

Unidad Didáctica: Introducción a la Combinatoria

David Álvarez Jalón
Pablo Cárdenas Álvarez
Javier Oribe Moreno
Ángel Silva López



- 1 Contextualización
- 2 Justificación
- 3 Contenidos
- 4 Objetivos
- 5 Metodología
- 6 Prueba de diagnóstico
- 7 Temporización
- 8 Evaluación
- 9 Clima en clase
- 10 Atención a la diversidad
- 11 Recursos

- Destinada a los alumnos de 4º de la ESO del Colegio San Alberto Magno, situado en Montequinto (Dos Hermanas).
- Zona de nivel socioeconómico medio-alto, gran implicación de los padres.
- Sólo hay una línea por curso, no hay departamentos como tales.
- Grupo de 26 alumnos, un alumno con necesidades especiales debido a altas capacidades, todos con la asignatura aprobada en cursos anteriores.

Decreto 231/2007 (BOJA)

[...]Las Matemáticas deben entenderse como una materia que ayuda a interpretar la realidad[...]. Abordar cuestiones de planificación para la recogida de información, **utilizar técnicas de recuento y manipulación de los datos, así como estudiar la forma para agruparlos**, son tareas tan importantes como los cálculos que con ellos puedan realizarse y su posterior interpretación.

- Cuadrados mágicos, China (2300 A.C.).
- Aplicaciones prácticas, música y medicina, India (S. XII).
- Cábalas, Europa (S. XII-XIV).
- Blaise Pascal, Leibniz, Jakob Bernoulli: combinatoria moderna, asociada al cálculo de probabilidades (S. XVII).
- Leonard Euler: problemas de combinatoria y geometría (puentes de Königsberg) que dan lugar a la teoría de grafos y a la topología (S. XVIII).

Además de contar, también necesitamos **agrupar** y **ordenar**.

Además de contar, también necesitamos **agrupar** y **ordenar**.

Un manejo adecuado de la combinatoria permite:

- Interpretar fenómenos aleatorios.
- Planificar tareas de forma realista.
- Escoger adecuadamente contraseñas en internet.
- Adquirir una actitud crítica ante la información que se recibe.

Además de contar, también necesitamos **agrupar** y **ordenar**.

Un manejo adecuado de la combinatoria permite:

- Interpretar fenómenos aleatorios.
- Planificar tareas de forma realista.
- Escoger adecuadamente contraseñas en internet.
- Adquirir una actitud crítica ante la información que se recibe.

Aplicaciones al mundo laboral y académico:

- Trabajos administrativos.
- Tareas de planificación y gestión empresarial.
- Estudios de ingeniería y ciencias.
- Estudios de economía y administración de empresas.

Esta unidad es de introducción y se presentan herramientas útiles para temas posteriores. Por tanto, muchos de los procedimientos consisten en aplicar la fórmula del concepto visto.

Esta unidad es de introducción y se presentan herramientas útiles para temas posteriores. Por tanto, muchos de los procedimientos consisten en aplicar la fórmula del concepto visto.

En este tema se presentan los siguientes conceptos:

Esta unidad es de introducción y se presentan herramientas útiles para temas posteriores. Por tanto, muchos de los procedimientos consisten en aplicar la fórmula del concepto visto.

En este tema se presentan los siguientes conceptos:

- Métodos de conteo (método del producto, diagrama de árbol).

Esta unidad es de introducción y se presentan herramientas útiles para temas posteriores. Por tanto, muchos de los procedimientos consisten en aplicar la fórmula del concepto visto.

En este tema se presentan los siguientes conceptos:

- Métodos de conteo (método del producto, diagrama de árbol).
- Números factoriales: $n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Esta unidad es de introducción y se presentan herramientas útiles para temas posteriores. Por tanto, muchos de los procedimientos consisten en aplicar la fórmula del concepto visto.

En este tema se presentan los siguientes conceptos:

- Métodos de conteo (método del producto, diagrama de árbol).
- Números factoriales: $n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
- Números combinatorios: $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n - m)!}$

Esta unidad es de introducción y se presentan herramientas útiles para temas posteriores. Por tanto, muchos de los procedimientos consisten en aplicar la fórmula del concepto visto.

En este tema se presentan los siguientes conceptos:

- Métodos de conteo (método del producto, diagrama de árbol).
- Números factoriales: $n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
- Números combinatorios: $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n - m)!}$
- Triángulo de Tartaglia.

Esta unidad es de introducción y se presentan herramientas útiles para temas posteriores. Por tanto, muchos de los procedimientos consisten en aplicar la fórmula del concepto visto.

En este tema se presentan los siguientes conceptos:

- Métodos de conteo (método del producto, diagrama de árbol).
- Números factoriales: $n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
- Números combinatorios: $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n - m)!}$
- Triángulo de Tartaglia.
- Variaciones $V_{n,m} = \frac{n!}{(n - m)!}$. Variaciones con repetición $VR_{n,m} = n^m$

Esta unidad es de introducción y se presentan herramientas útiles para temas posteriores. Por tanto, muchos de los procedimientos consisten en aplicar la fórmula del concepto visto.

En este tema se presentan los siguientes conceptos:

- Métodos de conteo (método del producto, diagrama de árbol).
- Números factoriales: $n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
- Números combinatorios: $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n - m)!}$
- Triángulo de Tartaglia.
- Variaciones $V_{n,m} = \frac{n!}{(n - m)!}$. Variaciones con repetición $VR_{n,m} = n^m$
- Permutaciones: $P_n = n!$

Esta unidad es de introducción y se presentan herramientas útiles para temas posteriores. Por tanto, muchos de los procedimientos consisten en aplicar la fórmula del concepto visto.

En este tema se presentan los siguientes conceptos:

- Métodos de conteo (método del producto, diagrama de árbol).
- Números factoriales: $n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
- Números combinatorios: $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n - m)!}$
- Triángulo de Tartaglia.
- Variaciones $V_{n,m} = \frac{n!}{(n - m)!}$. Variaciones con repetición $VR_{n,m} = n^m$
- Permutaciones: $P_n = n!$
- Combinaciones: $C_{n,m} = \binom{n}{m}$

Contenidos procedimentales y actitudinales

Procedimentales

- Realizar conteos por el método del producto.
- Trasladar una situación real a un diagrama de árbol.
- Desarrollo de números factoriales y combinatorios.
- Desarrollo de distintas potencias de binomios.
- Resolución de problemas usando las fórmulas de las variaciones, permutaciones y combinaciones.

Procedimentales

- Realizar conteos por el método del producto.
- Trasladar una situación real a un diagrama de árbol.
- Desarrollo de números factoriales y combinatorios.
- Desarrollo de distintas potencias de binomios.
- Resolución de problemas usando las fórmulas de las variaciones, permutaciones y combinaciones.

Actitudinales

- Asimilación de nuevos conceptos y símbolos.
- Capacidad analítica para trasladar el enunciado a la fórmula.
- Aceptar la utilidad de los nuevos conceptos para cálculos complejos y novedosos.
- Compromiso y predisposición al trabajo (individual y en grupo).

C1 Matemática: desarrollo de la lógica y el razonamiento matemático

Análisis pormenorizado de todos los casos posibles de un suceso. Adquisición de nuevos términos y símbolos del lenguaje matemático, así como de nuevas operaciones (factorial y número combinatorio). Comprensión de números grandes.

C2 Comunicación lingüística: Capacidad para describir verbalmente una situación de forma correcta. Capacidad para debatir con los demás utilizando argumentaciones.

C3 Artística y cultural: Ubicación de la combinatoria en el mundo contemporáneo. Comprensión de la importancia histórica de la combinatoria. Comprensión de la relación entre la combinatoria y el arte.

C4 Digital: Uso de la calculadora y del programa WIRIS para realizar cálculos combinatorios.

C5 Social y ciudadana: Uso de la combinatoria para desarrollar el pensamiento crítico. Capacidad de trabajar en equipo.

C6 Interacción con el mundo físico: No se trabajará explícitamente en esta unidad.

C7 Aprender a aprender: Desarrollo de la capacidad de análisis de situaciones de naturaleza combinatoria. Aprender a distinguir soluciones correctas de las incorrectas. Aprender a afrontar problemas difíciles subdividiéndolos en partes más sencillas.

C8 Autonomía e iniciativa personal: Capacidad de esforzarse para superar las dificultades propias de la combinatoria. Iniciativa para proponer nuevos problemas y soluciones diferentes. Actitud crítica ante la propia unidad didáctica.

Objetivos concretos

Objetivos en concordancia con los contenidos.
Conceptos nuevos, muchas fórmulas.

Objetivos concretos

Objetivos en concordancia con los contenidos.

Conceptos nuevos, muchas fórmulas.

- Utilizar distintos métodos de conteo.
- Manejar números combinatorios.
- Distinguir entre variaciones y permutaciones.
- Identificar combinaciones de m elementos tomados de n en n .

Objetivos concretos

Objetivos en concordancia con los contenidos.

Conceptos nuevos, muchas fórmulas.

- Utilizar distintos métodos de conteo.
- Manejar números combinatorios.
- Distinguir entre variaciones y permutaciones.
- Identificar combinaciones de m elementos tomados de n en n .

Objetivo principal de la unidad: distinguir cuando usar cada fórmula según el contexto del problema.

Objetivos concretos

Objetivos en concordancia con los contenidos.

Conceptos nuevos, muchas fórmulas.

- Utilizar distintos métodos de conteo.
- Manejar números combinatorios.
- Distinguir entre variaciones y permutaciones.
- Identificar combinaciones de m elementos tomados de n en n .

Objetivo principal de la unidad: distinguir cuando usar cada fórmula según el contexto del problema.

Para distinguir entre variaciones, variaciones con repetición, permutaciones y combinaciones hay que contestar a tres preguntas.

¿Influye el orden?	No	Combinaciones			
	Si	¿Se trabaja con todos los elementos?	Si	Permutaciones	
		No	¿Se pueden repetir los elementos?	Si	Variaciones con repetición
				No	Variaciones

Guión de la clase

Guión de la clase

- 1 Exploración de las ideas previas (sólo cuando haga falta. Obviamente, en la primera es necesario).

Guión de la clase

- ① Exploración de las ideas previas (sólo cuando haga falta. Obviamente, en la primera es necesario).
- ② Exposición de los conceptos por parte del profesor y diálogo con los alumnos.

Guión de la clase

- 1 Exploración de las ideas previas (sólo cuando haga falta. Obviamente, en la primera es necesario).
- 2 Exposición de los conceptos por parte del profesor y diálogo con los alumnos.
- 3 Realización de actividades para la consolidación de los conceptos y procedimientos.

Guión de la clase

- 1 Exploración de las ideas previas (sólo cuando haga falta. Obviamente, en la primera es necesario).
- 2 Exposición de los conceptos por parte del profesor y diálogo con los alumnos.
- 3 Realización de actividades para la consolidación de los conceptos y procedimientos.
- 4 Resolución de problemas de la vida cotidiana.

Guión de la clase

- 1 Exploración de las ideas previas (sólo cuando haga falta. Obviamente, en la primera es necesario).
- 2 Exposición de los conceptos por parte del profesor y diálogo con los alumnos.
- 3 Realización de actividades para la consolidación de los conceptos y procedimientos.
- 4 Resolución de problemas de la vida cotidiana.

Y recordad

- Empezar las sesiones corrigiendo los ejercicios de la sesión pasada y resolviendo las dudas.

Guión de la clase

- 1 Exploración de las ideas previas (sólo cuando haga falta. Obviamente, en la primera es necesario).
- 2 Exposición de los conceptos por parte del profesor y diálogo con los alumnos.
- 3 Realización de actividades para la consolidación de los conceptos y procedimientos.
- 4 Resolución de problemas de la vida cotidiana.

Y recordad

- Empezar las sesiones corrigiendo los ejercicios de la sesión pasada y resolviendo las dudas.
- Los alumnos que quieran, corregirán ejercicios en la pizarra (+ 1 pt.).

Guión de la clase

- 1 Exploración de las ideas previas (sólo cuando haga falta. Obviamente, en la primera es necesario).
- 2 Exposición de los conceptos por parte del profesor y diálogo con los alumnos.
- 3 Realización de actividades para la consolidación de los conceptos y procedimientos.
- 4 Resolución de problemas de la vida cotidiana.

Y recordad

- Empezar las sesiones corrigiendo los ejercicios de la sesión pasada y resolviendo las dudas.
- Los alumnos que quieran, corregirán ejercicios en la pizarra (+ 1 pt.).
- Los problemas que no de tiempo a hacer, se dejarán para casa.

A tener en cuenta

- Tendremos en cuenta las ideas previas del alumno (aprendizaje significativo).
- Podremos usar las TIC como herramientas motivadoras y como recursos didácticos. Además, el uso de la calculadora estará presente.
- Comunicación con el resto de departamentos.
- Ceder progresivamente el control de las tareas a los alumnos.
- Tener en cuenta la opinión de los alumnos. Por ejemplo, podemos preguntarles qué preguntas creen que habría que poner en el examen.

A tener en cuenta

- Tendremos en cuenta las ideas previas del alumno (aprendizaje significativo).
- Podremos usar las TIC como herramientas motivadoras y como recursos didácticos. Además, el uso de la calculadora estará presente.
- Comunicación con el resto de departamentos.
- Ceder progresivamente el control de las tareas a los alumnos.
- Tener en cuenta la opinión de los alumnos. Por ejemplo, podemos preguntarles qué preguntas creen que habría que poner en el examen.

Ideas importantes

- Ejercicios que motiven los conceptos y no al revés.
- Metodología abierta.

Prueba de diagnóstico

Primera pregunta

En tu instituto hay que escoger a tres personas para que participen en la Olimpiada Matemática Thales. Como todo el mundo quiere participar, se realiza un sorteo. Se sacan tres papeletas de una urna y la primera es la de Diego, la segunda la de Nuria y la tercera la de Martín. Si hubiera salido primero Nuria, después Martín y por último Diego, ¿el resultado del sorteo sería el mismo? Si es así, ¿se te ocurre alguna situación en la que no lo fuera?

Primera pregunta

En tu instituto hay que escoger a tres personas para que participen en la Olimpiada Matemática Thales. Como todo el mundo quiere participar, se realiza un sorteo. Se sacan tres papeletas de una urna y la primera es la de Diego, la segunda la de Nuria y la tercera la de Martín. Si hubiera salido primero Nuria, después Martín y por último Diego, ¿el resultado del sorteo sería el mismo? Si es así, ¿se te ocurre alguna situación en la que no lo fuera?

Segunda pregunta

María y Pedro se han registrado en una nueva red social para estudiantes de matemáticas. Cuando el programa les pide que introduzcan una clave, María escoge cuatro cifras distintas, mientras que Pedro escoge tres cifras también distintas y una letra. ¿Qué contraseña crees que es más segura? ¿Por qué? Si deciden que las cifras puedan repetirse, ¿las contraseñas serán más o menos seguras?

Tercera pregunta

Ramón es el presidente de un equipo de baloncesto que va realmente mal en su liga. Para tratar de remediarlo habla con su entrenador y le propone que pruebe con cada uno de los equipos que se puedan formar con sus doce jugadores hasta que dé con el quinteto ideal. ¿Te parece una buena solución? ¿Por qué?

Tercera pregunta

Ramón es el presidente de un equipo de baloncesto que va realmente mal en su liga. Para tratar de remediarlo habla con su entrenador y le propone que pruebe con cada uno de los equipos que se puedan formar con sus doce jugadores hasta que dé con el quinteto ideal. ¿Te parece una buena solución? ¿Por qué?

Cuarta pregunta

Tu amiga Rosa tiene un hermano que con sólo cuatro años ya es capaz de resolver un cubo de Rubik. Ella dice que no es para tanto, que su hermano tiene mucha suerte y los hace por casualidad. ¿Qué crees que es más fácil, que realmente sea una casualidad o que el hermano de Rosa sea un genio? ¿Por qué?

Se propone el desarrollo de los contenidos de la unidad en siete sesiones:

- 1 Realización del cuestionario previo.
- 2 Estrategia del producto y diagramas de árbol.
- 3 Permutaciones y variaciones sin repetición.
- 4 Variaciones con repetición.
- 5 Combinaciones sin repetición, números combinatorios y uso de la calculadora.
- 6 Triángulo de Tartaglia. Distinción entre variaciones, combinaciones y permutaciones.
- 7 Repaso y ampliación de la Unidad Didáctica utilizando WIRIS.

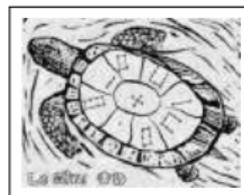
Cuestionario previo

Dividimos la sesión en tres partes:

- 1 Resolución individual del cuestionario previo.
- 2 Resolución en grupo del cuestionario.
- 3 Puesta en común.

Estrategia del producto y diagramas de árbol

Se introducirá a los alumnos la combinatoria a través de una leyenda China sobre el Dios “Lo”.



Se explicarán métodos de conteo utilizando el problema de los saludos.



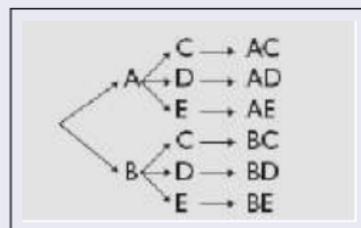
Estrategia del producto

Se tienen 6 banderas de señalización, dos rojas, dos verdes y dos azules. ¿Cuántas señales distintas pueden hacerse con dos banderas a la vez? ¿Y si nos dan a elegir entre usar una sola bandera o dos?

	R	V	A
R	RR	RV	RA
V	VR	VV	VA
A	AR	AV	AA

Diagramas de árbol

Dibuja el árbol correspondiente a las distintas formas en que puede vestirse una persona que tiene dos camisas A y B y tres pantalones C, D y E.



Ejercicios de clase

- 1 Con los dígitos 8 y 9, forma todos los números de tres cifras que puedas. ¿Cuántos son? Haz primero los cálculos usando la estrategia del producto y después dibuja el árbol.
- 2 Tenemos un dado de quinielas futbolísticas, de caras 1, X y 2. Si lo lanzamos cuatro veces, ¿cuántas combinaciones de signos podríamos obtener? Dibuja el diagrama de árbol.

Permutaciones y variaciones sin repetición

Permutaciones

En el Gran Premio de China de 2013 el podio lo formaron Fernando Alonso, Kimi Räikkönen y Lewis Hamilton. ¿De qué otras maneras podrían haber ocupado el podio estos tres pilotos?



Permutaciones y variaciones sin repetición

Permutaciones

En el Gran Premio de China de 2013 el podio lo formaron Fernando Alonso, Kimi Räikkönen y Lewis Hamilton. ¿De qué otras maneras podrían haber ocupado el podio estos tres pilotos?



Variaciones sin repetición

Y si incluimos al cuarto clasificado, que fue Sebastian Vettel, ¿cuántos podios diferentes podríamos haber visto?

Ejercicios de clase

- 1 Calcular las permutaciones P_3, P_4, P_5, P_6
- 2 ¿Cuántos números de 5 cifras distintos podemos hacer con los dígitos 1,2,3,4 y 5?
- 3 Calcular las variaciones sin repetición V_4^3, V_5^3, V_6^3
- 4 ¿Cuántos números de tres cifras diferentes se puede formar con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5?

Ejercicios de clase

- 1 Calcular las permutaciones P_3, P_4, P_5, P_6
- 2 ¿Cuántos números de 5 cifras distintos podemos hacer con los dígitos 1,2,3,4 y 5?
- 3 Calcular las variaciones sin repetición V_4^3, V_5^3, V_6^3
- 4 ¿Cuántos números de tres cifras diferentes se puede formar con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5?

¡Cuidado!

En el último ejercicio hay que tener en cuenta que los números no empiezan por cero.

Actividad: Marilyn Monroe y Andy Warhol

Observa este cuadro y responde:



¿Cuántos colores distintos se han usado en las cuatro imágenes? ¿Cuántos se usan en cada imagen? Teniendo en cuenta estos datos, ¿cuántas imágenes diferentes podría haber pintado el autor?

Variaciones con repetición

Un banco utiliza un programa de ordenador para asignar claves de seis cifras a las tarjetas de sus clientes de forma aleatoria. Si en una clave pueden repetirse las cifras, ¿cuántas claves puede asignar el programa?

Ejercicios de clase

- 1 Calcular las variaciones con repetición VR_4^3 , VR_5^3 , VR_6^3
- 2 ¿Cuántos números de tres cifras se puede formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5?
- 3 ¿Cuántos números de tres cifras se puede formar con los dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5?

Problemas

- 1 Jaime tiene un candado que se abre combinando adecuadamente tres cifras. Miguel se propone probar una por una todas las combinaciones posibles hasta abrir el candado. Si comprueba una cada 5 segundos, ¿cuánto tiempo tardaría en probarlas todas? ¿Y si fueran cuatro cifras?
- 2 En España, las matrículas están formadas por un número de cuatro cifras y tres letras mayúsculas consonantes, sin contar con la Ñ y la Q. Calcula cuántos vehículos se pueden matricular de esta forma. Si se matriculan 2×10^6 vehículos al año, ¿durante cuántos años se podrá mantener este sistema?

Actividad: El juego de dados de Mozart

En 1777 Wolfgang Amadeus Mozart compuso una pieza que llamó “Juego de dados musical”. No se trataba de una obra como tal, sino de un generador aleatorio de minuetos. Mozart compuso **176 compases** y formó grupos de **doce** compases cada uno. Determinó que para escoger cada uno de los compases que componen un minuetto se debían lanzar dos dados y mirar en una tabla el que correspondía al resultado. Tras 16 tiradas, el minuetto estaría listo para ser interpretado.

¿Cuántos minuetos diferentes componen el Juego de dados musical de Mozart? Si cada uno de ellos tiene una duración de 30 segundos, ¿cuánto tiempo se tardaría en interpretar todos? ¿Cuántas veces ha dado tiempo de hacerlo desde que Mozart los compuso? ¿Y desde que existe la Tierra? ¿Y desde el Big Bang?

Actividad: El juego de dados de Mozart

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI
2	96	22	141	41	105	122	11	30	70	121	26	9	112	49	109	14
3	32	6	128	63	146	46	134	81	117	39	126	56	174	18	116	83
4	69	95	158	13	153	55	110	24	66	139	15	132	73	58	145	79
5	40	17	113	85	161	2	159	100	90	176	7	34	67	160	52	170
6	148	74	163	45	80	97	36	107	25	143	64	125	76	136	1	93
7	104	157	27	167	154	68	118	91	138	71	150	29	101	162	23	151
8	152	60	171	53	99	133	21	127	16	155	57	175	43	168	89	172
9	119	84	114	50	140	86	169	94	120	88	48	166	51	115	72	111
10	98	142	42	156	75	129	62	123	65	77	19	82	137	38	149	8
11	3	87	165	61	135	47	147	33	102	4	31	164	144	59	173	78
12	54	130	10	103	28	37	106	5	35	20	108	92	12	124	44	131

Combinaciones sin repetición, números combinatorios y uso de la calculadora.

Combinaciones sin repetición

¿Cuántas secuencias de tres letras se pueden formar con el conjunto $\{a, b, c, d, e\}$? abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde.

Ejercicios de clase

- 1 Calcular las combinaciones C_4^3 , C_5^3 , C_6^3
- 2 ¿Cuántos números de tres cifras se puede formar con los dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5?
- 3 En una clase de 35 alumnos se quiere elegir un comité formado por tres alumnos. ¿Cuántos comités diferentes se pueden formar?

Uso de la calculadora

Se aprovechan los ejercicios anteriores para explicar las funciones específicas de combinatoria de las calculadoras.



Propiedades de los números combinatorios

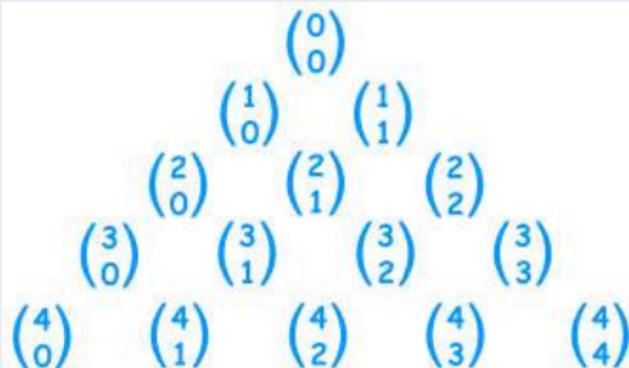
$$\binom{7}{0} = 1, \binom{7}{7} = 1$$

$$\binom{7}{3} = \binom{7}{4}, \binom{100}{99} = \binom{100}{1}$$

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{5}{3}, \binom{7}{5} + \binom{7}{6} = \binom{8}{6}, \binom{11}{7} + \binom{11}{8} = \binom{12}{8}$$

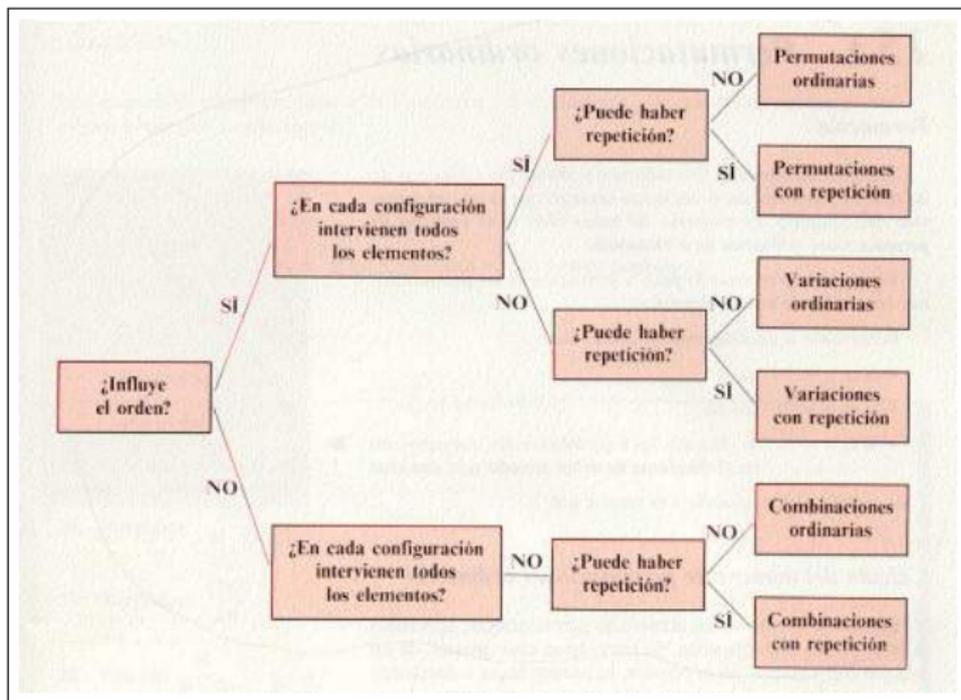
Triángulo de Tartaglia. Distinción entre variaciones, combinaciones y permutaciones.

Triángulo de Tartaglia



Sexta sesión

Construiremos entre todos un esquema como el siguiente, que les ayudará a distinguir variaciones, combinaciones y permutaciones:



Tomado de www.lasmaticasdemario.com

Realizaremos ejercicios similares a los anteriores pero utilizando el diagrama y el triángulo de Tartaglia.

Ejercicios de clase

- 1 Con las cifras 1, 3, 5, 7 y 9, ¿Cuántos números de tres cifras distintas se pueden escribir? ¿Cuántos números de cinco cifras se pueden escribir?
- 2 Una línea de metro tiene 9 estaciones. ¿Cuántos billetes distintos habrá que imprimir si cada billete lleva impresos los nombres de las estaciones origen y destino?
- 3 Tu estantería tiene 10 libros. ¿De cuántas formas puedes ordenarlos? Si te piden que lleves cuatro libros a clase, ¿de cuántas formas los puedes escoger?
- 4 De entre los once alumnos de una clase hay que elegir cinco para hacer un mural. ¿Cuántos grupos se pueden formar? ¿En cuántos están Ana, Andrés y Teresa?

Repaso y ampliación con WIRIS

Errores WIRIS

Edición | Configuración | Símbolos | Matemáticas | Fórmulas | Estadística | Combinatoria | Geometría | Álgebra | Programación | Formato

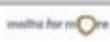
María escoge cuatro cifras. El orden importa, pues no es la misma clave 2341 que 4321, y no escoge las diez cifras sino cuatro, luego no son permutaciones. Como además las cifras han de ser diferentes estamos ante variaciones de diez elementos tomados de cuatro en cuatro, por tanto el número de contraseñas que puede construir así es:
 $V_{10,4} = 5040$
 Ejemplos: 9143, 5239, 6107, etc...

Pedro escoge tres cifras de diez cuidando el orden y sin repetirlas. Se trata también de variaciones sin repetición, luego el número de maneras que tiene de escogerlas es:
 $V_{10,3} = 720$

Además, a cada una de estas combinaciones Pedro le va a añadir una letra de las 26 que tiene el alfabeto (no incluimos la ñ por si tenemos que entrar alguna vez desde un teclado que no sea español). Pero también hay que tener en cuenta que esa letra puede aparecer en primer, segundo, tercer o cuarto lugar, luego por cada una de las 26 letras tendremos 4 lugares donde ponerlas. Por ejemplo, si Pedro escoge los números 562, en ese orden, y la letra F, la contraseña puede ser F562, 5F61, 56F2, 562F. En definitiva, el número de contraseñas que puede construir Pedro es de:
 $720 \cdot 26 \cdot 4 = 74880$

Como vemos, el método de Pedro es mucho más seguro, pues tiene muchas más posibilidades y eso hace más complicado que alguien averigüe su contraseña haciendo pruebas. Si además permitimos que las cifras se repitan tenemos que el número de contraseñas que puede obtener María es:
 $VR_{10,4} = 10000$
 Y las que puede hacer Pedro son:
 $VR_{10,3} \cdot 26 \cdot 4 = 104000$

Por tanto es mucho más seguro escoger la contraseña repitiendo cifras que sin repetirlas.


manual
primaria
colección


¡Quiero mi diez!

- 1 **60 %** - Examen (sólo incluirá un ejercicio de combinatoria).
- 2 **20 %** - Trabajos en el aula TIC (WIRIS) y trabajos en grupo.
- 3 **10 %** - Actitud en clase. Estado del cuaderno.
- 4 **10 %** - Trabajos extraordinarios (ejercicios en la pizarra, lectura).

¡Quiero mi diez!

- ① **60 %** - Examen (sólo incluirá un ejercicio de combinatoria).
- ② **20 %** - Trabajos en el aula TIC (WIRIS) y trabajos en grupo.
- ③ **10 %** - Actitud en clase. Estado del cuaderno.
- ④ **10 %** - Trabajos extraordinarios (ejercicios en la pizarra, lectura).

El ejercicio que proponemos para formar parte del examen es el siguiente:

En cierto instituto se ofrecen 2 áreas optativas para 1º ESO, 3 para 2º ESO, 4 para 3º ESO y 5 para 4º ESO. ¿Entre cuántos itinerarios distintos puede elegir un alumno?

¡Quiero mi diez!

- 1 **60 %** - Examen (sólo incluirá un ejercicio de combinatoria).
- 2 **20 %** - Trabajos en el aula TIC (WIRIS) y trabajos en grupo.
- 3 **10 %** - Actitud en clase. Estado del cuaderno.
- 4 **10 %** - Trabajos extraordinarios (ejercicios en la pizarra, lectura).

El ejercicio que proponemos para formar parte del examen es el siguiente:

En cierto instituto se ofrecen 2 áreas optativas para 1º ESO, 3 para 2º ESO, 4 para 3º ESO y 5 para 4º ESO. ¿Entre cuántos itinerarios distintos puede elegir un alumno?

Aún así, si queremos hacer un examen sólo de combinatoria, se seguirá el siguiente modelo:

Criterios de evaluación en el examen

Se aplicarán en los ejercicios del examen de probabilidad, ya que la resolución de estos implicarán contenidos del tema de combinatoria.

Se aplicarán en los ejercicios del examen de probabilidad, ya que la resolución de estos implicarán contenidos del tema de combinatoria.

Criterios (algunos de ellos)

- Aplicar conceptos y técnicas del recuento de casos tales como el método del producto o el diagrama de árbol.
- Observar si los alumnos actúan de manera sistemática cuando construyen agrupaciones utilizando un esquema en árbol.
- Ver si aplican correctamente las fórmulas para calcular el número de permutaciones, variaciones o combinaciones.
- Valorar si utilizan la calculadora para calcular el factorial de un número.
- Comprobar que en una situación concreta distinguen el modelo combinatorio adecuado que conviene aplicar.

Sistema de preguntas

- ¿Ha servido el cuestionario previo para conocer las ideas preconcebidas?
- ¿Me he encontrado alguna dificultad al explicar la materia?
¿Qué ejemplos he tenido que poner para que los alumnos comprendieran mejor los conceptos?
- ¿He tenido que improvisar en algún momento? Si la respuesta es afirmativa, analizar el por qué y anotar posibles modificaciones.
- Para la sesión con recursos digitales, ¿he previsto los posibles inconvenientes tales como falta de recursos o de espacios?
- ¿Se adapta la temporización a la realidad? ¿Añado o quito sesiones?
¿Está bien repartido el tiempo entre teoría y ejercicios?
- ¿Se han cumplido los objetivos? ¿Las expectativas eran reales?
- ¿Ha tenido buena acogida el libro de lectura?
- El examen de evaluación final, ¿refleja los resultados esperados?

Piaget afirma que el fin de la educación es el de construir personalidades autónomas aptas para la cooperación. Para alcanzarlo, proponemos:

- Vida participativa y cooperativa para los alumnos.
- Normas consensuadas y sujetas a revisiones.
- Entrevistarse con los alumnos más conflictivos.
- Buscar alicientes que incrementen el interés del alumnado por el reglamento.
- Las normas se pueden concretar en:
 - Ser puntual y evitar las interrupciones.
 - Teléfono móvil, ordenadores portátiles.
 - Cuidado, orden y limpieza de las instalaciones.
 - Se prestará atención a la persona en uso de la palabra.
 - Postura corporal y no se consumirán alimentos.
 - Deben estar abiertos al trabajo en equipo iniciativa propia.

- - Elaborar un discurso claro, agudo, comprensivo y pausado.
- - Hablar siempre con voz alta, clara y transmitiendo entusiasmo.
- - Utilizar un tono cordial, de humor, informal y distendido.
- - Crear un ambiente no inhibido.
- - Inspirar confianza.
- - Preocuparse por conocer a los alumnos.
- - Usar anécdotas o experiencias personales para ejemplificar.
- - Formular una variedad de preguntas e insistir en la participación.
- - Incluir la participación en la evaluación.

- - Relacionar los temas con las experiencias e intereses de los alumnos.
- - Llevar a cabo debates y role plays.
- - Ser constructivo/a en la retroalimentación.
- - “Entender que los alumnos rendirán mas si se deposita sobre ellos la idea de confianza en sus posibilidades” .
- - Evitar comparaciones negativas.
- - En las correcciones, buscar aspectos positivos para combinar felicitaciones entre las críticas.
- - Devolver los ejercicios de evaluación con rapidez.

A la hora de encomendar ejercicios de refuerzo o de ampliación se tendrá en cuenta el nivel de los distintos alumnos, sus distintos ritmos de aprendizaje, así como sus distintos intereses y motivaciones.

- **Actividades de refuerzo**

- Ejemplo 1: ¿Cuántos números de dos cifras distintas se pueden formar con las cifras 2, 3 y 5? Representa el diagrama de árbol para formar todos los resultados posibles.

- Ejemplo 2: ¿De cuántas maneras pueden viajar cinco personas en un coche si sólo dos de ellas saben conducir?

- Binomio de Newton

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n$$

- Combinaciones con repetición

Cuando se quieren formar muestras no ordenadas cuyos elementos pueden estar repetidos, por ejemplo, n elementos tomados de k en k con repetición, sería:

$$CR_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{(n+k-1-k)! \cdot k!} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \cdot k!}$$

Ejemplo: Una bolsa contiene bolas de tres colores diferentes, diez bolas de cada color. ¿Cuántas extracciones diferentes de siete bolas se pueden hacer?

- Permutaciones con repetición

Se puede intentar que los alumnos la deduzcan por su cuenta a partir de ejemplos simples.

Permutaciones con repetición de n elementos donde el primer elemento se repite a veces , el segundo b veces , el tercero c veces: $n = a + b + c + \dots$

$$PR_n^{a,b,c,\dots} = \frac{P_n}{a! \cdot b! \cdot c! \cdot \dots}$$

Ejemplo: En el palo de señales de un barco se pueden izar tres banderas rojas, dos azules y cuatro verdes. ¿Cuántas señales distintas pueden indicarse con la colocación de las nueve banderas?

$$PR_9^{3,2,4} = \frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 4!} = 1260$$

Un problema para alumnos de altas capacidades y posterior exposición

Un cubo de madera, con sus caras pintadas de rojo, se divide en 27 piezas cúbicas iguales, cortando cada arista en 3 trozos. Se mezclan las 27 piezas y se recompone el cubo a ciegas. Hallar la probabilidad de que el cubo quede con todas sus caras rojas hacia afuera, como estaba inicialmente.

La solución se encuentra en <http://elmaquinadeturing.wordpress.com/2010/09/23/un-problema-resuelto-de-probabilidades/>

“En definitiva tenemos $24 \times 8! \times 3^8 \times 12! \times 2^{12} \times 6! \times 4^6 = 3,67 \times 10^{28}$ formas diferentes de formar nuestro cubo rojo. Parecen muchas, ¿verdad? Pues ya verán cómo de ridícula es la probabilidad de formar uno de estos al azar. Sólo nos queda aplicar la regla de Laplace, que nos dice que la probabilidad de construir nuestro cubo rojo al azar es de $3,67 \times 10^{28} / 2 \times 10^{65} = 1,83 \times 10^{-37}$.”

- La pizarra digital.
- Los ordenadores del aula TIC.
- El programa WIRIS.
- La calculadora.
- El blog de matemáticas del colegio.

Aunque no sea necesario en clase, como libro de texto proponemos:
Matemáticas-Pitágoras, 4º de ESO. Editorial SM.

Libro de lectura: “*El Diablo de los números*” de Hans Magnus Enzensberger.

Proponemos el capítulo que más se acerca a la combinatoria. Éste se encuentra disponible en línea (online) en la siguiente dirección de la red:
<http://www.librosmaravillosos.com/eldiablodelosnumeros/capitulo08.html>

El clásico encerado y las tizas de colores o los rotuladores.

Gracias por su atención...

