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$$

$$f(x) = \sin(u) \Rightarrow f'(x) = u' \cos(u)$$

Função co-seno

$$f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x)$$

$$f(x) = \cos(u) \Rightarrow f'(x) = -u' \sin(u)$$

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$.

- Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in]a, b[$, então f é estritamente crescente em $[a, b]$
- Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in]a, b[$, então f é estritamente decrescente em $[a, b]$

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e tem um máximo ou um mínimo em c do intervalo $]a, b[$, então $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Um elemento c do domínio de uma função f é um ponto crítico de f se então $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

É uma soma de monómios não semelhantes

Um polinómio de uma variável tem a seguinte fórmula geral:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

Onde

37. Resposta:

Dado os pontos $P\left(\frac{1}{2}; k\right); Q\left(\frac{2}{3}; 0\right) \wedge R(-1; 6)$ para que estes três pontos sejam colineares devem pertencer a uma mesma recta.

Vamos determinar uma equação da recta que passa pelos pontos Q e R, $y = mx + b$

$$m = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{6-0}{-1-\frac{2}{3}} \Leftrightarrow m = \frac{6}{-\frac{5}{3}} = -\frac{18}{5} \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y = -\frac{18}{5}\left(x - \frac{2}{3}\right)$$

$$y = -\frac{18}{5}x + \frac{12}{5} \rightarrow x = \frac{1}{2} \wedge y = k \Rightarrow k = -\frac{18}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{12}{5} \Leftrightarrow k = -\frac{9}{5} + \frac{12}{5} \Leftrightarrow k = \frac{3}{5}$$

Para que os três pontos sejam colineares, o valor de k deve ser igual a $\frac{3}{5}$

38. Resposta:

Considerando a função $f(x) = k \sin x + p$ cujo $D'_f = [2; 4]$

Consideremos a função $y = \sin x$, o contradomínio dessa função é $D'_y = [-1; 1]$

Vamos considerar a função $y_1 = k \sin(x)$, o gráfico dessa função obtém se a partir do gráfico da função

$y = \sin x$, onde a ordenada de cada ponto vai ser multiplicado por k unidades e o contradomínio passa a ser: $D'_{y_1} = [-1 \times k; 1 \times k] \Leftrightarrow D'_{y_1} = [-k; k] \Leftrightarrow$

Já o gráfico o gráfico de $f(x) = k \sin x + p$, é obtido a partir do gráfico da função $y_1 = k \sin(x)$, onde cada valor da ordenada será adicionada p unidades e o contradomínio passa ser: $D'_f = [-k + p; k + p]$

No enunciado já adiantaram que o contradomínio da função $f(x) = k \sin x + p$ é $D'_f = [2; 4]$, portanto vamos igualar os dois contradomínios equivalentes:

$$D'_f = [-k + p; k + p] = [2; 4] \Rightarrow \begin{cases} -k + p = 2 \\ k + p = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -k + p = 2 \\ 2p = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -k + p = 2 \\ p = \frac{6}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -k + 3 = 2 \\ p = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ p = 3 \end{cases}$$

39. Resposta:

Vamos determinar a função inversa da função $f(x) = \log_3(x + 2)$ vamos aplicar directamente a definição do logaritmo:

$$f(x) = \log_3(x + 2) \Leftrightarrow x + 2 = 3^{f(x)} \Leftrightarrow x = 3^{f(x)} - 2 \Leftrightarrow f^{-1}(x) = 3^x - 2$$

40. Resposta

Dado o número complexo $Z = 1 - (k - 5)i$. Para que Z represente um número real puro, $k - 5$ deve ser nulo, $(k - 5) = 0 \Leftrightarrow k = 0 + 5 \Leftrightarrow k = 5$

FIM

