Análise Matemática I

Feliz Minhós

Conteúdo

Objectivos Gerais

Considerando esta unidade curricular no âmbito da formação pessoal e científica, em geral, e da formação matemática em particular, o aluno deverá:

- Desenvolver capacidades de abstracção, dedução lógica e análise.
- Adquirir métodos e técnicas estruturantes do raciocínio científico e matemático que proporcione um espírito crítico.
- Dominar conteúdos matemáticos associados à Análise Real, nomeadamente sucessões, funções, séries, Cálculo Diferencial e Integral em R, ao nível de conceitos e aplicações.
- Utilizar conhecimentos matemáticos na resolução de problemas e interpretação da realidade.
- Adquirir competências matemáticas que possam vir a ser desenvolvidas e aplicadas em contexto profissional empresarial, de investigação ou de ensino.

Introdução

O que é a Análise Matemática ou simplesmente Análise?

É o ramo da Matemática que se ocupa dos números e das relações entre eles, expressos por meio de igualdades, desigualdades e operações.

As operações fundamentais da Análise são: adição, subtracção, multiplicação, divisão, radiciação e passagem ao limite.

A Análise diz-se Análise Algébrica ou Álgebra quando não emprega a passagem ao limite.

Diz-se Análise Infinitesimal se usar a noção de limite, e portanto de infinito, quer directa quer indirectamente (séries, derivadas, integrais,...)

Capítulo 1

Sucessões

1.1 Definição

As sucessões são funções reais de varíável natural.

Definição 1.1.1 *Dado um conjunto $A \neq \varnothing$, chama-se sucessão de termos em A a qualquer aplicação de $\mathbb{N}$ em A.*

Exemplo 1.1.2 *As aplicações*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ & n & \longmapsto & 3n-4 \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{Q} \\ & n & \longmapsto & \frac{5n+2}{n+1} \end{array}$$

são exemplos de sucessões.

Se o conjunto de chegada for $\mathbb{R}$ então diz-se uma sucessão de números reais.

Designa-se por u_n.

Aos valores imagens da sucessão chamam-se termos da sucessão e designam-se por $u_1, u_2, ...u_n, , ...$, isto é, 1^o termo, 2^o termo,...,enésimo-termo ou termo de ordem n.

À expressão u_n chama-se termo geral da sucessão.

Ao contradomínio da aplicação chama-se conjunto de todos os termos da sucessão.

Modos de definir uma sucessão:

1. Dado o termo geral

Dada a "lei"que permite obter as imagens a aplicação fica definida, já que o seu domínio é sempre $\mathbb{N}$.

Exercício 1.1.3 *Considere a sucessão $u_n = \frac{2n-5}{n+3}$.*
a) Calcule o 2º e o 10º termos.
b) Determine u_{p+2}.

2. Por recorrência

Os termos da sucessão são calculados a partir dos termos anteriores.

Exemplo 1.1.4 *a)* $\begin{cases} u_1 = 3 \\ \\ u_{n+1} = 2u_n + 4, \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

b) $\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_2 = 3 \\ v_{n+2} = v_n + v_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Exercício 1.1.5 *Calcule os quatro primeiros termos de cada uma das sucessões anteriores e represente-os graficamente.*

Exercício 1.1.6 *Considere a sucessão*

$$w_n = \frac{3n+4}{5n+2}.$$

Verifique se $\frac{7}{11}$ *e* $\frac{5}{7}$ *são termos da sucessão e, em caso afirmativo, indique a sua ordem.*

1.2 Subsucessão

Definição 1.2.1 *Designa-se por subsucessão de* u_n *qualquer sucessão que resulte da supressão de alguns termos de* u_n *.*

Exercício 1.2.2 *(i) Dada a sucessão* $u_n = (-1)^n (n+3)$*, calcule:*
a) A subsucessão de u_n *dos termos de ordem par.*
b) A subsucessão de u_n *dos termos de ordem ímpar.*
c) A subsucessão de u_n *dos termos cuja ordem é multipla de* 5.
(ii) Represente gráficamente os três primeiros termos de cada subsucessão.

1.3 Sucessões monótonas

Definição 1.3.1 *Seja* u_n *uma sucessão.*
(i) u_n *diz-se crescente se* $u_{n+1} \geq u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *isto é, se* $u_{n+1} - u_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
(ii) u_n *é estritamente crescente se* $u_{n+1} > u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *isto é, se* $u_{n+1} - u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
(iii) u_n *diz-se decrescente se* $u_{n+1} \leq u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *isto é, se* $u_{n+1} - u_n \leq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(iv) u_n *é estritamente decrescente se* $u_{n+1} < u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *isto é, se* $u_{n+1} - u_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definição 1.3.2 *Uma sucessão crescente ou decrescente, em sentido lato ou estrito, é uma sucessão monótona.*

Exercício 1.3.3 *Estude e classifique quanto à monotonia as sucessões:*
a) $a_n = \frac{3n}{n+2}$

b) $b_n = \frac{1-4n}{n+1}$

c) $c_n = \cos(n\pi)$

d) $d_n = -3n$

Observação 1.3.4 *Uma sucessão crescente é limitada inferiormente, isto é, minorada. Pode ser, ou não, limitada superiormente (majorada). Analogamente, qualquer sucessão decrescente é majorada, podendo ser, ou não, minorada.*

1.4 Sucessões limitadas

Definição 1.4.1 *Uma sucessão* u_n *diz-se limitada se o conjunto dos seus termos for um conjunto limitado. Isto é, se existirem números reais* A *e* B *tais que*

$$A \leq u_n \leq B,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

De modo análogo pode definir-se sucessão limitada se

$$\exists L > 0 : |u_n| \leq L, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exercício 1.4.2 *Das sucessões seguintes indique as que são limitadas, referindo neste caso um majorante e um minorante para o conjunto dos seus termos:*
a) $a_n = \frac{3n}{n+2}$

b) $d_n = -3n$

c) $c_n = \cos(n\pi)$

Exercício 1.4.3 *Prove que a sucessão* $d_n = -3n$ *não é limitada.*

1.5 Indução Matemática

O método de Indução Matemática permite provar propriedades no conjunto dos números naturais.

Baseia-se no Princípio de Indução Matemática:

Suponhamos que se pretende provar que uma condição $C(n)$ se transforma numa proposição verdadeira sempre que se substitua n por um número natural.

Basta assegurar que se verificam as duas condições seguintes:

1. $C(1)$ é verdadeira
2. $C(n)$ é uma condição hereditária, isto é, se $C(p)$ é verdadeira então $C(p+1)$ yambém é verdadeira

Algumas propriedades importantes provam-se com recurso a este método:

Proposição 1.5.1 *(Desigualdade de Bernoulli) Se* $x \in \mathbb{R}$ *verifica* $1+x \geq 0$ *então*

$$(1+x)^n \geq 1+nx,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dem. Para $n=1$, tem-se uma igualdade trivial : $1+x=1+x$.

Por hipótese, admitinda-se que a proposição é verdadeira para $n=p$, isto é,

$$(1+x)^p \geq 1+px.$$

Verifica-se então se a tese é verdadeira, ou seja, se a proposição é verdadeira para $n=p+1$:

$$(1+x)^{p+1} \geq 1+(p+1)\,x.$$

Ora

$$\begin{aligned}(1+x)^{p+1} &= (1+x)^p(1+x) \geq (1+px)(1+x)\\ &= 1+x+px+px^2 = 1+(p+1)\,x+px^2\\ &\geq 1+(p+1)\,x.\end{aligned}$$

Então, pelo método de indução matemática

$$(1+x)^n \geq 1+nx,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

■

Exercício 1.5.2 *Utilizando o método de indução matemática prove que:*

a) $8^n : 2^n = 4^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k) = n(n+1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1.6 Noção de vizinhança

Quando se toma um valor aproximado de um número real a, considerando um valor aproximado de a comete-se um certo erro $\delta > 0$.

Isto é, considera-se um valor na vizinhança de a,ou seja em $]a-\delta, a+\delta[$.

Definição 1.6.1 *Seja $a \in \mathbb{R}$. Chama-se vizinhança de a de raio $\delta > 0$,e nota-se por $V_\delta(a)$ ao conjunto*

$$\begin{aligned} V_\delta(a) &= \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \delta\} \\ &=]a-\delta, a+\delta[. \end{aligned}$$

Ou seja, é o conjunto de todos os valores aproximados de a com erro inferior a δ.

Exercício 1.6.2 *Represente na forma de intervalo de números reais:*
a) $V_{0.2}(4)$
b) $V_{0.02}(-2,3)$

Exercício 1.6.3 *Defina como uma vizinhança os conjuntos:*
a) $]2,32; 2,48[$

b) $\{x \in \mathbb{R} : |x+3| < 0,001\}$

Exercício 1.6.4 *Considere a sucessão $u_n = \frac{2+3n}{2n+3}$. Prove que a partir de u_{11} (exclusive) todos os termos verificam*

$$u_n \in V_{0,1}\left(\frac{3}{2}\right).$$

Interprete graficamente.

1.7 Sucessões convergentes. Propriedades

Definição 1.7.1 *A sucessão u_n converge para um valor $a \in \mathbb{R}$ se, para qualquer valor positivo δ, existe uma ordem a partir da qual todos os termos da sucessão pertencem a $V_\delta(a)$.*
Simbolicamente

$$\lim u_n = a \Leftrightarrow \forall \delta > 0 \ \exists p \in \mathbb{N}\text{: } n > p \Longrightarrow |u_n - a| < \delta.$$

Exercício 1.7.2 *Provar por definição que*

$$\lim \frac{2+3n}{2n+3} = \frac{3}{2}.$$

Definição 1.7.3 *(i) As sucessões que têm por limite um número finito dizem-se convergentes.*
(ii) As sucessões que não são convergentes dizem-se divergentes.
(iii) Uma sucessão convergente para 0 *diz-se um infinitésimo.*

Definição 1.7.4 *(i) Um elemento $a \in \mathbb{R}$ diz-se um ponto de acumulação do conjunto $A \subset \mathbb{R}$, não vazio, se em qualquer vizinhança de a existe pelo menos um elemento de A diferente de a.*
Simbolicamente
a é um ponto de acumulação do conjunto A se $\forall \delta > 0$, $(V_\delta(a) \backslash \{a\}) \cap A \neq \varnothing$.
(ii) Um ponto $a \in A$ que não seja ponto de acumulação chama-se um ponto isolado.
Isto é, a é um ponto isolado se $\exists \delta > 0 : V_\delta(a) \cap A = \{a\}$.

Exercício 1.7.5 *Indique o conjunto de todos os pontos de acumulação dos conjuntos:*
a) $M = \{-1, 5\} \cup [0, 2]$
b) $N = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

Exercício 1.7.6 *Prove que um conjunto finito não tem pontos de acumulação.*

Proposição 1.7.7 *O elemento $a \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de $A \subset \mathbb{R}$ se, e só se, é limite de uma sucessão de pontos de A distintos de a.*

Dem. ($\Longrightarrow$) Suponhamos que $a \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de $A \subset \mathbb{R}$.
Então, para cada $n \in \mathbb{N}$ existem pontos $u_n \in V_{\frac{1}{n}}(a) \cap (A \backslash \{a\})$, ou seja, $|u_n - a| < \frac{1}{n}$ e $u_n \to a$.

($\Longleftarrow$) Seja $u_n \in A$, para cada $n \in \mathbb{N}$, com $u_n \neq a$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tal que $u_n \to a$.

Então $|u_n - a| < \delta$, $\forall \delta > 0$. Assim $u_n \in V_\delta(a)$, $\forall \delta > 0$, pelo que $a \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de A. ■

Teorema 1.7.8 *(Teorema de Bolzano-Weierstrass) Todo o conjunto $A \subset \mathbb{R}$ infinito e limitado admite, pelo menos, um ponto de acumulação.*

Corolário 1.7.9 *Toda a sucessão limitada em $\mathbb{R}$ admite, pelo menos, uma subsucessão convergente.*

Dem. Seja U o conjunto de termos da sucessão limitada u_n.

Se U é finito então existe $a \in U$ que se repete infinitas vezes e, por consequência, é limite de uma subsucessão constante igual a a, pelo que é convergente para a.

Se U é um conjunto infinito, como é limitado, pelo Teorema 1.7.8, tem pelo menos um ponto de acumulação.

Então, pela Proposição 1.7.7, a é limite de uma sucessão de pontos de U. ■

Vejamos algumas propriedades das sucessões convergentes e as suas relações com as sucessões limitadas.

Teorema 1.7.10 *(Unicidade do limite) O limite de uma sucessão convergente, quando existe, é único.*

Dem. Suponha-se, com vista a um absurdo, que existe uma sucessão u_n tal que $u_n \to a$ e $u_n \to b$ com $a \neq b$.

Dado $\delta > 0$ arbitrário,

$$\begin{aligned} \exists n_0 &\in \mathbb{N} : n > n_0 \Longrightarrow |u_n - a| < \frac{\delta}{2}, \\ \exists n_1 &\in \mathbb{N} : n > n_1 \Longrightarrow |u_n - b| < \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

Tomando $p := \max\{n_0, n_1\}$ tem-se que para $n > p$ são válidas as duas desigualdades anteriores e

$$|a - b| = |a - u_n + u_n - b| \leq |a - u_n| + |u_n - b| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

O que está em contradição com a hipótese de $a \neq b$.

Logo $a = b$. ■

Teorema 1.7.11 *Se u_n é uma sucessão convergente então qualquer das suas subsucessões é convergente para o mesmo limite.*

Dem. Seja u_n uma sucessão tal que $u_n \to a$ e v_n uma subsucessão de u_n.

Assim os termos de v_n também são termos de u_n, pelo que também verificam a proposição

$$\forall \delta > 0 \ \exists p \in \mathbb{N}\text{: } n > p \Longrightarrow |v_n - a| < \delta,$$

ou seja $v_n \to a$. ■

Teorema 1.7.12 *Toda a sucessão convergente é limitada.*

Dem. Suponhamos $u_n \to a$ e fixe-se um valor real $\delta > 0$. Então para $n > p$ tem-se que $u_n \in \left]a - \delta, a + \delta\right[$, isto é, $a - \delta < u_n < a + \delta$.

Então fora deste intervalo estão um número finito de termos. Concretamente $u_1, ..., u_p$

Considere-se

$$M := \max\left\{|u_1|, ..., |u_p|, |a - \delta|, |a + \delta|\right\}.$$

Então

$$-M \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N},$$

pelo que u_n é limitada. ■

Teorema 1.7.13 *Toda a sucessão monótona e limitada é convergente.*

Dem. Seja u_n uma sucessão monótona e limitada. Como o conjunto dos termos da sucessão é majorado (e minorado) então existe supremo desse conjunto. Designe-se $c := \sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Pela definição de supremo, c é o menor dos majorantes, pelo que, para cada $\delta > 0$, $c - \delta$ não é majorante. logo existe pelo menos uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que $c - \delta < u_p$.

Sendo u_n uma sucessão monótona ela poderá ser crescente ou decrescente.

Suponhamos que u_n é crescente.

Assim teremos

$$c - \delta < u_p \leq u_n \text{ para } n \geq p.$$

Como c é supremo, é maior que todos os termos de u_n e então

$$c - \delta < u_n < c < c + \delta.$$

Ou seja

$$\forall \delta > 0 \ \exists p \in \mathbb{N}\colon \ n > p \Longrightarrow c - \delta < u_n < c + \delta,$$

isto é, $u_n \to c$. Então u_n é uma sucessão convergente (para o supremo do conjunto dos termos da sucessão).

Se u_n f uma sucessão decrescente.a demonstração é semelhante mas utilizando

$$d := \inf \{u_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

■

1.8 Operações algébricas com sucessões

As operações consideradas em $\mathbb{R}$ estendem-se naturalmente às sucessões reais.

Considerem-se duas sucessões u_n e v_n.

Define-se soma de u_n e v_n à sucessão que se obtem adicionando os termos da mesma ordem das duas sucessões e cujo termo geral se obtem como $(u+v)_n$.

Isto é, $(u+v)_n = u_n + v_n$

De modo análogo se define a diferença, o produto e o cociente de u_n e v_n, admitindo-se este último apenas na condição de $v_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Em resumo,

$$\begin{aligned} (u-v)_n &= u_n - v_n \\ (u \times v)_n &= u_n \times v_n \\ \left(\frac{u}{v}\right)_n &= \frac{u_n}{v_n}, \ v_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

As definições de soma e produto estendem-se de forma óbvia a casos em que se adicione ou multiplique um número finito de sucessões.

Os próximos teoremas jogam com a noção de limite e a relação de ordem no conjunto dos reais.

Teorema 1.8.1 *(Passagem ao limite numa desigualdade) Sejam u_n e v_n duas sucessões convergentes.*
Se a partir de certa ordem se verifica $u_n \leq v_n$ então

$$\lim u_n \leq \lim v_n.$$

Dem. Considerem-se duas sucessões convergentes u_n e v_n tais que $u_n \to a$ e $v_n \to b$. Assim

$$\begin{aligned} \forall \delta &> 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N}\colon \; n > n_0 \Longrightarrow |u_n - a| < \delta, \\ \forall \delta &> 0 \; \exists n_1 \in \mathbb{N}\colon \; n > n_1 \Longrightarrow |v_n - b| < \delta \end{aligned}$$

e seja n_1 a ordem a partir da qual se verifica $u_n \leq v_n$.

Suponha-se, com vista a uma contradição, que $a > b$ e considere-se $\delta := \frac{a-b}{2}$ (> 0 porque $a > b$).

Seja $p := \max\{n_0, n_1, n_2\}$. Então para $n \geq p$ tem-se

$$v_n - b < \delta = \frac{a-b}{2}, \; -\delta < u_n - a$$

e

$$v_n < b + \frac{a-b}{2} = a - \frac{a-b}{2} < u_n.$$

Ora esta desigualdade contradizo facto de a partir da ordem p se tem $u_n \leq v_n$.

Logo $a \leq b$, isto é, $\lim u_n \leq \lim v_n$. ■

Corolário 1.8.2 *Se a partir de certa ordem a sucessão convergente v_n verifica $v_n \geq 0$, então*

$$\lim v_n \geq 0.$$

Dem. Basta fazer na demonstração anterior $u_n \equiv 0$. ■

Teorema 1.8.3 *O produto de um infinitésimo por uma sucessão limitada é um infinitésimo.*
Isto é, se u_n é uma sucessão limitada e v_n um infinitésimo, então

$$\lim (u_n \times v_n) = 0.$$

Dem. Seja u_n uma sucessão limitada e v_n um infinitésimo.

Então

$$\exists L > 0 : |u_n| \leq L, \; \forall n \in \mathbb{N}$$

e como $v_n \to 0$ então

$$\forall \delta > 0 \; \exists p \in \mathbb{N}\colon \; n > p \Longrightarrow |v_n| < \frac{\delta}{L}.$$

Assim, para $n > p$,

$$|v_n \times u_n - 0| = |v_n| \times |u_n| \leq |v_n| \times L \leq \frac{\delta}{L} \times L = \delta.$$

Então $(v_n \times u_n) \to 0$, isto é, $(v_n \times u_n)$ é um infinitésimo. ■

1.9 Propriedades algébricas dos limites

Os teoremas que se seguem relacionam as propriedades algébricas fundamentais com as noções de convergência e limite.

Teorema 1.9.1 *Sejam u_n e v_n duas sucessões convergentes.*
1*.* $(u+v)_n$ *é uma sucessão convergente e* $\lim (u+v)_n = \lim u_n + \lim v_n$.

2*.* $(u\times v)_n$ *é uma sucessão convergente e* $\lim (u\times v)_n = \lim u_n \times \lim v_n$.

3. $(k\times u)_n$ *é uma sucessão convergente e* $\lim (k\times u)_n = k \times \lim u_n$.

4*.* $\left(\frac{u}{v}\right)_n$ *é uma sucessão convergente desde que* $v_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$*,e* $\lim \left(\frac{u}{v}\right)_n = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}$*, se* $\lim v_n \neq 0$.

5. $(u_n)^p, p \in \mathbb{Z}$*, é uma sucessão convergente (com* $u_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$*, se* $p<0$*) e* $\lim (u_n)^p = (\lim u_n)^p$.

6*.* $\sqrt[p]{u_n}$ *é uma sucessão convergente, se* $u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$*, e* $\lim \sqrt[p]{u_n} = \sqrt[p]{\lim u_n}$.

Se p for ímpar e $u_n < 0$ *a propriedade permanece válida.*

Dem. Sejam u_n e v_n duas sucessões convergentes tais que $u_n \to a$ e $v_n \to b$. Ou seja

$$\begin{aligned} \forall \delta &> 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\colon\ n > n_0 \Longrightarrow |u_n - a| < \frac{\delta}{2}, \\ \forall \delta &> 0\ \exists n_1 \in \mathbb{N}\colon\ n > n_1 \Longrightarrow |v_n - b| < \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

1. Considerando $p := \max\{n_0, n_1\}$, tem-se que para $n \geq p$ são válidas as duas proposições e

$$\begin{aligned} |(u_n+v_n)-(a+b)| &= |(u_n-a)+(v_n-b)| \\ &\leq |u_n-a|+|v_n-b| < \frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2} = \delta. \end{aligned}$$

Então $\lim (u_n+v_n) = a+b = \lim u_n + \lim v_n$.

2. Note-se que

$$\begin{aligned} (u_n \times v_n) - (a\times b) &= u_n v_n - u_n b + u_n b - ab \\ &= u_n (v_n - b) + (u_n - a)\, b, \end{aligned}$$

u_n é uma sucessão limitada (pois é convergente), $v_n - b$ e $u_n - a$ são infinitésimos.

Então

$$\lim\left(u_n v_n - ab\right) = \lim\left[u_n\left(v_n - b\right)\right] + \lim\left[\left(u_n - a\right) b\right] = 0.$$

3. É um caso particular de 2. com $v_n \equiv k$ $(k \in \mathbb{R})$.

4. Como $v_n \to b \neq 0$, por 2., tem-se que $v_n b \to b^2 > 0$, ou seja $-\delta < v_n b - b^2 < \delta$.

Escolha-se $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que existe $p \in \mathbb{N}$ em que para $n \geq p$ se tem $v_n b > b^2 - \delta > 0$.

Assim, considerando apenas os termos cuja ordem é maior que p (os que não forem são em número finito), obtem-se

$$0 < \frac{1}{v_n b} < \frac{1}{b^2 - \delta},$$

pelo que a sucessão (ou subsucessão se for necessário) $\frac{1}{v_n b}$ 'e limitada.

Note-se que se tem:

· $\frac{u_n}{v_n} - \frac{a}{b} = \frac{u_n b - a\ v_n}{v_n b} = \left(u_n b - a\ v_n\right) \frac{1}{v_n b}$.

· $\lim\left(u_n b - a\ v_n\right) = \lim\left(u_n b\right) + \lim\left(-a\ v_n\right) = ab - ab = 0$.

Então

$$\lim\left(\frac{u_n}{v_n} - \frac{a}{b}\right) = \lim\left(u_n b - a\ v_n\right) \frac{1}{v_n b} = 0,$$

pelo que $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}$.

5. Se $p = 0$, $\left(u_n\right)^p \equiv 1$ e $\lim\left(u_n\right)^p = \lim 1 = 1 = \left(\lim u_n\right)^p$.

Se $p \in \mathbb{N}$, demonstra-se por indução.

Para $p = 1$ a proposição é verdade.

Para provar a tese,

$$\begin{aligned}\lim\left(u_n\right)^{k+1} &= \lim\left[\left(u_n\right)^k u_n\right] = \lim\left[\left(u_n\right)^k\right] \lim u_n \\ &= \left(\lim u_n\right)^k \lim u_n = \left(\lim u_n\right)^{k+1}.\end{aligned}$$

Se $p \in \mathbb{Z}^-$ coloca-se $p = -k$, com $k \in \mathbb{N}$ e para $u_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\lim\left(u_n\right)^{-k} = \lim\left(\frac{1}{\left(u_n\right)^k}\right) = \frac{1}{\lim\left(u_n\right)^k} = \frac{1}{\left(\lim u_n\right)^k} = \left(\lim u_n\right)^{-k}.$$

6. Provar primeiro por indução em p, que a relação

$$u^p - v^p = (u - v)\left(u^{p-1} + u^{p-2} v + u^{p-3} v^2 + \cdots + u v^{p-2} + v^{p-1}\right)$$

é válida para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}$.

Para $n=1$, $u-v=u-v$, verdade.
Para $p=k+1$,

$$\begin{aligned} u^{k+1}-v^{k+1} &= \left(u^{k+1}-uv^{k}\right)+\left(uv^{k}-v^{k+1}\right)=u\left(u^{k}-v^{k}\right)+v^{k}\left(u-v\right) \\ &= u\left(u-v\right)\left(u^{k-1}+u^{k-2}v+u^{k-3}v^{2}+\cdots+uv^{p-2}+v^{p-1}\right)+v^{k}\left(u-v\right) \\ &= \left(u-v\right)\left(u^{k}+u^{k-1}v+u^{k-2}v^{2}+\cdots+u^{2}v^{p-2}+uv^{p-1}+v^{k}\right). \end{aligned}$$

Considere-se $a>0$. Substituindo na igualdade anterior $u=\sqrt[p]{u_n}$ e $v=\sqrt[p]{a}$, obtem-se

$$(\sqrt[p]{u_n})^p-\left(\sqrt[p]{a}\right)^p=\left(\sqrt[p]{u_n}-\sqrt[p]{a}\right)\left[(\sqrt[p]{u_n})^{p-1}+\cdots+(\sqrt[p]{u_n})\left(\sqrt[p]{a}\right)^{p-2}+\left(\sqrt[p]{a}\right)^{p-1}\right]$$

e

$$\sqrt[p]{u_n}-\sqrt[p]{a}=\frac{u_n-a}{\left(\sqrt[p]{u_n}\right)^{p-1}+\cdots+\left(\sqrt[p]{u_n}\right)(\sqrt[p]{a})^{p-2}+(\sqrt[p]{a})^{p-1}}.$$

Assim

$$\left|\sqrt[p]{u_n}-\sqrt[p]{a}\right|=\frac{|u_n-a|}{\left|\left(\sqrt[p]{u_n}\right)^{p-1}+\cdots+(\sqrt[p]{a})^{p-1}\right|}\leq\frac{|u_n-a|}{(\sqrt[p]{a})^{p-1}},$$

pois as parcelas do denominador da fracção do 2º membro são todas positivas e então

$$(\sqrt[p]{u_n})^{p-1}+\cdots+\left(\sqrt[p]{a}\right)^{p-1}\geq\left(\sqrt[p]{a}\right)^{p-1}.$$

Como $u_n\to a$, tem-se

$$\forall\delta>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\colon\ n>n_0\Longrightarrow|u_n-a|<\delta\left(\sqrt[p]{a}\right)^{p-1}$$

e obtem-se

$$\left|\sqrt[p]{u_n}-\sqrt[p]{a}\right|\leq\frac{|u_n-a|}{(\sqrt[p]{a})^{p-1}}<\frac{\delta\,(\sqrt[p]{a})^{p-1}}{(\sqrt[p]{a})^{p-1}}=\delta.$$

Se $a=0$ então $\lim u_n=0$ e neste caso considera-se, na definição de limite $|u_n|<\delta^p$ e $u_n<\delta^p$, pois $u_n\geq 0$.

Então obtem-se

$$\left|\sqrt[p]{u_n}-\sqrt[p]{a}\right|=|\sqrt[p]{u_n}|=\sqrt[p]{u_n}\leq\sqrt[p]{\delta^p}=\delta.$$

■

Teorema 1.9.2 *Se u_n é uma sucessão convergente então*

$$\lim |u_n| = |\lim u_n| .$$

Dem. Seja $u_n \to a$, isto é,

$$\forall \delta > 0 \ \exists p \in \mathbb{N}\colon \ n > p \Longrightarrow |u_n - a| < \delta.$$

Como $||u_n| - |a|| \leq |u_n - a| < \delta$ o que é equivalente a $|u_n| \to |a|$, isto é, $\lim |u_n| = |\lim u_n|$. ■

O próximo teorema é útil para o cálculo de limites de sucessões cujos termos gerais incluam somatórios ou fracções com razões trigonométricas, entre outras situações.

Teorema 1.9.3 *(Teorema das sucessões enquadradas) Sejam u_n, v_n e w_n sucessões convergentes tais que:*
a) $\lim u_n = \lim v_n = a$ $(a \in \mathbb{R})$
b) a partir de uma certa ordem se tem $u_n \leq w_n \leq v_n$.
Então $\lim w_n = a$.

Dem. Considerem-se duas sucessões u_n e v_n convergentes para $a \in \mathbb{R}$. Então

$$\forall \delta > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}\colon \ n > n_0 \Longrightarrow a - \delta < u_n < \delta + a$$

e

$$\forall \delta > 0 \ \exists n_1 \in \mathbb{N}\colon \ n > n_1 \Longrightarrow a - \delta < v_n < \delta + a.$$

Seja n_2 a ordem a partir da qual se tem $u_n \leq w_n \leq v_n$ e defina-se $p := \max\{n_0, n_1, n_2\}$. Então para $n > p$ obtem-se

$$a - \delta < u_n \leq w_n \leq v_n < \delta + a,$$

ou seja $a - \delta < w_n < \delta + a$, pelo que $\lim w_n = a$. ■

Exercício 1.9.4 *Calcule o limite de cada uma das sucessões:*

a) $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2n + sen\left(\frac{k\pi}{4}\right)}{1+3n^2}$

b) $w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{2k+n^2}$

1.10 Sucessão de Cauchy

Com o objectivo de obter um critério de convergência, introduz-se a noção de sucessão de Cauchy.

Intuitivamente, se $u_n \to a$, desde que n seja suficientemente grande, todos os termos de u_n estarão arbitrariamente próximos de a e, portanto próximos uns dos outros.

Definição 1.10.1 *Uma sucessão u_n em $\mathbb{R}$ diz-se uma sucessão de Cauchy se para cada $\delta > 0$ existe uma prdem $p \in \mathbb{N}$ tal que $|u_m - u_n| < \delta$, para quaisquer $m, n \geq p$.*

Observação 1.10.2 *Considerando em particular $m = n + k$, $k \in \mathbb{N}$, pode obter-se uma definição equivalente:*
u_n é uma sucessão de Cauchy se

$$\forall \delta > 0 \ \exists p \in \mathbb{N}\colon \ n \geq p \Longrightarrow |u_{n+k} - u_n| < \delta, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Desta última definição resulta:

Proposição 1.10.3 *Se u_n é uma sucessão de Cauchy em $\mathbb{R}$, então para qualquer $k \in \mathbb{N}$ tem-se*

$$u_{n+k} - u_n \ \to 0, \quad \text{quando } n \to +\infty.$$

A condição recíproca não é válida, como se pode ver no exercício seguinte:

Exercício 1.10.4 *(Contra-exemplo) Prove que para cada $k \in \mathbb{N}$ a sucessão*

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$

verifica

$$S_{n+k} - S_n \ \to 0$$

e no entanto S_n não é uma sucessão de Cauchy.

O próximo resultado fornece um critério de convergência para sucessões de que não se conhece o limite:

Teorema 1.10.5 *(Princípio de Cauchy-Bolzano) A condição necessária e suficiente para que uma sucessão u_n em $\mathbb{R}$ seja convergente é que u_n seja uma sucessão de Cauchy.*
Simbolicamente, em $\mathbb{R}$, u_n é convergente se e só se

$$\forall \delta > 0 \ \exists p \in \mathbb{N}\colon \ \forall k \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq p \Longrightarrow |u_{n+k} - u_n| < \delta.$$

Dem. ($\Longrightarrow$) Suponhamos que a sucessão u_n é convergente para $a \in \mathbb{R}$. Então

$$\forall \delta > 0 \ \exists p \in \mathbb{N}\colon \ n > p \Longrightarrow |u_n - a| < \frac{\delta}{2}.$$

Assim, para $\forall m \geq p$, $\forall n \geq p$,

$$|u_m - u_n| = |u_m - a + a - u_n| \leq |u_m - a| + |a - u_n| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Logo u_n é uma sucessão de Cauchy.

($\Longleftarrow$) Seja u_n uma sucessão de Cauchy.

Passo1: Provar que toda a sucessão de Cauchy em $\mathbb{R}$ é limitada.

Considere-se na definição $\delta = 1$. Assim, em particular, existe $p \in \mathbb{N}$, tal que $|u_m - u_n| < 1$, para quaisquer $m, n \geq p$

Então , em particular, a desigualdade é válida para $m = p$, isto é,

$$|u_n - u_p| < 1 \Longleftrightarrow u_n \in \left]u_p - 1, u_p + 1\right[, \quad \text{para } n \geq p$$

Portanto, fora deste intervalo, estão um número finito de termos da sucessão e o conjunto desses termos é limitado.

Logo a sucessão de Cauchy u_n é limitada.

Passo2: Provar que se u_n é uma sucessão de Cauchy e u_n tem uma subsucessão convergente, então u_n é convergente em $\mathbb{R}$.

Seja u_k uma subsucessão de u_n convergente para $a \in \mathbb{R}$.

Fixando $\delta > 0$, $\exists q \in \mathbb{N}$: $|u_k - a| < \frac{\delta}{2}$ para $k \geq q$.

Como u_n é uma sucessão de Cauchy,

$$\exists p \in \mathbb{N}\colon \ |u_m - u_k| < \frac{\delta}{2}, \ \forall m, k \geq p.$$

Defina-se $r := \max\{q, p\}$. Então para $k \geq r$ verificam-se simultaneamente as desigualdades

$$|u_k - a| < \frac{\delta}{2} \ \text{ e } \ |u_m - u_k| < \frac{\delta}{2}, \ \text{para } m \geq r.$$

Assim, para $m \geq r$,

$$|u_m - a| = |u_m - u_k + u_k - a| \leq |u_m - u_k| + |u_k - a| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Ou seja, $u_m \to a$, quando $m \to +\infty$.

Então, pelo Passo1, u_n é uma sucessão limitada e pelo Corolário 1.7.9, u_n possui uma subsucessão convergente. Logo, pelo Passo 2, u_n é convergente.
∎

1.11 A recta acabada. Infinitamente grandes

Se à recta real juntarmos "dois novos elementos", $+\infty$ e $-\infty$, obtem-se a recta acabada, que se representa por $\overline{\mathbb{R}}$ ou [-$\infty, +\infty$].

$\overline{\mathbb{R}}$ pode considerar-se como um conjunto limitado superiormente por $+\infty$ e inferiormente por $-\infty$. Assim qualquer subconjunto de $\overline{\mathbb{R}}$ é limitado.

Como estender a noção de limite a $\overline{\mathbb{R}}$?

Definição 1.11.1 *Uma sucessão u_n diz-se um infinitamente grande positivo e escreve-se*

$$u_n \to +\infty \quad ou \quad \lim u_n = +\infty,$$

se, a partir de uma certa ordem, u_n for superior a qualquer número positivo previamente fixo.
Simbolicamente

$$u_n \to +\infty \iff \forall L > 0 \ \exists p \in \mathbb{N}\text{: } n > p \Longrightarrow u_n > L.$$

Exercício 1.11.2 *Prove que a sucessão $u_n = 5n + 1$ é um infinitamente grande positivo.*

Definição 1.11.3 *a) A sucessão u_n é um infinitamente grande negativo, isto é,*

$$u_n \to -\infty \quad ou \quad \lim u_n = -\infty,$$

se, a partir de uma certa ordem, u_n for inferior a qualquer número negativo fixado.
Simbolicamente

$$u_n \to -\infty \iff \forall L > 0 \ \exists p \in \mathbb{N}\text{: } n > p \Longrightarrow u_n < -L.$$

b) u_n é um infinitamente grande em módulo quando

$$|u_n| \to +\infty.$$

A unicidade do limite permanece válida para sucessões na recta acabada.

Contudo uma sucessão u_n pode não ter limite em $\overline{\mathbb{R}}$.

Exercício 1.11.4 *Mostre que $u_n = (-1)^n (n + 2)$ não tem limite em $\overline{\mathbb{R}}$ mas é um infinitamente grande em módulo.*

Classificação das sucessões quanto à existência e natureza do limite:

$$\begin{array}{c} \text{convergentes (têm limite em } \mathbb{R}) \\ \begin{array}{c}\text{divergentes} \\ \text{(não convergentes)}\end{array} \left\{ \begin{array}{c} \text{propriamente divergentes} \\ \text{(limite } \pm\infty) \\ \\ \text{oscilantes} \\ \text{(não têm limite em } \overline{\mathbb{R}}) \end{array} \right. \end{array}$$

1.12 Operações com limites em $\overline{\mathbb{R}}$. Indeterminações

Algumas operações algébricas com limites permanecem válidas em $\overline{\mathbb{R}}$. Outras há que levantam dificuldades.

O próximo teorema reúne as principais propriedades utilizadas com limites infinitos.

Teorema 1.12.1 *Sejam u_n e v_n duas sucessões reais.*

1) Se u_n é um infinitamente grande positivo ou negativo então é um infinitamente grande em módulo. Isto é,

$$\textit{se } u_n \to \pm\infty \textit{ então } |u_n| \to +\infty.$$

2) O inverso de um infinitésimo é um infinitamente grande, i.e.,

$$\textit{se } u_n \to 0 \textit{ então } \frac{1}{u_n} \to \infty.$$

3) O inverso de um infinitamente grande é um infinitésimo, i.e.,

$$\textit{se } u_n \to \infty \textit{ então } \frac{1}{u_n} \to 0.$$

4) Se u_n é um infinitamente grande positivo e, a partir de uma certa ordem, $u_n \leq v_n$ então v_n também é um infinitamente grande positivo, i.e.,

$$\textit{se } u_n \to +\infty \textit{ e } u_n \leq v_n \textit{ para } n \geq p, \textit{ então } v_n \to +\infty.$$

5) Se $u_n \to +\infty$ e v_n é limitada inferiormente então $u_n + v_n \to +\infty$.

6) Se $u_n \to -\infty$ e v_n é limitada superiormente então $u_n + v_n \to -\infty$.

7) Se $u_n \to \pm\infty$ e v_n é limitada então $u_n + v_n \to \pm\infty$..

8) Se $u_n \to \infty$ e existe $p \in \mathbb{N}$ tal que o conjunto $\{v_n \in \mathbb{R} : n \geq p\}$ tem um minorante positivo ou um majorante negativo então $u_n \times v_n \to \infty$.

Dem. 1) Se $u_n \to +\infty$ então $u_n > L$, $n \geq p, \forall L > 0$ e $|u_n| \geq u_n > L$, isto é, $|u_n| \to +\infty$.

Se $u_n \to -\infty$ então $-u_n \to +\infty$ e, pelo passo anterior, $|-u_n| = |u_n| \to +\infty$.

2) Se $u_n \to 0$ então

$$\forall L > 0\ \exists p \in \mathbb{N}\colon\ n > p \Longrightarrow |u_n| < \frac{1}{L}.$$

Assim $\frac{1}{|u_n|} > L$, para $n > p$, pelo que, por definição, $\frac{1}{|u_n|} \to +\infty$ e $\frac{1}{u_n} \to \infty$.

3) Se $u_n \to \infty$, $|u_n| \to +\infty$ e

$$\forall \delta > 0\ \exists p \in \mathbb{N}\colon\ n > p \Longrightarrow |u_n| > \frac{1}{\delta}.$$

Então $\frac{1}{|u_n|} = \left|\frac{1}{u_n}\right| < \delta$, para $n > p$, pelo que, por definição, $\frac{1}{u_n} \to 0$.

4) Se $u_n \to +\infty$ então

$$u_n > L,\ \text{para } L > 0 \text{ e } n \geq p.$$

Se para $n \geq p$ se tem $v_n \geq u_n$ então

$$v_n \geq u_n > L.$$

Por definição, $v_n \to +\infty$.

5) Como v_n é limitada inferiormente, para qualquer $L > 0$ existe k tal que $k \leq v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $k < L$.

De $u_n \to +\infty$ tem-se que $u_n > L$, $\forall L > 0$, pelo que $u_n > L - k$, para $n \geq p$. Então

$$u_n + v_n > L - k + k = L$$

e, por definição, $u_n + v_n \to +\infty$.

6) Análogo à alínea anterior.

7) Se v_n é limitada então existe $K > 0$ tal que $|v_n| \leq K, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Como $u_n \to \infty$ então $|u_n| \to +\infty$ e, por definição,

$$\forall L > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}\text{: } n > n_0 \Longrightarrow |u_n| > L - K.$$

Assim, a partir de uma certa ordem n_1,

$$|u_n + v_n| = |u_n - (-v_n)| \geq ||u_n| - |v_n|| = |u_n| - |v_n|.$$

Definindo $p := \max\{n_0, n_1\}$ tem-se que

$$|u_n + v_n| \geq |u_n| - |v_n| \geq L - K + K = L$$

é válido para $n \geq p$, $\forall L > 0$.

Isto significa que $|u_n + v_n| \to +\infty$, ou seja, $u_n + v_n \to \infty$.

8) Suponhamos que v_n tem um minorante positivo a partir de uma certa ordem n_0. Ou seja,

$$\exists k > 0 : v_n \geq k, \ \text{para } n \geq n_0.$$

Como $u_n \to \infty$, isto é, $|u_n| \to +\infty$, então $|u_n| > \frac{L}{k}$, para $n \geq n_1$.

Assim

$$|u_n \times v_n| = |u_n| \times |v_n| > \frac{L}{k}.k = L, \ \text{para } n \geq p :== \max\{n_0, n_1\}.$$

Se supusermos que v_n tem um majorante negativo, então

$$\exists k > 0 : v_n \leq -k < 0, \ \text{a partir de uma certa ordem,}$$

ou seja, $|v_n| \geq k > 0$ e o processo segue de modo análogo. ■

O teorema anterior contorna algumas dificuldades que surgem nas operações algébricas dos limites em $\overline{\mathbb{R}}$.

Por exemplo:

2) não dá informação sobre o valor de $\frac{0}{0}$.

3) não dá informação sobre o valor de $\frac{\infty}{\infty}$.

5),6) e 7) não dão informação sobre o valor de $+\infty - \infty$.

8) não dá informação sobre o valor de $\infty \times 0$.

Nas sucessões em cujas operações surjam estes casos de <u>indeterminação</u>, para os quais não há teoremas gerais que garantam à partida o seu resultado, é necessário fazer um estudo caso a caso, de modo a conseguir <u>levantar a indeterminação.</u>

Exercício 1.12.2 *Calcule, caso existam:*

a) $\lim \frac{3n^2+1-2n}{1-n^3}$

b) $\lim \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

c) $\lim \left(3+2n^2+5n^4\right)$

1.13 Sucessão exponencial

O comportamento, a existência e a natureza do limite da sucessão exponencial a^n $(a \in \mathbb{R})$ depende do valor da base.

Casos possíveis:

- Se $a = 0$ ou $a = 1$ a sucessão é constante. Logo é convergente para 0 ou para1, respectivamente.
- Se $a > 1$ a sucessão é monótona crescente.
  Escrevendo $a = 1 + h$, $h > 0$, resulta pela Prop. 1.5.1 que
  $$a^n = (1+h)^n \geq 1 + nh, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$
  Como a sucessão $1+nh \to +\infty$, então, pelo Teorema 1.12.1, $a^n \to +\infty$.
- Se $0 < a < 1$ a sucessão é monótona decrescente e $a^n \to 0$. (Provar)
- Se $-1 < a < 0$ a sucessão não é monótona e $a^n \to 0$. (Provar)
- Se $a \leq -1$ a sucessão toma alternadamente termos positivos e negativos pelo que não é monótona e a^n não tem limite

Exercício 1.13.1 *Calcular:*

$$a) \ \lim \frac{2^{n+1}+3^n}{2^n+3^{n+1}}; \qquad b) \lim \frac{2^{n+1}+3^n}{2^n+5^{n+1}}.$$

1.14 Sucessão do tipo potência-exponencial

O limite da sucessão de termo geral $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tem um papel importante na Análise Matemática.

Exercício 1.14.1 *Prove que a sucessão*

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

a) É monótona crescente

b) É limitada

c) É convergente.

Pelo exercício anterior prova-se que o seu limite será um número entre 2 e 3.

Convencionou-se que

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \simeq 2,71828....$$

Teorema 1.14.2 *Se a sucessão $u_n \to \infty$ então*

$$\left(1+\frac{1}{u_n}\right)^{u_n} \to e.$$

Dem. Suponhamos que $u_n \to +\infty$. Então existe uma ordem p tal que $u_n > L$, $\forall L > 0$.

Represente-se por k_n o menor número inteiro que verifique

$$k_n \leq u_n < k_n + 1, \text{ para } n > p. \tag{1.14.1}$$

Então

$$\frac{1}{k_n+1} < \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{k_n}$$

e

$$1+\frac{1}{k_n+1} < 1+\frac{1}{u_n} \leq 1+\frac{1}{k_n}.$$

Por (1.14.1) e como as bases são maiores que 1, a sucessão fica crescente , e

$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n} < \left(1+\frac{1}{u_n}\right)^{u_n} \leq \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}.$$

Como

$$\lim\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n} = \lim\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{-1} = e.1 = e$$

e

$$\lim\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1} = \lim\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}\left(1+\frac{1}{k_n}\right) = e$$

então pelo Teorema 1.9.3, quando $u_n \to +\infty$,

$$\lim \left(1 + \frac{1}{u_n}\right)^{u_n} = e.$$

Suponha-se agora que $u_n \to -\infty$. Então, definindo $v_n = -u_n$, tem-se $v_n \to +\infty$ e

$$\begin{aligned}
\lim \left(1 + \frac{1}{u_n}\right)^{u_n} &= \lim \left(1 - \frac{1}{v_n}\right)^{-v_n} = \lim \left(\frac{v_n - 1}{v_n}\right)^{-v_n} \\
&= \lim \left(\frac{v_n}{v_n - 1}\right)^{v_n} = \lim \left(1 + \frac{1}{v_n - 1}\right)^{v_n} \\
&= \lim \left(1 + \frac{1}{v_n - 1}\right)^{v_n - 1} \left(1 + \frac{1}{v_n - 1}\right) = e.1 = e,
\end{aligned}$$

porque $v_n - 1 \to +\infty$. ■

Teorema 1.14.3 *Para $x \in \mathbb{R}$ e $u_n \to +\infty$ tem-se que*

$$\lim \left(1 + \frac{x}{u_n}\right)^{u_n} \to e^x.$$

Dem. Se $x = 0$, $\lim \left(1 + \frac{0}{u_n}\right)^{u_n} = \lim 1^{u_n} = \lim 1 = 1 = e^0$.
Se $x \neq 0$, tem-se

$$\begin{aligned}
\lim \left(1 + \frac{x}{u_n}\right)^{u_n} &= \lim \left(1 + \frac{1}{\frac{u_n}{x}}\right)^{u_n} = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{u_n}{x}}\right)^{\frac{u_n}{x}n}\right]^x \\
&= \left[\lim \left(1 + \frac{1}{\frac{u_n}{x}}\right)^{\frac{u_n}{x}n}\right]^x = \left(e^1\right)^x = e^x,
\end{aligned}$$

quer se tenha $\frac{u_n}{x} \to +\infty$ ou $\frac{u_n}{x} \to -\infty$, pelo Teorema 1.14.2. ■

Os principais resultados para sucessões do tipo potência-exponencial (isto é da forma $u_n^{v_n}$) nos casos em que quer a base quer o expoente sejam sucessões com limite em $\overline{\mathbb{R}}$, podem ser resumidos no seguinte teorema:

Teorema 1.14.4 *Sejam $u_n > 0$ e v_n duas sucessões com limite em $\overline{\mathbb{R}}$. Supondo que não se verificam as hipóteses:*

(i) $\lim u_n = \lim v_n = 0$;

(ii) $\lim u_n = +\infty$ *e* $\lim v_n = 0$;

(iii) $\lim u_n = 1$ *e* $\lim v_n = +\infty$;

(iv) $\lim u_n = 1$ *e* $\lim v_n = -\infty$;

então

$$\lim\,(u_n)^{v_n} = (\lim u_n)^{v_n} .$$

Exercício 1.14.5 *Calcular:*

$$a)\ \lim \sqrt[n]{\frac{n^2+n-1}{n^2+3}}; \qquad b)\lim\left(\frac{n^2+3n-1}{n^2+3}\right)^{n-1} .$$

Capítulo 2

Séries de Números Reais

No Capítulo anterior a adição ficou perfeitamente definida para um número finito de parcelas.

Pretende-se generalizar o conceito de adição por forma a dar significado à adição de infinitas parcelas e de modo a conservar tanto quanto possível as principais propriedadesda adição.

Seria lógico esperar que a soma de infinitas parcelas positivas não desse um número finito. Mas tal facto contradiz alguns fenómenos observáveis no quotidiano. Exemplo:

<u>Paradoxo de Zenão</u>: Um corredor desloca-se do ponto A para a meta B a uma velocidade constante.

Seja A_1 o ponto médio de $[AB]$, A_2 o ponto médio de $[A_1B]$, e assim sucesivamente, designado por A_{n+1} o ponto médio de $[A_nB]$.

Se o tempo gasto para percorrer $\overline{AA_1}$ for designado por t, será $\frac{t}{2}$ o tempo gasto de A_1 a A_2, $\frac{t}{2^2}$ de A_2 a A_3, ...

O tempo total T, necessário para completar a corrida será a "soma"de uma infinidade de tempos parciais todos positivos:

$$T = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{2^2} + ... + \frac{t}{2^n} + ...$$

Se pela "lógica"o tempo total fosse infinito o corredor nunca chegaria à meta. Tal estava em contradição com o "observável"e com a "dedução"de otempo total T ser o dobro do que o corredor gastava na primeira metade.

Só passado cerca de 2000 anos este facto foi explicado com recurso à teoria das séries.

2.1 Definição e generalidades

Seja a_n uma sucessão de números reais.

A esta sucessão pode associar-se uma outra sucessão

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

a que chamamos sucessão das somas parciais de a_n.

Definição 2.1.1 *(i) Chama-se série ao par ordenado (a_n, S_n) e representa-se por*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Aos números $a_1, a_2, ..., a_n, ...$chamam-se termos da série e à expressão a_n o termo geral da série.

(ii) A série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diz-se convergente se existir em $\mathbb{R}$ (for finito) $\lim S_n = S$ e escreve-se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S.$$

Ao número real S chama-se soma da série.

(iii) Se não existir em $\mathbb{R}$ $\lim S_n$, série diz-se divergente

Observação 2.1.2 *Por vezes é conveniente utilizar séries do tipo*

$$\sum_{n=p}^{+\infty} a_n \ \textit{com}\ p \in \mathbb{Z},$$

mantendo-se o mesmo tipo de definição.

Exercício 2.1.3 *Estude a natureza das séries:*

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} n \quad ; \quad b) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \quad ; \quad c) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t}{2^n}, \quad \textit{com}\ t \in \mathbb{R}^+.$$

O estudo das séries é composto por duas vertentes:

a) determinar a natureza da série (convergente ou divergente);

b) no caso de convergência, calcular a soma da série.

Esta última questão apresenta bastantes dificuldades, podendo mesmo ser impossível o cálculo exacto da soma das séries (recorrendo à aproximação numérica).

Vejam-se dois exemplos de séries para as quais se torna possível calcular o valor da sua soma, caso sejam convergentes.

2.2 Série geométrica

Definição 2.2.1 *Chama-se série geométrica à série* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *em que* a_n *é uma progressão geométrica.*

Como é conhecido a sucessão das somas parciais correspondente é

$$S_n = a_0 \frac{1-r^n}{1-r}, \text{ com } r \neq 1.$$

Como

$$\lim S_n = \frac{a_0}{1-r} \lim (1-r^n) = \frac{a_0}{1-r}, \text{ se } |r| < 1,$$

tem-se que:

Proposição 2.2.2 *A série geométrica converge se e só se* $|r| < 1$*. Neste caso*

$$S = \frac{a_0}{1-r}.$$

2.3 Série de Mengoli

Definição 2.3.1 *Um série é de Mengoli (também designada por decomponível ou telescópica) se o termo geral* a_n *for decomponível numa diferença do tipo*

$$a_n = u_n - u_{n+k}.$$

Veja-se a natureza destas séries:

1. Caso de $k = 1 : a_n = u_n - u_{n+1}$

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 = u_1 - u_2 \\ S_2 &= a_1 + a_2 = u_1 - u_3 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = u_1 - u_3 \\ &\vdots \\ S_n &= u_1 - u_{n+1}. \end{aligned}$$

Assim

$$\lim S_n = \lim (u_1 - u_{n+1}) = u_1 - \lim u_n.$$

Proposição 2.3.2 *A série de Mengoli é convergente se e só se* u_n *é convergente. Em caso afirmativo*

$$S = u_1 - \lim u_n.$$

2. Caso de $k = 2 : a_n = u_n - u_{n+2}$

$$\begin{array}{rcl} S_1 & = & a_1 = u_1 - u_3 \\ S_2 & = & a_1 + a_2 = u_1 - u_3 + u_2 - u_4 \\ S_3 & = & a_1 + a_2 + a_3 = u_1 + u_2 - u_4 - u_5 \\ & & \vdots \\ S_n & = & u_1 + u_2 - u_{n+1} - u_{n+2}. \end{array}$$

Logo

$$\lim S_n = \lim (u_1 + u_2 - u_{n+1} - u_{n+2}) = u_1 + u_2 - 2 \lim u_n.$$

Proposição 2.3.3 *A série de Mengoli é convergente se e só se u_n é convergente. Em caso afirmativo*

$$S = u_1 + u_2 - 2 \lim u_n.$$

3. Caso geral: $a_n = u_n - u_{n+k}$

Proposição 2.3.4 *A série de Mengoli é convergente se e só se u_n é convergente. Neste caso*

$$S = u_1 + ... + u_k - k \lim u_n.$$

Exercício 2.3.5 *Estude a natureza da série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{n^2 + 5n + 4}$$

e calcule a sua soma, se possível.

O estudo da natureza da série pode ser feito sem recurso à construção explícita da sucessão das somas parciais, recorrendo a testes ou critérios de convergência.

Teorema 2.3.6 *(Condição de convergência de Anastácio da Cunha) A série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente se e só se a sucessão das somas parciais é uma sucessão de Cauchy, isto é, simbolicamente,*

$$\forall \delta > 0\ \exists p \in \mathbb{N}\text{: } \forall k \in \mathbb{N},\ \forall n \geq p \Longrightarrow |S_{n+k} - S_n| < \delta.$$

Dem. A demonstração é uma consequência imediata do Teorema 1.10.5.
■

Observação 2.3.7 *Depreende-se deste teorema que:*

1. *A natureza de uma série não se altera se lhe suprimirmos um número finito de termos.*

2. *A natureza da série não depende do valor dos seus n primeiros termos.*

Corolário 2.3.8 *(Condição necessária de convergência) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é uma série convergente então $\lim a_n = 0$.*

Dem. Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série convergente com $\lim S_n = l$.

A sucessão das somas parciais é dada por $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ e $S_{n-1} = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}$, para $n > 1$.

Então $S_n - S_{n-1} = a_n$ e como $\lim S_n = \lim S_{n-1}$ obtem-se

$$0 = \lim (S_n - S_{n-1}) = \lim a_n.$$

■

Observação 2.3.9 *A condição $\lim a_n = 0$ é necessária mas não é suficiente.*
Um exemplo clássico para este facto é a série harmónica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$

Apesar de $\frac{1}{n} \to 0$ a série harmónica é divergente, pois a sucessão das somas parciais $S_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$ não é uma sucessão de Cauchy (logo não é uma sucessão convergente) uma vez que

$$\begin{aligned}
|S_{2n} - S_n| &= \left| \left(1 + ... + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + ... + \frac{1}{n}\right) \right| \\
&= \left| \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n} \right| = \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n} \\
&> \frac{1}{n+n} + ... + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Exercício 2.3.10 *Prove que a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

é divergente.

2.4 Propriedades algébricas das séries

Alguns resultados que permitem avaliar a natureza das séries resultam das suas operações algébricas.

Proposição 2.4.1 *(i) Sejam* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *duas séries convergentes de somas* A *e* B*, respectivamente. Então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ *é convergente e a soma é* $A + B$.
(ii) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é uma série convergente de soma* A*, para cada* $\lambda \in \mathbb{R}$*, a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda a_n)$ *é convergente para* λA.

Dem. (i) Represente-se por S'_n e S''_n as sucessões das somas parciais das séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, respectivamente. Então

$$\begin{aligned} S_n &= (a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n) \\ &= (a_1+\cdots+a_n)+(b_1+\cdots+b_n) = S'_n + S''_n \to A+B. \end{aligned}$$

Pelo que S_n é convergente para $A+B$ e, portanto, $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ é convergente e tem por soma $A + B$.

(ii) Seja S^*_n a sucessão das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda a_n$ e S_n a de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Então

$$S_n^* = \lambda a_1 + \cdots + \lambda a_n = \lambda (a_1 + \cdots + a_n) = \lambda S_n \to \lambda A.$$

■

Observação 2.4.2 *Caso ambas as séries* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *sejam divergentes, a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ *pode ser convergente ou divergente.*
Exemplos:

1. *As séries* $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}$ *são ambas divergentes e contudo* $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[(-1)^n + (-1)^{n+1}\right] \equiv 0$ *é convergente.*

2. *As séries* $\sum_{n=1}^{+\infty} n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} 2n$ *são ambas divergentes e* $\sum_{n=1}^{+\infty} [n + 2n] = \sum_{n=1}^{+\infty} 3n$ *é divergente.*

Observação 2.4.3 *Poder-se-ia esperar que sendo* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *convergentes, a série "produto"* $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \times b_n)$ *também fosse convergente. Contudo tal não se verifica.*

Os próximos resultsdos darão alguma informação sobre os casos em que é possível *a priori* estabelecer a natureza da série "produto".

2.5 Séries de termos não negativos

Uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diz-se de termos não negativos se $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Tendo-se apenas $a_n \geq 0$, para $n \geq p$, esta série é da mesma natureza que uma série de termos não negativos, pois a natureza da série não depende pos primeiros p termos.

Neste tipo de séries o estuda da convergência ou divergência torna-se mais simples, uma vez que permite estabelecer vários critérios de convergência.

Proposição 2.5.1 *Uma série de termos positivos* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é convergente se e só se a sucessão das somas parciais é majorada.*

Dem. Observe-se que sendo $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, então a sucessão das somas parciais $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ é crescente.

Portanto S_n será convergente se e só se for majorada. ■

Teorema 2.5.2 *(Critério de comparação) Sejam* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *séries de termos não negativos e tais que* $a_n \leq b_n$ *para* $n \geq p$. *Então:*

a) *Se* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *é convergente então* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é convergente.*

b) *Se* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é divergente então* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *é divergente.*

Dem. Podemos supor $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$, que não há perda de generalidade (pois a natureza da série não depende dos primeiros p termos).

Considere-se

$$A_n = a_1 + \cdots + a_n \ \text{ e } \ B_n = b_1 + \cdots + b_n$$

as respectivas sucessões das somas parciais. Então $A_n \leq B_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

a) Pela Proposição 2.5.1,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ é convergente} \Leftrightarrow B_n \text{ é majorada} \Leftrightarrow B_n \leq B \ \left(B \in \mathbb{R}^+\right).$$

Assim, como $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$, então $A_n \leq B_n \leq B$ e A_n é majorada$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.

b) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente então $A_n \to +\infty \Longleftrightarrow A_n \geq A \ (\forall A \in \mathbb{R})$.

Então $A \leq A_n \leq B_n$ e $B_n \to +\infty$ porque $B_n \geq A \ (\forall A \in \mathbb{R})$,.pelo que $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é divergente. ■

Exemplo 2.5.3 *1. (Séries de Dirichlet) Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha \leq 1$ então a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \textit{é divergente.}$$

Como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ *é divergente, pelo critério de comparação (b),* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ *é divergente para* $\alpha \leq 1$.

2. A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ *é convergente, porque* $n^2 \geq n^2 - 1$, $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2-1}$ $(n > 1)$.

Como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$ *é uma série de Mengoli convergente, então pelo critério de comparação (a),* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ *é convergente.*

3. Para $\alpha \geq 2$ *a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ *é convergente, pois* $n^\alpha \geq n^2$,. $\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}$.

Como $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ *é convergente, então pelo critério de comparação (a),* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ *é convergente para* $\alpha \geq 2$.

Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sen\ n}{2^n}$.

Aqui não é possível aplicar o critério de comparação pois os termos da série não são não negativos,.

É necessário o conceito de convergência absoluta.

Definição 2.5.4 *Uma série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diz-se absolutamente convergente se*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \quad \textit{é convergente.}$$

A relação entre estes dois tipo de convergência pode ser expressa no seguinte resultado:

Teorema 2.5.5 *Toda a série absolutamente convergente é convergente.*

Dem. Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série absolutamente convergente, isto é, $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ é convergente.

Além disso $\left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$, porque $|a_1 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + \cdots + |a_n|$ e passando ao limite em ambos os membros da desigualdade.

Como $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$ e a série $\sum_{n=1}^{+\infty} 2|a_n|$ é convergente, pela Proposição 2.4.1,.então pelo Teorema 2.5.2, a), a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + |a_n|)$ é convergente.

Assim $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ é convergente. ■

Observação 2.5.6 *Uma série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *pode ser convergente sem contudo ser absolutamente convergente. Nestes casos a série diz-se* <u>*simplesmente convergente.*</u>

Exemplo 2.5.7 *Na série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sen\ n}{2^n}$ *tem-se que*

$$\left|\frac{sen\ n}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ *é uma série geométrica convergente (razão* $\frac{1}{2}$*) , então pelo critério de comparação (a) a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{sen\ n}{2^n}\right|$ *é convergente e* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sen\ n}{2^n}$ *é absolutamente convergente. Finalmente pelo Teorema 2.5.5,* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sen\ n}{2^n}$ *é convergente.*

Os dois resultados seguintes referem-se à natureza de séries cujo termo geral é o produto de duas sucessões:

Teorema 2.5.8 *(Teorema de Dirichlet) Se* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é uma série (não necessariamente convergente) com a sucessão das somas parciais limitada e* b_n *é uma sucessão decrescente que tende para zero então*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \times b_n) \text{ é convergente.}$$

Dem. 1^o Passo: Provar por indução que, para $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ se tem

$$a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n =$$
$$S_1 (b_1 - b_2) + S_2 (b_2 - b_3) + \cdots + S_{n-1} (b_{n-1} - b_n) + S_n b_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Para $n = 1$, $a_1 b_1 = S_1 b_1$ é verdade.
Admitindo a igualdade verdadeira para $n = p$ verificar para $n = p + 1$:

$$\begin{gathered} a_1 b_1 + \cdots + a_p b_p + a_{p+1} b_{p+1} = \\ [S_1 (b_1 - b_2) + \cdots + S_{p-1} (b_{p-1} - b_p) + S_p b_p] + \\ a_{p+1} b_{p+1} + (S_p b_{p+1} - S_p b_{p+1}) \\ = S_1 (b_1 - b_2) + \cdots + S_{p-1} (b_{p-1} - b_p) + S_p (b_p - b_{p+1}) + (a_{p+1} + S_p) b_{p+1} \\ = S_1 (b_1 - b_2) + \cdots + S_p (b_p - b_{p+1}) + S_{p+1} b_{p+1}. \end{gathered}$$

2^o Passo: Passando ao limite

$$\lim (a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n) = \lim \sum_{i=2}^{n} S_{i-1} (b_{i-1} - b_i) + \lim S_n b_n.$$

Os dois limites do segundo membro existem porque:

- $S_n b_n \to 0$, pelo Teorema 1.8.3;
- a série $\sum_{i=2}^{+\infty} S_{i-1} (b_{i-1} - b_i)$ é convergente.pois

  $$|S_{i-1} (b_{i-1} - b_i)| = |S_{i-1}| (b_{i-1} - b_i) \leq M (b_{i-1} - b_i)$$

  e $\sum_{i=2}^{+\infty} (b_{i-1} - b_i)$ é convergente.pois é uma série de Mengoli com b_n convergente.

Então a série $\sum_{i=2}^{+\infty} S_{i-1}(b_{i-1} - b_i)$ é absolutamente convergente. Logo $\lim(a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)$ é finito pelo que a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n b_n)$ é convergente.

■

Fortalecendo a hipótese sobre $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e enfraquecendo a condição sobre b_n, obtem-se:

Teorema 2.5.9 *(Teorema de Abel) Se* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é uma série convergente e* $b_n \geq 0$ *é uma sucessão decrescente (não necessariamente com limite zero) então*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \times b_n) \ \text{ é convergente.}$$

Dem. Como b_n é monótona e limitada ($0 \leq b_n \leq b_1$, $\forall n \in \mathbb{N}$) entáo é convergente, isto é, tem limite. Seja b esse limite.

A sucessão $(b_n - b)$ é decrescente e $(b_n - b) \to 0$.

Como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente, a respectiva sucessão das somas parciais élimitada, pelo que se pode aplicar o Teorema 2.5.8 e garantir que $\sum_{n=1}^{+\infty}[a_n(b_n - b)]$ é convergente.

Como $a_n b_n = a_n(b_n - b) + b a_n$ então

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n(b_n - b) + b a_n] \ \text{ é convergente.}$$

■

2.6 Séries alternadas

Se os termos da série não têm sinal fixo, isto é, vão alternando o sinal, a série será do tipo

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n b_n, \quad (b_n \geq 0),$$

a série diz-se <u>alternada</u>.

O estudo da natureza deste tipo de séries faz˜se com recurso à convergência absoluta ou se se pretender apenas a convergência simples ao critério de Leibniz:

Teorema 2.6.1 *(Critério de Leibniz) Se $b_n \geq 0$ é uma sucessão decrescente com limite zero então*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \, b_n \text{ é convergente.}$$

Dem. A a sucessão das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ é limitada (embora não convergente). Como b_n é uma sucessão decrescente com $\lim b_n = 0$, então fazendo no Teorema 2.5.8 $a_n = (-1)^n$ obtem-se o resultado pretendido. ■

Observação 2.6.2 *A condição de b_n ser decrescente para zero não pode ser retirada.*
Sem a monotonia de b_n a série pode divergir.

Exercício 2.6.3 *Prove que a sucessão $b_n = \frac{1}{n}\left[2 + (-1)^n\right]$ tende para 0 mas não é monótona e a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \, \frac{1}{n} \left[2 + (-1)^n\right]$$

é divergente.

<u>Resolução</u>: Suponha-se, com vista um absurdo, que a a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \, \frac{1}{n} \left[2 + (-1)^n\right]$ é convergente.

Então a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \, \frac{2}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{2}{n} (-1)^n + \frac{1}{n}\right]$$

seria convergente pela Proposição 2.4.1. Ora isto é absurdo porque a série harmónica é divergente.

Exercício 2.6.4 *Estude a natureza da série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}.$$

<u>Resolução</u>: A série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ não é absolutamente convergente pois

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} {}^{n}\frac{1}{n}$$

Pelo Critério de Leibniz a série é convergente.

Logo a série é simplesmente convergente.

Observação 2.6.5 *Este exercício prova que a recíproca do Teorema 2.5.5 não é verdadeira, isto é, existem séries convergentes que não são absolutamente convergentes.*

2.7 Critérios de convergência para séries de termos não negativos

Além dos critérios já apresentados, indicam-se de seguida uma colecção de critérios para séries de termos não negativos.

Teorema 2.7.1 *(Corolário do critério de comparação) Se* $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *e*

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = l, \quad (0 < l < +\infty)$$

então as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *são da mesma natureza.*

Dem. Aplicando a definição de limite à sucessão $\frac{a_n}{b_n}$, obtem-se

$$\forall \delta > 0 \ \exists p \in \mathbb{N}\colon \ n > p \Longrightarrow l - \delta < \frac{a_n}{b_n} < l + \delta.$$

Fixando δ tal que $0 < \delta < l$ tem-se, para $n > p$,

$$b_n \left(l - \delta\right) < a_n < b_n \left(l + \delta\right).$$

Pelo Teorema 2.5.2, se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é divergente então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente, e se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é convergente então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente. ■

Exemplo 2.7.2 *A série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} sen\left(\frac{1}{n}\right)$$

é divergente porque

$$\lim \frac{sen\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$$

e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ *é divergente.*

Observação 2.7.3 *A aplicação do teorema anterior exige que a natureza de uma das séries seja previamente conhecida. Para tal vejam-se os dois resultados seguintes:*

Teorema 2.7.4 *(Critério da condensação de Cauchy) Sejam* $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq ... \geq 0$. *Então* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge se e só se*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + ... \textit{ for convergente.}$$

Dem. Sejam S_n e T_k as somas parciais das duas séries, isto é,

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + \cdots + a_n \\ T_k &= a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^k a_{2^k}. \end{aligned}$$

Para $n \leq 2^{k+1} - 1$, tem-se

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \\ &\quad \cdots + \left(a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}\right) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^k a_{2^k} = T_k. \end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) Assim se $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k a_{2^k}$ é convergente então, pela Proposição 2.5.1 T_k é majorada.

Como para qualquer n existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $n \leq 2^{k+1} - 1$, tem-se que $S_n \leq T_k$, pelo que S_n é majorada e, pela Proposição 2.5.1, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.

($\Longrightarrow$) Suponha-se que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente. Para $n \geq 2^k$,.tem-se

$$\begin{aligned}
S_n &= a_1 + \cdots + a_n \\
&\geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \\
&\quad \cdots + \left(a_{2^{k+1}+1} + \cdots + a_{2^k}\right) \\
&\geq \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^{k-1}a_{2^k} = \frac{1}{2}T_k,
\end{aligned}$$

pelo que $T_k \leq 2S_n$. Como $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente então S_n é majorada pelo que T_k também é majorada. Pela Proposição 2.5.1, a série $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k a_{2^k}$ é convergente. ■

Corolário 2.7.5 *A série de Dirichlet* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ *é convergente se e só se* $\alpha > 1$ *(*$\alpha \in \mathbb{R}$*).*

Dem. Para $\alpha \leq 0$, $\frac{1}{n^\alpha}$ não é um infinitésimo, logo pelo Corolário 2.3.8, a série é divergente.

Para $\alpha > 0$ a sucessão $\frac{1}{n^\alpha}$ está nas condições do teorema anterior. Assim para $b_n = 2^n a_{2^n} = 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = 2^{(1-\alpha)n}$ a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{(1-\alpha)n}$ é uma série geométrica de razão $2^{1-\alpha}$, que converge se, e só se, $1 - \alpha < 0$, isto é, $\alpha > 1$. ■

Em situações em que o limite apresente algumas dificuldades ou não exista, pode optar-se pela comparação das razões entre dois termos consecutivos.

Teorema 2.7.6 *(Critério da comparação das razões) Sejam a_n, $b_n > 0$ e, a partir de uma certa ordem p,*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Então:

a) *Se* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *é convergente então* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é convergente.*

b) *Se* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é divergente então* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *é divergente.*

Dem. A desigualdade da hipótese é equivalente a

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_n}{b_n}.$$

o que prova que a sucessão $\frac{a_n}{b_n}$ é decrescente, a partir de uma certa ordem p, pelo que é majorada por $\frac{a_p}{b_p}$, para $n \geq p$. Ou seja, $\frac{a_n}{b_n} \leq \frac{a_p}{b_p}$ e $a_n \leq b_n \frac{a_p}{b_p}$, para $n \geq p$.

Aplicando o Teorema 2.5.2 obtem-se a conclusão pretendida. ■

Exercício 2.7.7 *Estudar a natureza das séries*

a). $\frac{1}{2} + \frac{1\times3}{2\times4} + \frac{1\times3\times5}{2\times4\times6} + ... = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\times3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times\cdots\times(2n)}$

b). $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^2}$.

Teorema 2.7.8 *(Critério da razão) Seja $a_n > 0$.*

a) *Se existe um número r tal que $0 < r < 1$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$, a partir de uma certa ordem, então* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é convergente.*

b) *Se a partir de uma certa ordem,* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ *então* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é divergente.*

Dem. a) Aplicando a alínea a) do teorema anterior às séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n$, em que a segunda é convergente porque é uma série geométrica com $|r| < 1$, pois

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{r^{n+1}}{r^n} = r.$$

b) Aplicando a alínea b) do Teorema 2.7.6 às séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} 1$, sendo esta divergente. Como $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente. ■

Teorema 2.7.9 *(Critério de D'Alembert) Se* $a_n > 0$ *e* $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, *finito ou* $+\infty$, *então*

a) *Se* $l < 1$, *então* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é convergente.*

b) *Se* $l > 1$ *então* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é divergente.*

Dem. a) Pela definição de limite,

$$\forall \delta > 0, \exists p \in \mathbb{N} : \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \delta, \text{ para } n \geq p.$$

Como $l < 1$, escolha-se δ suficientemente pequeno de modo que $l + \delta < 1$. Aplicando o Teorema 2.7.8 com $r = l + \delta < 1$ conclui-se que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.

b) Pela definição de limite,

$$\forall \delta > 0, \exists p \in \mathbb{N} : l - \delta < \frac{a_{n+1}}{a_n}, \text{ para } n \geq p.$$

Como $l > 1$, escolha-se $\delta > 0$ de modo que $l - \delta > 1$. Assim $\frac{a_{n+1}}{a_n} > l - \delta > 1$ e pelo Teorema 2.7.8 a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente. ■

Observação 2.7.10 *Se $l = 1$ este critério não é conclusivo, contudo se*

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1^+$$

decorre do teorema anterior que a série é divergente.

Exercício 2.7.11 *(i) Prove que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ é convergente.*
(ii). Discuta a natureza da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n n!}{n^n}$$

em função do parâmetro λ.

Teorema 2.7.12 *(Critério da raiz) Seja $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Então*

a) *Se $\sqrt[n]{a_n} \leq r$, com $r < 1$, a partir de uma certa ordem, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.*

b) *Se $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, para uma infinidade de valores de n,. então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.*

Dem. a) Como $\sqrt[n]{a_n} \leq r$ então $a_n \leq r^n$, para $n \geq p$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n$ é convergente,.porque $r < 1$, então, pelo Teorema 2.5.2, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.

b) Se $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ para uma infinidade de valores de n então $\lim a_n \neq 0$. Logo $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente. ■

Teorema 2.7.13 *(Critério da raiz de Cauchy) Seja $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e suponhamos que* $\lim \sqrt[n]{a_n} = l$, *finito ou $+\infty$. Então*

a) *Se $l < 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.*

b) *Se* $l > 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é divergente.*

Observação 2.7.14 *Se* $l = 1$ *este critério não é conclusivo.*

Dem. a) Pela definição de limite,

$$\forall \delta > 0, \exists p \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{a_n} < l + \delta, \text{ para } n \geq p.$$

Como $l < 1$, escolhe-se $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que $l + \delta < 1$ e em seguida escolhe-se tal que $r = l + \delta < 1$.

Assim $\sqrt[n]{a_n} < r$ e, pelo Teorema 2.7.12, a série é convergente.

b) Pela definição de limite,

$$\forall \delta > 0, \exists p \in \mathbb{N} : l - \delta < \sqrt[n]{a_n}, \text{ para } n \geq p.$$

Como $l > 1$, escolhe-se $\delta > 0$ tal que $l - \delta > 1$ e, assim $\sqrt[n]{a_n} > 1$. Pelo Teorema 2.7.12, a série é divergente.

Se $l = +\infty$, pela definição de limite,

$$\forall \delta > 0, \exists p \in \mathbb{N} : n \geq p \Longrightarrow \sqrt[n]{a_n} > l.$$

Em particular para $\delta = 1$, $\sqrt[n]{a_n} > 1$. ■

Exemplo 2.7.15 *(i) A série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^n}}$ *é convergente porque, pelo critério da raiz de Cauchy*

$$\lim \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n^n}}} = \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

(ii). Para a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{[3 + (-1)^n]^{2n}}$$

não é possível calcular

$$\lim \sqrt[n]{\frac{1}{[3 + (-1)^n]^{2n}}} = \lim \frac{1}{[3 + (-1)^n]^2}$$

porque o limite não existe. Contudo decompondo a série e pode calcular-se os dois sub-limites:

$$\begin{array}{rl} n \text{ par}, & \lim \frac{1}{[3+(-1)^n]^2} = \frac{1}{16}, \\ n \text{ ímpar}, & \lim \frac{1}{[3+(-1)^n]^2} = \frac{1}{4}. \end{array}$$

Como ambos são menores que 1, então a série convergente.

2.8 Resto de uma série

Ao aproximarmos a soma de uma série pela soma se alguns termos, comete-se um erro.

Definição 2.8.1 *Dada uma série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, *chama-se resto de ordem* p *à série*

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n = a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots = R_p.$$

Como

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_p) + R_p$$

observa-se que o erro cometido ao tomar para valor da soma da série, a soma dos primeiros p termos é R_p.

No cálculo aproximado interessa conhecer majorantes dos erros cometidos nas aproximações feitas.

Nas séries de termos positivos existem alguns resultados que majoram o resto:

Teorema 2.8.2 *Se* $p \in \mathbb{N}$, $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, *e existir um número* k_p *tal que*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq k_p < 1, \text{ para } n \geq p+1,$$

então

$$R_p \leq \frac{a_{p+1}}{1-k_p}.$$

Dem. Pelo Teorema 2.7.8, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente. Por outro lado

$$\begin{aligned} R_p &= a_{p+1} + a_{p+2} + a_{p+3} + \cdots \\ &= a_{p+1}\left(1 + \frac{a_{p+2}}{a_{p+1}} + \frac{a_{p+3}}{a_{p+1}} + \cdots\right). \end{aligned}$$

Por hipótese

$$\frac{a_{p+2}}{a_{p+1}} \leq k_p \text{ e } \frac{a_{p+3}}{a_{p+1}} = \frac{a_{p+3}}{a_{p+2}} . \frac{a_{p+2}}{a_{p+1}} \leq (k_p)^2 .$$

Análogamente $\frac{a_{p+4}}{a_{p+1}} \leq (k_p)^3$ e assim sucessivamente.

Então

$$R_p \leq a_{p+1}\left(1 + k_p + (k_p)^2 + (k_p)^3 + \cdots\right) = a_{p+1}\frac{1}{1-k_p}.$$

■

Outro resultado para séries de termos não negativos:

Teorema 2.8.3 *Se $a_n \geq 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$, e existir um número k_p tal que $\sqrt[n]{a_n} \leq k_p < 1$, para $n \geq p+1$, então*

$$R_p \leq \frac{k_p^{p+1}}{1-k_p}.$$

Dem. A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente pelo Teorema 2.7.12. O erro

$$\begin{aligned} R_p &= a_{p+1} + a_{p+2} + a_{p+3} + \cdots \\ &\leq (k_p)^{p+1}\left(1 + k_p + (k_p)^2 + (k_p)^3 + \cdots\right) = \frac{k_p^{p+1}}{1-k_p}. \end{aligned}$$

■

Para séries alternadas, tem-se o seguinte resultado:

Teorema 2.8.4 *Seja $a_n \geq 0$ uma sucessão decrescente com limite zero e R_p o resto de ordem p da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$. Então*

$$R_p \leq a_{p+1}.$$

Dem. Pelo Teorema 2.6.1, a série é convergente e

$$R_p = (-1)^{p+1} a_{p+1} + (-1)^{p+2} a_{p+2} + \cdots$$

Multiplicando por $(-1)^{p+1}$ tem-se

$$(-1)^{p+1} R_p = (a_{p+1} - a_{p+2}) + (a_{p+3} - a_{p+4}) + \cdots$$

e como a_n é uma sucessão decrescente então cada diferença é não negativa e

$$(-1)^{p+1} R_p \geq 0. \tag{2.8.1}$$

Por outro lado

$$-\left[(-1)^{p+1} R_p - a_{p+1}\right] = (a_{p+2} - a_{p+3}) + (a_{p+4} - a_{p+5}) + \cdots \geq 0.$$

Ou seja,

$$(-1)^{p+1} R_p \leq a_{p+1},$$

e, por (2.8.1),

$$0 \leq (-1)^{p+1} R_p \leq a_{p+1},$$

pelo que $|R_p| \leq a_{p+1}$. ■

Exemplo 2.8.5 *Se para soma da série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ *tomarmos o número*

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4},$$

comete-se um erro R_n *tal que* $|R_n| \leq \frac{1}{5}$.

Capítulo 3

Funções reais de variável real

3.1 Limite de uma função

Recordando a definição de limite de uma função num ponto:

Definição 3.1.1 *Sejam* $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ *uma função real definida em* X *e* a *um ponto de acumulação de* X. *Diz-se que* $b \in \mathbb{R}$ *é o limite de* $f(x)$ *no ponto* a *e escreve-se* $f(x) \to b$ *quando* $x \to a$ *ou*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

quando

$$\forall \delta > 0 \ \exists \varepsilon > 0\colon \forall x \in X, \ \ |x - a| < \varepsilon \Longrightarrow |f(x) - b| < \delta.$$

Intuitivamente $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$:

- significa que $f(x)$ está arbitrariamente próximo de b quando x está suficientemente perto de a.
- não dá informação sobre o valor de $f(x)$ no ponto a, isto é, sobre $f(a)$.

Exercício 3.1.2 *Prove por definição que*

$$\lim_{x \to a} \left(x^2 + 4\right) = a^2 + 4.$$

Também é possível formular a noção de limite de uma função recorrendo a sucessões:

Teorema 3.1.3 *(Heine) Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, a um ponto de acumulação de X e $b \in \mathbb{R}$ Então $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ é equivalente a dizer que $\lim f(x_n) = b$ para todas as sucessões $x_n \in X \backslash \{a\}$ tais que $x_n \to a$.*

Dem. ($\Longrightarrow$) Suponhamos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Seja x_n uma sucessão tal que $x_n \to a$. Então, a partir de uma certa ordem $n \geq p$, $|x_n - a| < \varepsilon$. Pela Definição 3.1.1,

$$|f(x_n) - b| < \delta, \text{ para } n \geq p \text{ e } \delta > 0 \text{ fixo},$$

o que prova que $\lim f(x_n) = b$.

($\Longleftarrow$) Considere-se que $\lim f(x_n) = b$ para todas as sucessões sucessões $x_n \in X \backslash \{a\}$ tais que $x_n \to a$.

Suponhamos, por contradição, que $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq b$. Então

$$\exists \delta > 0 : \forall \varepsilon > 0, \ \ |x - a| < \varepsilon \text{ e } |f(x) - b| \geq \delta,$$

para um certo $x \in X$ que depende de ε.

Então se para cada $n \in \mathbb{N}$ fizermos $\varepsilon = \frac{1}{n}$ e designarmos o correspondente x por x_n, obtem-se uma sucessão x_n tal que

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \text{ e } |f(x_n) - b| \geq \delta,$$

isto é,

$$x_n \to a, \, x_n \neq a \ \text{ e } \ \lim f(x_n) \neq b,$$

o que contradiz a hipótese. ■

Exercício 3.1.4 *Verifique se existe*

$$\lim_{x\to 0} \left(2 + sen\frac{1}{x}\right).$$

Resolução: Para todos os pontos da forma $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, tem-se $sen\,(x) = 1$.

Considerando a sucessão

$$\frac{1}{x_n} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

tem-se

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \ \text{ e } \ x_n \to 0.$$

Para $f(x) = 2 + sen\frac{1}{x}$ obtem-se

$$f(x_n) = 2 + sen\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 3.$$

Analogamente, definindo $\frac{1}{y_n} = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$ temos

$$y_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi} \to 0 \quad \text{e} \quad f(y_n) = 2 + sen\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1.$$

Assim pelo teorema anterior há uma contradição, pois $x_n \to 0$ e $y_n \to 0$ e contudo as suas imagens tendem para valores distintos.

Algumas propriedades dos limites das funções reais de variável real estão resumidas na próxima proposição:

Proposição 3.1.5 *Sejam $f, g, h : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de X.*

1. *(Unicidade do limite) Se existir $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ entáo é único.*
2. *Se $f(x) = g(x)$, $\forall x \in V_\varepsilon(a) \cap X$ e existem $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ então*
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x).$$
3. *Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$ então existe $\varepsilon > 0$ tal que*
$$f(x) < g(x), \forall x \in V_\varepsilon(a).$$
4. *Se $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in V_\varepsilon(a) \cap X$ então*
$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x),$$
caso existam os respectivos limites.
5. *Se $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in V_\varepsilon(a) \cap X$ e se $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ então $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe e*
$$\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x).$$

Dem. 1. Suponhamos que existem dois valores para $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Isto é,

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} f(x) = b'.$$

Então para cada cada $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$|f(x) - b| < \frac{\delta}{2} \quad \text{e} \quad \left|f(x) - b'\right| < \frac{\delta}{2},$$

desde que $x \in X$ e $|x - a| < \varepsilon$.

Escolhendo um valor de x nestas condições tem-se

$$\begin{aligned} \left|b - b'\right| &= \left|b - f(x) + f(x) - b'\right| \leq |b - f(x)| + \left|f(x) - b'\right| \\ &< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta, \end{aligned}$$

para $\forall\delta > 0$, o que implica $b = b'$.

2. Tomando x tal que $|x - a| < \varepsilon$, tem-se

$$|f(x) - b| = |g(x) - b| < \delta,$$

para qualquer $\delta > 0$. Logo

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x).$$

3. Seja $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b < \lim\limits_{x\to a} g(x) = c$ e escolha-se $\delta > 0$ tal que $0 < \delta < \frac{c-b}{2}$, ou seja tal que $b + \delta < c - \delta$.

Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que $x \in V_\varepsilon(a) \cap X$ e

$$b - \delta < f(x) < b + \delta \quad \text{e} \quad c - \delta < g(x) < c + \delta.$$

Em particular

$$f(x) < b + \delta < c - \delta < g(x), \ \forall x \in V_\varepsilon(a) \cap X.$$

4. Resulta directamente das alíneas 2. e 3.

5. Aplicar argumentos semelhantes à demonstração do Teorema 1.9.3.

■

3.2 Limites em $\overline{\mathbb{R}}$

A noção de limite pode estender-se ao caso em que $a = \pm\infty$ e a situações em que o valor do limite é $\pm\infty$.

Definição 3.2.1 *Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de X.*

(i) *Diz-se que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ quando para qualquer $L > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que para $x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap (X \setminus \{a\})$ se tem $f(x) > L$.*
Simbolicamente quando

$$\forall L > 0\ \exists \varepsilon > 0\text{: } \forall x \in X,\ 0 < |x-a| < \varepsilon \Longrightarrow f(x) > L.$$

(ii) *Analogamente*

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall L > 0\ \exists \varepsilon > 0\text{:} \forall x \in X, 0 < |x-a| < \varepsilon \Longrightarrow f(x) < -L.$$

Exercício 3.2.2 *Prove por definição que*

$$\lim_{x\to 0} \left| \frac{2}{x^2 - x} \right| = +\infty.$$

Definição 3.2.3 *Seja $X \subset \mathbb{R}$.*

(i) *Se X é uma parte não majorada de $\mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, diz-se que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ se*

$$\forall \delta > 0\ \exists x_0 \in \mathbb{R}\text{: } \forall x \in X,\ x > x_0 \Longrightarrow |f(x) - b| < \delta.$$

(ii) *Se $b = +\infty$ então $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ se*

$$\forall L > 0\ \exists x_0 \in \mathbb{R}\text{: } \forall x \in X,\ x > x_0 \Longrightarrow f(x) > L.$$

(iii) *Se X é uma parte não minorada de $\mathbb{R}$, define-se de modo análogo $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.*

Exercício 3.2.4 *Mostre, por definição, que*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 8x + 3}{x^2 - 4} = 1.$$

Note-se que quando $X = \mathbb{N}$ a função f é uma sucessão real e esta definição é equivalente à definição de limite de uma sucessão.

Assim as propriedade algébricas enunciadas para os limites de sucessões permanecem válidas para funções.

Proposição 3.2.5 *(Propriedade algébricas dos limites) Admitindo que* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ *e* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, *tem-se que:*

1. $\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) = b + c$;
2. $\lim\limits_{x\to a} (f\times g)(x) = b \times c$;
3. $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |b|$
4. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$, *se* $c \neq 0$.
5. $\lim\limits_{x\to a} |h(x)| = 0 \iff \lim\limits_{x\to a} h(x) = 0$

Dem. As demonstrações são análogas às utilizadas no Teorema 1.9.1. ■

Exercício 3.2.6 *Considere a função* $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = x \ sen\left(\frac{1}{x}\right).$$

Calcular $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

3.3 Limites laterais

Os limites laterais reforçam a informação sobre o comportamento da função quando os objectos se aproximam de um certo ponto.

Definição 3.3.1 *(i) Seja* a *um ponto de acumulação de* X *para valores maiores que* a. *Chama-se limite lateral de* f *à direita de* a *, notando-se* $f(a^+)$ *ou* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = b$, *se*

$$\forall \delta > 0 \ \exists \varepsilon > 0 : x \in X,\ a < x < a + \varepsilon \Longrightarrow |f(x) - b| < \delta.$$

(ii) Analogamente, chama-se limite lateral de f *à esquerda de* a *, notando-se* $f(a^-)$ *ou* $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = b$, *se*

$$\forall \delta > 0 \ \exists \varepsilon > 0 : x \in X,\ a - \varepsilon < x < a \Longrightarrow |f(x) - b| < \delta.$$

Observação 3.3.2 *Se a um ponto de acumulação de X então*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = b.$$

Exercício 3.3.3 *Calcule, se existir,* $\lim_{x\to 1} f(x)$ *sendo*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{3}{2} & se \quad x \geq 1 \\ 1 - x^2 & se \quad x < 1. \end{cases}$$

3.4 Funções contínuas

Geometricamente, uma função é contínua num ponto se, nesse ponto, não houver saltos.

Definição 3.4.1 *Considere-se* $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ *e* $a \in X$.
A função f é contínua em a quando $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, *isto é,*

$$\forall \delta > 0 \ \exists \varepsilon > 0 : \ \forall x \in X, \ \ |x - a| < \varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \delta.$$

Observação 3.4.2 *Se a é um ponto isolado, a função f é necessariamente contínua em a, uma vez que, tomando* $\varepsilon > 0$ *tal que* $V_\varepsilon(a) \cap X = \{a\}$ *a condição* $|x - a| < \varepsilon \Longrightarrow x = a$ *e obviamente se verifica*

$$|f(x) - f(a)| = 0 < \delta, \ \forall \delta > 0.$$

Exercício 3.4.3 *Considere a função real de variável real definida por*

$$m(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4} & se \quad x \neq 2 \\ 3k + 2 & se \quad x = 2. \end{cases}$$

Determine o valor do parâmetro k de modo a que a função seja contínua em $\mathbb{R}$.

3.5 Continuidade lateral

Definição 3.5.1 *Seja a um ponto de acumulação de X e* $f : X \to \mathbb{R}$.

(i) $f(x)$ *diz-se contínua à direita de a se*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a).$$

(ii) *$f(x)$ é contínua à esquerda de a se*

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a).$$

Observação 3.5.2 *Se $f(x)$ é contínua em a então $f(x)$ é contínua à esquerda e à direita de a.*

As propriedades algébricas das funções contínuas num ponto podem sintetizar no próximo resultado:

Proposição 3.5.3 *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas num ponto de acumulação a de X. Então:*

(i) *$(f+g)\,,\,(f\times g)\,,\,|f|$ e $(-f)$ são funções contínuas em a;*

(ii) *$\frac{f}{g}$ é contínua em a se $g(a)\neq 0$.*

Dem. Resulta directamente das propriedades algébricas dos limites. ■

Proposição 3.5.4 *(Continuidade da função composta) Considere-se $\varphi : D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $f : E\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ duas funções tais que $\varphi\,(D)\subset E$.*
Se φ é contínua em $a\in D$ e f é contínua em $\varphi\,(a)\in E$ então $(f\circ\varphi)$ é contínua em a.

Dem. Pretende-se provar que $\lim_{x\to a}(f\circ\varphi)\,(x) = (f\circ\varphi)\,(a)$.

Seja $x_n\in D$ uma sucessão tal que $x_n\to a$, por valores diferentes de a.

A sucessão correspondente $\varphi(x_n)\to\varphi(a)$ porque φ é contínua em a. Por sua vez a função f transforma a sucessão $\varphi(x_n)$ na sucessão $f\left[\varphi(x_n)\right]$ que converge para $f\left[\varphi(a)\right]$ visto que f é contínua em $f\left[\varphi(a)\right]$.

Então qualquer que seja a sucessão $x_n\to a$, temos que

$$(f\circ\varphi)\,(x_n) = f\left[\varphi(x_n)\right]\to f\left[\varphi(a)\right],$$

isto é, $\lim_{x\to a}(f\circ\varphi)\,(x) = (f\circ\varphi)\,(a)$. ■

Observação 3.5.5 *Da proposição anterior resulta a possibilidade de permutar a passagem ao limite com a função, isto é,*

$$\lim_{x\to a} f\left[\varphi(x)\right] = f\left[\lim_{x\to a}\varphi(x)\right].$$

É esta propriedade que permite o cálculo

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} sen\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) = sen\left[\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\right] = sen\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

3.6 Continuidade num intervalo

Definição 3.6.1 *(a) A função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se contínua no intervalo $]a, b[\subset D$ se e só se for contínua em todos os pontos desse intervalo.*
(b) A função f é contínua no intervalo $[a, b] \subset D$ se:

- *f é contínua à direita de a;*
- *f é contínua em $]a, b[$;*
- *f é contínua à esquerda de b.*

Exercício 3.6.2 *Determine λ e μ de modo a que a função*

$$f(x) = \begin{cases} 2+\lambda & se \quad x \leq 0 \\ \frac{x^2-x}{x^2-4x+3} & se \quad 0 < x < 1 \\ 1-3\mu & se \quad x \geq 1 \end{cases}$$

seja contínua no intervalo $[0, 1]$.

3.7 Descontinuidades

Definição 3.7.1 *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

(i) *O ponto $a \in D$ é um ponto de descontinuidade se $f(x)$ não é contínua em a.*

(ii) *A função f tem uma descontinuidade de 1ª espécie em a se $f(x)$ não é contínua em a e admite limites laterais finitos.*

(iii) *Um ponto de descontinuidade diz-se de 2ª espécie se pelo menos um dos limites laterais em a é infinito.*

Por vezes é conveniente definir o salto de f :

Definição 3.7.2 *Chama-se <u>salto</u> de $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ num ponto $a \in D$, que admite limites laterais $f(a^+)$ e $f(a^-)$ a:*

- *$\sigma(a) = \max \{|f(a^+) - f(a)|, |f(a^-) - f(a)|\}$, caso existam ambos os limites laterais;*
- *$\sigma(a) = |f(a^+) - f(a)|$ ou $\sigma(a) = |f(a^-) - f(a)|$ se existirem apenas $f(a^+)$ ou $f(a^-)$, respectivamente;*

- *$\sigma(a) = 0$, se a é um ponto isolado.*

Exercício 3.7.3 *Determine e classifique os pontos de descontinuidade de*

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad x > 2 \\ -x^2 + 2x & , \quad 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{x} & , \quad x < 0. \end{cases}$$

Em cada ponto de descontinuidade calcule o salto de f.

3.8 Teoremas fundamentais sobre continuidade

Teorema 3.8.1 *(de Bolzano ou do valor intermédio) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a, b]$ e k é um valor compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$ então existe pelo menos um valor $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = k$.*

Dem. Suponhamos que $f(a) \leq f(b)$ e $f(a) \leq k \leq f(b)$.

Divida-se o intervalo $[a, b]$ ao meio. Dos dois intervalos obtidos seja $[a_1, b_1]$ o que verifica $f(a_1) \leq k \leq f(b_1)$.

Se verificarem os dois subintervalos escolhe-se arbitrariamente um deles para $[a_1, b_1]$.

Por nova divisão ao meio do intervalo $[a_1, b_1]$ obtêm-se dois intervalos. Seja $[a_2, b_2]$ o intervalo que verifica $f(a_2) \leq k \leq f(b_2)$. Prosseguindo indefinidamente desta forma obtem-se uma sucessão de intervalos

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

que verifica $f(a_n) \leq k \leq f(b_n)$. Seja c o número real comum a todos estes intervalos $\left(c \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \right)$. Assim, $a_n \to c$ e $b_n \to c$ e, passando ao limite nas últimas desigualdades, tem-se, pela continuidade de f, $f(c) \leq k \leq f(c)$, pelo que $f(c) = k$.

Se se supuser $f(b) \leq f(a)$ e $f(b) \leq k \leq f(a)$ a demonstração é análoga.

■

Numa versão mais simplificada pode enunciar-se assim:

"Se f é uma função contínua então não passa de um valor a outro sem passar por todos os valores intermédios."

Um importante corolário deste teorema para $k = 0$ diz o seguinte:

Corolário 3.8.2 *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a, b]$ com $f(a) \times f(b) < 0$ então f tem pelo menos um zero em $]a, b[$,isto é,*

$$\exists c \in]a, b[: f(c) = 0.$$

Exercício 3.8.3 *Provar que a equação*

$$x^3 = 3x^2 - 1$$

tem pelo menos uma raiz real.

Teorema 3.8.4 *Se f é uma função contínua num conjunto $D \subset \mathbb{R}$ limitado e fechado, então $f(D)$ é limitado e fechado.*

Dem. a) Provar que $f(D)$ é limitado.

Suponhamos, por contradição, que $f(D)$ não é limitado. Então existe uma sucessão $y_n \in f(D)$ tal que $y_n \to \infty$.

Pelo Teorema 3.8.1, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in D$ tal que $f(x_n) = y_n$ e como D é um conjunto limitado então x_n é uma sucessão limitada, logo admite uma subsucessão convergente (pelo Corolário 1.7.9) que se designa por $x_{\alpha_n} \to c$.

Como D é um conjunto limitado, $c \in D$. assim $f(x_{\alpha_n}) = y_{\alpha_n} \to f(c)$, porque f é contínua, o que contradiz o facto de $y_n \to \infty$.

b) Provar que $f(D)$ é fechado, ou seja as sucessões convergentes em $f(D)$ têm limites em $f(D)$.

Seja $y_n \in f(D)$ tal que $y_n \to c$.

Como para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in D$ tal que $f(x_n) = y_n$ e D é um conjunto limitado, pode extrair-se uma subsucessão $x_{\alpha_n} \to x$.

Como D é fechado então $x \in D$. Assim $f(x_{\alpha_n}) = y_{\alpha_n}$ e passando ao limite quando $n \to +\infty$, tem-se

$$f(x) = \lim f(x_{\alpha_n}) = \lim y_{\alpha_n} = c.$$

Como $x \in D$ logo $c = f(x) \in f(D)$. ∎

Teorema 3.8.5 *(Teorema de Weierstrass) Toda a função contínua num conjunto não vazio, limitado e fechado tem máximo e mínimo nesse conjunto.*

Dem. Seja f uma função contínua em $D \neq \varnothing$, limitado e fechado.Pelo Teorema 3.8.4, $f(D)$ é limitado. Como $f(D) \neq \varnothing$ então existe $s = \sup f(D)$.

Pela definição de supremo (o menor dos majorantes), para qualquer $\delta > 0$ existem pontos de $f(D)$ que pertencem ao intervalo $]s - \delta, s[$. Então

$$s \in \overline{f(D)} = f(D), \text{ porque } f(D) \text{ é fechado.}$$

Como $s \in f(D)$ e $s = \sup f(D)$ então s é o máximo de $f(D)$.

A demonstração é análoga para a existência de mínimo de $f(D)$. ∎

Proposição 3.8.6 *Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua num intervalo I. Então $f(I)$ é um intervalo.*

Dem. Considere-se $y_1, y_2 \in f(I)$ tais que $y_1 < y_2$ e $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$.

Como f é uma função contínua no intervalo $[x_1, x_2]$ (ou $[x_2, x_1]$ se for $x_2 < x_1$) resulta pelo Teorema 3.8.1 que $[y_1, y_2] \subset f(I)$, pelo que $f(I)$ é um intervalo. ∎

Observação 3.8.7 *Este teorema não refere a natureza do intervalo $f(I)$, o qual terá necessariamente como extremos $\inf\limits_{x\in I} f(x)$ e $\sup\limits_{x\in I} f(x)$, que poderão, ou não, pertencer a $f(I)$. Isto é, o intervalo pode ser aberto, fechado ou semi-aberto.*

Proposição 3.8.8 *Seja I um intervalo e $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e injectiva. Então f é estritamente monótona.*

Dem. Se $I = \{x_0\}$ o resultado é trivial ($f(x_0)$ é um único ponto).

Considerem-se então $x_0, y_0 \in I$ dois elementos quaisquer tais que $x_0 < y_0$. Como, pela injectividade $f(x_0) \neq f(y_0)$ ter-se-á

$$f(x_0) < f(y_0) \quad \text{ou} \quad f(y_0) < f(x_0).$$

No primeiro caso prova-se que f é estritamente crescente e no segundo caso estritamente decrescente.

Suponha-se que $f(x_0) < f(y_0)$ (no 2^o caso a demonstração é análoga) e prove-se que para $x_0 < x < y_0$ se tem $f(x_0) < f(x) < f(y_0)$.

Com efeito, se assim não fosse, tinha-se: (i) $f(x) < f(x_0) < f(y_0)$ ou (ii) $f(x_0) < f(y_0) < f(x)$.

No caso (i), o Teorema 3.8.1 garante que existe $\xi \in]x, y_0[$ tal que $f(\xi) = f(x_0)$ o que contraria a injectividade de f.

Finalmente, para provar a monotonia, se $x_0 < x < y < y_0$, pela 1^a parte da demonstração, tem-se que

$$f(x_0) < f(y) < f(y_0).$$

Como $x_0 < x < y$ e $f(x_0) < f(y)$, tem-se pela parte anterior que

$$f(x_0) < f(x) < f(y).$$

Assim provou-se que no intervalo $[x_0, y_0]$ a função f é estritamente crescente. Como x_0 e y_0 são pontos arbitrários em I então f é estritamente crescente em I. ∎

Proposição 3.8.9 *Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona num intervalo I. Se $f(I)$ é um intervalo então f é contínua.*

Dem. Suponhamos que f é crescente e seja $x_0 \in I$ (no caso de f ser decrescente o raciocínio é semelhante).

Designe-se por

$$f(x_0^-) := \lim_{x \to x_0^-} f(x) \text{ e } f(x_0^+) := \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Como f é monótona então os limites anteriores são finitos e

$$f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+).$$

Se fosse $f(x_0^-) < f(x_0^+)$ então $f(I)$ não podia ser um intervalo, mas sim uma reunião de intervalos, pois qualquer elemento $y \in \left]f(x_0^-), f(x_0^+)\right[$ com $y \neq f(x_0)$ não pertence a $f(I)$.

Logo os limites laterais têm de ser iguais, isto é, f tem de ser contínua.

■

3.9 Assímptotas

Definição 3.9.1 *(i) Sejam f e h duas funções reais definidas para $x > x_0$. Diz-se que a linha de equação $y = h(x)$ é assímptota ao gráfico de $f(x)$ para a direita (ou quando $x \to +\infty$) se e só se*

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - h(x)] = 0.$$

Geometricamente, significa que o gráfico de $f(x)$ não difere muito do gráfico de $h(x)$ quando x é grande e positivo.
(ii) Analogamente, se f e h duas funções reais definidas para $x < x_0$, a linha de equação $y = h(x)$ é assímptota ao gráfico de $f(x)$ para a esquerda (ou quando $x \to -\infty$) se e só se

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - h(x)] = 0.$$

Exemplo 3.9.2 *A função $h(x) = x^2$ é uma é assímptota ao gráfico de $f(x) = \frac{x^5-1}{x^3}$ para a direita, porque*

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^5 - 1}{x^3} - x^2\right] = \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

Se em particular as assímptotas $h(x)$ são rectas então pode considerar-se dois casos: rectas verticais e não verticais.

Definição 3.9.3 *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de D. A recta $x = a$ é uma assímptota vertical ao gráfico de $f(x)$ se se verificar pelo menos uma das quatro igualdades*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad , \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty.$$

Proposição 3.9.4 *A recta $y = mx + b$ é uma assímptota não vertical ao gráfico de $f(x)$, definida para $x > x_0$, se e só se*

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad e \quad b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx]$$

existirem e forem finitos.
De modo análogo se define a assímptota para a esquerda.

Dem. ($\Longrightarrow$) Suponha-se que a recta $y = mx + b$ é uma assímptota ao gráfico de $f(x)$.

Considere-se a definição de assímptota com $h(x) = mx + b$ $(m, b \in \mathbb{R})$.

Então, para o caso de assímptota para a direita de f, tem-se

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx - b] = 0$$

donde

$$b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx]$$

e

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} [f(x) - mx - b] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m - \frac{b}{x}\right] \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m\right], \end{aligned}$$

pelo que

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Então m e b têm os respectivos limites finitos.

A demonstração para o caso da assímptota para a esquerda é análogo.

($\Longleftarrow$) Se existirem e forem finitos os dois limites então

$$b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] \Longleftrightarrow \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx - b] = 0,$$

pelo que $y = mx + b$ é uma assímptota ao gráfico de $f(x)$ para a direita. ■

Exercício 3.9.5 *Determine a equação de todas as rectas que são assímptotas ao gráfico de*

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}.$$

3.10 Função inversa

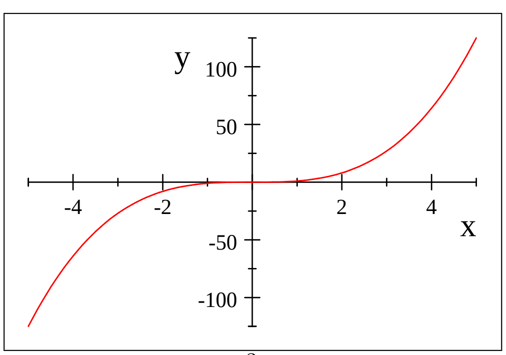
Definição 3.10.1 *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função injectiva. Diz-se que a função $g : f(D) \to \mathbb{R}$ é a função inversa de f se $g\,[f(x)] = x$, $\forall x \in D$.*

Observação 3.10.2 **(i)** *Só as funções injectivas admitem função inversa e neste caso as equações*

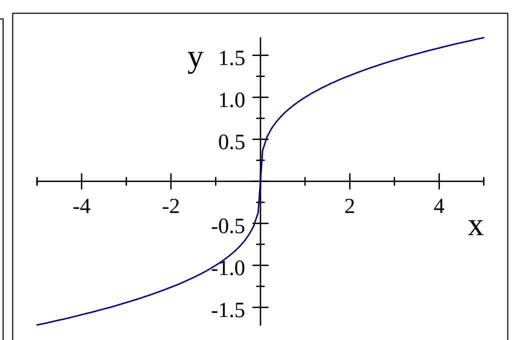
$$y = f(x) \quad e \quad x = g(y)$$

são equivalentes.

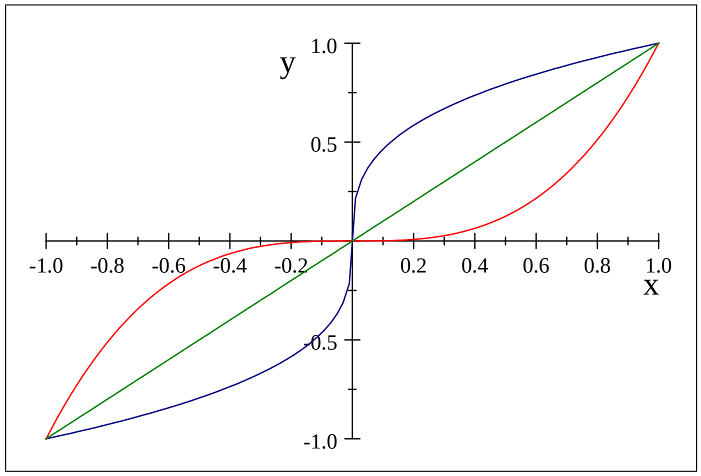
(ii) *Sendo g a função inversa de f, para obter o gráfico da equação $y = g(x)$ basta efectuar sobre o o gráfico de $y = f(x)$ uma simetria em relação à bissectriz dos quadrantes ímpares.*



x^3



$\sqrt[3]{x}$



Os gráficos são simétricos relativamente a $y = x$

(iii) *Se* f *é monótona (sendo injectiva é estritamente monótona) e crescente (decrescente) então a sua inversa é também estritamente monótona crescente (decrescente).*

Com efeito, para $x_1, x_2 \in Df$ *com* $x_1 < x_2$ *então* $f(x_1) < f(x_2)$, *se* f *for crescente. Notando por* g *a função inversa de* f, *tem-se*

$$g[f(x_1)] = x_1 < x_2 = g[f(x_2)],$$

pelo que g *é crescente.*

(iv) *Não confundir* $f^{-1}(x)$ *com* $\frac{1}{f(x)}$. *Repare-se que para* $f(x) = x^3$ *se tem* $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ *mas* $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^3}$.

Para uma função contínua e injectiva, a função inversa ainda é contínua?

Teorema 3.10.3 *(Continuidade da função inversa) Seja* f *uma função contínua e injectiva, definida num intervalo* $I \subset \mathbb{R}$. *Então* f^{-1}*é contínua.*

Dem. Pela Proposição 3.8.8, f é estritamente monótona e, portanto, f^{-1} também é estritamente monótona.

Mas f^{-1} está definida no intervalo $f(I)$, sendo o seu contradomínio I um intervalo. Então, pela Proposição 3.8.9, f^{-1}é contínua. ■

3.11 Função exponencial

À aplicação $x \mapsto a^x$ dá-se o nome de função exponencial de base a.

As principais propriedades resumem-se no seguinte resultado:

Teorema 3.11.1 *A função exponencial a^x $(a > 0)$ é contínua e satisfaz as propriedades:*

1. $a^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
2. $a^{x+y} = a^x \times a^y \;\; ; \;\; (a^x)^y = a^{xy}, \forall x, y \in \mathbb{R}$
3. *Se* $a > 1$, a^x *é estritamente crescente,* $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$.
4. *Se* $a < 1$, a^x *é estritamente decrescente,* $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$.
5. *Se* $a = 1$, $a^x \equiv 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Dem. A demonstração do teorema é consequência das propriedades algébricas dos limites e da sucessão exponencial.

A título de exemplo prove-se a alínea 3.

Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que $x_1 < x_2$ e fixem-se racionais r_1 e r_2 tais que $x_1 < r_1 < r_2 < x_2$.

Tomando as sucessões $r_n, s_n \in \mathbb{Q}$ com $r_n \to x_1$ e $s_n \to x_2$ tem-se, a partir de uma certa ordem n_0,

$$r_n < r_1 < r_2 < s_n$$

e, por consequência,

$$a^{x_1} = \lim a^{r_n} < a^{r_1} < a^{r_2} < \lim a^{s_n} = a^{x_2}.$$

■

No estudo que se segue fixa-se uma determinada base : e (número de Neper)

Proposição 3.11.2 *Tem-se*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Dem. Calculando o limite para $x \to +\infty$:

Seja $x > 1$ e designe-se por $I(x)$ o maior inteiro menor ou igual a x. Assim tem-se $I(x) \leq x < I(x)+1$ e

$$1+\frac{1}{I(x)} \geq 1+\frac{1}{x} > 1+\frac{1}{I(x)+1}$$

e, pelo Teorema 3.11.1 (3),

$$\left(1+\frac{1}{I(x)}\right)^{I(x)+1} \geq \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} > \left(1+\frac{1}{I(x)+1}\right)^{I(x)}.$$

Passando ao limite e fazendo no primeiro membro $n = I(x)$ tem-se

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{I(x)}\right)^{I(x)+1} &= \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \\ &= \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e.\end{aligned}$$

Para o último membro procede-se de modo análogo com $n = I(x)+1$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{I(x)+1}\right)^{I(x)} &= \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} \\ &= \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} = e.\end{aligned}$$

Pela Proposição 3.1.5 (5), obtem-se

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

Para o limite quando $x \to -\infty$ faz-se a mudança de variável $x = -(1+y)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} &= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-(1+y)}\right)^{-(1+y)} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{-y-1+1}{-1-y}\right)^{-(1+y)} \\ &= \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{1+y}\right)^{-(1+y)} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{1+y} \\ &= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\left(1+\frac{1}{y}\right) = e.\end{aligned}$$

■

Proposição 3.11.3 *Tem-se*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad e \quad \lim_{x\to-\infty} x\ e^x = 0.$$

Dem. Fazendo $e = 1 + h$ ($h > 0$) tem-se pelo binómio de Newton

$$\begin{aligned} \frac{e^n}{n} &= \frac{(1+h)^n}{n} = \frac{1 + nh +^n C_2 h^2 + \cdots + h^n}{n} \\ &> \frac{1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2}{n} = \frac{1}{n} + h + \frac{n-1}{2}h^2. \end{aligned}$$

Então

$$\lim \frac{e^n}{n} > \lim \left(\frac{1}{n} + h + \frac{n-1}{2}h^2\right) = +\infty,$$

pelo que $\lim \frac{e^n}{n} = +\infty$. Fazendo $n = I(x)$ tem-se $n \le x < n + 1$ e portanto

$$\frac{e^x}{x} > \frac{e^x}{n+1} \ge \frac{e^n}{n+1} = \frac{1}{e}\frac{e^{n+1}}{n+1} \underset{n\to-\infty}{\to} +\infty.$$

Então

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \ge +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

No outro caso,

$$\lim_{x\to-\infty} x\ e^x = \lim_{y\to+\infty} -y\ e^{-y} = -\lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^y} = -\lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^y}{y}} = -\frac{1}{\infty} = 0.$$

■

Corolário 3.11.4 *Para* $k \in \mathbb{R}$ *tem-se*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty \quad e \quad \mathit{lim}_{x\to-\infty} |x|\ e^x = 0.$$

Isto é, «e^x é um infinito superior a todas as potências de x».

Dem. No caso do limite para $+\infty$:
Se $k \le 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^k} = \lim_{x\to+\infty} x^{-k}e^x = +\infty.$$

Para $k > 0$, observando que

$$\frac{e^x}{x^k} = \left(\frac{e^{\frac{x}{k}}}{x}\right)^k$$

tem-se
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{x}{k}}}{x}=\lim_{u\to+\infty}\frac{e^u}{ku}=\frac{1}{k}\lim_{u\to+\infty}\frac{e^u}{u}=+\infty.$$

Para $x\to-\infty$ aplica-se o resultado anterior com a mudança de variável $x=-y$. ■

Exercício 3.11.5 *1. Indique o domínio e o contradomínio de cada um das expressões:*

a) $f(x)=2-5^{1-3x}$

b) $g(x)=\frac{8}{3^{1-3x}+7}$

2. Resolva em $\mathbb{R}$ cada uma das condições:

a) $2^{x^2-5x}=\frac{1}{16}$

b) $0,25^{x^2}\geq\left(\frac{1}{16}\right)^{2x}$

3. Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}}{x^4}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}x\ e^{\frac{x^3}{2}}$

3.12 Função logarítmica

Como a aplicação $f:x\mapsto a^x$ para $a\in\mathbb{R}^+\backslash\{1\}$ é uma bijecção de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}^+$, então admite uma aplicação inversa $f^{-1}:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, que se designa por função logaritmo de base a e se representa por

$$\begin{array}{rcrl}\log_a & : &]0,+\infty[\to & \mathbb{R}\\ & & x\to & \log_a x\end{array},\quad \text{com } a\in\mathbb{R}^+\backslash\{1\}.$$

Como a^x é estritamente monótona e contínua, a sua inversa, $log_a x$ também o será. Além disso o seu gráfico será simétrico ao da exponencial, em relação à bissectriz dos quadrantes ímpares.

Recorde-se as propriedades mais comuns em função da base do logaritmo.
Se $a>1$ tem-se que:

- $log_a x$ é estritamente crescente;

- $log_a x > 0 \iff x > 1$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} log_a x = +\infty \ \ ; \ \ \lim\limits_{x\to 0^+} log_a x = -\infty$.

Se $0 < a < 1$ obtem-se que:

- $log_a x$ é estritamente decrescente;
- $log_a x > 0 \iff 0 < x < 1$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} log_a x = -\infty \ \ ; \ \ \lim\limits_{x\to 0^+} log_a x = +\infty$.

Do conceito de função inversa resultam directamente várias consequências:

- $a^{log_a x} = x$
- $log_a (a^x) = x$
- $log_a x = y \iff x = a^y$.

Exercício 3.12.1 *1. Calcular:*

a) $\log_{\sqrt{2}} 64$
b) $\log_{0,1} 1000$

2. Determinar o domínio das funções:

a) $f(x) = \log_2 (4 - 3x)$
b) $g(x) = 3 + \log_{\frac{1}{3}} \left(9 - x^2\right)$

3. Resolva em $\mathbb{R}$ as condições:

a) $\log_{\frac{1}{e}} \left(2x^2 - x\right) \geq \log_{\frac{1}{e}} x$
b) $\log_3 \left(x^2 - 7\right) < 2$

4. Caracterize a função inversa de:

a) $f(x) = -1 + 2\ln (1 - 5x)$
b) $g(x) = 4 + 3^{2x-1}$

5. Determine em $\mathbb{R}$ o conjunto solução das condições::

a) $4\ln^2(x) - 7 - 3\ln x \geq 0$

b) $e^x + 6e^{-x} = 7$

Teorema 3.12.2 *(Propriedades operatórias dos logaritmos) Sejam x e y números positivos e $a, b \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$. Então são válidas as seguintes propriedades:*

1. $\log_a(x \times y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
3. $\log_a(x^p) = p \times \log_a(x), \quad \forall p \in \mathbb{R}$
4. $\log_b(x) = \log_a(x) \times \log_b(a)$ *(mudança de base do logaritmo)*

Dem. 1. Note-se que

$$x = a^{\log_a(x)}\ ,\ y = a^{\log_a(y)} \text{ e } xy = a^{\log_a(x)+\log_a(y)}.$$

Então

$$\log_a(x \times y) = \log_a\left(a^{\log_a(x)+\log_a(y)}\right) = \log_a(x) + \log_a(y)\,.$$

2. Como $\frac{x}{y} = a^{\log_a(x)-\log_a(y)}$ então

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a\left(a^{\log_a(x)-\log_a(y)}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)\,.$$

3. Como $x^p = \left(a^{\log_a(x)}\right)^p = a^{p\log_a(x)}$, então

$$\log_a(x^p) = \log_a\left(a^{p\log_a(x)}\right) = p \times \log_a(x)\,.$$

4. Escrevendo $x = a^{\log_a(x)}$ então

$$\log_b(x) = \log_b\left(a^{\log_a(x)}\right) = \log_a(x) \times \log_b(a)\,.$$

■

Proposição 3.12.3 *Para todo o $k > 0$, tem-se*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x^k} = 0 \quad e \quad \lim_{x\to 0^+} x^k \log(x) = 0.$$

Intuitivamente a proposição significa que: $log\,(x) \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$ mais lentamente que qualquer potência arbitrariamente pequena de x.

Dem. Fazendo a mudança de variável $y = k\log x$ tem-se

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x)}{x^k} = \lim_{y\to+\infty}\frac{\frac{y}{k}}{e^y} = \frac{1}{k}\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{e^y} = 0.$$

Com a mudança de variável $x = \frac{1}{y}$ obtem-se

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+} x^k\log(x) &= \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{y}\right)^k\log\left(\frac{1}{y}\right) = -\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{y}\right)^k\log(y)\\ &= -\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{y}\right)^k\frac{\log(y)}{y^k} = 0.\end{aligned}$$

■

Proposição 3.12.4 *Tem-se*

$$\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1 \quad e \quad \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1.$$

Dem. Pela Proposição 3.11.2 tem-se $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ e, pela mudança de variável $y = \frac{1}{x}$, $\lim\limits_{y\to0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e$.

Pela continuidade da função logaritmo, tem-se

$$\begin{aligned}\log\left[\lim_{y\to0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right] &= \log e \Longleftrightarrow \lim_{y\to0}\left[\log(1+y)^{\frac{1}{y}}\right] = 1\\ &\Longleftrightarrow \lim_{y\to0}\frac{\log(1+y)}{y} = 1.\end{aligned}$$

No segundo limite faz-se a mudança de variável $y = e^x - 1$ e

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{y\to0}\frac{y}{\log(1+y)} = 1.$$

■

Corolário 3.12.5 *(Aplicação do Teorema 1.14.4) Para todo o $x_n \in \mathbb{R}$, se $x_n \to a$ e $u_n \to +\infty$ então*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x_n}{u_n}\right)^{u_n} = e^a.$$

Dem. Observe-se que

$$\begin{aligned}\log\left(1+\frac{x_n}{u_n}\right)^{u_n} &= u_n\log\left(1+\frac{x_n}{u_n}\right)=\frac{\log\left(1+\frac{x_n}{u_n}\right)}{\frac{1}{u_n}}\\ &= x_n\frac{\log\left(1+\frac{x_n}{u_n}\right)}{\frac{x_n}{u_n}}.\end{aligned}$$

Passando ao limite

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\log\left(1+\frac{x_n}{u_n}\right)^{u_n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left[x_n\frac{\log\left(1+\frac{x_n}{u_n}\right)}{\frac{x_n}{u_n}}\right]=a,$$

uma vez que $\frac{x_n}{u_n}\to\frac{a}{+\infty}=0$, pelo que se pode aplicar a Proposição 3.12.4.

Pela continuidade da função exponencial, tem-se

$$\begin{aligned}e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\log\left(1+\frac{x_n}{u_n}\right)^{u_n}\right)} &= e^a\iff\lim_{n\to+\infty}e^{\left(\log\left(1+\frac{x_n}{u_n}\right)^{u_n}\right)}=e^a\\ &\iff\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x_n}{u_n}\right)^{u_n}=e^a.\end{aligned}$$

■

Exercício 3.12.6 *1. Calcular o valor dos limites::*

a) $\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x}{3\ \log(2-x)}$

b) $\lim\limits_{x\to0^+}x^x$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x)^{\frac{x+1}{x^2}}$

d) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{3}{4}x+1\right)^{\frac{1}{3\ x}}$

e) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(5+x^4\right)-\ln 5}{x^4}$

2. Determine os valores reais que verificam as condições:

a) $\log_{\frac{1}{2}}(2x)<2-\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2-x}{x}\right)$

b) $\log(x+3)>\log(x-1)-\log(2+x)$

3.13 Funções trigonométricas inversas

As funções trigonométricas *sen* x, $\cos x$, *tg* x e $\cot g\ x$ não são injectivas nos respectivos domínios. Assim essas funções não seriam invertíveis.

Para garantir a invertibilidade consideram-se restrições dessas funções a intervalos contidos no seu domínio.

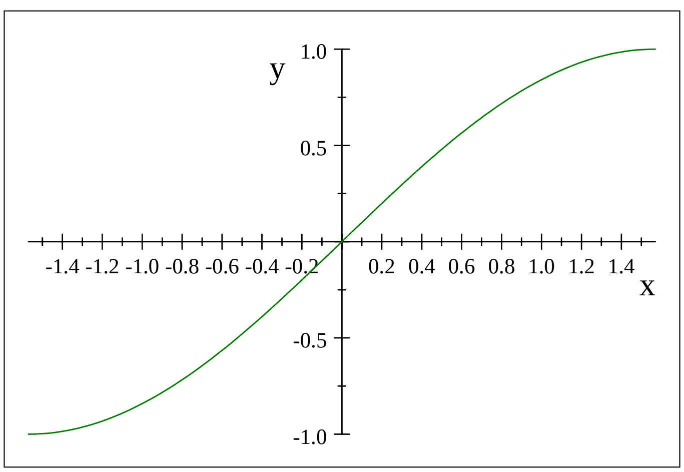
Das infinitas restrições considerar-se-á uma restrição principal de modo a que o contradomínio seja igual ao da função inicial.

3.13.1 Arco-seno

Para a função $f(x) = sen\ x$, qualquer restrição de f a intervalos do tipo $\left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$, $k \in \mathbb{Z}$, é invertível.

Considera-se a restrição principal para $k = 0$, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Isto é

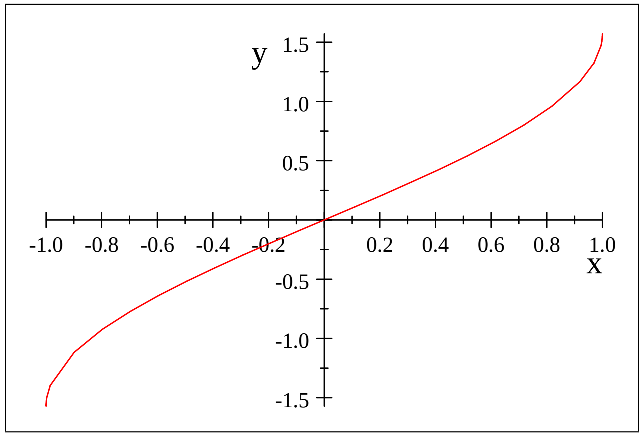
$$\begin{array}{rcrl} f & : & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to & [-1,1] \\ & & x \mapsto & sen\ x \end{array}$$



$\sin x$

admita a função inversa

$$\begin{array}{rcrl} f^{-1} & : & [-1,1] \to & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ & & x \mapsto & arcsen\ x \end{array}$$



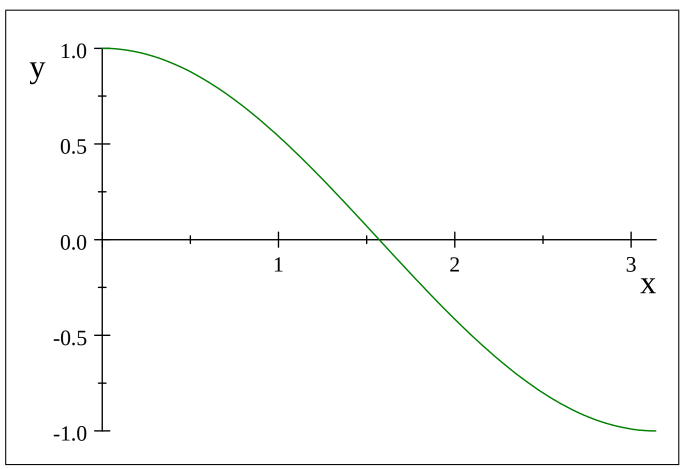
$\arcsin x$

3.13.2 Arco-cosseno

Dada a função $g(x) = \cos x$, qualquer restrição de g a um dos intervalos $[k\pi, \pi + k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$, é invertível.

A restrição principal para $k = 0$, $[0, \pi]$. Assim

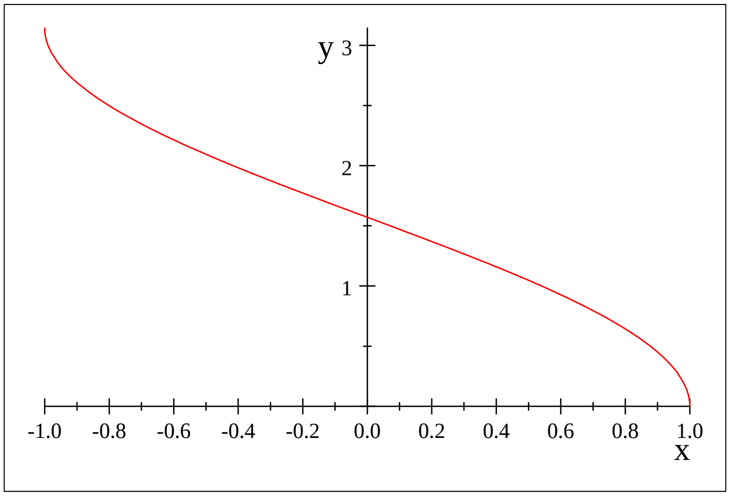
$$\begin{array}{rrcl} g & : & [0,\pi] \rightarrow & [-1,1] \\ & & x \mapsto & \cos x \end{array}$$



$\cos x$

admita a função inversa

$$\begin{array}{rrcl} f^{-1} & : & [-1,1] \rightarrow & [0,\pi] \\ & & x \longmapsto & arc\cos\ x \end{array}$$



$\arccos x$

3.13.3 Arco-tangente

A função $h(x) = tg\ x$ de domínio

$$D_h = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

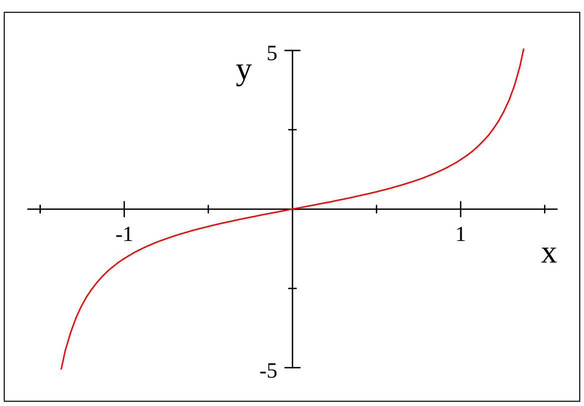
e contradomínio $\mathbb{R}$ tem como restrições invertíveis as que tenham por domínios intervalos do tipo

$$\left]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right[,\ k \in \mathbb{Z}.$$

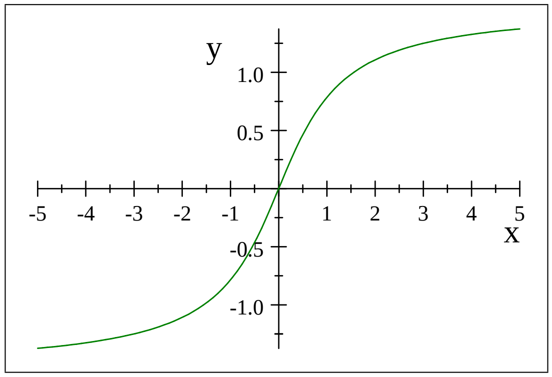
Para $k = 0$, obtem-se a restrição principal. Isto é,

$$\begin{array}{rccc} h & : & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to & \mathbb{R} \\ & & x \longmapsto & tg\ x \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} h^{-1} & : & \mathbb{R} \to & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ & & x \mapsto & arctg\ x \end{array}.$$

Graficamente



$tg\ x$



$arctg\ x$

3.13.4 Arco co-tangente

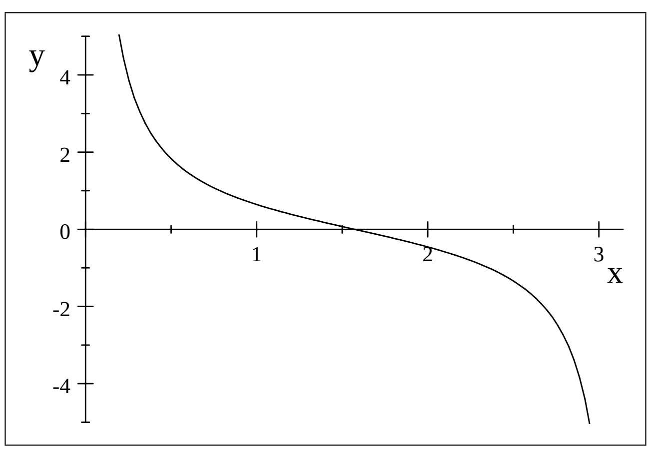
Para a função $j(x) = cotg\ x$ de domínio

$$D_j = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

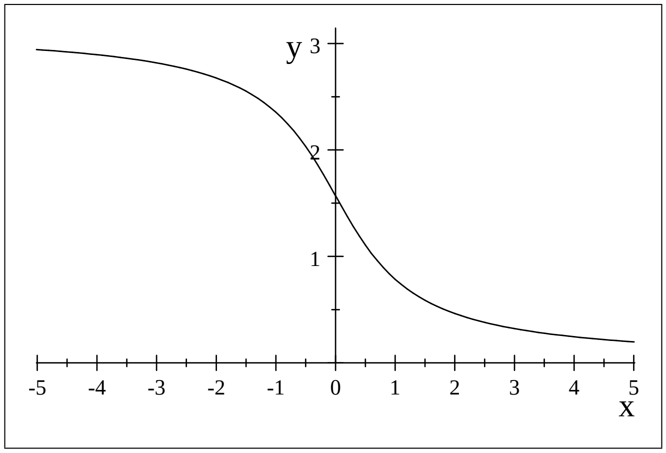
e contradomínio $\mathbb{R}$ a sua restrição a intervalos do tipo $]k\pi, k\pi + \pi[$, $k \in \mathbb{Z}$, definem funções invertíveis. A restrição principal obtem-se para $k = 0$. Então,

$$\begin{array}{rccc} j & : &]0,\pi[\to & \mathbb{R} \\ & & x \longmapsto & \cot g\ x \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} j^{-1} & : & \mathbb{R} \to &]0,\pi[\\ & & x \mapsto & arc\cot g\ x \end{array}.$$

Graficamente



$\cot g\ x$



arccot x

Exercício 3.13.1 *1. Dada a função $h(x) = 2 + arcsen\,(2x+1)$ determine:*

a) *Domínio de h*

b) $h(0)$ *e* $h\left(-\frac{1}{6}\right)$

c) *Contradomínio de h*

d) *As soluções da equação* $h(x) = 2 + \frac{\pi}{3}$

e) h^{-1} *e caracterize-a.*

2. Calcular:

a) $\cos\left(arcsen\left(\frac{4}{5}\right)\right)$

b) $tg\left(\operatorname{arccot}\left(\frac{3}{4}\right)\right)$

Capítulo 4

Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}$

4.1 Derivada de uma função num ponto

Fermat foi um dos primeiros matemáticos a definir o conceito de derivada ao interessar-se em determinar o máximo e o mínimo de uma função.

Deve-se a Cauchy a formulação clássica da noção de derivada por volta de 1823:

Definição 4.1.1 *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real de variável real e $a \in D$ um ponto de acumulação de D.*
Chama-se derivada de f no ponto a, e presenta-se $f'(a)$, a

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \textit{ou} \quad f'(a) = \lim_{h \to 0} \lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Se o limite existir e for finito então a função f diz-se <u>derivável</u> ou <u>diferenciável</u> no ponto a.

Exercício 4.1.2 *Utilizando a definição calcular a derivada de $g(x) = \frac{x-2}{x+2}$ em $x_0 = 1$.*

4.2 Interpretação geométrica da derivada

A interpretação geométrica do conceito de derivada permite, em particular, definir rigorosamente tangente a uma curva cujo gráfico é definido por $y = f(x)$.

Não é possível definir a recta tangente a uma curva como sendo a recta que tem apenas um ponto comum com a curva. É preciso um conceito mais forte.

Considere-se uma recta secante ao gráfico de $f(x)$, intersectando-a nos pontos P_1 e P_2.

O declive da recta t tangente a $f(x)$ no ponto P_1 vai ser o limite dos declives das rectas secantes quando P_2 se aproxima de P_1, ou seja, quando $x \to x_1$.

Então

$$m = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(x_1).$$

Assim, de um ponto de vista geométrico, a derivada de uma função $f(x)$ em $x = a$ é o declive da recta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto de abcissa $x = a$.

A sua equação é então dada por

$$y - f(x_0) = m\,(x - x_0)$$

ou

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Exercício 4.2.1 *1. Escreva uma equação da recta tangente à curva* $y = \frac{2}{x-4}$ *no ponto de abcissa* 2.

2. Determine as coordenadas dos pontos da curva $y = x^3 - 4x$ *em que a tangente nesses pontos é uma recta horizontal.*

4.3 Derivadas laterais

Uma função $f(x)$ pode não ter derivada num ponto a (não existir recta tangente ao gráfico de $f(x)$), mas existirem semi-tangentes nesses pontos, isto é, tangente à esquerda e/ou à direita de a.

Considere-se a função

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 7 & \text{se} \quad x < 2 \\ x + 1 & \text{se} \quad x \geq 2. \end{cases}$$

Para estudar a existência de $f'(2)$ é necessário recorrer ao conceito de derivadas laterais.

Definição 4.3.1 *Seja* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $a \in D$ *um ponto de acumulação de* D.

(i) *f é derivável à esquerda de a se existe e é finito.*

$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad ou \quad \lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

que se representa por $f'(a^-)$.

(ii) *f é derivável à direita de a se existe e é finito.*

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad ou \quad \lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

que se nota por $f'(a^+)$.

Observação 4.3.2 *1. Da definição anterior resulta que f é derivável em a se e só se f é derivável à esquerda e à direita de a. Neste caso $f'(a) = f'(a^-) = f'(a^+)$.*

2. Geometricamente $f'(a^-)$ representa o declive da semi-recta tangente à esquerda de a, enquanto $f'(a^+)$ será o declive da semi-recta tangente à direita de a.

3. A existência de derivada de uma função num ponto pode depender apenas da existência de uma derivada lateral. Por exemplo, para $f(x) = \sqrt{x-3}$, $D_f = [3, +\infty[$ e

$$f'(3) = f'(3^+) = \lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x-3}}{x-3} = +\infty.$$

4. As funções não têm derivada nos pontos angulosos dos seus gráficos, já que as semi-tangentes nesse ponto não estão no prolongamento uma da outra.

4.4 Derivadas infinitas

Diz-se que a derivada de f em a é $+\infty$ (respectivamente $-\infty$) se

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty \ (-\infty).$$

As derivadas infinitas à esquerda e à direita de a definem-se de modo análogo.

Geometricamente, se f derivada infinita em a, o gráfico de $f(x)$ admite tangente em $(a, f(a))$, paralela ao eixo das ordenadas.

4.5 Derivabilidade e continuidade

Proposição 4.5.1 *Se $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função derivável em $a \in D$, então f é contínua nesse ponto.*

Dem. Se f é uma função derivável em $a \in D$, então admite derivada finita nesse ponto, isto é,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ é finito.}$$

Escrevendo

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,(x - a)$$

e passando ao limite em ambos os membros, tem-se

$$\lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \to a} (x - a) = 0.$$

Então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, ou seja $f(x)$ é contínua em $x = a$. ■

Observação 4.5.2 1. *A existência de derivada infinita, $f'(a) = \pm\infty$, não garante a continuidade de f em a.*
Por exemplo, a função sinal

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -1 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

tem $f'(0) = +\infty$ e é descontínua no ponto 0.

2. *A recíproca da Proposição 4.5.1 não é verdadeira.*
Por exemplo, a função $f(x) = |x|$ é contínua em $x = 0$ e não tem $f'(0)$.

4.6 Função derivada

Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. A função derivada ou simplesmente derivada de uma função f, $x \longmapsto f'(x)$, é uma nova função:

- cujo domínio é o conjunto de todos os pontos em que f tem derivada finita;

- a cada ponto do seu domínio faz corresponder a derivada da função nesse ponto.

Se f derivável em todos os pontos de D, diz-se que f é derivável (diferenciável) em D ou apenas que f é derivável (diferenciável)

Exercício 4.6.1 *Caracterize a função derivada de cada uma das funções seguintes:*

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

b) $g(x) = \left|x - x^2\right|$

4.7 Regras de derivação

Para evitar o recurso constante à definição de derivada, utilizam-se as regras de derivação:

Proposição 4.7.1 *Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções deriváveis em $a \in D$ e $k \in \mathbb{R}$. Então:*

1. $(kf)(x)$ é derivável em a e $(kf)'(a) = kf'(a)$

2. $(f+g)(x)$ é derivável em a e $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

3. $(f \times g)(x)$ é derivável em a e $(f \times g)'(a) = f'(a) \times g(a) + f(a) \times g'(a)$ Em particular, $f^n(x)$ é derivável em a e $(f^n)'(a) = n\ f^{n-1}(a)\ f'(a)$, para $n \in \mathbb{N}$.

4. Se $g(a) \neq 0$ então $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ é derivável em a e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\ g(a) - f(a)\ g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Dem. 1. $(kf)'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{(kf)(x)-(kf)(a)}{x-a} = k \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = kf'(a)$.

2. $(f+g)'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right) = f'(a) + g'(a)$.

3. $(f\times g)'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{(f\times g)(x)-(f\times g)(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)+f(a)g(a)}{x-a}$
$= \lim\limits_{x\to a} \left(g(x)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right) = f'(a) \times g(a) + f(a) \times g'(a)$.

4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{(\frac{f}{g})(x)-(\frac{f}{g})(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(a)}{g(a)}}{x-a}$

$= \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)g(a)-g(x)f(a)-f(a)g(a)+f(a)g(a)}{(x-a)g(x)g(a)}$

$= \lim\limits_{x\to a} \frac{1}{g(x)g(a)} \frac{g(a)[f(x)-f(a)]-f(a)[g(x)-g(a)]}{(x-a)}$

$= \lim\limits_{x\to a} \frac{1}{g(x)g(a)} \left[g(a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right]$

$= \frac{f'(a)\ g(a)-f(a)\ g'(a)}{(g(a))^2}$. ■

4.8 Derivada da função composta

Teorema 4.8.1 *Consideremos as funções $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\varphi : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $\varphi(E) \subset D$. Se φ é derivável em $a \in E$ e f é derivável em $b = \varphi(a) \in D$, então $(f \circ \varphi) : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em a e tem-se*

$$(f \circ \varphi)'(a) = f(b)\ \varphi'(a) = f'(\varphi(a))\ \varphi'(a).$$

Dem. $(f \circ \varphi)'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{(f\circ\varphi)(x)-(f\circ\varphi)(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f[\varphi(x)]-f[\varphi)(a)]}{x-a}$

$= \lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f[\varphi(x)]-f[\varphi)(a)]}{\varphi(x)-\varphi(a)} \frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}\right)$

$= \lim\limits_{\varphi(x)\to\varphi(a)} \frac{f[\varphi(x)]-f[\varphi)(a)]}{\varphi(x)-\varphi(a)} \lim\limits_{x\to a} \frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a} = f'(\varphi(a))\ \varphi'(a)$. ■

4.9 Derivada da função inversa

Teorema 4.9.1 *Seja f uma função diferenciável e injectiva num intervalo $D \subset \mathbb{R}$ e $a \in D$ tal que $f'(a) \neq 0$. Então f^{-1} é diferenciável em $b = f(a)$ e*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Dem. Represente-se $y = f(x)$ e observe-se que se $y \neq b$ então $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(b) = a$.

Então pode escrever-se

$$\begin{aligned} \left(f^{-1}\right)'(b) &= \lim_{y\to b} \frac{\left(f^{-1}\right)(y) - \left(f^{-1}\right)(b)}{y-b} = \lim_{y\to b} \frac{1}{\frac{y-b}{(f^{-1})(y)-(f^{-1})(b)}} \\ &= \frac{1}{\lim\limits_{y\to b} \frac{f[f^{-1}(y)]-f(a)}{(f^{-1})(y)-a}} = \frac{1}{\lim\limits_{f^{-1}(y)\to a} \frac{f[f^{-1}(y)]-f(a)}{(f^{-1})(y)-a}} = \frac{1}{f'(a)}. \end{aligned}$$

■

Observação 4.9.2 *A hipótese $f'(a) \neq 0$ é fundamental pois, caso contrário, o resultado não é necessariamente verdadeiro. Tome-se como exemplo a função bijectiva $f(x) = x^3$. A sua inversa, $\sqrt[3]{x}$, não é derivável na origem.*

4.10 Derivadas de funções trigonométricas

4.10.1 Derivada da função $f(x) = sen\ x$

Provemos que a função $f(x) = sen\ x$ é derivável em $\mathbb{R}$ e determinemos a sua expressão:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{sen\ x - sen\ a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{2\ sen\left(\frac{x-a}{2}\right)\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{sen\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}} \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) = \cos a. \end{aligned}$$

Então $(sen\ x)' = \cos x$.

4.10.2 Derivada da função $\cos x$

A função $\cos x = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ pode ser considerada como a composição da função $sen\ x$ com a função $x + \frac{\pi}{2}$.

Então, pelo Teorema 4.8.1,é diferenciável em todos os pontos, sendo a sua derivada

$$\begin{aligned} (\cos x)' &= \left[sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \ \left(x + \frac{\pi}{2}\right)' \\ &= -sen\ x. \end{aligned}$$

4.10.3 Derivada das funções $tg\ x$ e $\cot g\ x$

A derivabilidade da função $tg : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ resulta directamente das regras de derivação

$$\begin{aligned} (tg\ x)' &= \left(\frac{sen\ x}{\cos x}\right)' \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + tg^2 x. \end{aligned}$$

Para a função $\cot g :]0, \pi[\to \mathbb{R}$ tem-se

$$\begin{aligned} (\cot g\ x)' &= \left(\frac{\cos x}{sen\ x}\right)' \\ &= -\frac{1}{sen^2 x} = co\sec^2 x = -\left(1 + \cot g^2 x\right). \end{aligned}$$

Exercício 4.10.1 *Calcular a derivada das funções*

a) $f(x) = tg\left(\frac{1}{x+3}\right)$

b) $g(x) = \cot g^2\left(x^2\right)$

4.10.4 Derivada das funções trigonométricas inversas

A função $x \longmapsto arcsen\ x$ é a função inversa de $y \longmapsto sen\ y$, isto é, designando por $x = f(y) = sen\ y$ então $y = f^{-1}(x) = arcsen\ x$.

Pelo Teorema 4.9.1, obtem-se

$$\begin{aligned}(arcsen\ x)' &= \left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{(sen\ y)'} \\ &= \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-sen^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

Então a função $y = arcsen\ x$ é diferenciável em todo o seu domínio e

$$(arcsen\ x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Da relação $y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$ tem-se

$$\begin{aligned}(\arccos x)' &= \left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{(\cos\ y)'} \\ &= -\frac{1}{sen\ y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\end{aligned}$$

pelo que

$$(\arccos\ x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

A partir da relação $y = arctg\ x \Leftrightarrow x = tg\ y$ obem-se

$$(arctg\ x)' = \frac{1}{(tg\ y)'} = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

As fórmulas anteriores permanecem válidas se se substituir x por uma função $u(x)$, diferenciável nos respectivos domínios e se aplicar o teorema da derivada da função composta. Assim

$$\begin{aligned}(arcsen\ u)' &= \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}, \\ (arctg\ u)' &= \frac{u'}{1+u^2}.\end{aligned}$$

4.11 Derivadas das funções exponencial e logarítmica

A função exponencial é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$(e^x)' = e^x$$

pois, considerando $f(x) = e^x$ tem-se

$$f'(a) = \lim_{h \to o} \frac{e^{a+h} - e^a}{h} = e^a \lim_{h \to o} \frac{\left(e^h - 1\right)}{h} = e^a.$$

Sendo $u : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, a função composta $e^{u(x)}$ é ainda diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)\ e^{u(x)}, \forall x \in D.$$

A função $x \longmapsto a^x$, com $a > 0$, é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$(a^x)' = a^x\ \log a,$$

pois $a^x = e^{\log a^x} = e^{x \log a}$ e aplicando a regra anterior obtem-se

$$\begin{aligned} (a^x)' &= \left(e^{x \log a}\right)' = e^{x \log a}\ (x \log a)' \\ &= a^x\ \log a. \end{aligned}$$

Analogamente para $u(x)$ uma função diferenciável,

$$\left(a^{u(x)}\right)' = a^{u(x)}\ \log a\ u'(x).$$

A função $f(x) = \log x$ é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e, para $a > 0$, tem-se

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \to o} \frac{\log(a+h) - \log a}{h} = \lim_{h \to o} \frac{\log\left(\frac{a+h}{a}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \to o} \frac{\log\left(1 + \frac{h}{a}\right)}{h} = \frac{1}{a} \lim_{h \to o} \frac{\log\left(1 + \frac{h}{a}\right)}{\frac{h}{a}} = \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

Então

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

e, para $u : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $u(x) > 0$, $\forall x \in D$, a função composta $\log(u(x))$ é diferenciável e

$$(\log(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}, \ \forall x \in D.$$

A função $f(x) = \log_a x$, com $a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$, é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e notando que

$$\log_a x = \log x \ \log_a e$$

obtem-se

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ \log a},$$

pois

$$1 = \log_e e = \log_a e \ \log_e a = \log_a e \ \log a,$$

pelo que

$$\log_a e = \frac{1}{\log a}.$$

Sendo $u(x)$ uma função diferenciável com $u(x) > 0$, $\forall x \in D$, então a derivada de $y = \log_a(u(x))$ é

$$(\log_a(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x) \ \log a}.$$

Exercício 4.11.1 *Calcular as derivadas de*

a) $y = \log_5(arctg\ x)$

b) $y = e^{\sqrt{3x}} + 5^{\cos x}$.

4.12 Teoremas fundamentais do cálculo diferencial

A possibilidade de aproximar localmente as funções diferenciáveis por funções "muito simples"(geometricamente corresponde a aproximar curvas por rectas tangentes no ponto de contacto), permite simplificar o estudo de funções reais de variável real e constitui o interesse fundamental do conceito de derivada.

Outra utilidade baseia-se na busca de máximos e mínimos de funções diferenciáveis.

Definição 4.12.1 *Seja* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $a \in D$.

(i) *Diz-se que f tem um máximo local (ou relativo) em a (ou que $f(a)$ é um um máximo local ou relativo de f) se e só se existir $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \leq f(a)$, $\forall x \in V_\varepsilon(a) \cap D$.*

(ii) *Analogamente, f tem um mínimo local (ou relativo) em a (ou que $f(a)$ é um um mínimo local ou relativo de f) se e só se existir $\varepsilon > 0$ tal que $f(a) \leq f(x)$, $\forall x \in V_\varepsilon(a) \cap D$.*

(iii) *Se as desigualdades anteriores forem estritas, isto é, $f(x) < f(a)$ (ou $f(a) < f(x)$), $\forall x \in V_\varepsilon(a) \cap (D \backslash \{a\})$ então diz-se que $f(a)$ é um um máximo local (mínimo local) estrito.*

(iv) *Se se falar, indistintamente, de máximos ou mínimos diz-se extremo local (ou relativo).*

(v) *Se se verificar $f(x) \leq f(a)$, $\forall x \in D$, então diz-se que $f(a)$ é um máximo absoluto de f em D.*
Analogamente, se $f(a) \leq f(x)$, $\forall x \in D$, $f(a)$ é um mínimo absoluto de f em D.

Um resultado importante para a pesquisa de extremos locais de uma função é o seguinte:

Proposição 4.12.2 *Seja D um intervalo de $\mathbb{R}$ com mais do que um ponto e $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável no ponto interior $a \in D$.*
Se f tem um extremo local em a então $f'(a) = 0$, isto é, a é um ponto crítico de f.

Dem. Suponhamos que f tem um máximo local em a. Então

$$\exists \varepsilon > 0 : f(x) \leq f(a) \text{ em } \left]a - \varepsilon, a + \varepsilon\right[,$$

pelo facto de a ser um ponto interior a D.

Para $x \in \left]a - \varepsilon, a\right[$, $f(x) \leq f(a)$ e $x < a$. Como f é diferenciável em a então existe e é finito

$$f'(a^-) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0.$$

Analogamente para $x \in \left]a, a + \varepsilon\right[$, $f(x) \leq f(a)$, $x > a$ e

$$f'(a^+) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0.$$

Como f é diferenciável em $x = a$ então

$$0 \leq f'(a^-) = f'(a) = f'(a^+) \leq 0,$$

pelo que $f'(a) = 0$.

Se supusermos que $f(a)$ é um mínimo local, a demonstração é semelhante. ∎

Observação 4.12.3 *O recíproco desta proposição não é verdadeira, isto é, existem funções com derivada nula num ponto que, contudo, não é extremo local.*
A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ é estritamente crescente não tendo portanto nenhum extremo local. Todavia $f'(0) = 0$.

Teorema 4.12.4 *(Teorema de Rolle) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e com derivada (finita ou infinita) em todos os pontos de $]a, b[$.*
Se $f(a) = f(b)$ então existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Dem. Como f é contínua no conjunto limitado e fechado $[a, b]$, pelo Teorema 3.8.5 f tem máximo e mínimo (absolutos) relativos em $[a, b]$.

Se o máximo e o mínimo são atingidos nas extremidades, como $f(a) = f(b)$ então $f(x) \equiv k$ e, portanto, $f'(c) = 0$, $\forall c \in]a, b[$.

Caso contrário o máximo é atingido num ponto interior $c \in]a, b[$ e, pela Proposição 4.12.2, $f'(c) = 0$. ∎

Corolário 4.12.5 *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a, b]$ e tem derivada (finita ou infinita) em todos os pontos de $]a, b[$ então entre dois zeros consecutivos de f' não pode haver mais que um zero de f.*

Dem. Sejam x_1 e x_2 dois zeros consecutivos de f'.

Suponha-se, com visto à obtenção de um absurdo, que existem α e β tais que $x_1 < \alpha < \beta < x_2$ e $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Então, pelo Teorema 4.12.4, existe $d \in]\alpha, \beta[$ tal que $f'(d) = 0$. Isto é absurdo porque assim x_1 e x_2 não podem ser dois zeros consecutivos de $f'(x)$.

Portanto entre dois zeros consecutivos de f' não pode haver mais que um zero de $f(x)$ (note-se que pode até não haver nenhum). ∎

Corolário 4.12.6 *Seja f uma função que satisfaz as condições do Teorema de Rolle.*
Então entre dois zeros de f há pelo menos um zero de f'.

Dem. Sejam x_1 e x_2 dois zeros consecutivos de f, isto é, $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Então pelo Teorema 4.12.4, existe $c \in]x_1, x_2[$ tal que $f'(c) = 0$.
■

Exercício 4.12.7 *Considere a função* $f : [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = sen^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - x$.
Prove que $f(x)$ *admite um único zero no intervalo* $\left]-\frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right[$.

Teorema 4.12.8 *(Teorema do valor médio de Lagrange ou Teorema dos acréscimos finitos) Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua em* $[a,b]$ *e com derivada (finita ou infinita) em* $]a,b[$. *Então existe pelo menos um ponto* $c \in]a,b[$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dem. Considere-se uma função auxiliar

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x.$$

Esta nova função verifica as hipóteses do Teorema 4.12.4 em $[a,b]$, pois:

- $h(x)$ é contínua em $[a,b]$
- $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ tem derivada em $]a,b[$, pois f também tem.
- $h(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}a = \frac{(b-a)f(a)-[f(b)-f(a)]a}{b-a} = \frac{bf(a)-af(b)}{b-a} = h(b)$.

  Então

  $$\exists c \in]a,b[: h'(c) = 0.$$

  Isto é,

  $$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Longleftrightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

■

Interpretação geométrica:

A existência de $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ significa que existe um ponto $c \in]a,b[$ no qual a tangente ao gráfico de $f(x)$ tem um declive igual ao declive da recta secante definida pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Interpretação física:

Se f verificar as condições do Teorema de Lagrange, se a e b forem instantes distintos no tempo e $f(t)$ for a posição em cada instante t de um ponto que se move no eixo real, então existe um instante c onde a velocidade instantânea $f'(c)$ é igual à velocidade média $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ entre os referidos instantes. (Daí o nome de teorema do valor médio aplicado ao Teorema de Lagrange)

Uma importante extensão do Teorema de Lagrange constitui o resultado seguinte:

Teorema 4.12.9 *(Teorema de Cauchy).Se f e g são duas funções contínuas em $[a,b]$, diferenciáveis em $]a,b[$ e se para $x \in]a,b[$, $g'(x) \neq 0$ então existe um ponto $c \in]a,b[$ tal que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Dem. Considere-se a função

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g(x) - g(a)).$$

A função $F(x)$ é contínua em $[a,b]$, porque f e g também o são, e diferenciável em $]a,b[$,

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(x).$$

Por outro lado, como

$$F(a) = 0 \text{ e } F(b) = 0,$$

o Teorema de Rolle garante a existência de $c \in]a,b[$ tal que $F'(c) = 0$, ou seja

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(c) = 0.$$

Como $g'(c) \neq 0$ tem-se

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

■

Uma das aplicações mais importantes deste teorema é a utilização de uma regra para levantar indeterminações.

Teorema 4.12.10 *(Regra de Cauchy) Sejam f e g duas funções diferenciáveis em $]a,b[$ tais que:*

a) *$g'(x) \neq 0$ para cada $x \in]a,b[$;*

b) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ *ou então* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$*;*

c) *existe* $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *em* $\overline{\mathbb{R}}$;

Então

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Dem. Se

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \text{ (finito)}$$

então existe $\beta \in]a, b[$ tal que para $x \in]a, \beta[$ e para $\delta > 0$ arbitrário se tem

$$l - \delta < \frac{f'(x)}{g'(x)} < l + \delta.$$

Sejam x e y dois pontos distintos de $]a, \beta[$. Então pelo Teorema de Cauchy existe ξ situado entre eles tal que

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Portanto para quaisquer pontos nestas condições obtem-se

$$l - \delta < \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} < l + \delta. \tag{4.12.1}$$

No caso de $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, fixemos arbitrariamente $x \in]a, \beta[$ e fazendo $y \to a$ conclui-se que as desigualdades

$$l - \delta < \frac{f(x)}{g(x)} < l + \delta$$

têm que ser verificadas para $\forall x \in]a, \beta[$, o que prova que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

No caso em que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, fixa-se $y \in]a, \beta[$ e determina-se γ tal que, para $x \in]a, \gamma[$ se tenha

$$g(x) > 0 \text{ e } g(x) > g(\gamma).$$

Das desigualdades (4.12.1) resulta que, para $x \in]a, \gamma[$, se tem

$$\frac{f(y)}{g(x)} + \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right)(l - \delta) < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{f(y)}{g(x)} + \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right)(l + \delta).$$

Quando $x \to a$ o primeiro membro tende para $l - \delta$ e o segundo membro para $l + \delta$, pelo que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$ o processo é análogo.

Se $l = \pm\infty$ então obrigatoriamente existe um intervalo $]a, d[$ $(d > a)$ onde $f'(x) \neq 0$,pois caso contrário, como $g'(x) \neq 0$ em $]a, b[$, isso seria incompatível com o facto de

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty.$$

Assim trocando no enunciado do Teorema f por g e g por f fica-se com o caso de $l = 0$, que já foi considerado na primeira parte da demonstração. ■

4.13 Derivadas de ordem superior

Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $a \in D$. No caso de f' ser por sua vez também diferenciável num ponto a interior do seu domínio D', então diz-se que f é duas vezes diferenciável em a, e representa-se por $f''(a)$.

Em geral, a derivada de ordem n da função f, representa-se por $f^{(n)}$ ou $\frac{d^n f}{dx^n}$.

A função f diz-se n vezes diferenciável no ponto a do respectivo domínio $D^{(n)}$ se existir e for finita a derivada $f^{(n)}(a)$.

A função f é indefinidamente diferenciável no ponto a se for n vezes diferenciável em a para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo: A função $f(x) = e^x$ é indefinidamente diferenciável em $\mathbb{R}$, tendo-se para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^x) = e^x.$$

A derivada de 1^a ordem, como já foi referido anteriormente, pode ser entendida como o "contacto"da função com a recta tangente ao gráfico nesse ponto.

Para as derivadas de ordem n de f podem-se admitir "contactos"de ordem n, o que permite aproximar uma função diferenciável qualquer por um polinómio cujos termos serão constituidos pelos vários "contactos".

Definição 4.13.1 *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função n vezes diferenciável em $a \in D$. Chama-se polinómio de Taylor de ordem n de f no ponto , a*

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k\,.$$

Se $a = 0$ o polinómio de Taylor é designado por polinómio de MacLaurin e assume uma forma mais simplificada

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

Teorema 4.13.2 *Se $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função n vezes diferenciável em $a \in D$ então para qualquer $x \in D$ é válida a fórmula de Taylor*

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + R_n(x)$$

verificando o resto $R_n(x)$ a condição

$$\lim_{x\to a} R_n(x) = 0.$$

No caso particular de $a = 0$, a fórmula de Taylor é também chamada fórmula de Mac-Laurin:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\;x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x).$$

O interesse da fórmula de Taylor será acrescido se for possível explicitar o termo complementar $R_n(x)$ possibilitando uma estimação do seu valor, isto é, uma aproximação do erro cometido quando se substitui a função pelo correspondente polinómio de Taylor.

Teorema 4.13.3 *(Fórmula do resto de Lagrange) Seja f uma função $(n+1)$ vezes diferenciável num intervalo aberto I e $a \in I$. Então para cada $x \in I\backslash\{a\}$ existe ξ tal que $a < \xi < x$, tem que o termo complementar (resto) da sua fórmula de Taylor de ordem n no mesmo ponto, $R_n(x)$, é dado por*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}\,.$$

Exercício 4.13.4 *Para a função $f(x) = sen\ x$ determine o polinómio de Mac-Laurin de ordem 6 associado e indique uma majoração para o erro cometido.*

4.14 Aplicações da fórmula de Taylor à determinação de extremos, convexidade e inflexões

Anteriormente viu-se que, para uma função f, diferenciável num ponto a, tenha um extremo local neste ponto, é necessário, embora não suficiente, que $f'(a) = 0$.

Chamam-se pontos críticos ou estacionários de uma função f aos zeros da sua função derivada. Para decidir se um ponto crítico é ou não um ponto de máximo ou de mínimo, pode recorrer-se ao sinal da 1^a derivada.

Nos casos em que não seja possível estudar o sinal de $f'(x)$em pontos próximos de a o recurso à fórmula de Taylor dá um método alternativo, que pode serútil se forem conhecidos os valores assumidos no ponto a por algumas das derivadas de ordem superior à primeira.

Exemplo: Se f é duas vezes diferenciável em a , $f'(a) = 0$ e $f''(a) \neq 0$ então a fórmula de Taylor com resto de Lagrange será

$$f(x) = f(a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + R_2(x)$$

com $\lim_{x\to a} R_2(x) = 0$. Então existe $\epsilon > 0$ tal que para $x \in V_\epsilon(a)$ se tem que $|R_2(x)| < |f''(a)|$. Assim o sinal da soma $f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + R_2(x)$, em $V_\epsilon(a)$, será o sinal do primeiro termo.

Se $f''(a) > 0$ tem-se

$$f(x) - f(a) = f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + R_2(x) \geq 0,$$

isto é, $f(x) > f(a)$ para $x \in V_\epsilon(a)$. Se for $f''(a) < 0$ tem-se $f(x) < f(a)$ para $x \in V_\epsilon(a)$ No primeiro caso tem-se um mínimo local estrito e no segundo caso um máximo local também estrito.

Se $f''(a) = 0$ o processo não era aplicável e ter-se-ia que realizar o mesmo processo para a primeira ordem da derivada que não se anulasse em a. Assim:

Teorema 4.14.1 *Seja f uma função n vezes diferenciável em a, com $n \geq 2$, e suponha-se $f^{(n)}(x)$ é a primeira derivada que não se anula em a Então:*

1. *se n é ímpar, f não tem qualquer extremo no ponto a;*

2. *se n é par, $f(a)$ é um máximo ou um mínimo local (estrito) de f, conforme $f^{(n)}(a) < 0$ ou $f^{(n)}(a) > 0$.*

Dem. Como f é uma função n vezes diferenciável em a então, numa vizinhança de a, $V_\epsilon(a)$, pode ser representada pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}\,,$$

para $x \in V_\epsilon(a)$.

Como $f^{(n)}(x)$ é a primeira derivada que não se anula em a então

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1} \\ &= \frac{(x-a)^n}{n!}\left[f^{(n)}(a) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1}\,(x-a)\right]. \end{aligned}$$

Como $(x-a)$ pode ser arbitrariamente pequeno então o sinal dominante do último factor será o sinal de $f^{(n)}(a)$.

Se n é ímpar, o primeiro membro $f(x) - f(a)$ toma sinais contrários quando x toma valores à esquerrda ou à direita de a, mas suficientemente próximos. Logo $f(a)$ não é um extremo.

Se n é par, o sinal de $f(x) - f(a)$ é o mesmo que o sinal de $f^{(n)}(a)$.

Assim se $f^{(n)}(a) < 0$ então $f(x) < f(a)$ para $x \in V_\epsilon(a)$, pelo que $f(a)$ é um máximo. Se $f^{(n)}(a) < 0$ então $f(a)$ é um mínimo local ■

Exemplo 4.14.2 *A função $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 2$ tem unicamente dois pontos estacionários: 0 e 1 Como $f''(1) = 12 > 0$ então $f(1) = 1$ é um mínimo de f. No ponto 0, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -24$ pelo que ́$f(0)$ não é um ponto de extremo.*

Outra aplicação da fórmula de Taylor está relacionada com a noção de convexidade, isto é, com a posição do gráfico da função f, diferenciável em a,:em relação à respectiva tangente no ponto $(a, f(a))$:

Se existe $\epsilon > 0$ tal que em $V_\epsilon(a)$ o gráfico de f está acima do da função $g(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a)$ diz-se que a função f é convexa em a ou que tem a concavidade voltada para cima nesse ponto.

Se o gráfico de g está acima do de f diz-se que a função f é côncava em a ou que tem a concavidade voltada para baixo nesse ponto.

Pode acontecer que exista um intervalo à esquerda de a e outro à direita de a em que o gráfico de f esteja acima do de g num deles e abaixo noutro. Neste caso diz-se que a é um ponto de inflexão de f.

Teorema 4.14.3 *Seja f uma função n vezes diferenciável em a, $(n \geq 2)$, e suponha-se que são nulas em a todas as derivadas de f de ordem superior à primeira e inferior a n, isto é,*

$$f''(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0, \;\; f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Então:

1. *se n é ímpar, a é um ponto de inflexão de f ;*
2. *se n é par, f é convexa ou côncava no ponto a conforme $f^{(n)}(a) > 0$ ou $f^{(n)}(a) < 0$, respectivamente.*

Dem. A demostração é semelhante à do Teorema 4.14.1, considerando a gora a Fórmula de Taylor de ordem n com resto de Lagrange na forma

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}\,,$$

e então

$$f(x) - f(a) - f'(a)\,(x-a) = \frac{(x-a)^n}{n!}\left[f^{(n)}(a) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1}\,(x-a)\right].$$

■

Exemplo 4.14.4 *Para $f(x) = \sqrt[3]{x}$ tem-se para $x \neq 0$, $f''(x) = -\frac{2}{9\,\sqrt[3]{x^5}}$. O gráfico tem a concavidade voltada para baixo se $x > 0$ e para cima se $x < 0$. O ponto 0 é um ponto de continuidade de f e $f'(0) = +\infty$, pelo que se trata de um ponto de inflexão.*

4.15 Séries de funções

O conceito de soma infinita de números reais, que se estudou no caítulo das séries numéricas, pode agora ser generalizado à soma infinita de funções. Este aspecto coloca novos desafios, por exemplo permite que a "mesma série função"possa ser simultaneamente convergente ou divergente, dependendendo da concretização da variável.

Comecemos por definir o que se considera por série de funções:

Definição 4.15.1 *Chama-se série de funções a uma expresão do tipo*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

isto é, $f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)+...$, *em que* $f_1, f_2, ..., f_n, ...$*funções definidas num certo domínio* $D \subset \mathbb{R}$.

A série é convergente nim ponto $x_0 \in D$ se for convergente a série numérica

$$f_1(x_0) + f_2(x_0) + ... + f_n(x_0) + ...$$

Neste caso

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f(x),$$

designando-se $f(x)$ por função soma.

O domínio da função soma é o conjunto onde a série converge.

Definição 4.15.2 *O conjunto de valores de x para os quais a série de funções é convergente chama-se intervalo de convergência.*

Exercício 4.15.3 *Estudar a convergência das séries:*

Exemplo 4.15.4 **a)** $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sen(nx)}{n^2}$

4.16 Séries de potências

Um caso particular de séries de funções são as séries de potências de x,

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n.$$

Para determinar os pontos onde esta série é convergente pode começar-se por determinar o raio r de convergência (absoluta)

$$r = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

e depois determinar o intervalo de convergência, isto é o conjunto $x \in]-r, r[$.

Em alternativa, pode aplicar-se directamente o critério de D' Alembert

$$\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \frac{|x^{n+1}|}{|x^n|} = |x| \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

por este processo a série é convergente para os vlores que verifiquem a inequação

$$|x| \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1.$$

Nos pontos $x = -r$ ou $x = r$, substitui-se x por r e estuda-se a série directamente utilizando os critérios das séries numéricas.

No intervalo de convergência uma série de potências de x define uma função contínua.

Exercício 4.16.1 *Estudar quanto à convergência a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

Séries de potências de $(x - a)$ são séries do tipo

$$a_0 + a_1 (x - a) + a_2 (x - a)^2 + \cdots + a_n (x - a)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - a)^n .$$

Sendo r o raio de convergência da série, nestes casos o intervalo de convergência será $]a - r, a + r[$.

4.17 Série de Taylor para funções reais de variável real

Definição 4.17.1 *Se a função real de variável real f for indefinidamente diferenciável no ponto a obtem-se a fórmula*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \end{aligned}$$

que se designa por série de Taylor.

Se a série de Taylor representar $f(x)$ numa vizinhança de a diz-se que $f(x)$ é analítica em a.

No caso de $a = 0$, a série de Taylor designa-se por série de Mac-Laurin:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0).$$

Exercício 4.17.2 *Determine a série de Mac-Laurin das funções:*

a) $f(x) = e^x$

b) $g(x) = sen\ x$

Exercício 4.17.3 *Desenvolva em série de potências de x a função*

$$f(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)}.$$

Capítulo 5

Cálculo Integral em $\mathbb{R}$

5.1 Primitivas

Definição 5.1.1 *$F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, num certo intervalo I, se*

$$F'(x) = f(x), \ \forall x \in I.$$

Isto é $Pf(x) = F(x) \Longrightarrow F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$.

Resulta imediatamente desta definição que a operação de primitivação é a operação inversa da derivação.

Como $[F(x) + c]' = F'(x)$ para qualquer valor de $c \in \mathbb{R}$, então existe uma infinidade de primitivas de uma certa função.

Assim designa-se por expressão geral das primitivas de $f(x)$ a

$$Pf(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Proposição 5.1.2 *Duas primitivas de uma mesma função, num certo intervalo I, diferem sempre de uma constante.*

Dem. Sejam $F(x)$ e $G(x)$ duas primitivas de uma mesma função $f(x)$. Então $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = f(x)$ e

$$[F(x) - G(x)]' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

■

A hipótese de se considerar um intervalo I é fundamental, porque a função pode não ser primitivável para todo o conjunto $\mathbb{R}$.

Veja-se, por exemplo, a função definida em $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}.$$

Suponhamos que existe uma primitiva de $f(x)$, $F(x)$, em $\mathbb{R}$.
Então, pelo Teorema de Lagrange, existe $c \in]x, 0[$ tal que

$$\frac{F(x) - F(0)}{x} = F'(c) = f(c) = -1, \text{ porque } c < 0.$$

Pela definição de derivada lateral

$$F'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} F'(c) = -1.$$

Contudo não é possível ter uma situação de

$$F'(0) = F'(0^-) = F'(0^+) = -1 = f(0)$$

porque $f(0) = 1$.
Então $f(x)$ não é primitivável em $\mathbb{R}$, embora o seja em $]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$.

5.2 Primitivas imediatas e quase imediatas

Estas primitivas obtêm-se utilizando apenas as regras de derivação, eventualmente com operações preliminares.

Seja $f(x)$ uma função primitável num certo intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$.

5.2.1 Primitiva de uma constante

Como $(kx)' = k$, $k \in \mathbb{R}$, então

$$Pk = kx + c, \quad k, c \in \mathbb{R}.$$

Generalizando, como $(kPf(x))' = k\ (Pf(x))' = kf(x)$, $k \in \mathbb{R}$, então

$$P\left(k\ f(x)\right) = k\left(Pf(x)\right).$$

5.2.2 Primitiva de uma potência de expoente real

Para $m \in \mathbb{R} \backslash \{-1\}$, tem-se $\left(\frac{f^{m+1}}{m+1}\right)' = f^m\ f'$, pelo que

$$Pf^m(x)\ f'(x) = \frac{f^{m+1}(x)}{m+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad m \neq -1.$$

Exercício 5.2.1 *Calcular:*

1. $P\sqrt{2x+1}$

2. $P\frac{\log x}{x}$

3. $P\frac{4}{(1+5x)^3}$

No caso de $m=-1$ tem-se que $\frac{f'}{f}=(\log f)'$, e assim

$$P\frac{f'(x)}{f(x)}=(\log f(x))+c, \quad c\in\mathbb{R}.$$

Exercício 5.2.2 *Calcular:*

1. $P\frac{x^3}{x^4+a^2}, \quad a\in\mathbb{R}.$

2. $Ptg\ x.$

Se se substituir x por uma função $f(x)$ diferenciável, tem-se

$$Ptg\,(f(x))\ \ f'(x)=-\log|\cos(f(x))|+c, \quad c\in\mathbb{R}.$$

5.2.3 Primitiva de funções exponenciais

Como $\left(e^f\right)'=e^f\ f'$ então

$$P\left(e^{f(x)}\ f'(x)\right)=e^{f(x)}+c, \quad c\in\mathbb{R}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} P\left(a^{f(x)}\ f'(x)\right) &= P\left(e^{f(x)\ \log a}\ f'(x)\right)=\frac{e^{f(x)\ \log a}}{\log a} \\ &= \frac{a^{f(x)}}{\log a}+c, \quad c\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercício 5.2.3 *Calcular:*

1. $P\left(xe^{-x^2}\right).$

2. $P\frac{3^{arcsen\ x}}{\sqrt{1-x^2}}.$

5.2.4 Primitiva de funções trigonométricas

Como $(-\cos(f))' = f'\ sen\,(f)$ tem-se

$$P\left[f'(x)\ sen\,(f(x))\right] = -\cos(f(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

e, analogamente,

$$P\left[f'(x)\ \cos(f(x))\right] = sen\,(f(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Pelo mesmo processo $(tg\,(f))' = f'\ \sec^2(f)$ e

$$P\left[f'(x)\sec^2(f(x))\right] = tg\,(f(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Partindo novamente das derivadas $(arcsen\,(f))' = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$, pelo que

$$P\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}} = arcsen\,(f(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

e

$$P\frac{f'(x)}{1+f^2(x)} = arctg\,(f(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

Exercício 5.2.4 *Calcular:*

1. $P\,(sen\,(2x))$.
2. $P\sec^2(3x)$.
3. $P\frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}$.
4. $P\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.
5. $P\frac{x}{1+x^6}$

5.3 Métodos de primitivação

Se uma função não pode ser primitivada só por aplicação das regras de derivação (primitivas imediatas) ou após alguns artifícios (primitivas quase imediatas) recorre-se a um ou mais métodos de primitivação.

5.3.1 Primitivação por decomposição

Baseia-se na linearidade da primitiva:

Teorema 5.3.1 *Sejam f_i funções primitiváveis num domínio $I \subseteq \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$, e $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Então*

$$P\left(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_n f_n\right) = \alpha_1 \; Pf_1 + \alpha_2 \; Pf_2 + \cdots + \alpha_n \; Pf_n.$$

Alguns casos particulares merecem atenção:

- Para $n \in \mathbb{N}$, $P\left(sen\ x\right)^{2n+1} = P\left(sen^2\ x\right)^n \ sen\ x = P\left(1-\cos^2 x\right)^n$ $sen\ x$.
  Desenvolvendo $\left(1-\cos^2 x\right)^n$ obtêm-se potências de $\cos x$ multiplicadas por $sen\ x$ e a cada uma delas pode aplicar-se a relação
  $$P\left(\cos^k x \ \ sen\ x\right) = -\frac{\cos^{k+1} x}{k+1}, \ k = 0, 2, ..., 2n.$$
- Para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $Ptg^n\left(x\right) = Ptg^{n-2}\left(x\right) \ tg^2\left(x\right) = Ptg^{n-2}\left(x\right)$ $\left(\sec^2 x - 1\right) = Ptg^{n-2}\left(x\right)\left(\sec^2 x - 1\right) = Ptg^{n-2}\left(x\right)\sec^2 x - Ptg^{n-2}\left(x\right).$
  Desta forma obtem-se a fórmula por recorrência
  $$Ptg^n\left(x\right) = \frac{tg^{n-1}\left(x\right)}{n-1} - Ptg^{n-2}\left(x\right).$$
- Para fracções racionais com aplicação do método dos coeficientes indeterminados pode decompor-se a fracção inicial em fracções "mais simples":
  Exemplo:
  $$P\frac{2x^5}{x^2+1} = 2P\left(x^3 - x + \frac{x}{x^2+1}\right).$$

5.3.2 Primitivação por partes

Este método baseia-se na fórmula para a derivada do produto de funções

$$(uv)' = u'v + uv' \Leftrightarrow u'v = (uv)' - uv'$$

pelo que:

Teorema 5.3.2 *Sejam u e v duas funções reais definidas e diferenciáveis num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Se o produto $u'v$ for primitivável então*

$$P\left[u'(x)v(x)\right] = u(x)v(x) - P\left[u(x)v'(x)\right].$$

Como indicação geral, será conveniente escolher o factor correspondente à função v aquele que se simplificar mais por derivação. Contudo há algumas excepções, como se verifica no próximo exercício:

Exercício 5.3.3 *Calcular:*

1. $P\left(x^2 sen\,(x)\right).$
2. $Px\ arctg\,(x).$
3. $Px^3 \log x.$
4. $P \log x.$
5. $P \cos x\ e^x$

5.3.3 Primitivação por substituição

O método de substituição baseia-se na regra de derivação das funções compostas.

Teorema 5.3.4 *Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ uma função primitivável, $J \subseteq Df$ e $\varphi : I \to J$ uma aplicação bijectiva e diferenciável em I. Então $(f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)$ é primitivável e, designando por $\Phi(t)$ uma sua primitiva , isto é, $\Phi(t) = P\left[(f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)\right]$, obtem-se que $\Phi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$ é uma primitiva de $f(x)$.*
Em resumo

$$Pf(x) = P\left[(f \circ \varphi)(t)\ \ \varphi'(t)\right], \quad \text{sendo } t = \varphi^{-1}(x).$$

Dem. Aplicando a derivada da função composta e a derivada da função inversa tem-se

$$\begin{aligned}\left(\Phi\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right)' &= \Phi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)\ \left(\varphi^{-1}(x)\right)' = \\ &= f(\varphi(t))\ \varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f(x)\end{aligned}$$

■

Exercício 5.3.5 *Calcule em $I =]0, +\infty[$,*

$$P\left(\frac{1}{e^x - 1}\right),$$

utilizando a substituição $x = \varphi(t) = \log t$.

5.3.4 Primitivação de funções racionais

Definição 5.3.6 **i)** *Função racional é uma função do tipo* $\frac{p(x)}{q(x)}$, *onde* $p(x)$ *e* $q(x)$ *são polinómios em* x, *não sendo* $q(x)$ *identicamente nulo.*

ii) *Uma fracção racional diz-se própria se o grau de* $p(x)$ *é menor que o grau de* $q(x)$

Para efeitos de primitivação basta considerar fracções próprias, pois caso a fracção seja imprópria, por uma divisão inteira é sempre possível decompô-la na soma de uma parte inteira com uma fracção própria. Isto é, se $gr\ p(x) \geq gr\ q(x)$ então existem polinómios $a(x)$ e $r(x)$ tais que

$$\frac{p(x)}{q(x)} = a(x) + \frac{r(x)}{q(x)}.$$

Condideremos então vários casos na primitivação de fracções racionais que estão directamente relacionados com o número de zeros do denominador e com a sua natureza, ilustrados com exemplos:

1^o caso: As raízes de $q(x)$ são reais de multiplicidade 1:

A fracção racional decompõe-se em "fracções mais simples"e calcula-se a sua primitiva por decomposição.

Exemplo 5.3.7 $P\frac{4x^2+x+1}{x^3-x} = P\frac{4x^2+x+1}{x(x-1)(x+1)} = P\frac{-1}{x}+P\frac{3}{x-1}+P\frac{2}{x+1} = \log\left|\frac{1}{x}\right|+ \log|x-1|^3 + \log(x+1)^2 + c = \log\left|\frac{(x-1)^3(x+1)^2}{x}\right| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

2^o caso: As raízes de $q(x)$ são reais e algumas com multiplicidade superior a 1:

O processo é análogo ao anterior.

Exemplo 5.3.8 $P\frac{2x^3+1}{x^2(x+1)^3} = P\frac{-3}{x} + P\frac{1}{x^2} + P\frac{3}{x+1} + P\frac{4}{(x+1)^2} - P\frac{1}{(x+1)^3} = -3\log|x| - \frac{1}{x} + 3\log|x+1| - \frac{4}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

3^o caso: Algumas raízes de $q(x)$ são complexas de multiplicidade 1:

Na decomposição as fracções cujo denominador têm raízes complexas possuem uma função afim como numerador.

Exemplo 5.3.9 $P\frac{x+2}{x^3-1} = P\frac{x+2}{(x-1)(x^2+x+1)} = P\frac{1}{x-1} - P\frac{x+1}{x^2+x+1} = \log|x-1| - \frac{1}{2}\log\left(x^2+x+1\right) - \frac{4\sqrt{3}}{3}arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

4^o caso: Algumas raízes de $q(x)$ são complexas com multiplicidade superior a 1:

Exemplo 5.3.10 $P\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x^2+2)^2} = P\frac{1}{x-1} - P\frac{x+1}{x^2+2} - P\frac{2x}{(x^2+2)^2} = \log|x-1| - \frac{1}{2}\log\left(x^2+2\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{x^2+2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

Nalguns casos é possível e recomendável combinar os métodos de substituição com o das fracções racionais. Vejam-se alguns exemplos:

Exemplo 5.3.11 *Numa função racional com argumentos do tipo* e^x *, simbolicamente,*

$$FR(e^x),$$

deve tentar-se a substituição

$$x = \log t \quad ou \quad e^x = t.$$

Assim

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1-e^{3x}}{e^{2x}-4}\right) &= P\left(\frac{1-t^3}{t^2-4}\times\frac{1}{t}\right) = P\left(-1+\frac{1-4t}{t^3-4t}\right) \\ &= -e^x - \frac{x}{4} - \frac{7}{8}\log|e^x-2| + \frac{9}{8}\log|e^x+2| + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exemplo 5.3.12 *Numa função racional do tipo*

$$FR(\log x) \times \frac{1}{x}$$

deve tentar-se a substituição

$$\log x = t \quad ou \quad x = e^t.$$

Por exemplo:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\log(2x)}{x\log^3 x}\right) &= P\left(\frac{\log 2 + \log x}{\log^3 x}\times\frac{1}{x}\right) = P\left(\frac{\log 2 + t}{t^3}\right) \\ &= \frac{\log 2}{2}\frac{1}{\log^2 x} - \frac{1}{\log x} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exemplo 5.3.13 *Para uma função do tipo*

$$FR(sen\ x) \times \cos x$$

recomenda-se a substituição

$$sen\ x = t \quad ou \quad x = arcsen\ t.$$

Analogamente para

$$FR(\cos x) \times sen\ x$$

aplica-se

$$\cos x = t \quad ou \quad x = \arccos t.$$

Assim

$$\begin{aligned} P\frac{\cos^3 x \quad sen\ x}{\cos^2 x + 2\cos x + 1} &= P\frac{t^3\ \sqrt{1-t^2}}{t^2+2t+1} \times \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= P\left(-t+2-\frac{8}{(t+1)^2}\right) \\ &= -\frac{\cos^2 x}{2} + 2\cos x + \frac{8}{\cos x + 1} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exemplo 5.3.14 *Para*

$$FR(sen\ x, \cos x)$$

aplica-se a substituição

$$tg\left(\frac{x}{2}\right) = t \quad ou \quad x = 2\ arctg\ t,$$

e, pelas fórmulas trigonométricas dos ângulos duplos,

$$sen\ x = 2\frac{tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)} \quad e \quad \cos x = \frac{1-tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Como exemplo:

$$\begin{aligned} P\frac{\cos x}{sen\ x - \cos x} &= P\left(\frac{1-t^2}{t^2+2t-1} \times \frac{2}{1+t^2}\right) \\ &= 2P\left[\frac{1-t^2}{\left(t+1-\sqrt{2}\right)\left(t+1+\sqrt{2}\right)(1+t^2)}\right] \\ &= \frac{1}{2}\log\left|tg^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2tg\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right| - \frac{1}{2}\log\left(\sec^2 x\right) - \frac{x}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exemplo 5.3.15 *No caso de*

$$FR\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right]$$

a substituição indicada será

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^q, \quad sendo\ q = m.m.c.\,(q_1, ..., q_n)\,.$$

Ilustre-se com o exemplo:

$$P\frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x-1}-1} = P\left(\frac{t^2}{t^3-1}\times 6t^5\right) = 6P\left(t^4+t+\frac{t}{t^3-1}\right).$$

5.4 Integral de Riemann

O conceito base no cálculo diferencial é a noção de derivada. No cálculo integral esse papel é desempenhado pela noção de integral.

O método mais intuitivo para abordar este conceito é considerá-lo como uma área.

5.4.1 Somas integrais de uma função

Seja f uma função real de variável real definida em $[a,b]$.

Considere-se este intervalo decomposto em n intervalos pelos pontos $x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n$, tais que

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

Ao conjunto $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n\}$ chama-se uma decomposição ou partição de $[a,b]$.

Desta forma $[a,b]$ fica decomposto em subintervalos $I_1 = [x_0, x_1], I_2 = [x_1, x_2], ..., I_n = [x_{n-1}, x_n]$, de diâmetros

$$diam\ I_1 = x_1 - x_0,\ diam\ I_2 = x_2 - x_1,\ diam\ I_n = x_n - x_{n-1}.$$

Ao maior destes diâmetros chama-se diâmetro da decomposição e nota-se por $|P|$.

Definição 5.4.1 *Chama-se soma integral ou soma de Riemann de uma função f relativamente à decomposição P de $[a,b]$ e ao conjunto*

$$U = \{u_i : u_i \in]x_i, x_{i+1}[, i = 1, ..., n-1\},$$

designando-se por $S(f,P,U)$ ou abreviadamente porS_P, a

$$\begin{aligned} S(f,P,U) &= \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\ \ (x_i - x_{i-1}) \\ &= f(u_1)(x_1 - x_0) + f(u_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(u_n)(x_n - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Definição 5.4.2 *Se substituirmos na soma anterior a imagem de um ponto intermédio pelo supremo (ínfimo) da função $f(x)$ em cada um dos subintervalos obtem-se a soma superior de Darboux, $\overline{S}$, ou a soma inferior de Darboux, $\underline{S}$.*

Exercício 5.4.3 *Para $f(x) = x^2$ definida em $[0,1]$ decomposto por $P = \{0,\ 0.4,\ 0.5,\ 0.7,\ 1\}$, calcular:*

1. *A soma de Riemann S_P relativamente a $U = \{0.1,\ 0.45,\ 0.6,\ 0.8\}$.*
2. *As somas superior e inferior de Darboux.*

Proposição 5.4.4 *Seja f uma função limitada em $[a,b]$. As somas superior e inferior de Darboux, $\overline{S}$.e $\underline{S}$, são, respectivamente, o supremo e o ínfimo das somas de Riemann, no conjunto de todas as partições possíveis de $[a,b]$.*

Dem. Para uma mesma partição P de $[a,b]$ tem-se

$$\underline{S} < S_P < \overline{S}. \tag{5.4.1}$$

Defina-se

$$M_i := \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \quad i = 1, ..., n,$$

e escolha-se $\alpha > 0$ de modo a que para os pontos intermédios u_i em cada um dos subintervalos se tenha

$$f(u_i) > M_i - \alpha, \quad i = 1, ..., n.$$

A soma de Riemann será

$$\begin{aligned} S_P &= \sum_{i=1}^{n} f(u_i)(x_i - x_{i-1}) > \sum_{i=1}^{n} (M_i - \alpha)\ \ (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} M_i\ \ (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} \alpha\ \ (x_i - x_{i-1}) = \overline{S} - \alpha(b-a). \end{aligned}$$

Pelo mesmo processo, definindo

$$m_i := \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \quad i = 1, ..., n,$$

se pode provar que

$$S_P < S + \alpha(b-a),$$

pelo que $\overline{S}$.e $\underline{S}$, são, respectivamente, o supremo e o ínfimo das somas de Riemann. ■

Note-se que as somas anteriores, de um ponto de vista geométrico, corresponde a vários modos de obter a soma da área de vários rectângulos com alturas diferentes mas bases iguais em cada um dos casos.

5.4.2 Definição de integral de Riemann

Definição 5.4.5 *Uma função $f(x)$ diz-se integrável à Riemann em $[a,b]$ se for finito*

$$\lim_{|P|\to 0} S_P(x) = S = \int_a^b f(x)dx,$$

em que $S_P(x)$ designa a soma de Riemann de f relativamente à decomposição P, $|P|$ o diâmetro da decomposição, $f(x)$ a função integranda, x a variável de integração e $[a,b]$ o intervalo de integração

Observação 5.4.6 *O valor do integral depende da função f e do intervalo $[a,b]$, mas é independente da variável de integração. Isto é,*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt.$$

Proposição 5.4.7 *(Condição necessária de integrabilidade) Se $f(x)$ é integrável em $[a,b]$ então $f(x)$ é limitada em $[a,b]$*

Dem. Pela definição de limite tem-se

$$\lim_{|P|\to 0} S_P(x) = S \Longleftrightarrow \forall \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0\colon\ \forall P,\ \ |P| < \varepsilon \Longrightarrow |S_P(x) - S| < \delta.$$

Assim quando o diâmetro da partição for suficientemente pequeno tem-se, para $\delta > 0$,

$$S - \delta < S_P < \delta + S.$$

Como $S_P = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)|x_i - x_{i-1}|$ com u_i pontos arbitrários em cada um dos subintervalos. Separamndo a primeira parcela,

$$S_P = f(u_1)|x_1 - a| + \sum_{i=2}^{n} f(u_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Considerando fixos os pontos $u_i, i = 2, ..., n$, o somatório terá uma certa soma k. Assim

$$S_P = f(u_1)|x_1 - a| + k$$

e

$$S - \delta < f(u_1)|x_1 - a| + k < \delta + S$$

ou seja

$$\frac{S - \delta - k}{|x_1 - a|} < f(u_1) < \frac{\delta + S - k}{|x_1 - a|}.$$

Como u_1 é um ponto arbitrário em $[a, x_1]$ a função $f(x)$ é limitada em $[a, x_1]$.

Pelo mesmo processo é possível provar que $f(x)$ é limitada em qualquer dos subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$ .Logo $f(x)$ é limitada em $[a, b]$. ■

Igualmente útil é a sua recíproca.

Se $f(x)$ não é limitada em $[a, b]$ então $f(x)$ não é integrável em $[a, b]$.

Proposição 5.4.8 *(Condição necessária e suficiente de integrabilidade) A função $f(x)$ é integrável em $[a, b]$ se e só se as somas de Darboux têm o mesmo limite finito.*

Dem. ($\Longrightarrow$) Se $f(x)$ é integrável no sentido de Riemann em $[a, b]$ então $\lim\limits_{|P|\to 0} S_P(x) = S$, ou seja para um certo $\varepsilon > 0$ tal que $|P| < \varepsilon$ se tem $|S_P(x) - S| < \frac{\delta}{2}$, ou seja,

$$S - \frac{\delta}{2} < S_P < S + \frac{\delta}{2}.$$

Como

$$\underline{S} - \overline{S} \leq 0 < \delta,$$

então, para $|P| < \varepsilon$, $\left|\overline{S} - \underline{S}\right| \leq \delta$, pelo que

$$\lim_{|P|\to 0} \left(\overline{S} - \underline{S}\right) = 0,$$

isto é,

$$\lim_{|P|\to 0} \overline{S} = \lim_{|P|\to 0} \underline{S}.$$

Além disso, pelo enquadramento (5.4.1), tem-se

$$\lim_{|P|\to 0} \overline{S} = \lim_{|P|\to 0} \underline{S} = \lim_{|P|\to 0} S_P = S = \int_a^b f(x)dx.$$

($\Longleftarrow$) Se as somas de Darboux $\overline{S}$ e $\underline{S}$ têm o mesmo limite finito, pelo enquadramento (5.4.1), tem-se

$$\lim_{|P|\to 0} \overline{S} = \lim_{|P|\to 0} \underline{S} = \lim_{|P|\to 0} S_P = S = \int_a^b f(x)dx,$$

pelo que $f(x)$ é integrável em $[a, b]$.. ■

Alguns resultados ajudam a formar ideias sobre classes de funções integráveis:

Proposição 5.4.9 *Toda a função contínua em $[a,b]$ é integrável à Riemann nesse intervalo.*

Dem. Pelo Teorema de Heine-Cantor , toda a função contínua num intervalo limitado e fechado $[a,b]$ é uniformemente contínua, isto é,

$$\forall \delta > 0 \ \exists \varepsilon > 0\colon \forall v, w \in [a,b]\,, \ \ |v-w| < \varepsilon \Longrightarrow |f(v) - f(w)| < \delta.$$

Para $\varepsilon > 0$ seja P uma partição de $[a,b]$ tal que $|P| < \varepsilon$.

Se $f(x)$ é contínua em $[a,b]$ então $f(x)$ é contínua em dada um dos subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$.

Pelo Teorema de Weierstrass existem os números M_i e m_i, respectivamente, máximos e mínimos de $f(x)$ em $[x_i, x_{i+1}]$ .Designe-se $M_i := f(u_i)$ e $m_i := f(v_i)$ com $u_i, v_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

Considere-se $\delta > 0$ tal que

$$M_i - m_i = f(u_i) - f(v_i) < \frac{\delta}{b-a}.$$

Então, recorrendo às somas de Darboux

$$\begin{aligned} \overline{S} - \underline{S} &= \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \frac{\delta}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \frac{\delta}{b-a}(b-a) = \delta. \end{aligned}$$

Portanto $\overline{S} - \underline{S} < \delta$, com $|P| < \varepsilon$, pelo que

$$\lim_{|P| \to 0} \left(\overline{S} - \underline{S}\right) = 0.$$

■

Proposição 5.4.10 *Toda a função monótona e limitada é integrável à Riemann.*

Dem. Para $\varepsilon > 0$ seja P uma partição de $[a,b]$ tal que $|P| < \varepsilon$, .isto é,

$$|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon, \ i = 1, ..., n.$$

Suponhamos que $f(x)$ é crescente. Assim, para cada $[x_{i-1}, x_i]$ defina-se

$$M_i := \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{e} \quad m_i := \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)\,.$$

Então

$$\begin{aligned}
\overline{S} - \underline{S} &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \\
&< \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\ \varepsilon \\
&= \varepsilon [f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \cdots + f(x_n) - f(x_{n-1})] \\
&= \varepsilon [f(x_n) - f(x_0)] = \varepsilon [f(b) - f(a)] .
\end{aligned}$$

Considerando $\delta = \varepsilon [f(b) - f(a)]$ obtem-se que $\overline{S} - \underline{S} < \delta$ desde que $|P| < \varepsilon = \frac{\delta}{f(b)-f(a)}$. Então, pela condição necessária e suficiente de integrabilidade, $f(x)$ é integrável em $[a, b]$.

Se $f(x)$ é decrescente.o processo é semelhante. ∎

5.4.3 Interpretação geométrica do conceito de integral

Vimos anteriormente que as somas superior e inferior de Darboux, $\overline{S}$ e $\underline{S}$, são aproximações por excesso e por defeito, respectivamente, da área do trapezóide limitado pelo gráfico de $f(x)$ e pelas rectas verticais $x = a$ e $x = b$.

Se se diminuir o diâmetro da partição obtêm-se aproximações com um erro menor, da área do trapezóide referido.

Ao considerar partições mais finas, $\overline{S}$ e $\underline{S}$ serão valores tão próximos quanto de queira, por excesso e por defeito, do valor dessa área.

Assim se $f(x)$ é contínua em $[a, b]$ e $f(x) > 0, \forall x \in [a, b]$, então $\int_a^b f(x)dx$ representa a área da região limitada pelo gráfico de $f(x)$ e pelas rectas verticais $x = a$ e $x = b$.

5.5 Propriedades dos integrais

A maior parte das propriedades que se seguem podem ser demonstradas por aplicação directa da definição de integral.

Proposição 5.5.1 *Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções integráveis em $[a, b]$.*

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
2. *Se $f(x)$ é uma função par então*

$$\int_{-a}^{-b} f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

3. *Se $f(x)$ é uma função ímpar então*
$$\int_{-a}^{-b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

4. *Para $k \in \mathbb{R}$,*
$$\int_{a}^{b} k \; dx = k\left(b-a\right).$$

5. *Para $k \in \mathbb{R}$,*
$$\int_{a}^{b} k \; f(x)dx = k\int_{a}^{b} f(x)dx.$$

6. *Se $f(x) \geq 0$ então*
$$\int_{a}^{b} f(x)dx \geq 0.$$

7. *Se $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$, então*
$$\int_{a}^{b} f(x)dx \leq \int_{a}^{b} g(x)dx.$$

8. $$\left|\int_{a}^{b} f(x)dx\right| \leq \int_{a}^{b} \left|f(x)\right| dx$$

9. *Se $f(x)$ é uma função limitada em $[a,b]$ tal que $|f(x)| \leq M$, com $M > 0$, então*
$$\left|\int_{a}^{b} f(x)dx\right| \leq M\left(b-a\right).$$

10. *(Aditividade do integral relativamente ao intervalo de integração)*
$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx.$$

11. *(Aditividade do integral relativamente à função integranda)*
$$\int_{a}^{b} \left[f(x)+g(x)\right] dx = \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{a}^{b} g(x)dx.$$

Dem. Seja $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n\}$ uma decomposição de $[a, b]$ e $U = \{u_i : u_i \in]x_i, x_{i+1}[\, , i = 1, ..., n-1\}$ um conjunto de pontos arbitrários em cada um dos subintervalos.

1.
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=1}^n f(u_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= -\sum_{i=1}^n f(u_i)(x_{i-1} - x_i) = -\int_b^a f(x)dx.\end{aligned}$$

2. Uma decomposição de $[-a, -b]$ será $P^* = \{-x_0, -x_1, -x_2, ..., -x_{n-1}, -x_n\}$ e um conjunto de pontos respectivos pode ser $U^* = \{-u_i\}$. Então
$$\begin{aligned}\int_{-a}^{-b} f(x)dx &= \sum_{i=1}^n f(-u_i)(-x_i + x_{i-1}) \\ &= -\sum_{i=1}^n f(u_i)(x_i - x_{i-1}) = -\int_a^b f(x)dx.\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}\int_{-a}^{-b} f(x)dx &= \sum_{i=1}^n f(-u_i)(-x_i + x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n f(u_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)dx.\end{aligned}$$

4.
$$\int_a^b k\ dx = \sum_{i=1}^n k(x_i - x_{i-1}) = k(b-a).$$

5.
$$\begin{aligned}\int_a^b k\ f(x)dx &= \sum_{i=1}^n k f(u_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= k\sum_{i=1}^n f(u_i)(x_i - x_{i-1}) = k\int_a^b f(x)dx.\end{aligned}$$

6.
$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)(x_i - x_{i-1}) \geq 0.$$

7.
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=1}^{n} f(u_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} g(u_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \int_a^b g(x)dx.\end{aligned}$$

8.
$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)dx\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n} f(u_i)(x_i - x_{i-1})\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |f(u_i)(x_i - x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} |f(u_i)|(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b |f(x)|\, dx\end{aligned}$$

9.
$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx \leq \int_a^b M\ dx = M(b-a).$$

10. (Interpretar geometricamente como adição de áreas)

11.
$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x)+g(x)]\, dx &= \sum_{i=1}^{n} [f(u_i)+g(u_i)](x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(u_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} g(u_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.\end{aligned}$$

■

Teorema 5.5.2 *(Teorema da média do cálculo integral) Se $f(x)$ é integrável num intervalo $I := [a,b]$ então existe $\lambda \in [m, M]$, com $m := \inf_{x\in I} f(x)$ e $M := \sup_{x\in I} f(x)$, tal que*

$$\int_a^b f(x)dx = \lambda(b-a).$$

Dem. Suponhamos que $b > a$. Como $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in I$, então

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx,$$

pela Proposição anterior (7),

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

e, como $b - a > 0$,

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M.$$

Definindo

$$\lambda := \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

obtem-se o resultado pretendido.

Se $b < a$ tem-se

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

e aplica-se a primeira parte da demonstração. ■

Observação 5.5.3 **i)** *Se $f(x)$ é uma função contínua em I então existe $c \in I$ tal que $f(c) = \lambda$, pelo que se obtem*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

ii) *Se $f(x) \geq 0, \forall x \in I$ então $\int_a^b f(x)dx$ dá o valor da área de um trapezóide, pelo que $f(c)$ é a altura de um rectângulode comprimento $b-a$, com áea igual à do trapezóide.*

Proposição 5.5.4 *(Desigualdade de Schwarz) Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções integráveis em $[a,b]$ então*

$$\left(\int_a^b f(x) \times g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \times \int_a^b g^2(x)dx.$$

Dem. Comece-se por calcular

$$\int_a^b [\alpha f(x) + g(x)]^2 \, dx = \alpha^2 \underbrace{\int_a^b f^2(x)dx}_{A} + 2\alpha \underbrace{\int_a^b f(x) \times g(x)dx}_{B} + \underbrace{\int_a^b g^2(x)dx}_{C}.$$

Como $[\alpha f(x) + g(x)]^2 \geq 0$ então

$$\int_a^b [\alpha f(x) + g(x)]^2 \, dx \geq 0$$

e, simplificando a notação,

$$\alpha^2 A + 2\alpha B + C \geq 0$$

apenas acontece para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ não nulo se $A > 0$ e $(2B)^2 - 4AC \leq 0$, isto é,

$$B^2 \leq AC.$$

Voltando à notação inicial

$$\left(\int_a^b f(x) \times g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \times \int_a^b g^2(x)dx.$$

■

Exercício 5.5.5 *Determine o sinal dos integrais, sem os calcular:*

a) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{sen\ x}{x} dx$

b) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} x\ sen(x)dx$

Exercício 5.5.6 *Obtenha um majorante e um minorante para os integrais, sem os calcular:*

a) $\int_{-\frac{1}{2}}^{1} \frac{x}{1+x^2} dx$

b) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x\ tg(x)dx$

5.6 Integral indefinido

Definição 5.6.1 *Seja $f(x)$ uma função integrável em I e $\alpha \in I$. Chama-se integral indefinido com origem em α à função*

$$\Phi(x) = \int_\alpha^x f(t)dt, \ \forall x \in I.$$

Proposição 5.6.2 *1. Integrais indefinidos de origens diferentes diferem de uma constante.*

2. O integral indefinido é uma função contínua.

Dem. Considerem-se

$$\Phi(x) = \int_\alpha^x f(t)dt \ \text{ e } \ \Psi(x) = \int_b^x f(t)dt.$$

1. Então

$$\Phi(x) - \Psi(x) = \int_\alpha^x f(t)dt + \int_x^b f(t)dt = \int_\alpha^b f(t)dt \in \mathbb{R}.$$

2. Comecemos por provar que $\Phi(x)$ é uma função contínua.em $x = \alpha$, isto é que

$$\lim_{x \to \alpha} \Phi(x) = \Phi(\alpha).$$

Note-se que o limite, a existir, terá que ser 0 e que, pela condição necessária de integrabilidade, (Proposição 5.4.7) $f(x)$ é limitada em $[a,b]$, digamos por uma constante $M > 0$. Assim

$$|\Phi(x) - 0| \leq \int_\alpha^x |f(t)|\, dt \leq \int_\alpha^x M \ dt = M(x-\alpha)$$

e como $\lim_{x \to \alpha} M(x-\alpha) = 0$, então $\lim_{x \to \alpha} \Phi(x) = \Phi(\alpha) = 0$.

Prove-se agora que $\Phi(x)$ é contínua.em $x = c \neq \alpha$.

Então

$$\begin{aligned} |\Phi(x) - \Phi(c)| &= \left| \int_\alpha^x f(t)dt - \int_\alpha^c f(t)dt \right| \\ &= \left| \int_\alpha^x f(t)dt + \int_c^\alpha f(t)dt \right| = \left| \int_c^x f(t)dt \right| \\ &\leq \int_c^x |f(t)|\, dt \leq \int_c^x M \ dt = M(x-c) \leq M\,|x-c| \end{aligned}$$

e conclui-se como na primeira parte da prova. ■

Teorema 5.6.3 *(Teorema fundamental do Cálculo Integral) O integral indefinido tem por derivada a função integranda nos pontos em que esta seja contínua, isto é,*

$$\Phi'(c) = f(c), \ \text{se } f \text{ for contínua em } c.$$

Dem. Viu-se anteriormente que

$$\Phi(x) - \Phi(c) = \int_c^x f(t)dt = \lambda\,(x-c)\,,$$

com λ compreendido entre $f(x)$ e $f(c)$.

Por definição de derivada

$$\Phi'(c) = \lim_{x\to c}\frac{\Phi(x)-\Phi(c)}{x-c} = \lim_{x\to c}\frac{\lambda\,(x-c)}{x-c} = \lambda = f(c).$$

■

Corolário 5.6.4 *Sejam $\alpha, x \in I$ e f uma funçaõ contínua em I. Então*

$$\Phi'(x) = f(x), \ \forall x \in I.$$

Observação 5.6.5 **i)** *Sendo $\Phi\left[u(x)\right] = \int_\alpha^{u(x)} f(t)dt$, pela derivada da função composta obtem-se*

$$\Phi'\left[u(x)\right] = f\left[u(x)\right] \times u'(x), \ \forall x \in I.$$

ii) *Se $\Phi(x) = \int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt$ então*

$$\Phi'(x) = f\left[u(x)\right] \times u'(x) - f\left[v(x)\right] \times v'(x).$$

Exercício 5.6.6 *Estude quanto aos extremos e intervalos de monotonia a função*

$$\Phi(x) = \int_2^x (t^2 - 6t + 8)dt.$$

Exercício 5.6.7 *Sendo $f(x) = \int_0^{\log x}(x\ e^{t^2})dt$ prove que $f''(1) = 1$.*

Exercício 5.6.8 *Para $f(x) = \int_{x^2}^{k\log x}(e^{-t^2})dt$, calcule k tal que $f'(1) = 0$.*

Exercício 5.6.9 *Recorrendo à desigualdade de Schwarz encontre um majorante para*

$$\int_0^1 e^{5x}\sqrt{arctg(x)}dx.$$

Teorema 5.6.10 *(Fórmula de Barrow) Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e F uma primitiva qualquer de f em $[a,b]$. Então*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Dem. A fórmula geral das primitivas de $f(x)$ é dada por

$$F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt + k,\ \ k \in \mathbb{R}.$$

Assim

$$F(b) = \int_\alpha^b f(t)dt + k \ \ \text{e} \ \ F(a) = k.$$

Então

$$F(b) - F(a) = \int_\alpha^b f(t)dt.$$

■

Exercício 5.6.11 *Calcule o valor dos integrais:*

1. $\int_{-1}^3 \frac{dx}{\sqrt{7+3x}}$

2. $\int_2^3 \frac{x}{x^2-25}dx$

5.7 Métodos de integração

Os métodos de integração são análogos aos métodos de primitivação.

5.7.1 Integração por decomposição

Sejam f_i funções integráveis em $[a,b]$. Então

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x))\, dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \cdots + \int_a^b f_n(x)dx.$$

5.7.2 Integração por partes

Sejam u e v duas funções integráveis num intervalo $[a, b]$. Se o produto $u'v$ for integrável então

$$\int_a^b \left[u'(x)v(x)\right] dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b \left[u(x)v'(x)\right] dx.$$

5.7.3 Integração por substituição

Considere-se: f uma função contínua em $[a, b]$ e $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ uma função bijectiva e diferenciável com $\varphi(\alpha) = a$ e $\varphi(\beta) = b$. Então é válida a igualdade

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \times \varphi'(t)\, dt.$$

Exercício 5.7.1 *Calcular o valor dos integrais:*

1. $\int_2^4 \frac{x^3}{x-1} dx$
2. $\int_1^2 x^{-3} \log x \ dx$
3. $\int_0^1 x \ arctg(x) \ dx$
4. $\int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$
5. $\int_0^{\log 5} \sqrt{e^x - 1} \ dx$
6. $\int_0^{63} \frac{\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{x+1}} \ dx$

5.8 Extensão da noção de integral

Nos casos em que o intervalo de integração não é limitado ou a função integranda não é limitada no intervalo de integração, a teoria naterior não se aplica e é necessário um novo conceito de integral: o integral impróprio.

5.8.1 Integral impróprio de 1^a espécie

Definição 5.8.1 *Seja um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Designa-se por integral impróprio de 1^a espécie de f em I a qualquer das seguintes situações:*

a) *Se* $I = [a, +\infty[$, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

b) *Se* $I =]-\infty, b[$, $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$

c) *Se* $I =]-\infty, +\infty[$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Pode perguntar-se se neste caso, em que a região não está completamente limitada, o integral ainda representa o valor da área dessa região ilimitada.

A resposta é afirmativa caso o integral impróprio de 1^a espécie tenha um valor finito.

Assim é necessário estudar a natureza do integral.

Definição 5.8.2 i) *O integral* $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ *é convergente se existir e for finito*

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{a}^{x} f(t)\ dt.$$

Nesse caso

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty} \int_{a}^{x} f(t)\ dt$$

representa o valor da área pretendida.

ii) *Análogamente,* $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ *é convergente se*

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty} \int_{a}^{x} f(t)dt$$

existir e for finito.

iii) *Do mesmo modo* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *é convergente se*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} f(t)dt$$

existir e for finito.

iv) *Se algum dos limites anteriores não existir ou for infinito, então o respectivo integral diz-se divergente.*

Exercício 5.8.3 *Estude a natureza dos integrais e calcule o seu valor, se possível:*

1. $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$
2. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx$

3. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$

Exercício 5.8.4 *Estude a natureza do integral*

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx, \quad (a > 0)$$

discutindo-a em função de α.

5.8.2 Integral impróprio de 2ª espécie

Nestes casos consideram-se as situações em que a função integranda não é limitada em pelo menos um ponto do intervalo de integração.

Definição 5.8.5 *Seja $[a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo e f uma função integrável em subintervalos de $[a, c[\cup]c, b]$, sendo c um ponto em que f não é limitada Designa-se por integral impróprio de 2ª espécie o integral*

$$\int_a^b f(x)dx$$

em que existe pelo menos um $c \in [a, b]$ em que $f(c)$ não é limitada

Definição 5.8.6 *O integral integral impróprio de 2ª espécie diz-se convergente se existirem e forem finitos*

$$\lim_{x \to c^-} \int_a^x f(t)\ dt \quad e \quad \lim_{x \to c^+} \int_x^b f(t)\ dt$$

Nesse caso

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x \to c^-} \int_a^x f(t)\ dt + \lim_{x \to c^+} \int_x^b f(t)\ dt.$$

Se pelo menos um dos limites anteriores não existir ou for infinito, então o integral diz-se divergente.

Observação 5.8.7 *Se em $[a, b]$ existirem n pontos $c_1, ..., c_n$ onde a função não é limitada então deve decompor-se o integral de forma a isolar esses pontos apenas num dos extremos de integração.*

Exercício 5.8.8 *Estudar a natureza dos integrais:*

a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

b) $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$,*discutindo-a em função de $\alpha \in \mathbb{R}$.*

c) $\int_{-10}^{10} \frac{x}{x^2 - 1} dx$

5.8.3 Integral impróprio de 3^a espécie ou mistos

Neste caso estão os integrais que são simultaneamente de 1^a e 2^a espécie, isto é, integrais em que pelo menos um dos extremos de integração é infinito e existe pelo menos um ponto onde a função não é limitada.

Tal como na secção anterior deve decompor-se o integral misto na soma de integrais que sejam apenas de 1^a ou 2^a espécie.

O integral é convergente se forem convergentes todos os integrais em que se decomponha. Caso contrário o integral diz-se divergente.

Exercício 5.8.9 *Estude a natureza dos integrais:*

a) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x-1} dx$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$

5.9 Critérios de convergência para integrais impróprios

Na prática torna-se útil analisar a natureza dos integrais impróprios sem ter de os calcular.

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções localmente integráveis.

Proposição 5.9.1 *Se*

$$\lim_{x \to \pm\infty} x^\alpha f(x) \text{ é finito e não nulo}$$

então:

- $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *é convergente se* $\alpha > 1$;
- $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *é divergente se* $\alpha \leq 1$.

Exemplo 5.9.2 *O integral* $\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+1} dx$ *é divergente pois*

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha \frac{x}{x^2+1} = 1 \text{ para } \alpha = 1.$$

Proposição 5.9.3 *(Critério de comparação) Se* $f(x)$ *e* $g(x)$ *são duas funções tais que existe* $k \in \mathbb{R}$ *de modo que* $f(x) \leq g(x)$,*para* $x \geq k$, *então:*

a) *Se* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *é divergente então* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *é divergente;*

b) *Se* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *é convergente então* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *é convergente.*

Exemplo 5.9.4 *Para analisar a natureza do integral* $\int_1^{+\infty} \frac{1+sen^2 x}{\sqrt{x}}dx$ *pode começar-se por estabelecer as relações*

$$\begin{array}{rcl} 1 & \leq & 1+sen^2 x \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \leq & \dfrac{1+sen^2 x}{\sqrt{x}},\ \text{para } x \geq 1. \end{array}$$

Como $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ *é divergente então* $\int_1^{+\infty} \frac{1+sen^2 x}{\sqrt{x}}dx$ *é também divergente.*

Proposição 5.9.5 *(Critério da existência do limite) Se* $f(x)$ *e* $g(x)$ *são duas funções tais que*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ é finito e não nulo}$$

então os integrais $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *e* $\int_c^{+\infty} g(x)dx$ *têm a mesma natureza.*

Exemplo 5.9.6 *Para estudar a natureza do integral* $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx$ *pode ver-se que*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^\alpha}}{\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^3}}{x^\alpha} = 1 \text{ se } \alpha = \frac{3}{2}.$$

Como $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx$ *é convergente então* $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx$ *é da mesma natureza, isto é, é convergente.*

Proposição 5.9.7 *(Critério do integral) Seja* $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ *uma função decrescente e, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *seja* $a_n = f(n)$. *Então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e o integral* $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ *são da mesma natureza (ambos convergentes ou ambos divergentes).*

Proposição 5.9.8 *Seja* $\int_a^b f(x)dx$ *um integral impróprio de 2ª espécie em que* $f(c)$ *não é limitada. Se*

$$\lim_{x\to c} (x-c)^\alpha f(x) \text{ é finito e não nulo}$$

então:

a) $\int_a^b f(x)dx$ *é convergente se* $\alpha < 1$;

b) $\int_a^b f(x)dx$ *é divergente se* $\alpha \geq 1$.

Exemplo 5.9.9 *O integral* $\int_3^4 \frac{2}{(x-3)^2}dx$ *é divergente pois*

$$\lim_{x \to 3} (x-3)^\alpha \frac{2}{(x-3)^2} = 2 \text{ para } \alpha = 2.$$

5.10 Aplicações dos integrais

5.10.1 Áreas planas

Se $f(x)$ é uma função contínua não negativa, a área da região limitada pelo seu gráfico, pelo eixo das abcissas e pelas rectas verticais $x = a$ e $x = b$ é dada por

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

Exercício 5.10.1 *Calcular a área:*

1. *De um círculo de centro na origem e raio* r;
2. *Da região definida pelo conjunto*
$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -3 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq (x+1)\, e^{x+1}\right\};$$
3. *Da região limitada pela parábola* $y = x^2$ *e a recta* $y = 3 - 2x$.
4. *Da região definida por*
$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 5, 0 < y \leq \frac{1}{\sqrt{|x|}}\right\}.$$

5.10.2 Comprimento de curvas planas

O comprimento de um arco P_0P_1 duma curva representada pela aplicação $y = f(x)$, tendo por coordenadas cartesianas $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e $P_1 = (x_1, f(x_1))$ é dado por

$$C = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$

Exercício 5.10.2 *Determine os comprimentos dos arcos das curvas definidas por:*

1. *$y = \cosh(x)$ entre $A = (0,1)$ e $B = \left(1, \frac{e^2+1}{e}\right)$*

2. *$y = 2\log x$ entre $A = (1,0)$ e $B = \left(\sqrt{3}, 2\log\sqrt{3}\right)$*

5.10.3 Volumes de sólidos de revolução

O volume do sólido que se obtem pela rotação da região limitada pelo gráfico de $y = f(x)$ e pelas rectas verticais $x = a$ e $x = b$, em torno do:

a) eixo das abcissas é dado por

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx.$$

b) eixo horizontal $y = k$ é dado por

$$V = \pi \int_a^b [f(x) - k]^2 \, dx.$$

Exercício 5.10.3 *Calcular o volume de um cone de revolução de altura h e raio da base r.*

5.10.4 Áreas laterais de sólidos de revolução

A área lateral de um sólido gerado pela rotação da região limitada pelo eixo das abcissas, pelo gráfico de $f(x)$ e pelas rectas verticais $x = a$ e $x = b$, é dada por

$$A_L = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Exercício 5.10.4 *Calcular a área lateral de um cone de revolução de altura h e raio da base r.ntegral de Riemann*

O conceito base no cálculo diferencial é a noção de derivada. No cálculo integral esse papel é desempenhado pela noção de integral.

O método mais intuitivo para abordar este conceito é considerá-lo como uma área.