Ministerio de Educación

Gobierno de Chile

CHILE LO HACEMOS TODOS

PACE

PROGRAMA DE ACOMPAÑAMIENTO Y ACCESO EFECTIVO A LA EDUCACIÓN SUPERIOR

Manual de Álgebra

Unidad de Acompañamiento y Acceso a la Universidad

UCSC

TABLA DE CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN

En el presente manual se hace entrega de diversos problemas matemáticos con el objetivo de contribuir al desarrollo de los aprendizajes de estudiantes de primer año promoción 2019, pertenecientes a las carreras de Ingeniería civil, Ingeniería civil industrial, Ingeniería civil eléctrica, Ingeniería civil informática, Ingeniería comercial, Contador auditor y Pedagogía en Educación Medía en Matemática en los ramos de Ālgebra, Cálculo e Introducción al Análisis, por ende se detalla con precisión cada procedimiento inmerso en la resolución de un problema y los contenidos que el educando debe saber para dar solución a las interrogantes planteadas.

¿POR QUÉ ESTUDIAR EL ÁLGEBRA?

Porque es una rama de la matemática que desarrolla habilidades transcendentales en los estudiantes, permitiendo que éstos modelen algebraicamente distintas situaciones de la vida cotidiana, con el objetivo de encontrar soluciones que mejoren la calidad de vida de una sociedad. Por otro lado, desarrolla la creatividad, el pensamiento crítico y reflexivo, promueve la innovación, desarrolla el razonamiento deductivo y amplía la perspectiva del estudiante hacia su entorno que lo rodea, impulsándolo a indagar en más conocimiento, para comprender los acontecimientos físicos que ocurren en el mundo.

Software de Apoyo

¿Has usado alguna vez una herramienta que te ayude a resolver tus ejercicios?
En internet existe una gran cantidad de opciones y una de ellas es:

GeoGebra

Escanéa el código QR para
visitar el sitio web

¡Te invito a descubrir sus prestaciones! Y claro, a buscar otras opciones hasta que elijas la que más te acomode.

CONCEPTOS FUNDAMENTALES DEL ÁLGEBRA

En Aritmética las cantidades se representan por números que representan valores determinados, por ejemplo el número 5 representa el valor de cinco y si queremos expresar otra cantidad deberemos escoger un número distinto de 5.
A diferencia de la Aritmética, en Álgebra las cantidades se estudian de forma general, utilizando cantidades representadas por símbolos que no solo son los números si no que otros como las letras del alfabeto que pueden representar cualquier valor único.
Una letra representa cualquier valor porque dicho símbolo asumirá el valor que nosotros le asignemos, y es único porque dentro de un mismo problema esa letra no puede representar otro valor distinto al que le hemos asignado.
La gama de problemas que pueden resolverse a través del álgebra es extensa y para enfrentar un problema se requiere transformar la situación a expresiones algebraicas que contienen símbolos y signos.

Símbolos

Números
Se emplean para representar cantidades conocidas y determinadas por su propio valor.
Letras
Se emplean para representar todo tipo de cantidades, ya sea conocidas o desconocidas.
Cantidades conocidas
Suelen estar representadas por las primeras letras del alfabeto (a, b, c, ...).
Cantidades desconocidas
Suelen estar representadas por las últimas letras del alfabeto (..., w, x, y, z).

TIP
Una misma letra puede representar distintas cantidades solo si se escribe de forma diferente por ejemplo agregando súper índices ($a' \neq a''$) o sub índices ($a_1 \neq a_2$).

Signos
Los signos se agrupan en tres clases:

Signos de operación:
Las operaciones son las mismas que conocemos de la aritmética, ellas y sus respectivos símbolos son:
Adición o Suma: $+$
Sustracción o Resta: $-$
Multiplicación o producto: $\cdot$ ó x
División: $\div$ ó $/$
Potencias: a^n donde a es la base y n es el exponente de la potencia.
Raíces: $\sqrt[n]{a}$ donde a es la base y n es el exponente de la raíz, el signo $\sqrt{}$ es el radical.
Signos de relación
Se emplean para indicar la relación que hay entre dos cantidades
$=$: Igualdad
$>$: Mayor estricto
$\geq$: Mayor ó igual que
$<$: Menor estricto
$\leq$: Menor ó igual que

Signos de agrupación

Se refiere a la variedad de paréntesis ( ),[ ],{ }, entre otros, y se emplean para indicar que la operación entre ellos debe efectuarse en primer lugar.

Ahora que ya hemos definido los símbolos y signos del álgebra podemos definir un término algebraico y luego una expresión algebraica y sus respectivas clasificaciones.

Término algebraico

Un término algebraico consta de un símbolo o varios símbolos que no están separados entre sí por los signos de adición o sustracción.

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{c} a \\ -3b \\ 2xy^2 \\ \dfrac{4a}{3x} \end{array}\right\} \textit{Son términos algebraicos}$$

Un término algebraico se compone de su signo, coeficiente, su parte literal y su grado.

- El signo de un término algebraico es positivo o negativo, cuando es positivo generalmente se omite escribir el signo.
- El coeficiente de un término algebraico es la cantidad numérica.
- La parte literal de un término algebraico corresponde a sus letras incluyendo sus exponentes.
- El grado de un término algebraico puede ser absoluto (suma de los exponentes de todos los factores de su parte literal) o bien relativo, es decir, con respecto a cada factor literal.

Ejemplo:

Para el término algebraico $2xy^2$ determine sus componentes:

Signo: Positivo

Coeficiente: 2

Parte literal: xy^2

Grado Absoluto: $1 + 2 = 3$

Grado relativo a x: 1

Grado relativo a y: 2

Expresión algebraica

Una expresión algebraica es un término algebraico (monomio) o bien la suma o resta de dos o más de ellos (polinomio).

Dependiendo de la cantidad de términos los polinomios reciben algunos nombres especiales, así si un polinomio se compone de la suma o resta de dos monomios entonces se le llama binomio, si se compone de tres términos sumados y/o restados entonces se le llama trinomio. Si se compone de la suma y/o resta de cuatro o más términos entonces se le llama genéricamente polinomio.

Ejemplo:

$2a$ *es un monomio*

$2xy^2 + z$ *es un binomio*

$\frac{4a}{3x} - 2y + w$ *es un trinomio*

$2xy^2 + z + 2b + 1$ *es un polinomio*

El grado absoluto de un polinomio corresponde al grado de su término de mayor grado, mientras que el grado relativo a una letra es el mayor exponente de la letra en el polinomio.

Ejemplo:
Sea el polinomio $ax^4-5x^3+x^2-3x$ determine su grado absoluto y relativo a sus factores literales
Grado absoluto: 5
Grado relativo a x: 4
Grado relativo a a: 1

Términos semejantes

Dos o más términos son semejantes cuando tienen igual parte literal (incluyendo sus exponentes).

Reducción de términos semejantes

La reducción de términos semejantes es una operación que tiene por objetivo convertir en un solo término dos o más términos semejantes.

Ejemplo:
Reconocer Términos Semejantes:

Término algebraico 1	Término algebraico 2	¿Término 1 y término 2 son semejantes?
2a	a	Si
-2x	7x	Si
$-5a^3 b^2$	$10a^3 b^2$	Si
$3ax^3$	$3ax^4$	No

Ejemplos

Reducir términos semejantes

a) $2a+5a=7a$

b) $-2a+5a=3a$

c) $\frac{1}{2}ab+\frac{2}{3}ab+b=\frac{7}{6}ab+b$

d) $-m-3m-6m+5m=-5m$

e) $3a^{(x-2)}+5a^{(x-2)}-a^{(x-3)}+2a^{(x-3)}+yz^2+yz=8a^{(x-2)}+a^{(x-3)}+yz^2+yz$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Reduce, si es posible, los siguientes polinomios:

a) $(a^2 -3a)-(3a + a^2)$

b) $x^3 + y^2 - (3x^3 - 2y^2) + (y^2 - x^3) - (4y^2 - 6x^3)$

c) $a^2 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{3}$

d) $7a - \left(\frac{3a}{4} - \frac{1}{2}(a-2) + \frac{a}{2}\right)$

Propiedades de los Reales

A partir del estudio de las operaciones en los conjuntos $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$, concluimos que las sustracciones se pueden considerar como adiciones y las divisiones como multiplicaciones y, por lo tanto, + y · son las operaciones relevantes en dichos conjuntos. Ahora, si dotamos al conjunto R de estas mismas operaciones, formamos una estructura algebraica que, en este caso, recibe el nombre de Cuerpo. Este nombre indica que la estructura ($\mathbb{R}$, + , ·) cumple varias propiedades que son las que nos permiten usar el álgebra como una herramienta eficaz.

TIP

Considerando la existencia de los números negativos (conjunto $\mathbb{Z}$) podemos representar una sustracción como una adición.

Ejemplo

$5-7=-2$ Se puede reescribir $5 + (-7) = -2$
$8-4=4$ Se puede reescribir $8 + (-4) = 4$

TIP

En cuanto a la división, esta puede considerarse una multiplicación gracias al conjunto de los números Racionales ($\mathbb{Q}$) y también con el uso de las potencias.

Ejemplo $\frac{5}{2}$ Puede reescribirse $5 \cdot \frac{1}{2}$ ó bien $5 \cdot 2^{(-1)}$

A continuación indicaremos simbólicamente estas propiedades:

Propiedades de la adición en $\mathbb{R}$

1. Clausura: Si $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$, entonces $(a + b) \in \mathbb{R}$
2. Asociatividad: Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces $a + (b + c) = (a + b) + c$
3. Conmutatividad: Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $a + b = b + a$
4. Elemento neutro aditivo: Si $a \in \mathbb{R}$, entonces existe un único elemento neutro aditivo, el 0, tal que $a + 0 = a$
5. Elemento inverso aditivo u opuesto. Para todo elemento $a \in \mathbb{R}$, existe un elemento $-a \in \mathbb{R}$, tal que $a + (-a) = 0$

Propiedades de la multiplicación en $\mathbb{R}$.

6. Clausura: Si $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$, entonces $ab \in \mathbb{R}$

7. Asociatividad: Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces $a(bc) = (ab)c$

8. Conmutatividad: Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $ab = ba$

9. Elemento neutro multiplicativo: Si $a \in \mathbb{R}$, entonces existe un único elemento neutro multiplicativo, el 1, tal que $a \cdot 1 = a$

10. Elemento inverso multiplicativo o recíproco: Para cada elemento $a^{-1} \in \mathbb{R}$, menos para el 0, existe un elemento $a \cdot a^{-1} \in \mathbb{R}$, tal que . El elemento a^{-1} también se suele escribir $\frac{1}{a}$.

Para la adición y la multiplicación en $\mathbb{R}$.

11. Distributividad :Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces $a(b + c) = ab + ac$

Operatoria con polinomios

Adición (y sustracción) de polinomios

La adición y sustracción o suma y resta respectivamente de monomios a sido ejemplificada en la reducción de términos semejantes y su operatoria es extensible a polimonios como se ejemplifica en los siguientes ejercicios resueltos.

Ejemplos

Sean los siguientes polinomios

Polinomio 1: $a^3b-b^4+ab^3+5a^2+b^2$

Polinomio 2: $-2a^2\,b2+4ab^3+2b^4$

a) Sumar los polinomios:

$(a^3\,b-b^4+ab^3+5a^2\,b^2)+(-2a^2\,b^2+4ab^3+2b^4\,)$

$=a^3\,b-b^4+ab^3+5a^2\,b^2-2a^2\,b^2+4ab^3+2b^4$

$=a^3\,b+5a^2\,b^2-2a^2\,b^2+4ab^3+ab^3+2b^4-b^4$

$=a^3\,b+3a^2\,b^2+5ab^3+b^4$

b) Restar del Polinomio 1 el polinomio 2:

$a^3b-b^4+ab^3+5a^2\,b^2-(-2a^2\,b^2+4ab^3+2b^4)$

$=a^3\,b-b^4+ab^3+5a^2\,b^2+2a^2\,b^2-4ab^3-2b^4$

$=a^3\,b+5a^2\,b^2+2a^2\,b^2-4ab^3+ab^3-2b^4-b^4$

$=a^3\,b+7a^2\,b^2-3ab^3-3b^4$

Multiplicación

Para hallar el producto de dos polinomios usamos las propiedades distributivas, ley de los signos, las leyes de los exponentes y la reducción de términos semejantes, como se muestra en el ejemplo que sigue.

Ejemplo

Sean los siguientes polinomios

Polinomio 1: x^3+3x-1
Polinomio 2: $2x^2-4x+5$

Calculamos el producto aplicando las propiedades distributivas y luego efectuamos el producto de monomios y la reducción de términos semejantes expresando el resultado final, que es otro polinomio, con sus términos ordenados de mayor a menor grado.

$$
\begin{aligned}
&=(x^3+3x-1)(2x^2-4x+5)\\
&=(x^3+3x-1)(2x^2)+(x^3+3x-1)(-4x)+(x^3+3x-1)(5)\\
&=(x^3)(2x^2)+(3x)(2x^2)+(-1)(2x^2)+(x^3)(-4x)+(3x)(-4x)\\
&\qquad+(-1)(-4x)+(x^3)(5)+(3x)(5)+(-1)(5)\\
&=2x^5+6x^3-2x^2-4x^4-12x^2+4x+5x^3+15x-5\\
&=2x^5-4x^4+11x^3-14x^2+19x-5
\end{aligned}
$$

Productos notables

Ciertos productos de binomios se presentan con tanta frecuencia que debe aprender a reconocerlos, estos son multiplicaciones de expresiones algebraicas fácilmente reconocibles y que para determinar su desarrollo basta con aplicar una fórmula general conocida.

Cuadrado de binomio

Corresponde a la expresión $(x+y)^2$ ó $(x-y)^2$ que representa el producto $(x+y)(x+y)$ ó $(x-y)(x-y)$ respectivamente.
Determinemos la fórmula general de su desarrollo.

$$
\begin{aligned}
(x+y)^2 &= (x+y)(x+y) && \text{aplicando distributividad}\\
&= (x+y)x+(x+y)y && \text{distribuyendo otra vez}\\
&= xx+xy+xy+yy && \text{y reduciendo}\\
&= x^2+2xy+y^2 && \text{que es la fórmula buscada.}
\end{aligned}
$$

Para el binomio $(x-y)^2$, su fórmula de desarrollo es $x^2-2xy+y^2$.
Luego, en general podemos anotar:

$$\boxed{(x\pm y)^2=x^2\pm 2xy+y^2}$$

Ejemplos

a) $(3a + 4)^2 = (3a)^2 + 2\cdot 3a\cdot 4 + 4^2$
$= 9a^2 + 24a + 16$

b) $(a - 3b)^2 = a^2 - 2\text{-}a\text{-}3b + (3b)^2$
$= a^2 - 6ab + 9b^2$

Suma por su diferencia

Corresponde al producto de dos binomios con los mismos términos, pero en un caso se suman y en el otro se restan.

Es decir:

$$(x + y)(x - y)$$

Para determinar la fórmula de desarrollo de este producto, aplicamos sucesivamente la propiedad distributiva.

$$\begin{aligned}(x + y)(x - y) &= (x + y)x - (x + y)y \\ &= xx + yx - (xy + yy) \\ &= x^2 + yx - xy - y^2 \\ &= x^2 + 0 - y^2\end{aligned}$$

Luego su resultado es:

$$\boxed{(x+y)(x-y)=x^2-y^2}$$

Ejemplos

a) $(3a + 2b)(3a - 2b) = (3a)^2 - (2b)^2$
$= 9a^2 - 4b^2$

b) $(a^2 + 8)(a^2 - 8) = (a2)^2 - 8^2$
$= a^4 - 64$

Producto de binomios con un término común

Corresponde a la multiplicación de dos binomios donde uno de los términos se repite en ambos. Su forma general es:

$$(x + a)(x + b)$$

Determinemos la fórmula de desarrollo empleando el mismo procedimiento de los casos anteriores.

$$\begin{aligned}(x + a)(x + b) &= (x + a)x + (x + a)b \\ &= xx + ax + xb + ab\end{aligned}$$

Y reduciendo términos semejantes se llega a:

$$\boxed{(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab}$$

Ejemplos

a) $(x + 4)(x + 9) = x^2 + (4 + 9)x + 4\cdot 9$
$= x^2 + 13x + 36$

b) $(2x + 5)(2x - 2) = (2x)\ 2 + (5 - 2)\cdot 2x + 5\cdot(-2)$
$= 4x^2 + 3\cdot 2x + (-10)$
$= 4x^2 + 6x - 10$

c) $(x^2 + 3)(x^2 - 4) = (x^2)\ 2 + (3 - 4)x^2 + 3\cdot(-4)$
$= x^4 + (-x^2) + (-12)$
$= x^4 - x^2 - 12$

Cubo de binomio

Corresponde a la expresión $(x + y)^3$ ó $(x - y)^3$ que representa el producto $(x + y)(x + y)(x + y)$ ó $(x - y)(x - y)(x - y)$ respectivamente.

Encontremos su forma general:

$$\begin{aligned}(x + y)^3 &= (x + y)^2(x + y)\\ &= (x^2 + 2xy + y^2)(x + y)\\ &= (x^2 + 2xy + y^2)x + (x^2 + 2xy + y^2)y\\ &= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x2y + 2xy^2 + y^3\\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\end{aligned}$$

Para el binomio $(x - y)^3$, su fórmula de desarrollo es $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$. Luego, en general podemos anotar

$$\boxed{(x\pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3}$$

Ejemplos

a) $(a + 2)^3 = a^3 + 3a^2\cdot 2 + 3a\cdot 2^2 + 2^3$
$= a^3 + 6a^2 + 12a + 8$

b) $(b - 2)^3 = b^3 - 3b^2\cdot 2 + 3b\cdot 2^2 - 2^3$
$= b^3 - 6b^2 + 12b - 8$

c) $(2x - 3y)^3 = (2x)^3 + 3\cdot(2x)^2(3y) + 3\cdot(2x)(3y)^2 + (3y)^3$
$= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

Otros productos notables son:

Cuadrado de un trinomio

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$$

Suma y resta de cubos

$$(a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right) = a^3 + b^3$$

$$(a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right) = a^3 - b^3$$

Te invitamos a ver:

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Verifica los siguientes desarrollos, ¿A qué producto notable corresponden?

a) $(p+2b)^2 = p^2 + 2\cdot p\cdot 2b + (2b)^2 = p^2 + 4pb + 4b^2$

b) $(3m+4n)^2 = (3m)^2 + 2\cdot 3m\cdot 4n + (4n)^2 = 9m^2 + 24mn + 16n^2$

c) $(5x-y)^2 = (5x)^2 + 2\cdot 5x\cdot y + (y)^2 = 25x^2 + 10xy + y^2$

d) $\left(a^2-3\right)\left(a^2+3\right) = a^4 - 9$

Desarrolla los siguientes productos notables, ¿A cuál producto notable corresponden?

a) $(3a + x)(3a - x)$

b) $(x + 1)(1 - x)$

c) $(a + 4)(a - 4)$

d) $(x + x2)(x - x2)$

e) $\left(\frac{1}{4} + \frac{x}{3}\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{x}{3}\right)$

f) $\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$

Factorización

Factorizar un número es expresarlo como una multiplicación de dos o más factores. Por ejemplo, factorizar el 24 es expresarlo como 3·8, 2·4·3 ó 12·2. Ahora bien, factorizar un término algebraico es expresar dicho término como una multiplicación entre diversos coeficientes y/o factores literales.

Ejemplo

$$-3x^2y^3 = -1\cdot 3\cdot x\cdot x\cdot y\cdot y\cdot y$$

Sea la expresión $4x^2 - 6x$. Esta expresión no se puede reducir ya que los monomios que la componen no poseen términos semejantes, sin embargo si puede transformarse en una multiplicación factorizándola. Para eso, factoricemos previamente cada término.

$$4x^2 - 6x = 2\cdot 2\cdot x\cdot x - 2\cdot 3\cdot x$$

Ahora, notamos que se repiten un 2 y una x en los términos de este binomio, luego podemos escribir:

$$4x^2 - 6x = 2x\cdot 2x - 2x\cdot 3$$

Ahora, sacamos el factor común fuera del binomio de manera que quede multiplicando a los dos términos ya sin el factor común:

$$4x^2 - 6x = 2x\cdot(2x - 3)$$

Ejemplos

a) Factorizar:

$$\begin{aligned} 5a^2b - 15ab + 20a^2b^2 &= 5ab\cdot a - 5ab\cdot 3 + 5ab\cdot 4ab \\ &= 5ab\cdot(a - 3 + 4ab) \end{aligned}$$

b) Factorizar:

$$\begin{aligned} \frac{3x}{2} + \frac{5y}{6} &= \frac{1}{2}\cdot 3x + \frac{1}{2}\cdot\frac{5y}{3} \\ &= \frac{1}{2}\left(3x + \frac{5y}{3}\right) \end{aligned}$$

c) Factorizar: sacar factor común 1

$$\begin{aligned} ax^2 - b &= -1\cdot(-ax2) - 1\cdot b \\ &= -1(-ax2 + b) \\ &= -(b - ax2) \end{aligned}$$

Tip

Sacar factor común **–1** es un procedimiento que permite cambiar los signos de una expresión algebraica.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Factorizar las siguientes expresiones

1. $\frac{\pi r^2}{2} + 2\pi r$
2. $-2x^3 - 4x^2 - 6x$
3. $3x + 2y - 5z$

Simplificación de expresiones algebraicas

Ahora aplicaremos este mismo concepto a una fracción cuyo numerador y denominador son expresiones algebraicas.

Sea la fracción $\frac{3x^2}{6x}$. Esta fracción puede simplificarse por $3x$, porque es un divisor común del numerador y del denominador.

Dividiendo nos queda:

$$\frac{3x^2}{6x} = \frac{3x \cdot x}{3x \cdot 2} = \frac{3x}{3x} \cdot \frac{x}{2} = 1 \cdot \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$$

Es decir, factorizamos el numerador y el denominador de manera que tengamos el mismo factor. Luego se expresa este factor común como una fracción equivalente a 1 y, como el 1 es el elemento neutro multiplicativo, el factor común "se va" o "desaparece" de la fracción original.

Ejemplos

Simplificar:

a) $\frac{3a^2bc}{12ac} = \frac{3ac \cdot ab}{3ac \cdot 4} = \frac{3ac}{3ac} \cdot \frac{ab}{4} = 1 \cdot \frac{ab}{4} = \frac{ab}{4}$

b) $\frac{5x^3}{20} = \frac{5 \cdot x^3}{5 \cdot 4} = \frac{x^3}{4}$

c) $\frac{9ab^2}{3} = \frac{3 \cdot 3ab^2}{3} = 3ab^2$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Simplificar::

a) $\dfrac{9a}{18a^2b}$

b) $\dfrac{-3x^2y}{12x}$

c) $\dfrac{-2a^2}{6a^3}$

d) $\dfrac{5ab-2a}{4a}$

e) $\dfrac{5x^2-20x}{15x^3}$

Lógica

Constantemente usamos el razonamiento lógico para realizar cualquier actividad y este se emplea en matemática para demostrar teoremas, y en ciencias que usan la matemática se utiliza para sacar conclusiones, para verificar la estructura de algoritmos, etc.
La lógica proporciona reglas y técnicas para determinar si es o no válido un argumento dado.

Proposición

Es una expresión con sentido en algún lenguaje que afirma o niega algo y que nos proporciona información.
Las proposiciones en lógica se denotan por símbolos como p, q r, etc. Dichas proposiciones pueden ser compuestas usando los conectivos lógicos:

Ejemplo

Son proposiciones las siguientes afirmaciones:
- El pizarrón es blanco
- El plumón es negro

Las proposiciones del ejemplo pueden ser Verdaderas o Falsas, no aceptan ambigüedades.

Ejemplo

No son proposiciones los siguientes enunciados
- El interruptor
- $2x+1=4$
- ¿Qué hora es?

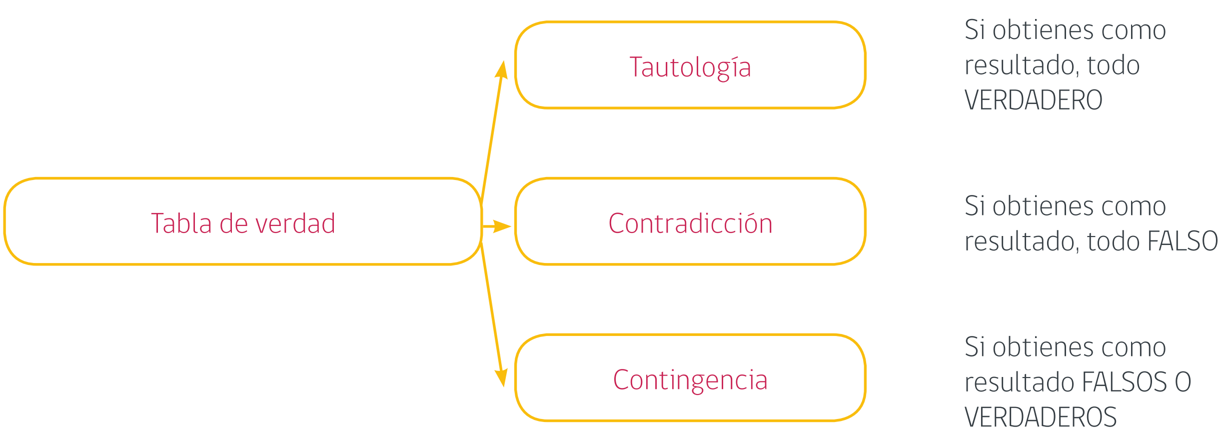
Ya que no pueden ser afirmadas o negadas.

Valor de Verdad

Es una función que define una proposición. El valor de verdad puede ser Verdadero (V) o Falso (F).
Tabla de Verdad
En la figura se detallan los posibles resultados que se pueden obtener a partir de la resolución de una tabla de la verdad.

Tabla de Verdad

En la figura se detallan los posibles resultados que se pueden obtener a partir de la resolución de una tabla de la verdad.



Ejemplo

Resultados de una tabla de verdad

a) Tautología

p	q	$(p \wedge q)$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	F	F	V
F	F	F	V

b) Contradicción

p	q	$(p \vee q)$	$\sim (p \vee q)$	$(p \vee q) \Leftrightarrow \sim (p \vee q)$
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	V	F

c) Contingencia

p	q	$(p \Leftrightarrow q)$	$\vee$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$		
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	V
F	V	F	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V

Notación de operadores en Lógica:

$\wedge$, se denomina conjunción, se lee y
$\vee$, lo llamaremos disyunción, se lee o.
$\underline{\vee}$, lo llamaremos disyunción excluyente, se lee o.... o...
$\sim$, se denomina negación, se lee no.
$\rightarrow$, se denomina condicional, se lee si..., entonces...
$\leftrightarrow$, se llama bicondicional, se lee si, y sólo si

Resultados de los operadores lógicos

Ilustración 2: Resultados de los operadores lógicos

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \underline{\vee} q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	F
F	F	F	F	F	V	V

Tip

- Debes tener en consideración el o excluyente $\underline{\vee}$, ya que como es un operador no trivial, aparece en ejercicios de evaluaciones.
- Los operadores $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$, dominan sobre los operadores $\vee$; $\wedge$.
- La cantidad de filas de la tabla de verdad se calculan a través del algoritmo 2^n, donde el 2 corresponde a las opciones verdaderas o falsas y n es la cantidad de proposiciones que se utilizarán en un ejercicio determinado.

Ejemplo

Resolver mediante una tabla de verdad: $p \land q \rightarrow q$

En este caso se realiza primero la operación $q \rightarrow q$ y luego a este resultado aplicarle la operación "$p\land$". Resolvamos, en este caso el algoritmo quedará de la siguiente forma: $2^2=4$, ya que son dos proposiciones, por ende, son 4 filas como se muestra a continuación.

p	q	$q \rightarrow q$	$p \land q \rightarrow q$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	V	F

CONTINGENCIA

Uso de paréntesis

El uso de paréntesis es un símbolo que forma parte de la lógica secuencial, el uso de ellos es lógico, sin los paréntesis las fórmulas o expresiones lógicas pueden carecer de sentido.

Ejemplo

Notar que las expresiones son claramente distintas

$$p \rightarrow (q \lor r)$$
$$(p \rightarrow q) \lor r$$

Ejemplo

Desarrolle la tabla de verdad de la siguiente proposición

$$\sim(p \wedge \sim q)$$

Primero completamos las dos primeras columnas correspondientes a las proposiciones p y q, sabemos que la cantidad de filas es igual a 4 dada la fórmula 2^n en donde n es la cantidad de proposiciones (p y q) presentes en la proposición compuesta.

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Luego agregamos la columna de la negación de q

p	q	$\sim q$
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Posteriormente incluimos una columna para el paréntesis

p	q	$\sim q$	$(p \wedge \sim q)$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

Y por último aplicamos la negación del paréntesis, en la columna correspondiente

p	q	$\sim q$	$(p \wedge \sim q)$	$\sim (p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

La última columna contiene la solución, que es una contingencia.

Tip

Estas fórmulas se utilizan para demostrar si se cumple una equivalencia de proposiciones. Se parte aplicando las propiedades a un lado de la equivalencia y se debe llegar a la proposición expuesta al otro lado de la equivalencia.

Ejemplo

Determine si $[p \rightarrow (p \wedge q)] \leftrightarrow [(\sim q \rightarrow \sim p) \veebar (p \vee q)]$ es una equivalencia lógica.

p	q	$\sim q$	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \rightarrow (p \wedge q)$	$\sim q \rightarrow \sim p$	$p \vee q$	$[(\sim q \rightarrow \sim p) \veebar (p \vee q)]$
V	V	F	F	V	V	V	V	F
V	F	V	F	F	F	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V	V	F
F	F	V	V	F	V	V	F	V

$[p \rightarrow (p \wedge q)] \leftrightarrow [(\sim q \rightarrow \sim p) \veebar (p \vee q)]$

F
F $\longrightarrow$ **Contingencia**
V
V

Como el bicondicional no es una tautología, la proposición compuesta $[p\to(p\wedge q)]\leftrightarrow[(\sim q\to\sim p)\veebar(p\vee q)]$, no es una equivalencia lógica.

Ejemplo

Sean las siguientes proposiciones:

$p:\ 3x+3y=9$

$q:\ 5x+y=7$

$r:\ 5y+x=11 \quad \text{con } x=1, y\neq 2, y \in \mathbb{R}$

Determine el valor de verdad de la siguiente proposición compuesta

$[(p\vee q)\wedge\sim r]\to\sim q$

Primero determinamos el valor de verdad de p, q, r.

$p=q=r=F$

Luego reemplazamos el valor de verdad de las proposiciones simples en la proposición compuesta:

$[(p\vee q)\wedge\sim r]\to\sim q$

$[(F\vee F)\wedge\sim F]\to\sim F$

$[(F\vee F)\wedge V]\to V$

$[(F)\wedge V]\to V$

$[F]\to V$

V

EJERCICIOS PROPUESTOS

1-Considerando las mismas proposiciones p, q, r del ejemplo anterior determine el valor de verdad de:

a) $\sim[(\sim q\to\sim p)\vee\sim r]$

b) $[\sim p\vee\sim r]\to\sim q$

2. Desarrolle las siguientes tablas de verdad

a) $(p\wedge\sim q)\to p$

b) $(\sim p\vee q)\to q$

c) $\sim(p\to q)\wedge p$

d) $(p\vee\sim q)\vee(\sim p\wedge\sim q)$

e) $\sim(p\to r)\wedge q$

f) $[\sim p\to(q\wedge r)]\leftrightarrow\sim q$

Demostraciones de proposiciones

A continuación, se presentan diversas fórmulas que cumplen las proposiciones, para realizar demostraciones de equivalencia.

Fórmulas importantes:

Ley de la doble negación:
$\sim(\sim p)\leftrightarrow p$

Leyes de Idempotencia
$p\wedge p\leftrightarrow p$
$p\vee p\leftrightarrow p$

Leyes del Complemento
$p\wedge\sim p\leftrightarrow F$
$p\vee\sim p\leftrightarrow V$

Leyes de Identidad
$p\wedge V\leftrightarrow p$
$p\vee V\leftrightarrow V$
$p\wedge F\leftrightarrow F$
$p\vee F\leftrightarrow p$

Leyes Conmutativa
$p\wedge q\leftrightarrow q\wedge p$
$p\vee q\leftrightarrow q\vee p$

Leyes Asociativa
$(p\wedge q)\wedge r\leftrightarrow p\wedge(q\wedge r)$

Negaciones importantes
$\sim(p\rightarrow q)\leftrightarrow(p\wedge\sim q)$
$\sim(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow(p\wedge\sim q)\vee(q\wedge\sim p)$

Leyes Asociativa:
$(p\vee q)\wedge r\leftrightarrow p\vee(q\vee r)$
$(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow r \quad p\leftrightarrow(q\leftrightarrow r)$

Leyes Distributiva
$p\wedge(q\vee r)\leftrightarrow(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$
$p\vee(q\wedge r)\leftrightarrow(p\vee q)\wedge(p\vee r)$

Leyes de Morgan
$(p\wedge q)\leftrightarrow\sim p\vee\sim q$
$(p\vee q)\leftrightarrow\sim p\wedge\sim q$

Leyes de Absorción
$p\wedge(p\vee q)\leftrightarrow p$
$p\vee(p\wedge q)\leftrightarrow p$

Ley del Contra-recíproco
$(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\sim q\rightarrow\sim p)$

Otras leyes
$(p\leftrightarrow q) \quad (p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$
$(p\leftrightarrow q) \quad (p\wedge q)\vee(\sim p\wedge\sim q)$
$(p\rightarrow q) \quad (\sim p\vee q)$

Ejemplo

Demuestre la siguiente proposición $(p\vee q)\rightarrow q\leftrightarrow p\rightarrow q$

Iniciamos de izquierda a derecha

$(p\vee q)\rightarrow q$	
$\sim(p\vee q)\vee q$	otras leyes $(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\sim p\vee q)$
$(\sim p\wedge\sim q)\vee q$	Leyes de Morgan $\sim(p\vee q)\leftrightarrow\sim p\wedge\sim q$
$(\sim p\vee q)\wedge(\sim q\vee q)$	Leyes Distributiva $p\vee(q\wedge r)\leftrightarrow(p\vee q)\wedge(p\vee r)$
$(\sim p\vee q)\wedge V$	Leyes del Complemento $p\vee\sim p\leftrightarrow V$
$(\sim p\vee q)$	Leyes de identidad $p\wedge V\leftrightarrow p$
$(p\rightarrow q)$	otras leyes $(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\sim p\vee q)$

Ejemplo

Simplifique la expresión $(p\vee q)\rightarrow\sim p$ e indique cada propiedad utilizada en cada paso.

$(p\vee q)\rightarrow\sim p$	
$\sim(p\vee q)\vee\sim p$	Por propiedad condicional
$(\sim p\wedge\sim q)\vee\sim p$	Por leyes de Morgan
$\sim p\vee(\sim p\wedge\sim q)$	Por propiedad conmutativa
$\sim p$	Por propiedad de absorción

$\therefore (p\vee q)\rightarrow\sim p\leftrightarrow\sim p$

Cuantificadores Lógicos

Existen tres tipos de cuantificadores típicos, que se presentan a continuación:

Cuantificador universal

Nos indica que una función proposicional es verdadera para todos los elementos de un conjunto y se denota por $\forall$

Cuantificador existencial

Nos indica que una función proposicional es verdadera para algunos elementos de un conjunto y se denota por $\exists$.

Cuantificador existencia y unicidad

Nos indica que una función proposicional es verdadera para un único elemento de un conjunto y se denota por $\exists!$

Negaciones de proposiciones con cuantificadores

$\sim(\forall x\in A:p(x))\leftrightarrow\exists x\in A:\sim p(x)$

$\sim(\exists x\in A:p(x))\leftrightarrow\forall x\in A:\sim p(x)$

$\sim(\exists! x\in A:p(x))\leftrightarrow(\forall x\in A:\sim p(x))\vee(\exists x,y\in A:(p(x)\wedge p(y))\wedge x\neq y)$

Ejemplo

Escriba la negación de la proposición:

$(\exists\ x\in A)\ (\forall\ y\in B)\ [\ (\ (\ p(x)\wedge q(x)\ )\vee r(y))\rightarrow(x,y)\in AXB]$

Luego:

$\sim(\ (\ \exists\ x\in A\ )\ (\ \forall\ y\in B\ )\ [\ (\ (\ p(x)\wedge q(x)\ )\vee r(y)\ )\rightarrow(x,y)\in A\ X\ B])$

$\Leftrightarrow(\forall x\in A)\ (\exists y\in B)\ [\ (\ (p(x)\wedge q(x)\ )\vee r\ (y)\ )\wedge(x,y)\notin A\ X\ B]$

Ejemplo

Escriba la negación de “cada número real positivo tiene un inverso multiplicativo”.
Sea el universo el conjunto de todos los números reales; el enunciado puede representarse por:
$\forall x, x>0 \Rightarrow \exists y, xy=1$

Su negación es:
$\sim(\forall x, x>0 \Rightarrow \exists y, xy=1)$

Lo cual resulta en
$\exists x, \sim(x>0 \Rightarrow \exists y, xy=1)$

Esta última se lee: Existe un número positivo x para el que no hay inverso multiplicativo.

EJERCICIOS PROPUESTOS

a) Niegue la proposición: $(\sim p \rightarrow q \wedge r)$

b) Considere el conjunto $C=\{8,9,10\}$ y la proposición:
$\forall x \in C: \exists y \in C, x-y<0$,
Determine el valor de verdad de la proposición.

c) Niegue la proposición $\forall x \in C: \exists y \in C, x-y<0$

Tip

Es importante mencionar que en este ejercicio no sólo se realizó la negación de los cuantificadores, también se aprecia la negación de una proposición lógica, ya que se niega un condicional $\longrightarrow$, obteniendo como resultado $\wedge$.

Te invitamos a ver:

Teoría de conjuntos

Un conjunto es una colección de objetos que está bien definido y se denotan por letras mayúsculas. Cada objeto de un conjunto se llama elemento.

Ejemplo:

Son conjuntos:

A = {Los alumnos de la carrera de pedagogía en matemáticas de la UCSC}

B = {a, e, i, o, u}

C= {Los números naturales mayores a 5 y menores que 10 }

Si un elemento pertenece a un conjunto se denota con el símbolo $\in$ y si no pertenece se usa el símbolo $\notin$.

Ejemplo:

Denotación de pertenencia

Sea el conjunto B tal que $B = \{a, e, i, o, u\}$

$a \in B$

$j \notin B$

Formas de escribir un conjunto

Usualmente un conjunto se escribe de dos maneras:

Por Comprensión: En esta forma se escribe una característica de los elementos

Por Extensión: Escritura en la cual los elementos se identifican.

Ejemplo

Conjunto C expresado por compresión:

C= {Los números naturales mayores a 5 y menores que 10 }

Conjunto C expresado por extensión:

$C = \{6, 7, 8, 9\}$

O bien

$C = \{n \,/\, 5<n<10\}$

EJERCICIO PROPUESTO

Escribir por extensión los siguientes conjuntos

$A = \{x \,/\, x$ es una vocal de la palabra “ambiguo”$\}$

$B = \{x \,/\, x$ es una vocal de la palabra “amapola”$\}$

Tipos de conjuntos

Conjunto Vacío

Conjunto Vacío este conjunto es aquel que no tiene elementos. Se simboliza por $\emptyset$ ó $\{\}$.

Ejemplo

Conjunto Vacío: conjunto de canciones rancheras interpretadas por el grupo Metallica.

Conjunto Universo

Conjunto Universo Es el conjunto que contiene todos los elementos a los cuales pudiéramos hacer referencia en un momento dado, estos pueden ser infinitos o finitos.
Ejemplo

El conjunto de alumnos de un curso es finito
El conjunto de los números reales es infinito

Conjuntos Disjuntos

Son aquellos conjuntos que no tienen ningún elemento en común
Ejemplo
El conjunto de alumnos aprobados en Algebra es un conjunto disjunto con el de los alumnos reprobados.

Tip

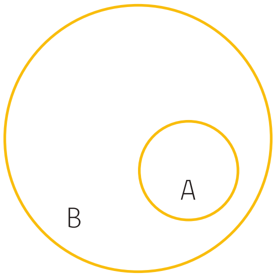
Conjuntos de alta importancia son los conjuntos numéricos, a saber los Naturales, Cardinales, Enteros, Racionales, Irracionales, Reales, Complejos.

Conjuntos iguales

Decimos que dos conjuntos A y B son iguales si tienen los mismos elementos, no importa el orden de éstos. La igualdad se representa por A = B .

Subconjuntos

Decimos que A es subconjunto de B si cada elemento del conjunto A es también un elemento del conjunto B, es decir, A está contenido en B, simbolizándose por $\subset$



$A \subset B$

Operaciones con conjuntos

Consideremos dos conjuntos cualquieras, a los cuales llamaremos A y B .

Unión de conjuntos

La Unión de los conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos de A o B o ambos.
La unión de A y B se representa simbólicamente por $A \cup B$, simbólicamente se escribe:

$$A \cup B = \{ x / x \in A \vee x \in B \}$$

Los siguientes diagramas de Venn muestran gráficamente, que lo achurado representa en cada caso la unión de A y B.

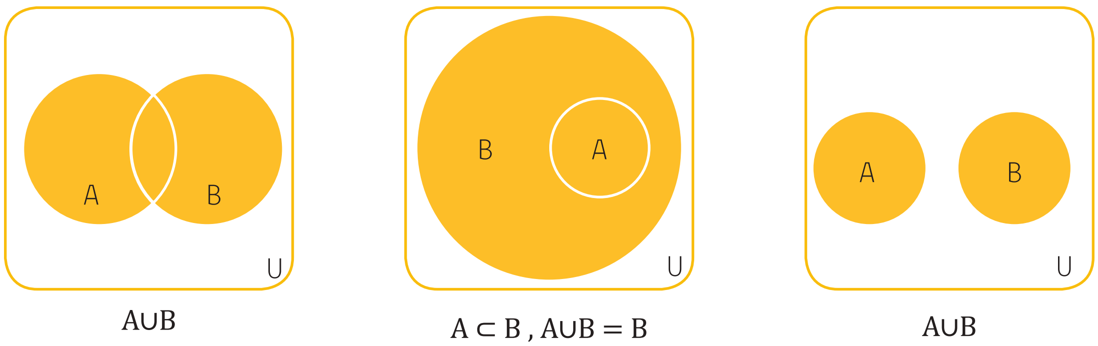


Ilustración 4 Diagramas de Venn unión de conjuntos

Intersección de conjuntos

La Intersección de los conjuntos A y B se define como el conjunto formado sólo por los elementos que tienen en común A y B.
La intersección se representa por $\mathbf{A \cap B}$, simbólicamente se escribe:

$$A \cap B = \{ x / x \in A \wedge x \in B \}$$

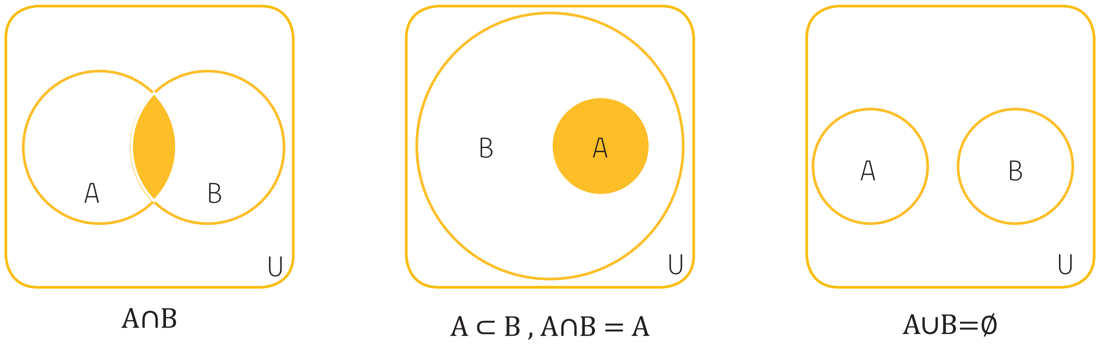
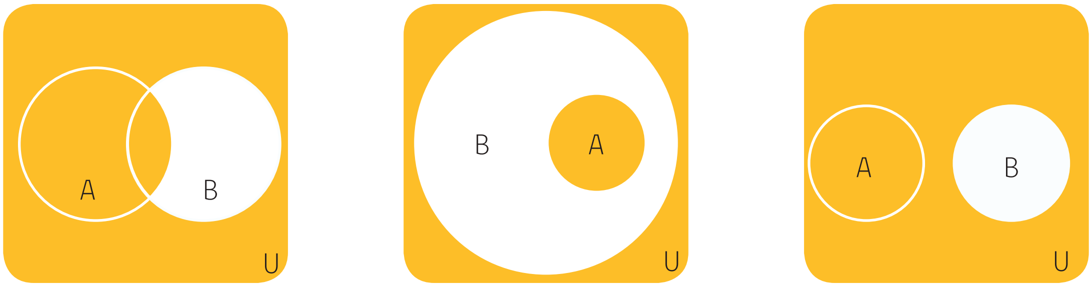


Ilustración 5 Diagramas de Venn intersección de conjuntos

Complemento de un conjunto

Se define Complemento de un conjunto de la siguiente forma: sea A un conjunto cualquiera, el complemento de A son todos aquellos elementos que están en el Universo, pero que no están en A. Simbólicamente, se representa por A^c ó $A`$

$$A^c = \{ x \in U / x \notin A \}$$



A^C $\quad$ A^C $\quad$ A^C

Ilustración 6 Diagramas de Venn complemento de conjuntos

Diferencia de conjuntos

La Diferencia entre dos conjuntos A y B, la cual se denota por A - B, es el conjunto formado por todos lo elementos que están en A y no están en B.
La Diferencia entre B y A la cual se denota por B - A es el conjunto formado por todos los elementos que están en B y no están en A.

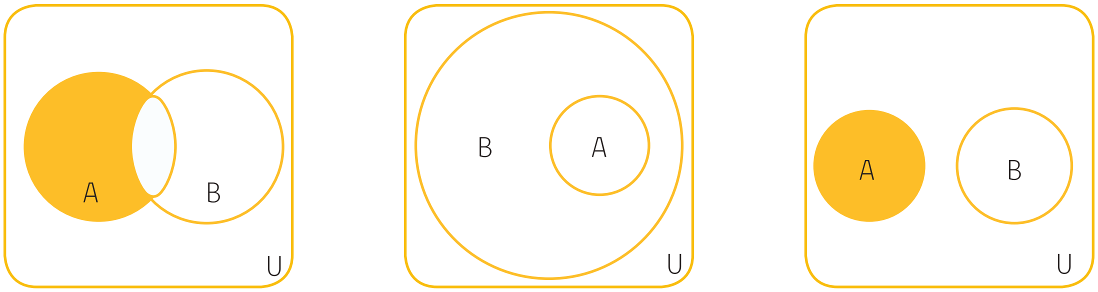
Tip

$A - B \neq B - A$

Ejemplo

Dados los conjuntos
$A = \{1,2,3\}$
$B = \{2,4,6\}$
Calculemos la diferencia de conjuntos
$A - B = \{1,3\}$
$B - A = \{4,6\}$
En el ejemplo anterior se verifica que efectivamente $A - B \neq B - A$
Luego la diferencia se puede expresar

$$A - B = \{ x \in A \wedge x \notin B \}$$

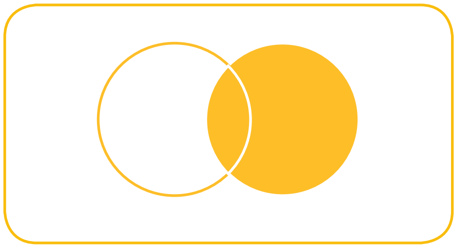


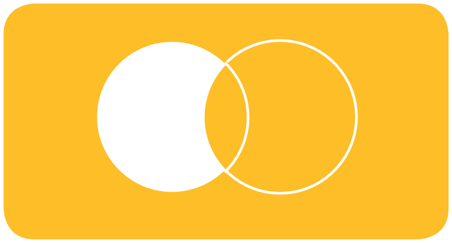
$A - B$ $\quad$ $A - B = \emptyset$ $\quad$ $A - B = A$

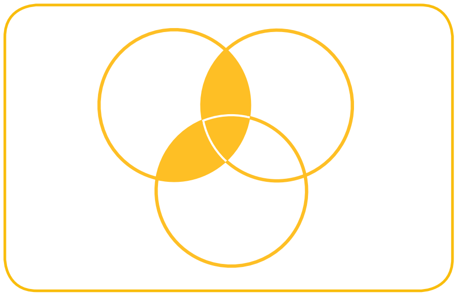
EJERCICIOS PROPUESTOS

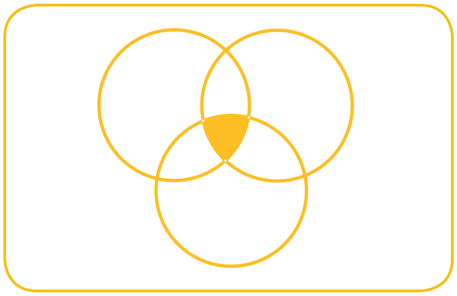
1. Indique en cada caso lo que se achuró

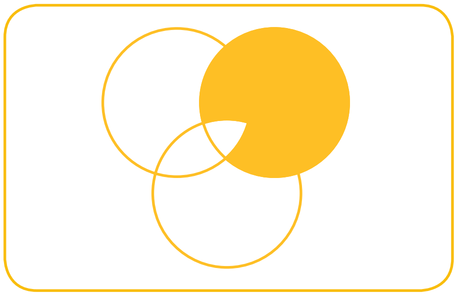
Te invitamos a ver:











2. Achure en el siguiente diagrama de Venn lo que se solicita

a) $(A\text{-}C)\text{-}B$
b) $(A \cup B)^2$
c) $A - (B \cap C)^2$
d) $A^c - (B \cap A)^c$
e) $(A \cap B)^c - (C \cap B)$
f) $B \cup (A - C^c)$
g) $(A \cap B \cap C) - A$

Propiedades para resolver problemas en contextos cotidianos

Sean A, B y C tres conjuntos arbitrarios. Definimos la inclusión y la igualdad entre conjuntos, respectivamente, como sigue:

$A \subseteq B \leftrightarrow (\forall x \in U)(x \in A \rightarrow x \in B)$
$A = B \leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$
$A = A$
$(A = B \text{ y } B = C) \rightarrow A = C$
$(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \rightarrow A \subseteq C$
$\emptyset \subseteq A$
$A \cup B = (x \in A \vee x \in B)$
$A \cap B = (x \in A \wedge x \in B)$

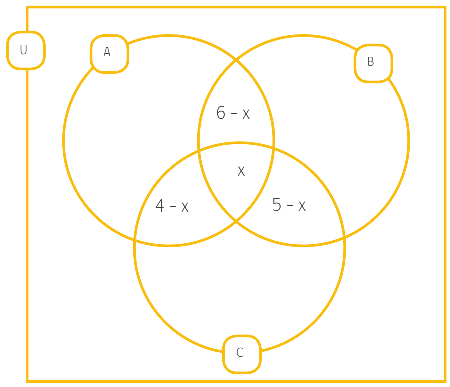
$A \triangle B = \{x \in U : x \in A (\underline{\vee}) \quad x \in B\}$
$A x B = \{(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}$

Ejemplo

En el Mall plaza el trébol Talcahuano se ofrecen 29 puestos de trabajo, 13 deben ser promotores, 13 vendedores y 15 cajeros. De éstos 6 tienen que ser promotores y vendedores, 4 vendedores y cajeros, y 5 promotores y cajeros. ¿Cuántos tienen que ser las tres cosas a la vez? ¿A cuántas personas que sólo tengan el oficio de promotor se les puede ofrecer empleo?

Solución:

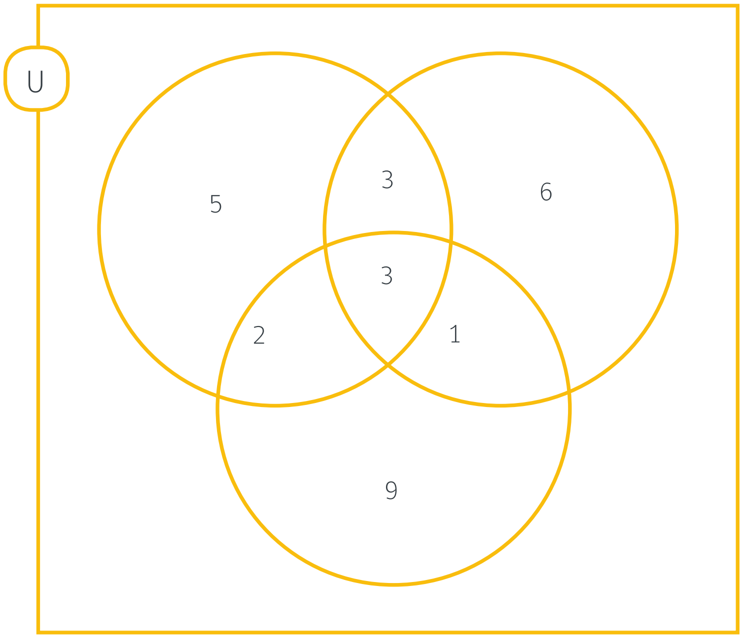
Sea A=promotores ;B=vendedores y C=cajeros, se tiene que:



$|A|=13$
$|B|=13$
$|C|=15$
$|U|=29$
$|A\cap B|=6$
$|A\cap C|=5$
$|B\cap C|=4$
$|A\cap B\cap C|=x$

Como en total se ofrecen 29 puestos de trabajo, se aplica la siguiente fórmula de la teoría de conjunto.
$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

Reemplazando:
$29=13+13+15-6-5-4+x$
$29=26+x$
$x=3$



Respuestas:
3 personas deben cumplir la labor de promotor, vendedor y cajero. A 5 personas se les debe contratar solamente como promotor.

Ejemplo:

Recientemente los estudiantes de la UCSC están empleando el uso de tecnologías para complementar su aprendizaje. Se realizó una encuesta sobre el tipo de aparato tecnológico que prefieren, los resultados fueron los siguientes: 60 prefieren notebook, 25 prefieren tablet, 10 prefieren smartphone, 2 prefieren los tres aparatos, 10 prefieren notebook y tablet, 4 prefieren tablet y smartphone, 4 ninguno, 70 no prefieren smartphone. ¿Cuántos prefieren notebook y smartphone, pero no Tablet?

Solución:

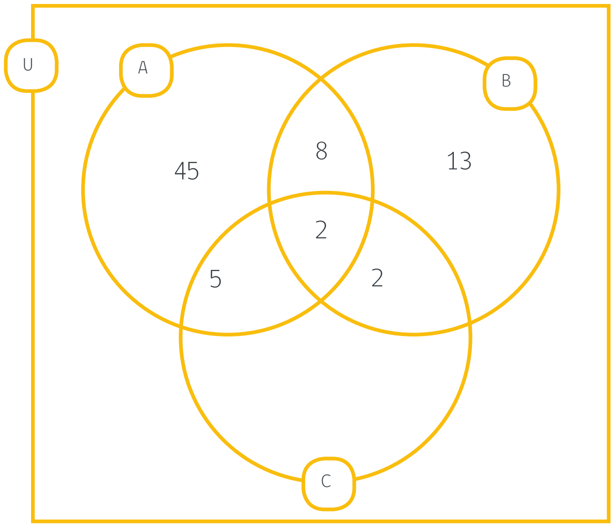
Sea U={Estudiantes de la UCSC}
A= {Estudiante que prefieren notebook}
B= {Estudiantes que prefieren tablet}
C= {Estudiantes que prefieren smarphone}

$\lvert A\rvert=60$	$\lvert A\cap B\rvert=10$
$\lvert B\rvert=25$	$\lvert B\cap C\rvert=4$
$\lvert C\rvert=10$	$\lvert A\cup B\cup C\rvert^c=4$
$\lvert A\cap B\cap C\rvert=2$	$\lvert C\rvert^c=70$

Según los datos presentados el diagrama de Venn queda de la siguiente manera:
Ahora como nos dicen que hay 70 estudiantes que no prefieren smartphone, debemos restarle a este valor los 8 estudiantes que solamente prefieren notebook y tablet, los 13 estudiantes que solamente prefieren tablet y los 4 estudiantes que no utilizan ninguna de estas tecnologías, tal como se muestra a continuación:

70-8-13-4=45

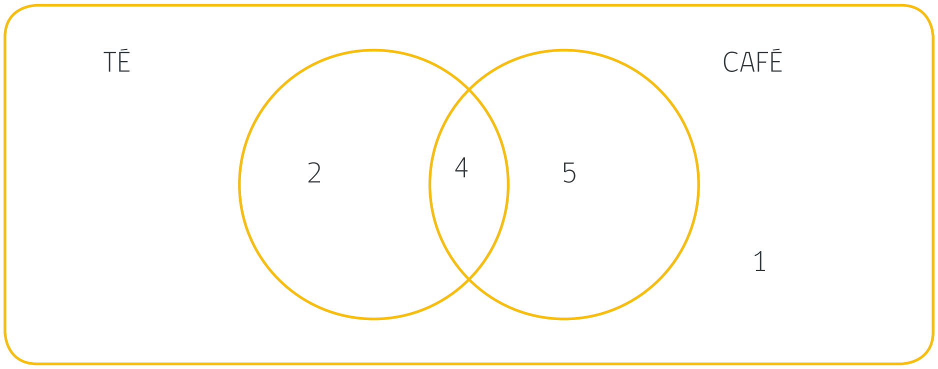
Estos 45 estudiantes restantes solamente prefieren utilizar el notebook, tal como se expresa en el diagrama de Venn de más abajo:



Por consiguiente el área achurada corresponde a las personas que solamente prefieren notebook y smartphone pero no tablet las cuales son 5 estudiantes, ya que sumando los 45 estudiantes que solamente prefieren notebook con los 8 estudiantes que solamente prefieren notebook y tablet y los 2 estudiantes que prefieren notebook, tablet y smartphone, se obtiene como resultado 55 estudiantes y en el problema inicial nos indican que existen 60 estudiante que prefieren notebook, por ende en el área achurada están esos 5 estudiantes. Tal como se muestra en la siguiente figura.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En el diagrama que colocamos a continuación, se han volcado los datos obtenidos en una encuesta, realizada a personas, a las que se les preguntó si tomaban té o café. Los números que aparecen se refieren a las cantidades de personas que respondieron a la pregunta en las diversas formas posibles: solamente té, té y café, ninguna de las dos bebidas, etc.



a) ¿Cuántas personas tomaban té?
b) ¿Cuántas personas tomaban café?
c) ¿Cuántas personas tomaban té y café?
d) ¿Cuántas personas no tomaban ninguna de las dos bebidas?
e) ¿Cuántas personas no tomaban té?
f) ¿Cuántas personas no tomaban café?
g) ¿Cuántas personas tomaban por lo menos una de esas dos bebidas?
h) ¿Cuántas personas tomaban sólo una de esas dos bebidas?
i) ¿Cuántas personas tomaban sólo café?
j) ¿Cuántas personas tomaban alguna de esas bebidas?

2. Se investigó un grupo de 5500 personas en relación con la estrategia a seguir con objeto de conservar el combustible. De éstas, 2000 opinaron que lo aceptable era el racionamiento, 1500 dijeron que lo apropiado sería fijar un impuesto adicional por litro, y 750 personas indicaron que lo apropiado sería la aplicación de ambos procedimientos. El resto de las personas no aceptan ninguno de los dos sistemas. Determinar:

a) Desarrolle un diagrama de Venn, que resuma lo anterior.
b) ¿Cuántas personas aceptarían en forma voluntaria el racionamiento pero no el impuesto?
c) ¿Cuántas personas aceptarían en forma voluntaria el impuesto, pero no el racionamiento?
d) ¿Cuántas personas no aceptarían en forma voluntaria ninguno de los cursos de acción?

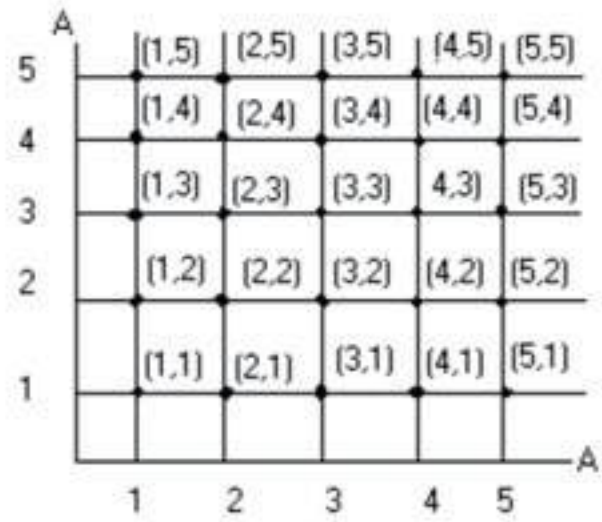
3. Se realizó una encuesta a 200 alumnos de Ingeniería en Ejecución en diversas disciplinas acerca de la forma en que ocupaban su tiempo libre, 30 dicen que sólo leen, 60 dicen que solamente escuchan música, 20 dicen que sólo estudian, 16 dicen que leen y escuchan música, 50 dicen que estudian, 16 dicen que escuchan música y estudian y 8 hacen las tres cosas. De acuerdo a la encuesta, responda:
a) Grafique la información.
b) ¿Cuántos sólo leen o estudian?
c) ¿De los que opinan, cuántos dicen que no leen?
d) ¿Cuántas personas no contestan alguna de estas tres alternativas?
e) ¿Cuántas personas escuchan música, pero no leen?
f) ¿Cuántas personas estudian y escuchan música, pero no leen?

Funciones

Relaciones

Establecer relaciones entre varios tipos de fenómenos es fundamental para hacer predicciones en todo ámbito, por ejemplo, la correspondencia entre un estudiante y su número de matrícula es una relación. Considere el conjunto $\mathrm{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ la representación gráfica del producto AXA que se llama Producto Cartesiano, y se lee "$\mathrm{A\ cruz\ A}$" se hace mediante un diagrama cartesiano, como se ve en la figura:

Ilustración 8 Producto cartesiano del conjunto A



Cada elemento de $\mathrm{A\ X\ A}$ es un par ordenado de la forma (a,b). Al primer elemento del par ordenado lo llamaremos "abscisa" o "pre imagen" y al segundo elemento "ordenada" o "imagen".
Matemáticamente una relación es una correspondencia entre un primer conjunto llamado Dominio y un segundo conjunto llamado Codominio, de modo que a cada elemento del dominio corresponde uno o más elementos del codominio. En general, una relación es cualquier conjunto de pares ordenados de números reales.

Propiedades del producto cartesiano:

Para todo conjunto A, B y C cualquiera se tiene:

Asociatividad

$\mathrm{A \times (B \times C) = (A \times B) \times C}$

Distributividad respecto de la intersección

$\mathrm{A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)}$

Distributividad respecto de la unión

$\mathrm{A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)}$

El producto cartesiano no es conmutativo

$\mathrm{A \times B \not\approx B \times A}$

Te invitamos a ver:

Ejemplos

Sea $A = \{1,2,3\}$ determine las siguientes relaciones:

a) $R_1 = \{(a,b) \in A \times A \,/\, a \preccurlyeq b\}$

$R_1 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)\}$

b) $R_2 = \{(a,b) \in A \times A \,/\, a \succ b\}$

$R_2 = \{(2,1), (3,1), (3,2)\}$

c) $R_3 = \{(a,b) \in A \times A \,/\, a + 1 = b\}$

$R_3 = \{(1,2), (2,3)\}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Sea $A = \{1,2,3\}$ determine las siguientes relaciones:

$R = \{(a,b) \in A \times A \,/\, a + 2 \preccurlyeq 3\}$

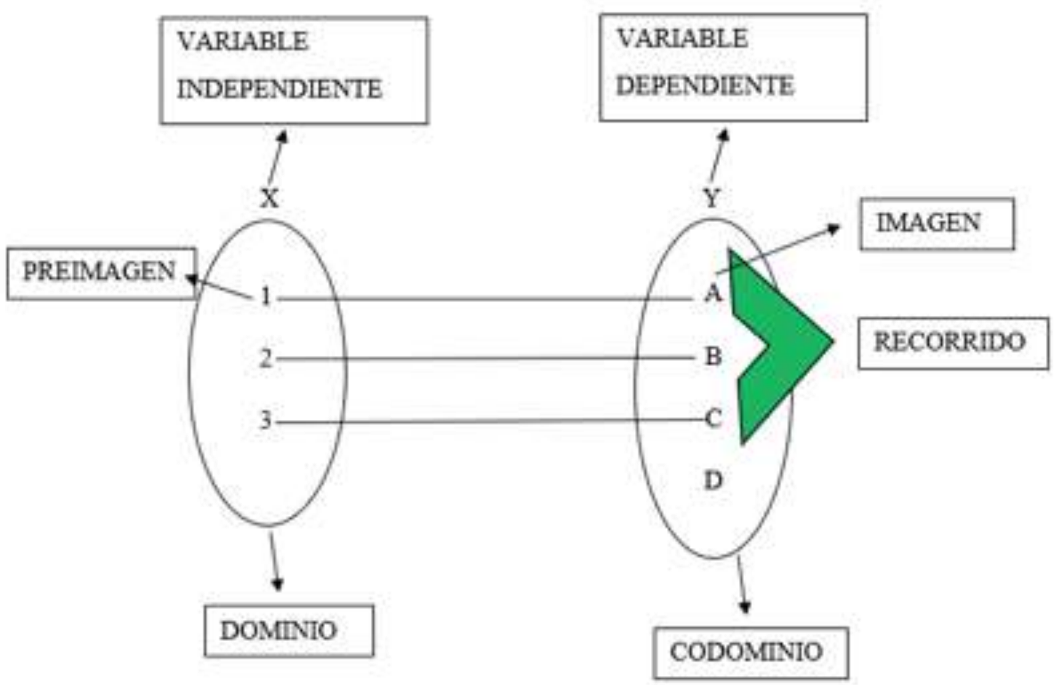
$R = \{(a,b) \in A \times A \,/\, a + 2 \preccurlyeq 3\}$

$R = \{(a,b) \in A \times A \,/\, a =1\}$

$R = \{(a,b) \in A \times A \,/\, b = 4\}$

Elementos básicos de una función

Ilustración 9 Diagrama de flechas de una función



Tip

Si el codominio de una función real no está señalado, se asume que es el conjunto de los números reales.
En la figura presentada se aprecia que el recorrido sólo son los elementos A, B y C, ya que son estos elementos que se relacionan con los valores que toman la variable independiente, mientras que el codominio es todo el conjunto de la variable independiente.
Ahora bien, reiteradamente se ha mencionado el concepto de variable por lo cual es preciso definir ésta.

Variable

Una variable es un objeto tangible o intangible que cambia, como, por ejemplo, el clima, la temperatura, el precio, etc.
En una función existe la variable independiente y la variable dependiente, la primera es relevante, ya que ésta, a medida que va tomando valores produce cambios en la variable dependiente por ejemplo el tiempo realiza diversos cambios en distintos objetos. Un ejemplo de estas variables, sería la distancia que puede recorrer un automóvil dependerá de la cantidad de combustible que éste posea. A continuación, se presenta la forma algebraica en que se representa una función:

$f:A\rightarrow B$
$x\longmapsto y=f(x)$

- $\{x\epsilon A:\exists y\in B, y=f(x)\}\subseteq A$ se llama dominio de la función, y se denota por $\mathrm{Dom}(f)$.
- B se llama codominio de la función y se denota por $B=\mathrm{Cod}(f)$
- $\{y\in B:\exists x\in A, y=f(x)\}\subseteq B$ se llama recorrido de la función, y se denota por $\mathrm{Rec}(f)$.
- $y=f(x)$ se llama la imagen de x por f o variable dependiente
- x se llama variable de una función o variable independiente.

Ejemplos

Determine el Dominio y Recorrido de las siguientes relaciones:

1. $R1 = \{(1,2), (2,3)\}$
   $\mathrm{Dom}\ R1 = \{1, 2\}$
   $\mathrm{Rec}\ R1= \{2, 3\}$

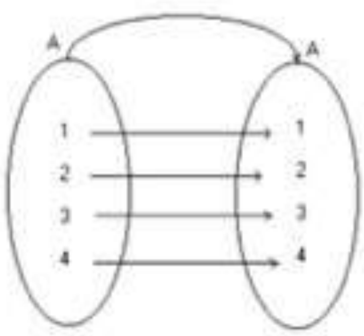
2. $R2 = \{(a,b), (a,c), (a,d)\}$
   $\mathrm{Dom}\ R2 = \{a\}$
   $\mathrm{Rec}\ R2 = \{b, c, d\}$

3. $R3 = \{(1,2), (2,1)\}$
   $\mathrm{Dom}\ R3 = \{1, 2\}$
   $\mathrm{Rec}\ R3 = \{1, 2\}$

Te invitamos a ver:

Ejemplo

Para el siguiente diagrama de flechas determinar la relación.

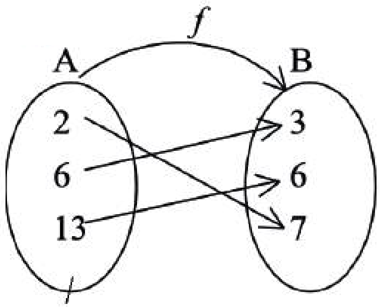


A = { 1,2,3,4 } y R ={ (a,b) ∈ A x A / a = b}

Ejemplos

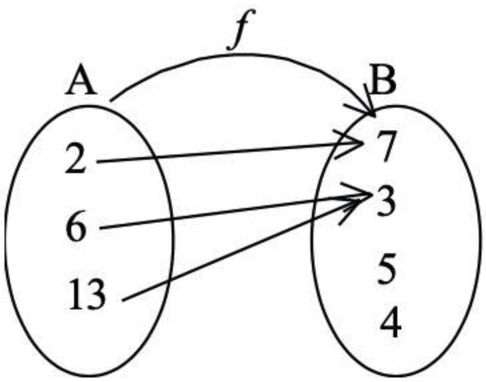
Determine si las siguientes relaciones son función e indique sus dominios.

a)



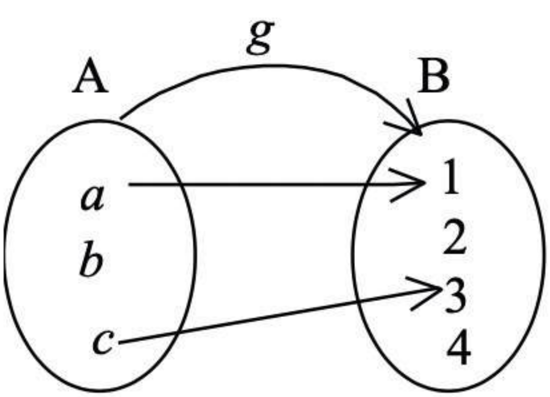
f(2) = 7
f(6) = 3
f(13) = 6
Dom f = {2, 6, 13}

b)



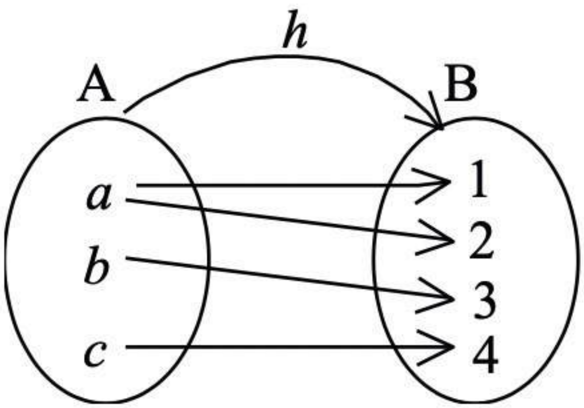
$f(2) = 7$
$f(6) = 3$
$f(13) = 3$
$\text{Dom } f = \{2, 6, 13\}$

c)



g no es función ya que b no tiene imagen, por lo que no cumple con la condición de que cada elemento del conjunto de partida debe ser parte del Dominio de la función.

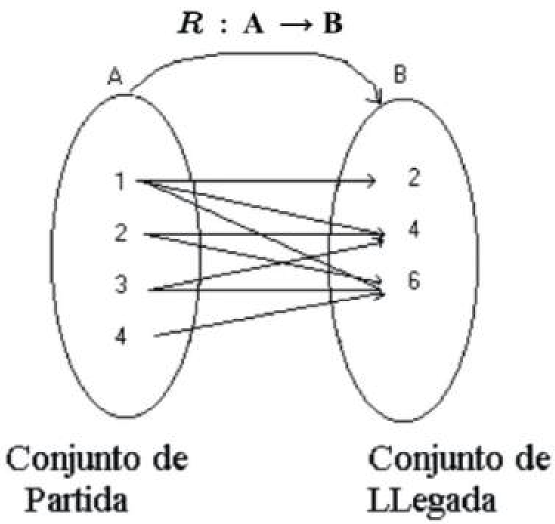
d)



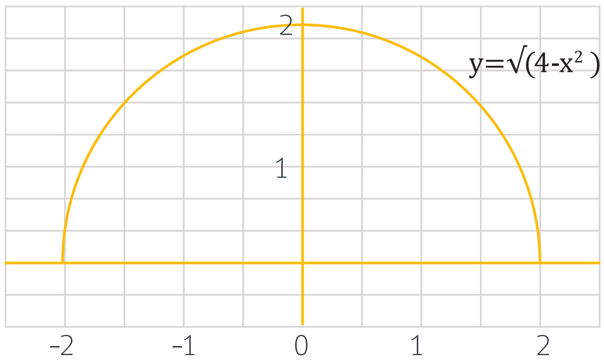
h no es función ya que a tiene dos imágenes y no cumple con la condición de unicidad en las imágenes.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Escriba la relación existente de A y B



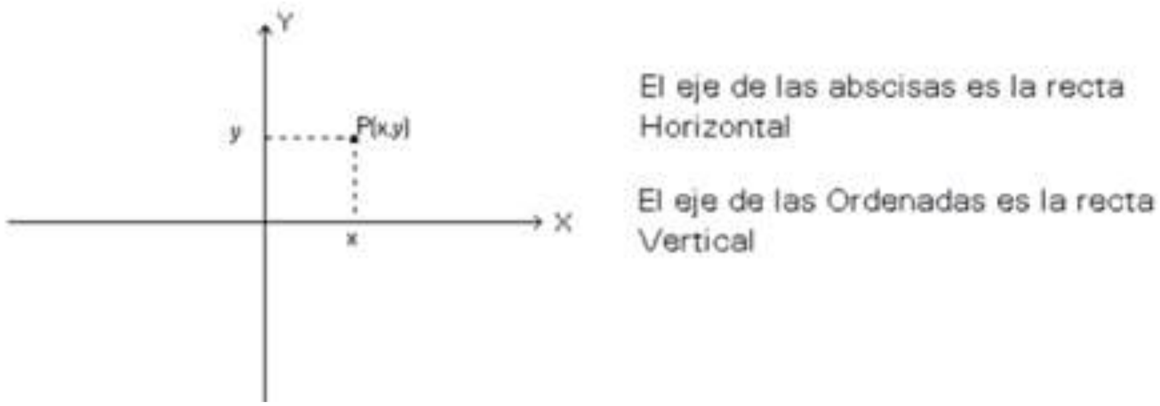
2. La grafica de la función $y=\sqrt{(4-x^2)}$ es una semi circunferencia con centro en el origen y radio 2, determine su dominio y recorrido.



Plano cartesiano

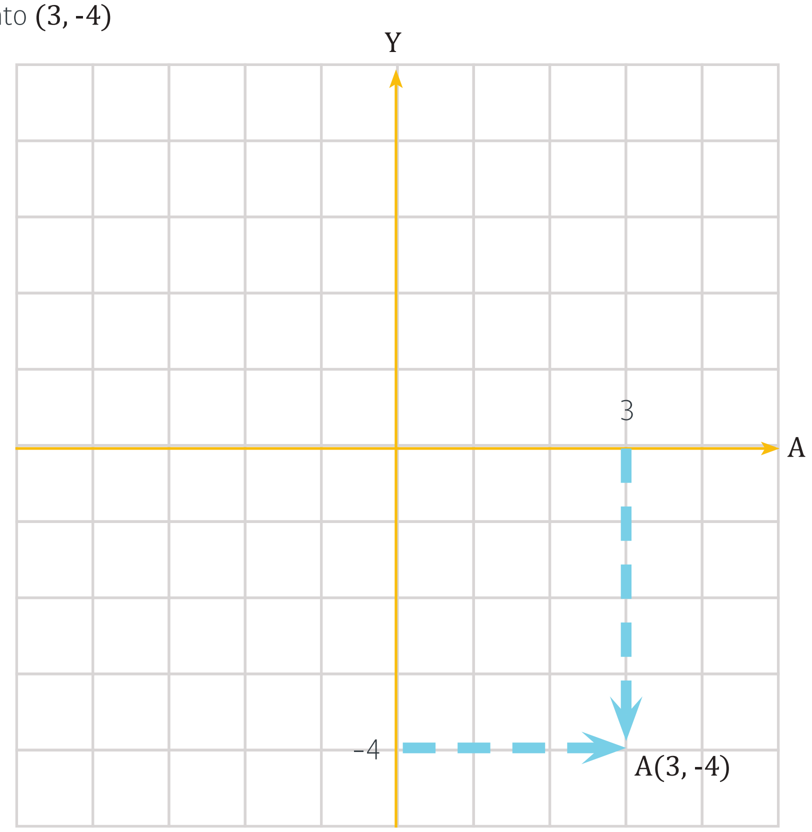
El Plano Cartesiano está formado por dos rectas perpendiculares entre sí llamada cada una Eje, y que se intersectan en un par común llamado Origen, el cuál (0,0).
Cada par (x,y) se llama punto (x,y).

Ilustración 10 Plano Cartesiano



Ejemplo

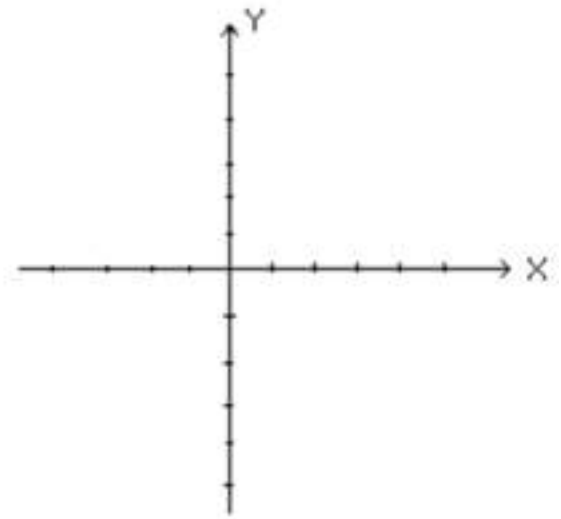
Grafiquemos el punto (3, -4)



EJERCICIOS PROPUESTOS

Grafique los siguientes puntos en el plano cartesiano

A) (1,-1)
B) (-3,0)
C) (-2,2)
D) (0,-2)

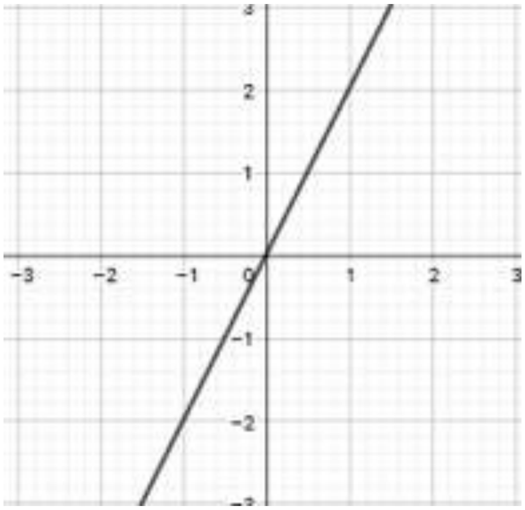


Tipos de Funciones

Función lineal y afín

Este tipo de funciones corresponden a rectas que pasan por el origen o rectas que cortan al eje y.

Ilustración 11 Ejemplo de gráfica función lineal que pasa por el origen y = 2x



$f:\mathrm{dom}\ (f) \subseteq R \to R$
$x \longmapsto f(x) = 2x$
$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in R : f(x) \in R\}$
$\mathrm{Rec}(f) = \{y \in R : \exists x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge f(x) = y\}$

Tip

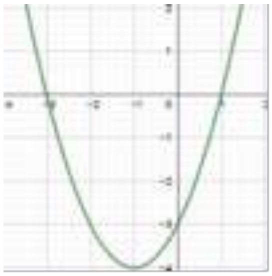
En resumen, tanto la función lineal como la función afín tienen su dominio y recorrido en el conjunto de los números reales. La forma más común de obtener la gráfica de estas funciones es generando una tabla de valores que incluyan pre imágenes e imágenes.

Función cuadrática

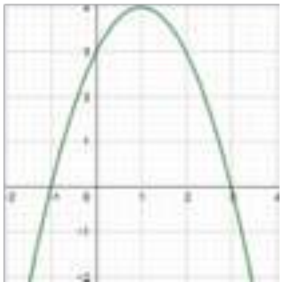
Este tipo de función, tiene la siguiente forma algebraica: $f(x)=ax^2+bx+c$, donde cada parámetro cumple las siguientes funciones.

Ilustración 12: Concavidad de una función cuadrática

Si $a>0$ entonces se tiene una parábola cóncava hacia arriba. $f(x)=x^2+2x-3$ (en este caso $a=1$), el parámetro c determina donde la parábola corta al eje y, en este caso $c=-3$



Si $a<0$ entonces se tiene una parábola cóncava hacia abajo. $f(x)=-x^2+2x+3$ (en este caso $a=-1$ y $c=3$)



Las raíces (puntos de corte del eje x) de la ecuación de segundo grado se obtienen mediante:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

En donde b^2-4ac se llama discriminante y nos otorga importante información como por ejemplo la cantidad de raíces que tendrá una función cuadrática.

$f: Dom(f) \subseteq R \rightarrow R$
$x \longmapsto f(x) = -x^2+2x+3$
$Dom(f) = \{x \in R : f(x) \in R\}$
$Rec(f) = \{ y \in]-\infty,4] : \exists x \in Dom(f) \wedge f(x) = y \}$

$$\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$$

Tip

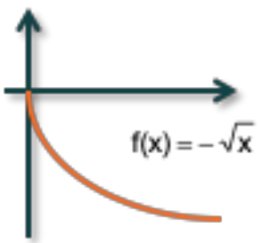
Es importante recalcar que el dominio de la función cuadrática siempre será el conjunto de los números reales y el recorrido dependerá del vértice de ésta y su orientación, es decir si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo.

Función raíz cuadrada:

Es de la forma $f(x)=\sqrt{x}$, con $x\geq 0$; Su representación gráfica es la mitad superior de una parábola que empieza en el origen y se abre hacia la derecha.

Ilustración 13 Representación gráfica de la función raíz cuadrada

$\text{Dom}(f) = \{x \in [0,+\infty[: f(x) \in R_{0+} \}$
$\text{Rec}(f) = \{y \in [0,+\infty[: \exists x \in \text{Dom}(f) \wedge f(x)=y\}$



$\text{Dom}(f) = \{x \in [0,+\infty[: f(x) \in R_{0-} \}$
$\text{Rec}(f) = \{y \in]-\infty,0] : \exists x \in \text{Dom}(f) \wedge f(x) = y\}$

Si $f(x)= \sqrt{x-h}+k$, con h y k en los reales, entonces
$\text{Dom}(f)=[h,+\infty[$ y $\text{Rec}(f)= [k,+\infty[$

Tip

La restricción fundamental para encontrar el dominio de la función raíz cuadrada, es que la cantidad subradical (expresión algebraica que está dentro de la raíz) debe ser mayor o igual que cero.

Esta igualdad $\sqrt{(x^2)}=|x|$ se cumple, ya que "x", puede tomar valores tanto positivos como negativos y siempre se llegará al mismo resultado.

Ejemplo
Con $x=-2$ y $x=2$,se tiene:
$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$
$\sqrt{(2)^2} = \sqrt{4} = 2$

Función racional

Es de la forma $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$, donde el denominador debe ser distinto de cero, $(q(x)\neq 0)$, lo cual es fundamental para determinar su dominio y recorrido.

Ejemplo

$$f: X \rightarrow R$$

$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{x-7}$$

$$Dom(f) = \{x - 7 \neq 0 : f(x) \in R\}$$

$$Dom(f) = \{x \neq 7 : f(x) \in R\}$$

$$Dom(f) = \{x \in R - \{7\} : f(x) \in R\}$$

$$Rec(f) = \left\{y = \frac{1}{x-7} : \exists x \in Dom(f) \wedge f(x) = y\right\}$$

$$Rec(f) = \{y * (x-7) = 1 : \exists x \in Dom(f) \wedge f(x) = y\}$$

$$Rec(f) = \left\{(x-7) = \frac{1}{y} : \exists x \in Dom(f) \wedge f(x) = y\right\}$$

$$Rec(f) = \left\{(x = \frac{1}{y} + 7 : \exists x \in Dom(f) \wedge f(x) = y\right\}$$

$$Rec(f) = \{(y \neq 0 : \exists x \in Dom(f) \wedge f(x) = y\}$$

$$Rec(f) = \{(y \in R - \{0\} : \exists x \in Dom(f) \wedge f(x) = y\}$$

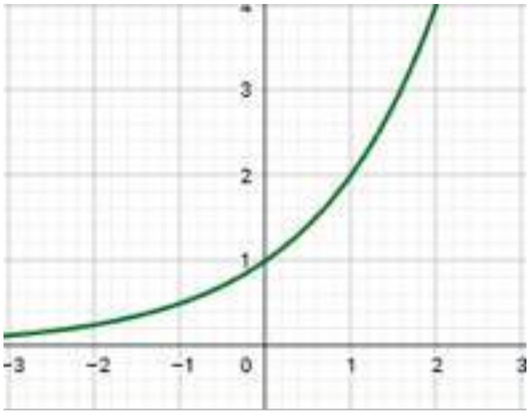
Tip
Restricción principal para el cálculo del dominio de la función racional, es que el denominador de la función debe ser distinto de cero.

Función exponencial:

Se define como $f(x)=a^x$.

Si $a>1$, la función es creciente.

$Dom(f) = \{ x \in R: f(x) \in R \}$
$Rec(f) = \{ y \in \,]0,+\infty[\,: \exists\, x \in Dom(f) \wedge f(x)=y \}$



Si $0<a<1$, la función es decreciente
$Dom(f)=\{x \in R: f(x) \in R\}$
$Rec(f)=\{y \in \,]-\infty,0[\,: \exists x \in Dom\ (f) \wedge f(x)=y\}$

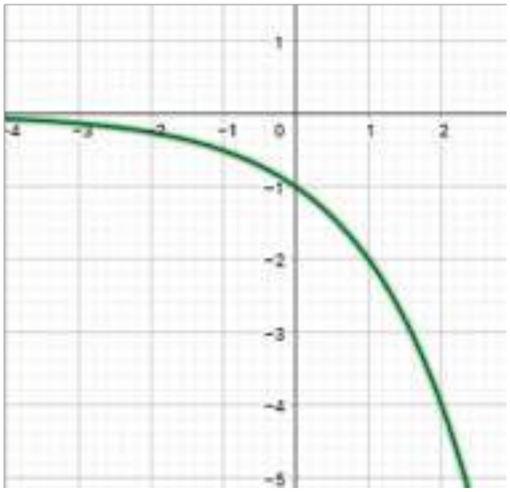


Ilustración 14 Representación gráfica de la función exponencial

Es importante mencionar que en la función exponencial siempre **"a"** debe ser mayor que cero, por ende, este parámetro siempre va tomar valores pertenecientes a los números reales positivos. A continuación, se presentan algunas propiedades de las potencias que serán útiles para resolver algunos problemas asociados a la función exponencial.

Propiedades de las potencias

Con, a y b números reales.

$$a^0 = 1, con\ a \neq 0$$

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

$$a^1 = a$$

$$a^n b^n = (ab)^n$$

$$a^n a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, con\ b \neq 0$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, con\ a \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, con\ a \neq 0$$

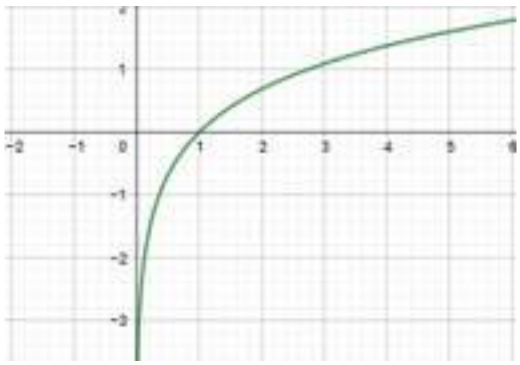
$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, con\ a\ y\ b\ \neq$$

Función logarítmica

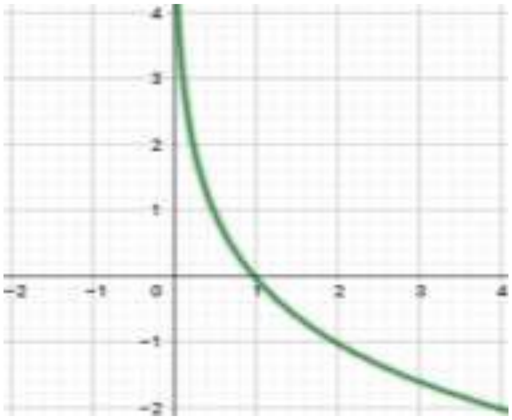
Se define de la forma $f(x)=\log_a(x)$, con $a>0$ y $a\neq1$

Ilustración 15 Representación gráfica de la función exponencial

Si a>1, la función es creciente
$Dom(f) = \{x \in R_+ : f(x) \in R\}$
$Rec(f) = \{y \in R : \exists\ x \in Dom(f) \wedge f(x) = y\}$



Si $0<a<1$, la función es decreciente
$Dom(f) = \{x \in R_+ : f(x) \in R\}$
$Rec(f) = \{ y \in R : \exists\, x \in Dom(f) \wedge f(x)=y\}$



Definición de logaritmo: $\log_b a = x \leftrightarrow b^x=a$, esto quiere decir que la base elevada a x es igual al argumento, ejemplo: $\log_{10} 100=2 \leftrightarrow 10^2=100.$

Propiedades de los logaritmos

Con $a>0$ y $a\neq 1$
$\log_a (1)=0$
$\log_a (a)=1$
$\log_a (xy)=\log_a (x)+\log_a (y)$

$\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a (x)-\log_a (y)$

$\log_a (x)^n=n*\log_a (x)$

$\log_a (x)= \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$,propiedad del cambio de base.

Notaciones importantes:

$\log_{10}=\log$
$\log_e=\ln$

Tip

Para encontrar el dominio de la función logarítmica, siempre el argumento debe ser mayor que cero, es la restricción principal que se debe utilizar.

Ejemplo

$f(x) = \log(x\text{-}1)$

Restricción para encontrar el dominio:

$x-1>0$

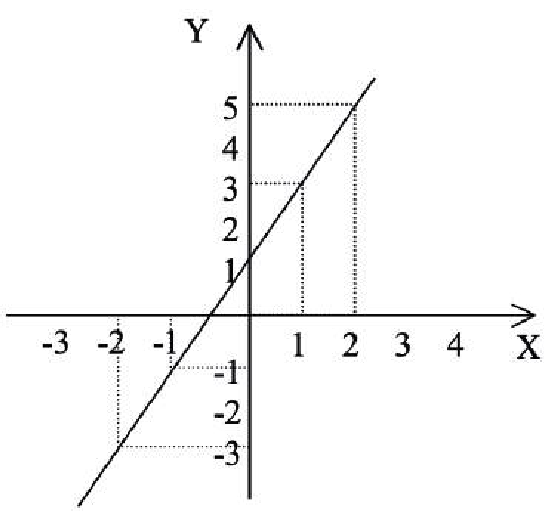
$x>1$

Ejemplo

Graficar $y = f(x) = 2x + 1$ para los puntos conformados por $x = \{-2,-1,0,1,2\}$

$$y = f(x) = 2x + 1 \quad \begin{cases} f(-2) = 2 \cdot (-2) + 1 = -4 + 1 = -3 \\ f(-1) = 2 \cdot (-1) + 1 = -2 + 1 = -1 \\ f(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 0 + 1 = 1 \\ f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3 \\ f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 4 + 1 = 5 \end{cases}$$

x	y = f(x)
−2	−3
−1	−1
0	1
1	3
2	5



Ejemplo

Graficar la función $y = x^2 z - x - 6$

Identificando los parámetros a, b y c de la ecuación, tenemos: a = 1, $b = -1$ y $c = -6$

Calculemos Δ discriminante

$\Delta = (-1)^2 - 4{\cdot}1{\cdot}(-6) = 1 + 24 = 25$

Calculemos ahora las raíces de la parábola.

$x^2 - x - 6 = 0$

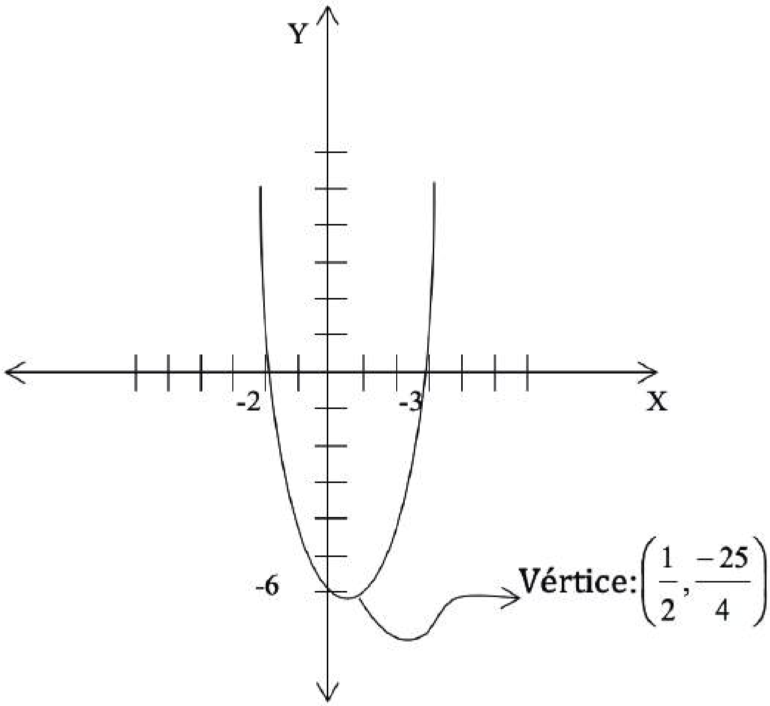
$(x - 3)(x + 2) = 0$

$x1 = -2$ y $x2 = 3$

Como $a > 0$ y $\Delta > 0$, entonces la parábola tiene ramas hacia arriba y corta al eje X en dos puntos, $(-2; 0)$ y $(3; 0)$. Además, la parábola corta al eje Y en el punto $(0; c) = (0; -6)$. Ubiquemos ahora el vértice de la parábola

$$x_v = \frac{-B}{2A} = \frac{-(-1)}{2\cdot 1} = \frac{1}{2} \quad ; \quad y_v = C - \frac{B^2}{4A} = -6 - \frac{(-1)^2}{4\cdot 1} = \frac{-25}{4}$$

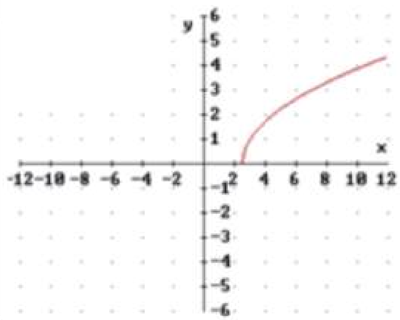
Gráfico de la función:



Ejemplo

Graficar la función $f(x)=\sqrt{(2x-5)}$ y determinar su dominio y recorrido.
Si desarrollamos la desigualdad $2x-5\geq 0$ que asegura la existencia de la función raíz cuadrada encontramos que $x\geq 2.5$

x	f(x)
2,5	0
3	1
4	1.7
5	2.2
6	2.6



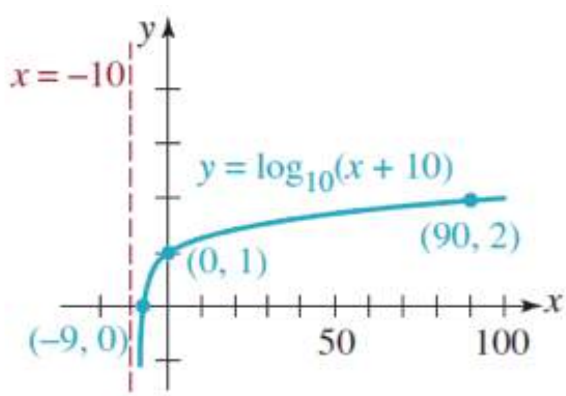
D: [2.5, +∞[R: [0, +∞[

Ejemplo

Graficar $f(x)=\log_{10}(x+10)$

La gráfica de $f(x)$ se encuentra desplazada en 10 unidades hacia la izquierda. Verificamos que el dominio de la función es el conjunto de los números reales, calculamos el dominio con el requisito que $x+10>0$, que indica el desplazamiento de 10 unidades hacia la izquerda ya que $x>-10$. Luego para un esbozo mas acabado de la grafica creaos una tabla de valores de x y evaluamos la función.

x	-9	0	90
$f(x)$	0	1	2



Notar que $x=-10$ es una asíntota vertical de la función en estudio.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Graficar las siguientes funciones:

a) $f(x) = 7$

b) $g(x) = 2x - 6$

c) $f(x) = \frac{4}{3}x - 1$

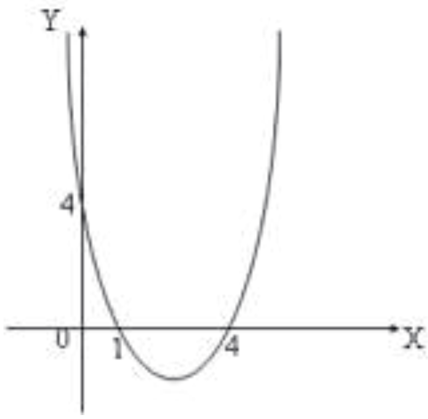
d) $f(x) = \frac{x-1}{3}$

e) $y = 3x - 1$

f) $2x + 3y - 2 = 0$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Determine la función del siguiente gráfico



Determine la función de segundo grado que tiene por soluciones $x1$ y $x2$ tales que $x1 + x2 =$ y $x1/x2 =$

Graficar la función $y=\sqrt{(2\text{-}3x)}$ y determinar su dominio y recorrido

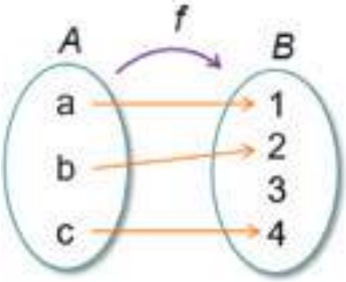
Grafique la función $f(x)=\log_2 (3\text{-}x)$, determoine su dominio y asíntota vertical.

Inyectividad, sobreyectividad y biyectividad de funciones reales.

Inyectividad

Sea f una función que va de A hasta B, f es inyectiva si se cumple que cada elemento del recorrido se relacione con un único elemento del dominio, es decir que cada imagen se relaciona con una única preimagen, por ende, se cumple que: $f(a)=f(b)\rightarrow a=b$

Ilustración 16 Inyectividad

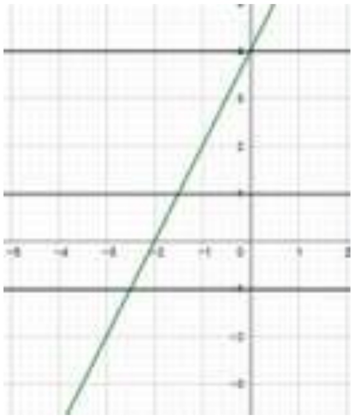


Te invitamos a ver:

Por otro lado, también se puede determinar la Inyectividad de una función a través de su gráfica, a continuación, se presenta un ejemplo que detalla lo expuesto.

Ejemplo

Sea la función $f(x)=2x+4$ cuya gráfica es:



Determinamos su Inyectividad a través de su gráfica trazando rectas paralelas al eje "x", si se visualiza que estas rectas paralelas cortan en un solo punto a la gráfica, entonces se concluye que la función es inyectiva.

Sobreyectividad

Sea f una función que va de A hasta B, f es sobreyectiva (epiyectiva) si se cumple que el codominio es igual al recorrido. Como se aprecia en la siguiente figura.

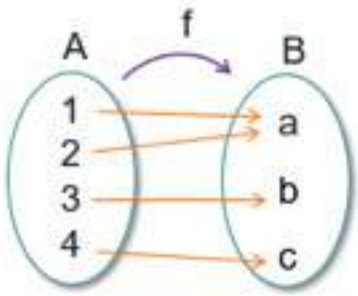


Ilustración 17 Sobreyectividad

$$\text{Rec (f): }\{a,b,c\}$$
$$\text{Cod(f): }\{a,b,c\}$$

Luego se cumple que el $\mathbf{cod(f)=Rec(f)}$

Biyectividad

Para que una función sea biyectiva se debe cumplir que ésta sea inyectiva y sobreyectiva. A continuación, se presenta un ejemplo de una función biyectiva.

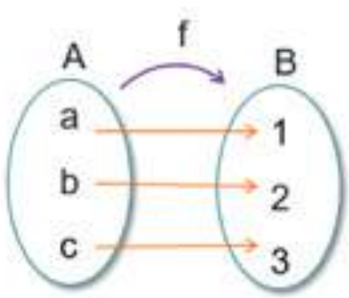


Ilustración 18 Biyectividad

En este caso se cumple que cada imagen se relaciona con una única preimagen (inyectiva) y además el codominio es igual al recorrido. Por ende, f es biyectiva.

Sea f una función que va de A hasta B. Para que f sea biyectiva se debe cumplir que sea inyectiva y sobreyectiva (o epiyectiva) a la vez.

Función inversa

Sea **f** una función que va de **A hasta B**. Si f es biyectiva, entonces existe la función inversa de **f**. en caso contrario no.

$f:A\to B$, entonces $f^{(-1)}:B\to A$

$a\longmapsto f(a)=b$ $\qquad :b\mapsto f^{(-1)}(b)=a$

$\mathrm{Dom}\, f^{(-1)}=\mathrm{Rec}f=B$ y $\mathrm{Rec}f^{(-1)}=\mathrm{Dom}f=A$

Para determinar la función inversa de una función biyectiva se debe expresar la variable independiente (x) en función de la variable dependiente (y), para luego intercambiar las variables. Por ejemplo:

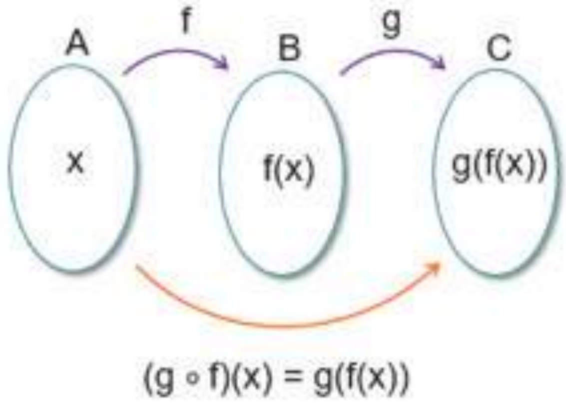
$$f(x)=\frac{2-x}{3x}\to x=\frac{2}{3y+1}\to f^{-1}(x)=\frac{2}{3x+1}$$

Composición de funciones

Sean f y g dos funciones tales que: $f:A\to B$ $\quad g:B\to C$, Entonces, se define "**g compuesta con f**" como una función definida de **A hasta C**.

$gof:A\to C$

Ilustración 19 Composición de funciones



Tip

En general para que exista la composición de funciones debe ocurrir que el recorrido de la segunda función este contenido en el dominio de la primera función.

Ejemplo

Sea una función f, cuyo dominio es el **conjunto {1,2,3},** definida por $f(x)=x-1$, sea una la función g, con dominio el **conjunto {0,1,2,3}**, definida por $g(x)=x+1$. Se puede dar **fog y gof.**

Solución: Para determinar si puede existir **fog**, debemos determinar el recorrido de **g** y verificar que este contenido en el dominio de **f**, por lo cual reemplazaremos los elementos del domino de **g** en **g(x)**:

$g(0)=1$
$g(1)=2$
$g(2)=3$
$g(3)=4$
Entonces se tiene que el recorrido de $g(x):\{1,2,3,4\}$, este conjunto no está contenido en el dominio de f, ya que este es {1,2,3}. Por ende, no puede existir fog. Por otro lado, gof, sí existe, ya que el recorrido de f(x):{0,1,2}, está contenido en el dominio de **g** que es $\{0,1,2,3\}$.
$gof = g(\, f(x)\,) = (x\text{-}1) + 1 = x$

Ejemplo

Considere la siguiente función:
$f{:}Dom(f)\subseteq R\to R$

$$x\longmapsto f(x)=\sqrt{(2\text{-}x)}+3$$

Determine el Dominio y recorrido de f
Determine si f es biyectiva, si no lo es, redefínala para que lo sea
Determine la inversa de la función biyectiva definida en el ítem anterior

Solución:

a) $dom(f)=]\text{-}\infty,2]$
$Rec(f) = [3,+\infty[$

b) Para comprobar que **f** es inyectiva aplicaremos el siguiente teorema:
Si $f(x_1)= f(x_2)\to x_1=x_2$, con $x_1,x_2\in]\text{-}\infty,2]$ por ende, se tiene que:

$$f(x_1) = f(x_2) \to \sqrt{2-x_1} + 3 = \sqrt{2-x_2} + 3$$
$$\sqrt{2-x_1} = \sqrt{2-x_2}$$
$$x_1 = x_2$$

Por lo tanto **f** es inyectiva.
La función no es sobreyectiva, ya que el $Rec(f) = [3,+\infty[\neq Cod(f)=R$, luego **f** no es biyectiva, por ende, se debe redefinir la función, restringiendo el codominio:

$f\hat{}{:}]\text{-}\infty,2]\to [3,+\infty[$
$x \longmapsto f(x) = \sqrt{(2\text{-}x)}+3$

Una vez que se ha restringido el codominio, **f** cumple con la biyectividad.

La inversa de f es:
$f^{(-1)}\hat{}:]3,+\infty]\to [\text{-}\infty,2\,[$
$x \longmapsto f^{(-1)}(x)=\text{-}(x\text{-}3)2+2$

Ejemplo

Considere las siguientes funciones:

$f:Dom(f)\subseteq R\rightarrow R$ $\qquad$ $g:Dom(g)\subseteq R\rightarrow R$

$x\longmapsto f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{27-x}}$ $\qquad$ $x\longmapsto g(x)=3^{(x-1)}$

a) Determine el dominio de f
b) Determine el dominio de g
c) Defina (fog)

Solución:
a) $Dom(f) =]-\infty,27[$
b) $Dom(g)=R$
c) $Dom(fog)=\{x \in R : 3^{(x-1)} \in]-\infty, 27[\} =]-\infty,4[$

Luego se tiene que:

$fog:]-\infty,4[\subseteq R\rightarrow R$

$x\longmapsto f(g(x))=\dfrac{1}{\sqrt{27-3^{x-1}}}$

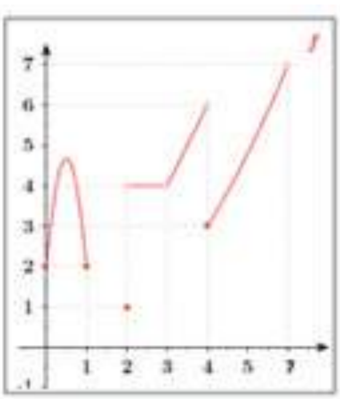
Ejemplo

Determine el dominio de la función: $f(x)=\dfrac{log_2(x+3)+log_5(5-x)}{\dfrac{1}{e^{\sqrt{x^2-1}}}}$

Solución: $Dom(f) = \{x \in R:f(x)\in R\}$
$= \{x \in R:x+3>0\wedge 5-x>0\wedge x^2-1>0\}$
$= \{x \in R:x>-3\wedge x<5\wedge |x|>1\}$
$= \{x \in R:x>-3\wedge x<5\wedge (x>1\vee x<-1\}$
$=]-3,-1[\cup]1,5[$

Ejemplo

Encuentre el dominio y recorrido de la función $f:D\subset R\rightarrow R$, cuya gráfica es:



Solución: $Dom(f)=[0,1]\cup[2,7[-\{3\}$
$Rec(f) \quad =[2,7[\cup\{1\}$

Ejemplo

Encuentre el dominio y recorrido de la función: $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x-4}}$

Solución:

$$\begin{aligned} Dom(f) &= \{x \in R: f(x) \in R\} \\ &= \{x \in R: x-4>0\} \\ &= \{x \in R: x>4\} \\ &=]4,+\infty[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Rec(f) &= \{y \in R: \exists x \in Dom(f), y=f(x)\} \\ &= \{y \in R: \exists x \in]4,+\infty[, \tfrac{3}{\sqrt{x-4}}\} \\ &= \{y \in R: \exists x \in]4,+\infty[, x= \tfrac{9}{y^2}+4^{y}>0\} \\ &= \{y \in R: y>0\} \\ &=]0,+\infty[\end{aligned}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Sea $f: R \rightarrow R$ definida por $f(x)=2x-1$, ¿Es f una función biyectiva? Si es así determine su inversa.

Sea $f: R \rightarrow R$ definida por $f(x)=4x-2$, ¿Es f una función biyectiva? Si es así determine su inversa.

Sea $f:]-2,+\infty[\rightarrow R_0^-$ definida por $f(x)=\sqrt{(5x+10)}$, ¿Es f una función biyectiva? Si es así determine su inversa.

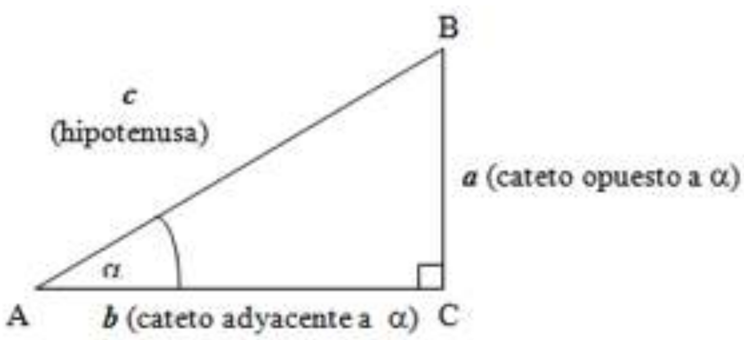
Trigonometría

La trigonometría trata la medición de ángulos mediante relaciones entre trazos. Estas relaciones se llaman razones trigonométricas.

Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo

Sea Δ ABC rectángulo en C de catetos a y b y de hipotenusa c

Ilustración 20 Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo



Se definen las razones trigonométricas de la siguiente manera:

$$\text{Seno de } \alpha = \text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\text{Coseno de } \alpha = \cos \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{Tangente de } \alpha = \text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{b}$$

Y sus respectivos recíprocos

$$\text{Cotangente de } \alpha = \text{cotg } \alpha = \frac{1}{tg\,\alpha} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{Secante de } \alpha = \sec \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{c}{b}$$

$$\text{Cosecante de } \alpha = \text{cosec } \alpha = \frac{1}{sen\,\alpha} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{a}$$

Tip

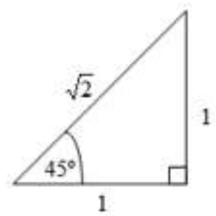
Las razones trigonométricas son cantidades adimensionales, es decir, no tienen dimensiones a pesar de que los lados de un triángulo corresponden a longitudes.

Las razones trigonométricas son números reales y como tales les corresponden todas las operaciones y las propiedades de los números reales, es decir, se pueden sumar, multiplicar, asociar, distribuir con otros números, etc.
Utilicemos ángulos conocidos para ejemplificar el uso de las razones trigonométricas, vemos los siguientes ejemplos.

Ejemplo

Sea un triángulo rectángulo isósceles, de la explicación de las razones trigonométricas podemos inferir que no dependen del tamaño del triángulo, entonces nos daremos un triángulo de lados convenientes para hacer fáciles los cálculos.

1. Sea el triángulo rectángulo isósceles de catetos iguales a 1 y ángulo de 45º.

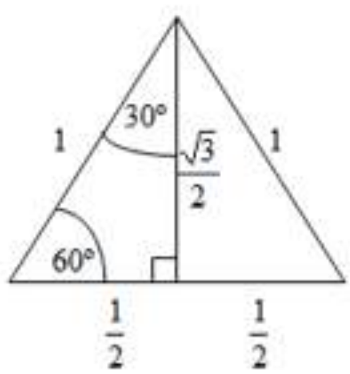


$\text{sen } 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \text{tg } 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$

$\text{cotg } 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$ $\quad \sec 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$ $\quad \text{cosec } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$

Ejemplo

Para determinar las razones trigonométricas de los ángulos de 30º y 60º, aprovechemos las relaciones que se dan en un triángulo equilátero de lado 1.



Para el ángulo de 30º:

$$\text{sen}\,30º = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \qquad \cos 30º = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{tg}\,30º = \frac{1}{\text{tg}\,60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{cotg}\ 30º = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \qquad \sec 30º = \frac{1}{\text{sen}\,60^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{cosec}\ 30º = \frac{1}{\cos 60^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

EJERCICIO PROPUESTO

a) Realiza los cálculos de las razones trigonométricas para el Angulo de 60º

b) Genera una tabla resumen de las razones trigonométricas para estos ángulos comunes y compáralas con alguna que encuentres en algún teto de matemáticas.

Identidades trigonométricas

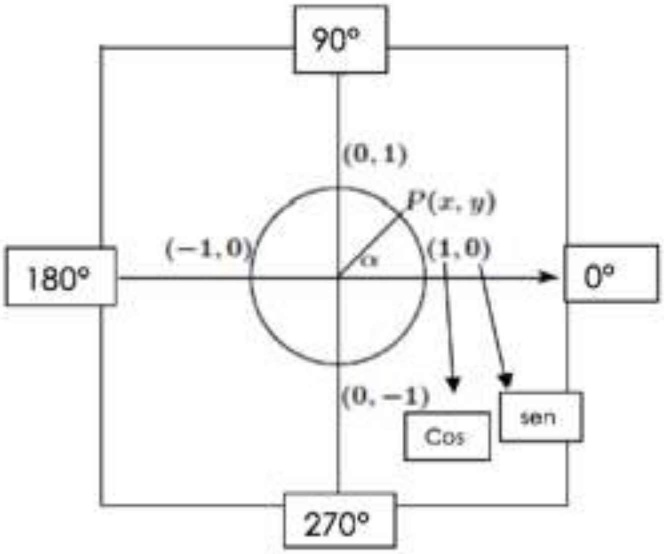
Dada una circunferencia unitaria (de radio 1) $x^2+y^2=1$, se define:

$$x=\cos(\alpha),y=\text{sen}(\alpha)$$

De lo cual se deduce que:

$\cos(0°)=1$	$\cos(90°)=0$	$\cos(180°)=-1$	$\cos(270°)=0$
$\text{sen}(0°)=0$	$\text{sen}(90°)=1$	$\text{sen}(180°)=0$	$\text{sen}(270°)=-1$

Ilustración 21 Circunferencia de radio unitario



Dadas las funciones definidas en una circunferencia unitaria centrada en el origen:

sen:R→R, sen(x) y cos:R→R,cos(x), se definen:

Tangente:

$D \subset R \to R$

$\alpha \longmapsto y=\tan 3(\alpha)$

con $\tan(\alpha)= \dfrac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ $y\ D = R - \left\{\dfrac{(2k-1)\pi}{2}\right\}, k\epsilon Z$

Cotangente:

$D \subset R \to R$

$\alpha \longmapsto y=\cot(y)= \dfrac{1}{\tan(\alpha)}$

donde $D=R- \{k\pi\},\ k\epsilon Z$

Identidades Trigonométricas importantes

$\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x) = 1$

$1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$

$1 + \cot^2(x) = \csc^2(x)$

$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen}(x) * \cos(y) \pm \operatorname{sen}(y)\cos(x)$

$\cos(x \pm y) = \cos(x) * \cos(y) \mp \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$

$\tan(x \pm y)= \dfrac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x) * \tan(y)}$

$\operatorname{sen}(2x)=2\operatorname{sen}(x)*\cos(x)$

$\cos(2x)=\cos^2(x)-\operatorname{sen}^2(x)$

$\cos(2x)=2\cos^2(x)-1$

$\cos(2x)=1-2\operatorname{sen}^2(x)$

$\tan(2x)= \dfrac{2\tan(x)}{1-tan^2(x)}$

$\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{2}}$

$\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos(x)}{2}}$

Inversas de funciones trigonómetricas

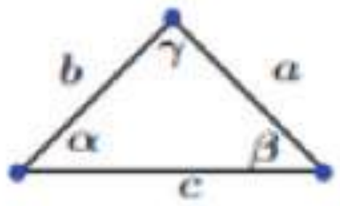
arcsen: $[-1,1] \rightarrow \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $x \rightarrow \text{arcsen}(x)$

arccos: $[-1,1] \rightarrow [0,\pi]$, $x \rightarrow \arccos(x)$

arctan: $R \rightarrow \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $x \rightarrow \arctan(x)$

Teorema del seno y del coseno

Dado un triángulo cualquiera, tenemos:



Ley del Coseno:

$a^2 = b^2+c^2 - 2bc * \cos(a)$
$b^2 = a^2+c^2 - 2ac * \cos(b)$
$c^2 = a^2+b^2 - 2ab * \cos(y)$

Ley del seno:

$$\frac{sen(a)}{a} = \frac{sen(b)}{b} = \frac{sen(y)}{c}$$

Curvas Sinusoidales

Forma algebraíca de las curvas sinusoidales: $f(x)=A sen(bx+c)+d$

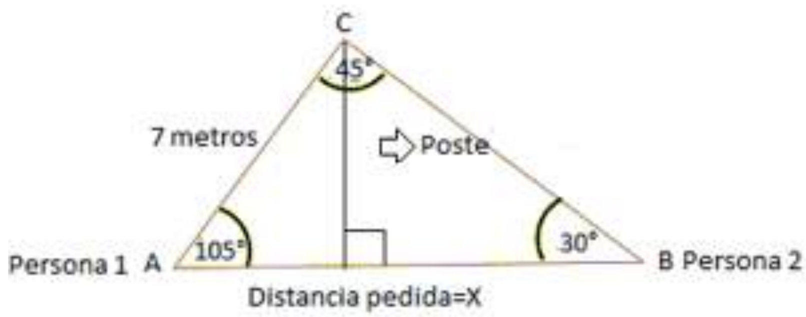
Descripción de los parámetros:
- Desplazamiento vertical: d
- Amplitud: $|A|$
- Fase: solución de $bx+c=0$
- Periodo: $P= \frac{2\pi}{b}$

Ejemplo

Trigonometría, Ley del seno

Dos personas se encuentran en lados opuestos de un poste con un ángulo de elevación de $75°$ y $60°$ respectivamente. Si la distancia entre el primero y el extremo superior del poste es de 7 metros, determine. la distancia entre ambas personas.

Para resolver este enunciado debemos realizar una representación de la la situación expuesta.



La información que nos entrega la figura, nos permite determinar que a través del teorema del seno podemos encontrar la distancia pedida.

$$\frac{sen(30°)}{7}=\frac{sen(45°)}{x}$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{7}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{x}$$

$x=7\sqrt{2}$, luego la distancia solicitada es $7\sqrt{2}$ metros.

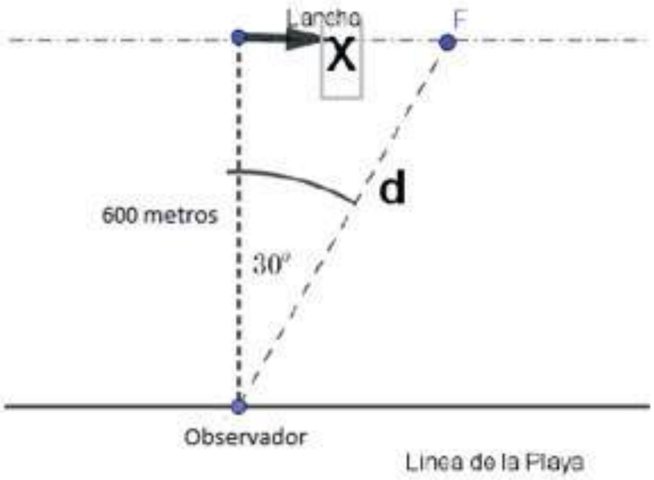
Ejemplo

Una lancha que viaja en forma paralela a una playa recta (de Norte a Sur), pasa a las 2 p.m. a 600 metros exactamente enfrente de un observador de la guardia costera que se encuentra en la orilla de la playa. Después de 5 minutos el mismo observador, ubicado en la misma posición de la playa, observa a la lancha con un ángulo de 30° Medidos de Oeste a Norte. Determine la velocidad de la lancha en kilómetros por hora.

Solución: Para resolver este enunciado debemos realizar una representación de la la situación expuesta.

Te invitamos a ver:

Te invitamos a ver:



Tenemos que $\cos(30°)= \frac{600}{d}$ y $\text{sen}(30°)= \frac{x}{d}$, luego $d= \frac{1200}{\sqrt{3}}$ y $x= \frac{d}{2}$, por ende $x= \frac{600}{\sqrt{3}}$.

Por ende, la lancha en 5 minutos recorre una distancia de $\frac{600}{\sqrt{3}}$ metros y en 1 hora recorre una distancia de $\frac{7200}{\sqrt{3}}$ metros, lo que equivale a $\frac{7.2}{\sqrt{3}}$ kilómetros. Aplicando la siguiente fórmula de física $V = \frac{d}{t}$, tenemos que la velocidad de la lancha en una hora es de $\frac{7.2}{\sqrt{3}}$ km/hr.

Ejemplo

La ecuación $\cos(x)*(1-\sqrt{3}\ \tan(x))=0$, con $x\in[0,2\pi]$

Solución:

Como la expresión algebraíca esta igualada a 0 y además esta factorizada, tenemos que:

$\cos(x)=0$ y $1-\sqrt{3}\ \tan(x)=0$, pero como $\tan(x)= \frac{sen(x)}{\cos(x)}$, entoces $\cos(x)\neq 0$

Por ende: $1-\sqrt{3}\ \tan(x)=0$

$\tan(x)=1/\sqrt{3}$, de lo cual se deduce que: $x = \frac{1}{6}\pi; x = \frac{7}{6}\pi$

Finalmente el conjunto solución es $x \in \left\{\frac{1}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi\right\}$

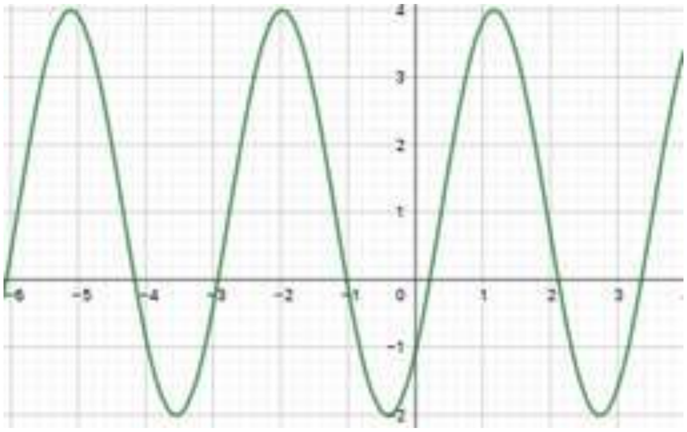
Ejemplo

Considere la siguiente función sinusoidal: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$x\mapsto f(x)=3\operatorname{sen}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1$$

Determine la amplitud, período y desfase de **f**. Esboze su gráfica.

Solución:
Para resolver este enunciado debes recordar las fórmulas expuetas anteriormente en la página 34.
Amplitud: $A=3$
Período: $P=\pi$
Desface: $2x-\frac{\pi}{4}=0 \to x=\frac{\pi}{8}$



EJERCICIOS PROPUESTOS

a) Sea la función $y=3\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)x$, determine su grafica.

b) Sea la función $y=2\ \operatorname{sen}\ (2x-\pi)$, determine su grafica.

Una torre forma un ángulo de 113 o con el plano inclinado sobre el cual está y desde una distancia de 89 m de su base medida hacia abajo del plano se ve la torre bajo un ángulo de 23 o. Calcular la altura de la torre.

Dos boyas están apartada por una distancia de 64,2 m y un bote está a 74,1 m de la más cercana. El ángulo que forman las dos visuales del bote a las boyas es de27. ¿Qué distancia hay del bote a la boya más alejada?

Números Complejos

Un número de la forma $z=a+bi$, en que $a,b \in \mathbb{R}$ se llama número complejo y pertenece al Conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$.

- **z:** es el número complejo, $z \in \mathbb{C}$
- **a:** es la parte real
- **bi:** es la parte imaginaria
- **i:** es la unidad imaginaria, $i=\sqrt{(-1)}$

Tip

Si $a=0$ el número Z es un complejo puro
Si $b=0$ el número Z es real y no complejo
Luego, el conjunto $\mathbb{C}$ se define por:

$$\mathbb{C} = \{ x + iy \ / \ x, y \in \mathbb{R} \}$$

$$i = \sqrt{-1} = i$$
$$i^2 = -1$$
$$i^3 = -\sqrt{-1} = -i$$
$$i^4 = 1$$

y en general $\forall \ n \in \mathbb{Z}$

$$i^{4n-3} = \sqrt{-1} = i$$
$$i^{4n-2} = -1$$
$$i^{4n-1} = -\sqrt{-1} = -i$$
$$i^{4n} = 1$$

El conjunto de los números imaginarios es cíclico, siempre se repiten los mismos resultados (i,-1,-i y 1). Por ende, para obtener cualquier potencia de **i**, se debe tomar el exponente del número imaginario y dividirlo por **4**, si el resto resultante es **1** entonces el número imaginario será igual a **i**, si el resto obtenido es **2**, entonces el número imaginario será igual a **-1**, si el resto resultante es **3**, entonces el número imaginario será igual **-i** y si el resto obtenido es **0**, entonces el número imaginario será igual a **1**.

$i^1=i \longrightarrow$ resto 1
$i^2=-1 \longrightarrow$ resto 2
$i^3=-i \longrightarrow$ resto 3
$i^4=1 \longrightarrow$ resto 0

Ejemplo

Reducir hasta la mínima expresión utilizando las potencias de la unidad imaginaria

$i^2 - i^3 = -1+i$

$3i^4+2i-i^5-4 = 3*1+2i-i^3\, i^2-4 = 3+2i-(-1)(-i)-4=-1+i$

$: i^{343}: 343:4=85$ por tanto $i^{343}=-i$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Reducir hasta la mínima expresión utilizando las potencias de la unidad imaginaria

$i^{(-1)}+2i^{73}-i^{(-35)}$

$i^{37}+i^{126}$

Representación gráfica: El plano complejo

Sea el número complejo $z=x+yi$, z puede representarse gráficamente por el punto T de coordenadas rectangulares (x,y).

El punto O, de coordenadas $(0,0)$ representa el complejo $0 + 0i$. Todos los puntos del eje X tienen coordenadas de la forma $(x,0)$ y corresponden a números reales $x + 0i = x$. Por tal razón se llama al eje X eje de los reales o eje real.

Todos los puntos del eje Y tienen coordenadas de la forma $(0, y)$ corresponden a números imaginarios puros $0 + yi$. El eje Y se llama por eso eje de los imaginarios o eje imaginario.

El plano en que se representan los números complejos se llama plano complejo.

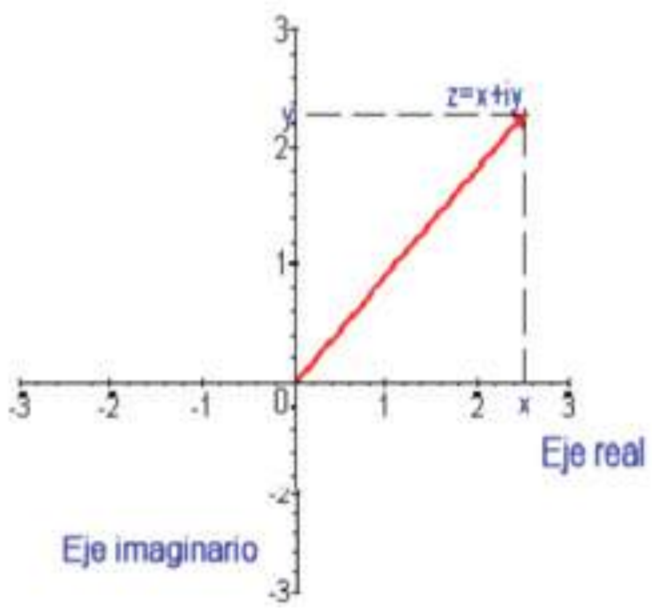
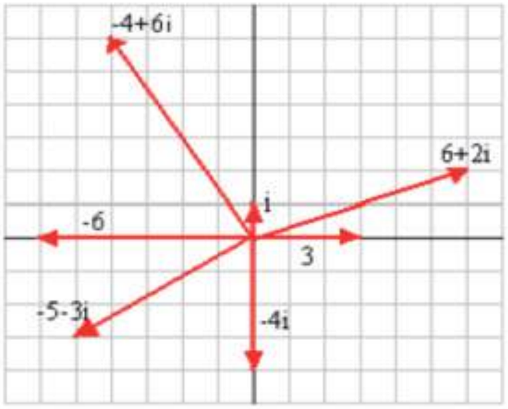


Ilustración 23 Plano complejo

Ejemplo

Represente gráficamente los siguientes números complejos

a) $-4+6i$
b) $6+2i$
c) 3
d) i
e) $-5-3i$
f) $-4i$
g) -6



Conjugado de un número complejo

El conjugado del número complejo $z = a + bi$ es $\bar{z} = a - bi$ (se lee el conjugado de zeta), y para obtenerlo se cambia el signo de la parte imaginaria del número complejo original)

Propiedades de los conjugados

a) $\bar{\bar{z}} = z$

b) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

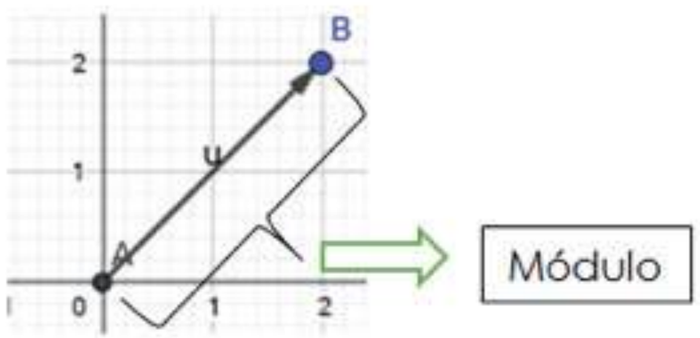
c) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

d) $z + \bar{z} = 2a + 0i = 2a, \forall a \in \mathbb{R}$

e) $z - \bar{z} = 0 + 2bi = 2bi, \forall b \in \mathbb{R}$

Módulo

$|z|=\sqrt{(a^2+b^2)}$ (Se lee el modulo de zeta, y es la distancía desde el origen hasta donde llega el complejo en el plano cartesiano)



Propiedades del Módulo

a) $|z| \geq 0$

b) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

c) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

d) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

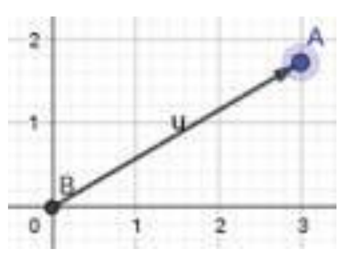
e) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1| - |z_2|$

Representaciones de los números complejos

Un número complejo se puede representar de 4 formas:

- Forma canónica = $3+\sqrt{3}\,i$
- Par ordenado = $(3,\sqrt{3})$
- Representación gráfica
- Forma polar = $2\sqrt{3}\ \mathrm{cis}(30°)$

Ilustración 25 Representación gráfica de un complejo



La forma polar se representa a través de la siguiente fórmula:

$r\text{cis}(\theta)=r(\cos(\theta)+i\,\text{sen}(\theta))$, donde r es la distancia desde el origen $(0,0)$ hasta el punto final del número complejo en este caso A y θ es el ángulo que forma este número complejo con el eje x y se obtiene aplicando la siguiente función trigonométrica $\theta=\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ entonces $\theta=30°$.

Operaciones con números complejos

Adición y sustracción

Para sumar o restar dos números complejos se suman o restan las partes reales y las imaginarias por separado.

Veamos el caso de la suma que es análogo a la resta.

$$\begin{aligned}(x+yi)+(a+bi) &= (x+a)+(yi+bi)\\ &= (x+a)+(y+b)i\end{aligned}$$

Ejemplo

$(2+3i)+(4-5i)=(2+4)+(3i-5i)=6+(-2i)=6-2i$

Multiplicación

Para multiplicar dos complejos, se usa la multiplicación de binomios y se utilizan las potencias de complejos vistas anteriormente.

$$\begin{aligned}(x+iy)(a+ib) &= xa+xib+iya+i^2yb\\ &= ax+bxi+ayi+i^2by\\ &= ax+i(bx+ayi)+(-1)by\\ &= (ax-by)+i(bx+ay)\end{aligned}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned}(2+3i)(4-5i) &= 8-10i+12i-15i^2\\ &= 8+2i-15(-1)\\ &= 8+2i+15\\ &= 23+2i\end{aligned}$$

División

Para la división de complejos se multiplica el numerador y el denominador por el conjugado del denominador.

$$\frac{(x+iy)}{(a+ib)} = \frac{(x+iy)}{(a+bi)}\,\frac{(a-bi)}{(a-bi)}$$

$$= \frac{(ax-bxi+ayi-byi^2)}{(a^2-abi+abi-b^2i^2)}$$

$$= \frac{(ax-bi(-1)+i(ay-by)}{(a^2+b^2)}$$

Ejemplo

$$\frac{(2+3i)}{(4-5i)} = \frac{(2+3i)(4+5i)}{(4-5i)(4+5i)}$$

$$= \frac{8+10i+12i+15i^2}{16+20i-20i-25i^2}$$

$$= \frac{8+22i-15}{16+25}$$

$$= \frac{-7+22i}{41}$$

$$= \frac{-7}{41} + \frac{22}{41}i$$

Teorema de Moivre

$z = |z|\ \mathrm{cis}(\theta) \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$

Esta fórmula se utiliza para calcular potencias de números complejos, como por ejemplo $(1+i)^{20}$.

$$\sqrt[n]{z} = |z|^{\frac{1}{n}} cis\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), k = 0, \ldots\ldots, n-1$$

Esta fórmula se utiliza para calcular las raíces de un número complejo, como, por ejemplo, $\sqrt[3]{(2\text{-}3i)}$.

Ejercicio

Encuentre las soluciones de la siguiente ecuación para $z \in C$:
$2z^4-4z^2+4=0$

Solución: se procede factorizando por 2
$2(z^4-2z^2+2)=0$, luego queda $z^4-2z^2+2=0$

Completamos el cuadrado:
$(z^2-1)^2+1 = 0$
$(z^2-1)^2 = -1$/ se aplica raíz cuadrada
$|z^2-1| = i \rightarrow z^2-1=i \lor z^2-1=-i$
$z^2 = 1+i \lor z^2=1-i$

$z^2 = \sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{4}\right) \lor z^2 = \sqrt{2}cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Se aplica el teorema de Moivre (cálculo de raíces de un complejo)
Caso 1:

$$z_k = \sqrt[4]{2}cis\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}\right); con\ k = 0,1$$

$$z_0 = \sqrt[4]{2}cis\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$z_1 = \sqrt[4]{2}cis\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{2}\right)$$

$$z_1 = \sqrt[4]{2}cis\left(\frac{9\pi}{8}\right)$$

Caso 2:

$$z_k = \sqrt[4]{2}cis\left(\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}\right); con\ k = 0,1$$

$$z_0' = \sqrt[4]{2}cis\left(\frac{-\pi}{8}\right)$$

$$z_1' = \sqrt[4]{2}cis\left(\frac{7\pi}{8}\right)$$

Por lo tanto, la solución de las ecuaciones dadas es $\{z_0, z_1, z_0'\ y\ z_1'\}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Sean los complejos $Z_1=1+i$ y $Z_2=2-i$ calcule:

a) $Z_1\,Z_2$

b) Z_1+Z_2

c) $\overline{Z}_1$

d) $\frac{z_1}{z_2}$

Resuelva y exprese los resultado en las cuatro formas posibles

a) $2(3+i)-4(5+i)-7(4-i)$

b) $(3+2i)^2$

c) $\frac{2+4i}{4-2i}$

d) $6-3(5-\frac{2}{5}i)$

Te invitamos a ver:

Polinomios

Un polinomio es una función P definida por la ecuación
$P(x)=a_n x^n+a_{(n-1)} x^{(n-1)}+a_{(n-2)}\text{-}x^{(n-2)}+\cdots+a_1 x^1+a_0 x^0$
con a valores constantes y $n \in N$.
El grado del polinomio es la mayor potencia de la variable x.
La operatoria con polinomios fue vista en el primer capítulo de la presente guía "Conceptos fundamentales del álgebra". Luego de haber estudiado con detención dichos aspectos nos abocaremos a la división y a encontrar las raíces.

Descomposición en suma de fracciones parciales.

Definición:
Sean $p(x)$ y $q(x) \in k(x), q(x) \neq 0$, llamaremos fracción racional al cuociente: $\frac{p(x)}{q(x)}$

Ejemplo

$$\frac{2x+4}{3x+5}, con\ x \neq \frac{-5}{3}$$

Se llama fracción propia a la fracción racional $\frac{p(x)}{q(x)}$ donde $gr\ (\ p(x)\ ) < gr\ (\ q(x)\ )$. Esto quiere decir que el grado de $p(x)$ es menor que el grado de $q(x)$.

Ejemplo

Fracción propia:

$$\frac{2x+5}{x^2-x-6}$$

si $gr(p(x)) \geq gr(q(x))$, se efectúa la división de modo que:
$\frac{p(x)}{q(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$, donde $gr(r(x)) < gr(q(x))$ y la fracción $\frac{r(x)}{q(x)}$ es propia.

Teorema de descomposición en suma de fracciones parciales

Cualquier fracción propia $\frac{p(x)}{q(x)}$ con $p(x)$,$d(x) \in R[x]$, se puede descomponer en suma de fracciones parciales como sigue:

Si $q(x)$ tiene un factor lineal de la forma $ax+b$, no repetido, entonces la descomposición en fracciones parciales tiene un término de la forma:

$\frac{A}{ax+b}$,donde A es constante.

Si $q(x)$ tiene un factor lineal de la forma ax+b, repetido k veces, es decir $(ax+b)^k$, entonces la descomposición en fracciones parciales contiene los términos: $\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\frac{A_3}{(ax+b)^3}+\cdots+\frac{A_k}{(ax+b)^k}$, A_i, $i=1,2,\ldots\ldots,k$ son constantes.

Si $q(x)$ tiene un factor cuadrático irreductible de la forma ax^2+bx+c, no repetido, entonces la descomposición en fracciones parciales contiene un término de la forma: $\frac{Ax+b}{ax^2+bx+c}$, A y B son constantes.

Si $q(x)$ tiene un factor cuadrático irreductible en R[x] de la forma ax^2+bx+c, repetido k veces, es decir, $(ax^2+bx+c)^k$, entonces la descomposición en fracciones parciales contiene los términos:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\frac{A_3x+B_3}{(ax^3+bx+c)^3}+\cdots+\frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k}, A_i \text{ y } B_i$$

con $i=1,2,\ldots\ldots,k$ son constantes.

Regla de Ruffini

Esta regla se utiliza para dividir polinomios, siendo el divisor $(x-c)$, de manera rápida.
Para dividir $p(x)=a_n x^n+a_{(n-1)} x^{(n-1)}+\cdots+a_1 x+a_0$, $p(x) \in p_n(R)$ y $c \in R$. (polinomio) por $(x-c)$, construimos la siguiente tabla para calcular los b_i, con $i \in \{0,\ldots.,n-1\}$:

	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_1	a_0
c					
	$b_{n-1}=a_n$				

En el paso $i\leq 1$, multiplicabamos $b_{(i+1)}$ por c y sumamos el resultado a $a_{(i+1)}$. O sea $b_i=a_{(i+1)}+b_{(i+1)}c$.

	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_1	a_0
c		$b_{n-1}c$	$\cdots$	b_1c	b_0c
	$b_{n-1}=a_n$	$b_{n-2}=a_{n-1}+b_{n-1}c$	$\cdots$	$b_0=a_1+b_1c$	$r=a_0+b_0c$

Luego, el cuociente de dividir p por x−c es:
$q(x)=b_{(n-1)} x^{(n-1)}+ b_{(n-2)} x^{(n-2)}+\cdots+b_1 x+b_0$.

Además, el último término calculado en la tabla es el resto de dividir p por $(x-c)$:
$r(x)=r=a_0+b_0c$.
$p(x)=q(x)(x-c)+r(x)$

Luego, el cuociente de dividir p por x-c es:
$q(x)=b_{(n-1)}\, x^{(n-1)}+ b_{(n-2)}\, x^{(n-2)}+\cdots+b_1\, x+b_0$.
Además, el último término calculado en la tabla es el resto de dividir p por $(x-c)$:
$r(x) = r = a_0+b_0\, c$.
$p(x) =q(x)\,(x-c) + r(x)$.

Ejemplo

$p(x)=-2x^3+x^2+x-1:(x+1)$

	-2	1	1	-1	En esta fila se anotan los coeficientes de $p(x)$
-1		2	-3	2	Es el resultado de multiplicar el -1 con la fila 1
	2	3	-2	1	

$2x^2+3x-2; resto=1$ Es la suma de la primera fila con la segunda.

Cuando se anotan los coeficientes del polinomio, éste debe estar ordenado del grado mayor al menor y si no aparece un grado se considera un coeficiente de cero es decir, $q(x)=x^2+4$, entonces sus grados serían, 1,0 y 4, ya que el polinomio real es $q(x)=x^2+0x+4$.

Teorema fundamental del álgebra

Todo polinomio de grado n, con coeficientes complejos, tiene n raíces complejas.
Propiedades.

Sea $p\in P(R)$ y $z\in C$ una raíz de p, entonces, el conjugado $\bar{z}$ también es raíz de p.

Sea $p\in P(R)$ y $a+\sqrt{b}$, con $a,b\in R$ y $\sqrt{b}\in I$, una raíz de p, entonces $a-\sqrt{b}$, es también raíz de p.

Sea $p(x) \in P(R)$, con coeficientes $a_0,\ldots,a_n\in Z$ (polinomio con coeficientes enteros). Para calcular las raices racionales de p(x) se determinan todos los divisores r de a_0 y todos los divisores s de a_n, luego se forman todos los números r/s posibles y se verifican cuales de ellos son raíces.

Ejemplo

Encuentre las raíces en C de $p(x)=x^5+9x^3-4x^4-18x^2+20x-8$
Las posibles raices son los divisores de 8, es decir, $\{\pm1,\pm2,\pm4,\pm8\}$

	1	-4	9	-18	20	-8
1		1	-3	6	-12	8
	1	-3	6	-12	8	0
1		1	-2	4	-8	
	1	-2	4	-8	0	
2		2	0	8		
	1	0	4	0		

Luego el polinomio se puede factorizar como
$p(x)=(x-1)^2\,(x-2)(x^2+4)=(x-1)^2\,(x-2)(x-2i)(x+2i)$, por lo tanto las raices son $\{1,2,2i,-2i\}$

Ejemplo

Descomponga en suma de fracciones parciales:

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)}$$

Solución:

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{bx+c}{x^2+1}=\frac{A(x^2+1)+x(bx+c)}{x(x^2+1)}$$

$$=\frac{x^2(A+B)+cx+A}{x(x^2+1)}$$

$A+B=1$
$C=0$
$A=-1$, por lo tanto $B=2$

Por consiguiente, la descomposición queda:

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)}=\frac{-1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Encuentre las raíces de los siguientes polinomios

a) x^3-7x-6
b) $x^4-5x^3+5x^2+5x-6$
c) x^5-16
d) $3x^3-10x^2+9x-2$

2. Es 2 una raíz de x^4-2x^2-x+7

Bibliografía

Barnett, R. (1998). Álgebra y Trigonometría. México. Editorial McGraw-Hill.

Hernández, E. (1994). Álgebra y Trigonometría. España, Madrid. Addison Wesley Editores.

Leithold, L. (1994). Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. México. Editorial Harla.

Swokowski, E. (1998). Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. Madrid. Grupo Editorial Iberoamericano.

ZILL, D. (1997). Álgebra y Trigonometría. Madrid, España. Editorial McGraw-Hill.

Además de estos textos que te recomendamos estudies, nos hemos basado en las guías de estudio elaboradas por la oficina de apoyo docente de la Facultad de Ingeniería UCSC.

¡¡Revisa la bibliografía!!
¿Has consultado los textos que menciona el programa del curso?