



TRABAJO FIN DE MÁSTER

Universidad Politécnica de Madrid



Máster Universitario en
FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA
OBLIGATORIA, BACHILLERATO y FORMACIÓN PROFESIONAL

COMBIMIX 2020 MEJORA DEL APRENDIZAJE DE LA COMBINATORIA EN SECUNDARIA

Nombre: **Isabel Melgosa de Arce**
Curso: **2019-2020**
Especialidad: **Matemáticas**





TRABAJO FIN DE MÁSTER

Universidad Politécnica de Madrid



Máster Universitario en
FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA
OBLIGATORIA, BACHILLERATO y FORMACIÓN PROFESIONAL

COMBIMIX 2020 MEJORA DEL APRENDIZAJE DE LA COMBINATORIA EN SECUNDARIA

Nombre: **Isabel Melgosa de Arce**
Curso: **2019-2020**
Especialidad: **Matemáticas**
Dirección: **Cristina Núñez del Río**
Instituto de Ciencias de la Educación I.C.E.
Universidad Politécnica de Madrid
Ámbito: **Innovación educativa**



ÍNDICE

1 INTRODUCCIÓN.....	9
1.1 MOTIVACIÓN Y JUSTIFICACIÓN.....	9
1.2 OBJETIVOS	12
2 MARCO TEÓRICO	13
2.1 LA COMBINATORIA EN LOS ESTUDIOS DE SECUNDARIA.....	13
2.2 ENFOQUE TRADICIONAL DE LA ENSEÑANZA DE LA COMBINATORIA	14
2.3 UNIÓN DE ESTRATEGIAS PARA APRENDER COMBINATORIA	15
3 MÉTODO	18
3.1 MUESTRA.....	18
3.2 HIPÓTESIS Y DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN	18
3.3 DEFINICIÓN DE VARIABLES	19
3.4 INSTRUMENTOS.....	19
3.5 PROCEDIMIENTO	20
3.6 CARACTERÍSTICAS DE LA INTERVENCIÓN	23
3.6.1 <i>Estrategias didácticas</i>	23
3.6.1.1 Estructura y secuencia	23
3.6.1.2 Mnemotecnia.....	25
3.6.1.3 Generación de enunciados	26
3.6.1.4 Contexto de ejemplos y problemas combinatorios	27
3.6.1.5 Actividades de gamificación.....	28
3.6.2 <i>Recursos didácticos</i>	28
3.6.2.1 Presentaciones y vídeo- lecciones	29
3.6.2.2 Problemas combinatorios	30
3.6.2.3 Actividades de gamificación.....	31
3.6.2.4 Prueba escrita de evaluación	34
4 RESULTADOS OBTENIDOS	35
4.1 CUESTIONARIOS VÍDEO-LECCIONES	35
4.2 PARTICIPACIÓN Y VALORACIÓN <i>KAHOOT</i> COMBINATORIO	36
4.3 CUESTIONARIOS DE EVALUACIÓN.....	37
4.4 CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACIÓN	38
4.5 ENTREVISTAS PERSONALES	40
5 DISCUSIÓN	42
6 CONCLUSIONES	45
REFERENCIAS.....	47
ANEXOS.....	50
ANEXO A: CUESTIONARIOS DE LAS VÍDEO-LECCIONES	50
ANEXO B: CUESTIONARIO DE EVALUACIÓN	56
ANEXO C: CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACIÓN.....	57
ANEXO D: GUIÓN DE ENTREVISTAS	59
ANEXO E: RECURSOS DIDÁCTICOS.....	60

RESUMEN

Este trabajo engloba el diseño, desarrollo, puesta en marcha y evaluación de un método didáctico para la enseñanza de la combinatoria en la asignatura de matemáticas académicas del cuarto curso de la ESO. El método se caracteriza por tres grandes líneas de actuación: estructura de contenidos centrada en los conceptos principales, contextualización de ejemplos y enunciados e introducción de actividades de gamificación. Busca mejorar la comprensión de los conceptos implicados en la combinatoria, la actitud de los estudiantes ante el tema, eliminar las dificultades principales y mejorar el rendimiento académico.

Con un enfoque de investigación-acción, el proyecto iba a ser desarrollado, en un primer momento, en dos grupos del Real Colegio Escuelas Pías de San Fernando (Pozuelo de Alarcón) en modalidad presencial; uno experimental y otro de control. Pero las circunstancias excepcionales causadas por la crisis del COVID 19 forzaron la aplicación del método en todos los grupos del mismo curso en modalidad a distancia.

Los resultados de la evaluación de esta innovación reflejan un elevado nivel de comprensión, así como un alto grado de interés y motivación de los alumnos. Los resultados académicos han sido muy favorables, aumentando el porcentaje de alumnos que superaron la calificación mínima respecto a las evaluaciones precedentes.

Palabras clave: combinatoria, innovación, recursos didácticos, gamificación, investigación-acción.

ABSTRACT

This work includes the design, development, implementation and evaluation of an educational method for the training of the combinatorial subject in academic mathematics at the last level of secondary education. The method is characterized by three main features: structure of contents focused on main ideas, contextualization of examples and combinatorial problems and the implementation of gamification activities. It seeks to improve understanding of the concepts involved in the combinatorial subject, the attitude of students towards the subject, eliminate the main difficulties and improve academic performance. With an action research approach, the project was to be developed in two groups of the Real Colegio Escuelas Pías de San Fernando (Pozuelo de Alarcón) in face-to-face mode; one experimental and one control. But the exceptional circumstances caused by the COVID 19 crisis forced the application of the method in all groups of the same course in remote mode. The results of the evaluation of this innovation reflect a high level of understanding, and a high degree of interest and motivation in the students. Academic results have been very favourable, increasing the percentage of students who exceeded the minimum score compared to previous assessments.

Keywords: combinatorial, innovation, teaching resources, gamification, action research.

1 Introducción

La sociedad de la información y la comunicación en la que estamos inmersos ha generado la necesidad de un cambio en la enseñanza tradicional. Los contenidos de las distintas materias están al alcance de todos y por ello el papel de transmisor de conocimientos del docente debe ser sustituido por el de facilitador del aprendizaje (Molas y Rosselló, 2010).

En este sentido, y coincidiendo con Díaz y Gómez (2009), toma especial importancia, dentro del rol docente, identificar y poner en práctica nuevos métodos y/o recursos didácticos que reviertan en una mejora de la comprensión y de la motivación de los alumnos con el fin de que estos se conviertan en los protagonistas de su propio aprendizaje y alcancen los objetivos que se les plantean.

Esta tarea adquiere aún mayor relevancia en aquellos temas o contenidos que son considerados, de forma histórica, difíciles para los alumnos. Lo son las matemáticas en general y temas como la combinatoria en particular.

Es necesario también, como argumentaba Ariza (1987), que el propio docente analice los resultados de estas intervenciones en cada contexto particular. Solo así podrá justificar o no su aplicación y obtener información para adaptar o replantear la metodología y/o los recursos utilizados.

1.1 Motivación y justificación

La idea de desarrollar un método alternativo para la enseñanza y el aprendizaje de la combinatoria surge en el transcurso de la asignatura de “Complementos de formación en matemáticas” del Máster. En esta asignatura se tratan como dificultades matemáticas, para los alumnos de cuarto curso de la ESO (opción de matemáticas académicas), la identificación de las técnicas a utilizar en los problemas combinatorios según las características del problema (variaciones, permutaciones y combinaciones), así como el correcto uso de las fórmulas asociadas a cada técnica.

Esta afirmación se vio reforzada al comprobar que los propios alumnos del Máster nos vimos en apuros a la hora de resolver varios problemas combinatorios. Si bien es cierto que se trataba de una actividad cuyo objetivo era captar los errores y carencias en el futuro profesorado de matemáticas, las conversaciones mantenidas entre nosotros pusieron de

manifiesto que, a la mayoría, nos resultó un tema complicado cuando lo abordamos por primera vez en nuestro período de enseñanza obligatoria.

Estudios como el desarrollado por Navarro, Batanero y Godino (1996) ponen de manifiesto estas dificultades entre los alumnos de secundaria.

A pesar de tratar conceptos matemáticos muy relacionados con la vida real y sin necesidad de un gran proceso de abstracción, el modelo educativo tradicional no consigue que los alumnos desarrollen las competencias necesarias para alcanzar con éxito y confianza los resultados de aprendizaje esperados.

Para salvar estas dificultades, y más allá de demostrar las fórmulas y de proporcionar esquemas que presentan la información de una forma global y precisa, considero necesario utilizar un enfoque didáctico que responda a las características apropiadas para desarrollar un aprendizaje significativo. De ahí que sea esencial que cada paso del proceso educativo se apoye en el anterior y constituya una base sólida para el siguiente (Ausubel, 1983). Solo de este modo podrá el alumno construir su propio aprendizaje.

El trabajo realizado para la asignatura del Máster y orientado a proponer soluciones y/o alternativas en la gestión de las dificultades mencionadas anteriormente, recoge parte del diseño de la propuesta de intervención que se presenta en este trabajo. Esta primera aproximación se fundamenta principalmente en un cambio en la organización y en la secuencia de desarrollo de los contenidos propios del tema. Es necesario estructurar todo el tema en torno a las características propias de los problemas combinatorios y que sean estas las que nos lleven a las técnicas combinatorias y a su aplicación y no al revés (como ocurre tradicionalmente). De esta forma los alumnos podrán identificar la naturaleza propia de cada problema y asociarlo a la técnica correspondiente, antes de entrar en el detalle de cada una de ellas.

La propuesta contenida en ese trabajo resultó ser de gran utilidad para mis compañeros de Máster (y para mí misma). Muchos de ellos la utilizaron en una segunda prueba escrita realizada en la misma asignatura facilitándoles la resolución correcta de los problemas combinatorios planteados.

Teniendo en cuenta la situación anterior y aprovechando que la introducción a la combinatoria ha sido una de las unidades didácticas englobadas en mi período de prácticas externas del Máster en el Real Colegio Escuelas Pías de San Fernando, decidí retomar ese

diseño con la intención de desarrollar una propuesta de intervención docente para la enseñanza de la combinatoria en la asignatura de matemáticas académicas de 4º de la ESO.

Además de centrarse en un nuevo enfoque de los conceptos combinatorios, la propuesta utiliza distintas estrategias didácticas cuyos beneficios en la enseñanza de las matemáticas están ampliamente demostrados y documentados como son: el planteamiento de ejemplos y enunciados realistas, el uso de reglas mnemotécnicas, actividades de generación de enunciados y el uso de la gamificación.

La articulación meditada de todo lo anterior ha generado lo que he denominado “CombiMix 2020”. Una propuesta de intervención didáctica en la que se combinan diferentes recursos que he desarrollado expresamente para dar soporte a las estrategias que lo conforman. Una combinación de recursos tradicionales y recursos TIC con la que pretendo minimizar las dificultades que la Combinatoria ha presentado de forma histórica a los alumnos y promover una actitud positiva hacia su aprendizaje, facilitando su comprensión e impulsando la consecución de un buen rendimiento académico.

Su aplicación en un contexto real y reflexionar sobre sus efectos han completado el marco de este trabajo de fin de máster englobándolo dentro de un proyecto de investigación – acción, al incluir dentro de su alcance una evaluación de los resultados obtenidos en la intervención.

Gracias a este trabajo y a las prácticas externas he podido comprobar mi grado de adquisición de las competencias de las distintas asignaturas cursadas en el máster y comenzar mi propio desarrollo profesional como docente.

1.2 Objetivos

Constituye el objetivo general de este trabajo:

Elaborar, aplicar y evaluar una propuesta de intervención didáctica para la enseñanza de la combinatoria en la asignatura de matemáticas académicas del cuarto curso de la ESO.

Y como objetivos específicos:

- Atender las dificultades de aprendizaje del tema de combinatoria.
- Mejorar y facilitar la comprensión de contenidos en los alumnos.
- Fomentar el interés y la motivación de los alumnos ante el nuevo aprendizaje.
- Mejorar el rendimiento académico de los alumnos.
- Presentar resultados sobre los efectos del método diseñado en los alumnos.
- Aumentar el grado de satisfacción del profesorado en la enseñanza de la combinatoria.

2 Marco teórico

2.1 La combinatoria en los estudios de secundaria

Según el diccionario de la lengua española (RAE, 2020), la combinatoria se define como “parte de las matemáticas que estudia el número de posibilidades de ordenación, selección e intercambio de los elementos de un conjunto, es decir, las combinaciones, variaciones y permutaciones”.

Existen varias investigaciones y trabajos realizados en la Universidad de Granada que ponen de manifiesto la importancia de la combinatoria en la enseñanza. En una revisión de los mismos, Fernández (2013) concluye que, además de ser fundamentales para abordar el tema de la probabilidad, existen otras razones que justifican su presencia en el currículo educativo. Entre ellas destaca que “el análisis combinatorio expresa un esquema operacional fundamental para el razonamiento lógico” (p. 544).

Atendiendo al Real Decreto 48/2015, de 14 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece el currículo de la ESO en la Comunidad de Madrid, la introducción a la combinatoria forma parte de los contenidos incluidos en el bloque 5 de la asignatura de matemáticas académicas del cuarto curso (Comunidad de Madrid, 2015). En concreto recoge el siguiente estándar de aprendizaje evaluable “1.1 Aplica en problemas contextualizados los conceptos de variación, permutación y combinación” (p. 109).

Para alcanzar con éxito este aprendizaje es necesario que los alumnos sepan identificar en primer lugar cuál de los tres conceptos (en adelante técnicas combinatorias) deben aplicar en cada problema concreto y, a partir de ahí, continuar el proceso de resolución de los problemas siguiendo las fases y pasos que se indican en la figura 1.

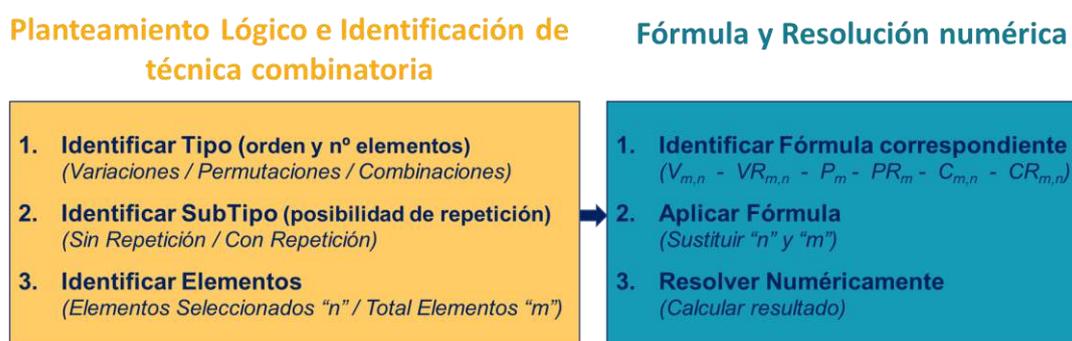


Figura 1. Fases de resolución de problemas combinatorios

Fuente: elaboración propia.

2.2 Enfoque tradicional de la enseñanza de la combinatoria

Navarro-Pelayo (1994, citado en Espinoza y Roa, 2013) señaló que “la Combinatoria es un contenido que presenta bastante dificultad para estudiantes de los diferentes niveles educativos”.

La investigación sobre el razonamiento combinatorio de los alumnos de secundaria llevada a cabo por Navarro et al. (1996) muestra una dificultad generalizada en la resolución de los problemas combinatorios simples y permite señalar los siguientes errores como aquellos cometidos de forma más común por los alumnos:

- No saber identificar si el orden de los elementos es relevante, lo que lleva a confundir las variaciones con las combinaciones.
- No tener en cuenta la posibilidad de repetición de alguno de los elementos implicados no aplicando correctamente el criterio de con o sin repetición.
- No identificar correctamente el número de elementos totales frente al número de elementos a seleccionar provocando errores al aplicar el método identificado.

Estos errores refuerzan la idea de Hadar y Hadass (1981, citado en Navarro et al., 1996) de que una de las principales dificultades que encuentran los alumnos que estudian combinatoria es precisamente identificar la técnica combinatoria que deben aplicar y que constituye la primera fase de la resolución de los problemas combinatorios como recoge la figura 1.

La figura 2 sintetiza los resultados de una investigación cualitativa, centrada en el desarrollo de la combinatoria que presentan los libros de texto españoles (Espinoza y Roa, 2014), en la que se determina la estructura y secuencia de contenidos que se presentan con mayor frecuencia.

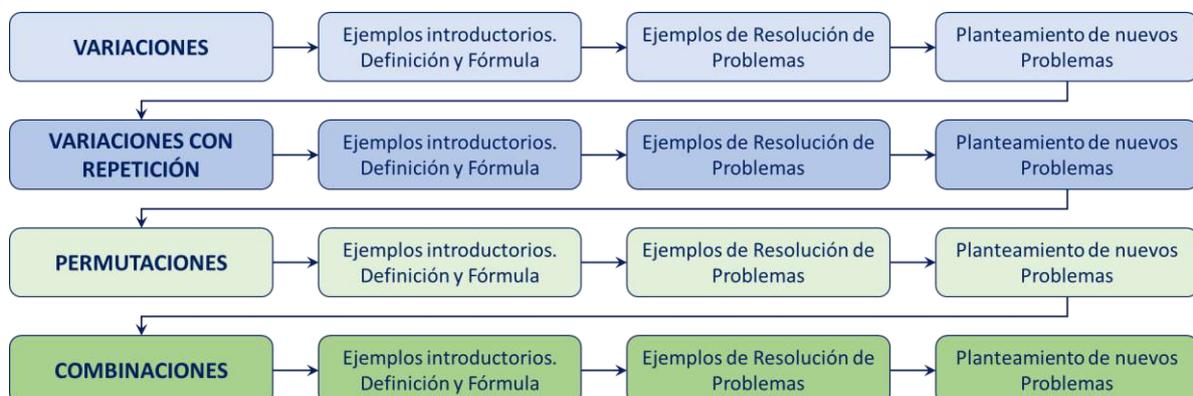


Figura 2. Estructura y secuencia de combinatoria en libros de texto.

Fuente: elaboración propia.

El estudio resalta que los nuevos problemas planteados se distribuyen dentro de los apartados de técnicas combinatorias que hay que utilizar para resolverlos y que, además, sus enunciados llevan implícita la técnica combinatoria que los resuelve. Por lo tanto, esta estructura “impide la exploración e identificación del contenido combinatorio involucrado pues se infiere directamente” (p. 286).

Los resultados de esta investigación concuerdan con el tratamiento del tema de combinatoria recogido en uno de los libros de texto actualmente en uso en las matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de cuarto de la ESO (Alcaide, 2016). En él se observa que las técnicas combinatorias son presentadas en el orden reconocido en Espinoza y Roa (2014; consultar figura 2) y que la relación entre las distintas técnicas no aparece hasta el final del tema en el que se proporciona un esquema resumen (ver figura 3) sin ninguna referencia teórica del mismo.

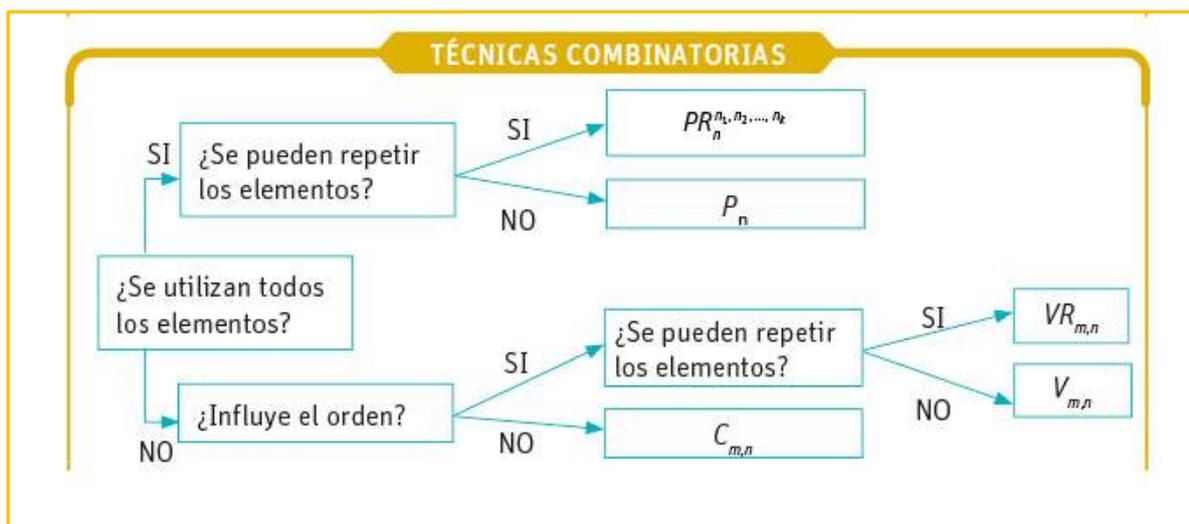


Figura 3. Relación entre técnicas combinatorias.

Fuente: “Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas” (2016)

El enfoque tradicional de los contenidos de combinatoria podría ser la causa de las dificultades presentadas por los alumnos, justificando así la necesidad de modificarlo para mejorar la comprensión del tema y la capacidad de resolución de los problemas combinatorios.

2.3 Unión de estrategias para aprender combinatoria

Para que una lección matemática genere un aprendizaje significativo en los alumnos es necesario enfocarla hacia el razonamiento y no hacia la definición de conceptos y procedimientos ni a la memorización de los mismos (Ruiz, Alfaro y Gamboa, 2003). Estos

autores consideran que “hay que presentar los conceptos y métodos de las matemáticas más como desarrollos que como reglas” (p. 289). Debe centrarse de forma directa en el tipo de pensamiento o razonamiento matemático involucrado en el tema concreto. También apoyan la resolución de problemas como estrategia facilitadora de un proceso de enseñanza y aprendizaje de éxito en las matemáticas.

Por todo esto, la propuesta de intervención desarrollada en este trabajo para el tema de combinatoria incluye un nuevo abordaje y estructura de sus contenidos, así como fomentar la resolución de problemas como ayuda al aprendizaje y no solo como consolidación de conceptos.

Con el objetivo de facilitar el recuerdo del razonamiento que deben realizar los alumnos a la hora de resolver los problemas combinatorios se ha desarrollado una regla mnemotécnica. La mnemotecnia se define como (RAE, 2020) un “procedimiento de asociación mental para facilitar el recuerdo de algo”. Son varios los ejemplos conocidos del uso de esta técnica con diferentes objetivos, tanto para recordar conceptos generales como puede ser el número de días de cada mes (figura 4), como conceptos matemáticos como la fórmula del método de integración por partes (figura 5).

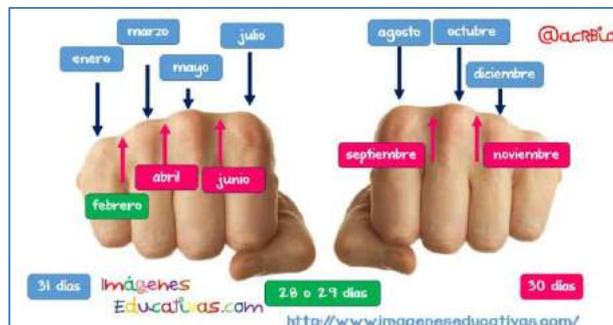


Figura 4. Ejemplo regla mnemotécnica general.

Fuente: “Meses del año truco nudillos” (2020)

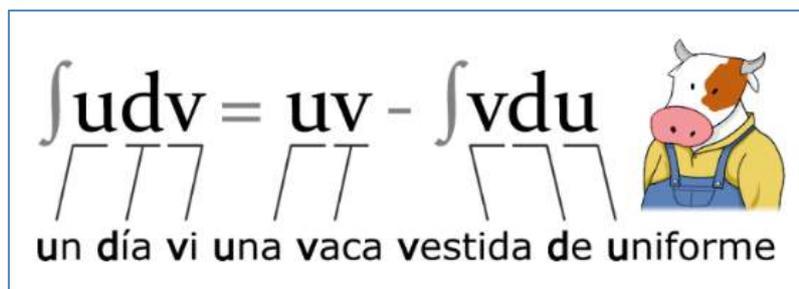


Figura 5. Ejemplo regla mnemotécnica matemática.

Fuente: “Una vaca vestida de uniforme” (2020)

López y Remesal (2001) obtuvieron resultados favorables al investigar el uso de esta técnica, entre otras, como una estrategia de aprendizaje para facilitar los procesos de retención y memoria en la Educación Secundaria Obligatoria.

Para potenciar y mejorar la capacidad de los alumnos para resolver los problemas combinatorios se utilizan alguna de las estrategias indicadas por Gómez (2002, citado en Pérez y Ramírez, 2011) que hacen referencia a:

- Relacionar los problemas con el entorno real de los alumnos, así como con ideas de su interés.
- No centrarse en los cálculos y en la resolución numérica de los problemas sino en el razonamiento necesario para obtener la respuesta.
- Mezclar los tipos de problemas para evitar la resolución mecánica y generar la necesidad de desarrollar un planteamiento lógico.

Para comprobar la comprensión de los conceptos y procedimientos además de despertar el interés, la curiosidad y la motivación de los alumnos se incluyen en la propuesta actividades de generación de enunciados de problemas y actividades de gamificación.

Respecto a las primeras, estudios como el de Espinoza, Lupiáñez y Segovia (2014) muestran sus beneficios en los aspectos resaltados. Potencian las habilidades matemáticas y la creatividad de los alumnos, a la vez que “podrían emplearse para mejorar las competencias de resolución de problemas que tienen los estudiantes”.

Y en relación con las actividades de gamificación, y como constata una revisión reciente de la literatura existente (Colón, Jordán y Agredal, 2018) se han constituido como estrategia clave para hacer “la actividad educativa más motivante y estimulante para los alumnos”.

3 Método

3.1 Muestra

Se seleccionaron de forma incidental dos de los cuatro grupos de alumnos de la asignatura de Matemáticas Aplicadas de 4º de la ESO del Real Colegio Escuelas Pías de San Fernando:

- Grupo de alumnos de 4ºB (27 alumnos)
- Grupo de alumnos de 4ºC (30 alumnos)

Los grupos ya estaban formados previamente, comparten la misma profesora y presentan unas características muy similares en cuanto a resultados académicos y actitud en la asignatura de matemáticas.

La idea original era utilizar el método CombiMix 2020 en uno de los grupos (grupo experimental) y el tradicional en el otro (grupo de control) para comparar los resultados y poder establecer si el primero es o no más eficaz que el segundo en términos de comprensión, actitud y rendimiento. Finalmente, y como consecuencia de la crisis del COVID 19, el método diseñado se aplicó en todos los grupos del curso.

3.2 Hipótesis y diseño de la investigación

Al no existir la posibilidad de contrastar las dos metodologías, la hipótesis queda enunciada como sigue:

La aplicación del CombiMix 2020 facilita la comprensión de los conceptos combinatorios de los alumnos, despertando su interés y motivación por la materia y generando buenos resultados académicos.

Se valoraron los efectos de la intervención en los dos grupos durante todo el proceso y, más profundamente, al final para evaluarlo y determinar o no el cumplimiento de la hipótesis. La autora, estudiante en prácticas docentes, participó en todas las fases; desde el diseño y planificación hasta el análisis de resultados y obtención de conclusiones, pretendiendo analizar su propia acción docente innovadora, que a su vez busca resolver una dificultad. Este proyecto queda enmarcado, por lo tanto, dentro del modelo de investigación – acción.

La metodología aplicada ha sido mixta ya que ha combinado la recolección y el análisis de datos tanto cuantitativos como cualitativos para obtener una visión más amplia y detallada de

los efectos de la aplicación del CombiMix 2020. Al no haber podido incluir pretest en el estudio, y contando con la incidentalidad de la muestra, el diseño cuantitativo se enmarca en el tipo pre-experimental.

Por un lado, se definieron variables cuantitativas cuyo análisis descriptivo nos ha permitido explicar la realidad de nuestra intervención en el aula a partir de los datos obtenidos en diferentes cuestionarios de evaluación.

Y por otro, se realizó un breve estudio cualitativo de las reflexiones de las tres profesoras, con dilatada experiencia docente en el ámbito y nivel educativo, encargadas de la impartición de la unidad didáctica en los cuatro grupos (una de ellas responsable de los dos grupos objeto del estudio). Este análisis ha permitido obtener conclusiones acerca de la propuesta de intervención y de sus efectos en los alumnos desde una perspectiva de expertos en la materia.

3.3 Definición de variables

La variable independiente de la investigación es la propuesta de intervención utilizada en el desarrollo de la unidad didáctica de Combinatoria (variable cualitativa nominal). Se busca describir los efectos de la aplicación del CombiMix 2020 analizando los resultados de otras variables dependientes para poder contrastar o no nuestra hipótesis de partida. La tabla 1 muestra las variables dependientes de la investigación y sus características.

Tabla 1

Características de las variables dependientes del estudio

Variable	Naturaleza	Escala de medida
Nivel de comprensión	Cuantitativa, discreta	Ordinal / Intervalo (según instrumento utilizado)
Grado de interés y motivación	Cuantitativa, discreta	Ordinal
Rendimiento académico	Cuantitativa, continua	Intervalo

3.4 Instrumentos

Para obtener los valores de las variables cuyo análisis dio respuesta a la hipótesis planteada se desarrollaron ad hoc para el proyecto los siguientes instrumentos de recogida de la información (consultar Anexos A, B, C y D):

- Cuatro cuestionarios con preguntas de opción múltiple (solo una alternativa correcta) que se presentan en cada una de las cuatro vídeo-lecciones diseñadas e impartidas como parte del CombiMix 2020. El número de preguntas es diferente en cada uno de ellos y proporcionan datos sobre el nivel de comprensión de los alumnos. El resultado se presenta en una escala del 0 al 10.
- Lista de control de la participación (voluntaria y fuera del horario lectivo) de los alumnos en la actividad de gamificación incluida en el alcance de la intervención didáctica. Los datos se descargan automáticamente desde la aplicación de desarrollo de la actividad (*Kahoot*).
- Un cuestionario de respuesta abierta que se corresponde con la prueba escrita incluida en la evaluación de la unidad didáctica. Consta de un total de 7 problemas combinatorios y, con valores de 0 a 10, proporciona datos sobre el rendimiento académico de los alumnos.
- Un cuestionario de autoevaluación del proceso de aprendizaje de los alumnos implicados en el estudio. Consta de 11 ítems relacionados con el nivel de comprensión y el grado de interés y motivación de los alumnos valorados en una escala Lickert de 1 a 5 siendo:
 - 1: totalmente en desacuerdo
 - 2: bastante en desacuerdo
 - 3: ni acuerdo ni desacuerdo
 - 4: bastante de acuerdo
 - 5: totalmente de acuerdo
- Un guion de preguntas con las que se entrevistó (de forma virtual) a las profesoras responsables de la intervención para conocer su opinión acerca del CombiMix 2020 y los efectos de su aplicación.

3.5 Procedimiento

Una vez completada la fase inicial de diagnóstico de la situación que permitió identificar el problema, fijar los objetivos, analizar los antecedentes y definir el método a seguir para afrontar el problema, se elaboró una propuesta de abordaje que se presentó a la profesora responsable de los grupos sobre los que se desarrolló el estudio. Esta mostró su interés y conformidad en el proyecto propuesto.

Consensuada la intervención, comenzaron la preparación y planificación de los recursos didácticos, junto con los cuestionarios de evaluación incorporados en ellos, y un diseño detallado del método de investigación a aplicar.

Una semana antes del comienzo de la intervención se produjo el cambio de formación presencial a virtual (causado por la crisis del COVID 19) obligando a la modificación de alguno de los recursos elaborados, así como de las fechas y del modelo de su puesta en marcha. El proyecto se alargó en el tiempo más de lo inicialmente planificado por este motivo.

La aplicación del CombiMix 2020 se llevó a cabo, de forma telemática, durante 4 semanas y media en las que se recogieron los datos propios de las vídeo-lecciones y del *kahoot* combinatorio. También durante este tiempo se elaboraron la prueba escrita de la unidad didáctica, el cuestionario de autoevaluación de los alumnos y la guía de preguntas para las profesoras de la asignatura.

El siguiente paso fue poner en marcha los procesos de recogida de datos para continuar con el análisis de los resultados y finalizar revisando el logro de los objetivos y destacando los hallazgos más relevantes. La figura 6 muestra el detalle y la temporización de las etapas del proyecto.

PROPUESTA COMBIMIX 2020 (4º ESO)		PROYECTO INVESTIGACIÓN ACCIÓN																		
Real Colegio Escuelas Pías de San Fernando (Pozuelo de Alarcón)		SEMANA																		
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10									
DISEÑO Y PLANIFICACIÓN	Identificación de la metodología a seguir en la investigación, hipótesis y variables a estudiar.																			
	Identificación del contexto de aplicación de la innovación/investigación (selección de la muestra, tiempos..).																			
	Elaboración de los materiales didácticos necesarios para aplicar el método CombiMix 2020.																			
	Diseño y planificación de actividades didácticas incluidas en el método.																			
	Elaboración de los materiales para recogida de datos: Prueba escrita objetiva, cuestionario autoevaluación alumnos, guión entrevista profesoras.																			
APLICACIÓN	Aplicación del método.																			
	Aplicación de los procesos de recogida de información: Realización cuestionarios video lecciones.																			
	Aplicación de los procesos de recogida de información: Realización prueba escrita.																			
	Aplicación de los procesos de recogida de información: Realización cuestionarios autoevaluación.																			
	Aplicación de los procesos de recogida de información: Realización de entrevistas profesoras.																			
	Consolidación de resultados																			
EVALUACIÓN	Análisis y valoración de los resultados obtenidos según criterios establecidos																			
	Conclusiones sobre la hipótesis inicial planteada																			
	Conclusiones para la práctica educativa en general																			

Figura 6. Planificación por Fases del Proyecto CombiMix 2020.

Fuente: elaboración propia.

3.6 Características de la intervención

Para alcanzar los objetivos definidos en este TFM y buscando minimizar las dificultades de aprendizaje que presentan los alumnos de cuarto de la ESO al enfrentarse por primera vez al tema de Combinatoria, se ha diseñado y aplicado una propuesta de intervención didáctica, CombiMix 2020, que combina distintas estrategias docentes.

3.6.1 Estrategias didácticas

En la propuesta se distinguen las siguientes líneas de actuación:

- Estructura y secuencia de conceptos enfocadas al análisis y comprensión de los problemas combinatorios.
- Uso de Mnemotecnia como herramienta para recordar la relación entre las características de los problemas combinatorios y las técnicas adecuadas para su abordaje.
- Planteamiento de actividad de generación de enunciados de problemas combinatorios.
- Utilización de ejemplos y enunciados de problemas relacionados con la realidad de los alumnos.
- Incorporación de actividades de gamificación con cierto grado de competitividad.

3.6.1.1 Estructura y secuencia

El primer paso implica organizar y secuenciar el desarrollo de los conceptos y procedimientos del tema de modo que se correspondan de una forma directa con las fases identificadas en la resolución de los problemas combinatorios (figura 1). De esta forma se trabaja inicialmente en la comprensión e identificación de las técnicas combinatorias antes de proceder con la aplicación de las fórmulas y la obtención de los resultados numéricos.

Como se puede ver en la figura 7, se comienza con la explicación de las características fundamentales de los problemas combinatorios (importancia del orden, número de elementos involucrados y posibilidad de repetición) y del procedimiento de análisis de las mismas, con el objetivo de facilitar el proceso de identificación de la técnica a utilizar en cada caso.

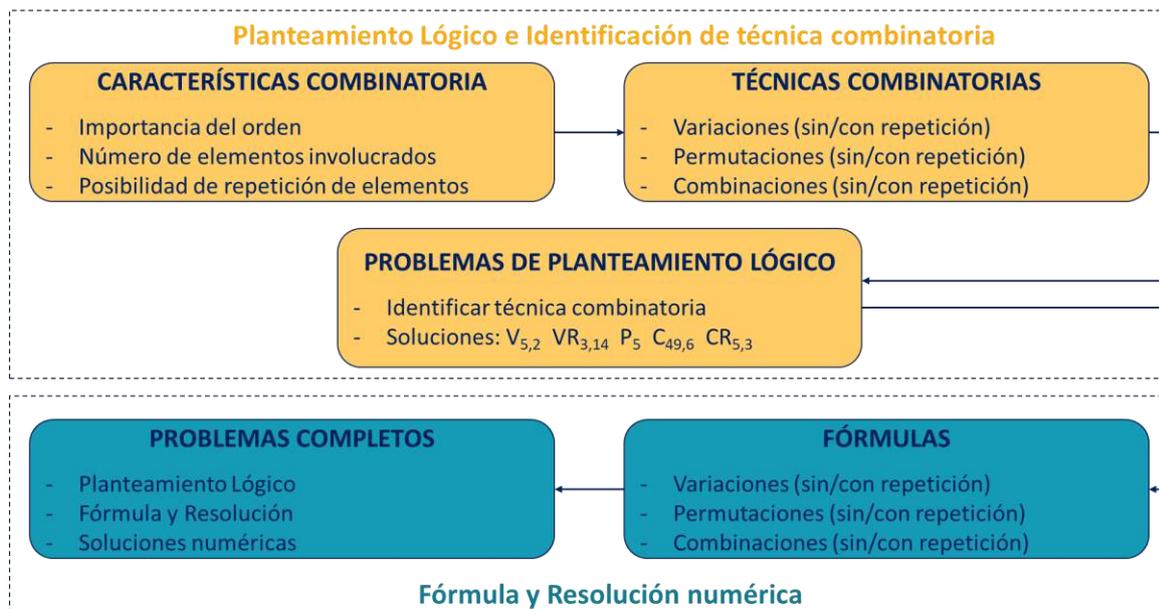


Figura 7. Estructura y secuencia de contenidos de combinatoria propuesta en CombiMix 2020.

Fuente: elaboración propia.

El esquema de relación entre las características del problema combinatorio y la técnica (figura 8) surge de forma natural y se utiliza, desde el principio, como herramienta principal para razonar de forma lógica cualquier problema combinatorio que se presente.

Técnicas combinatorias según las características de la agrupación

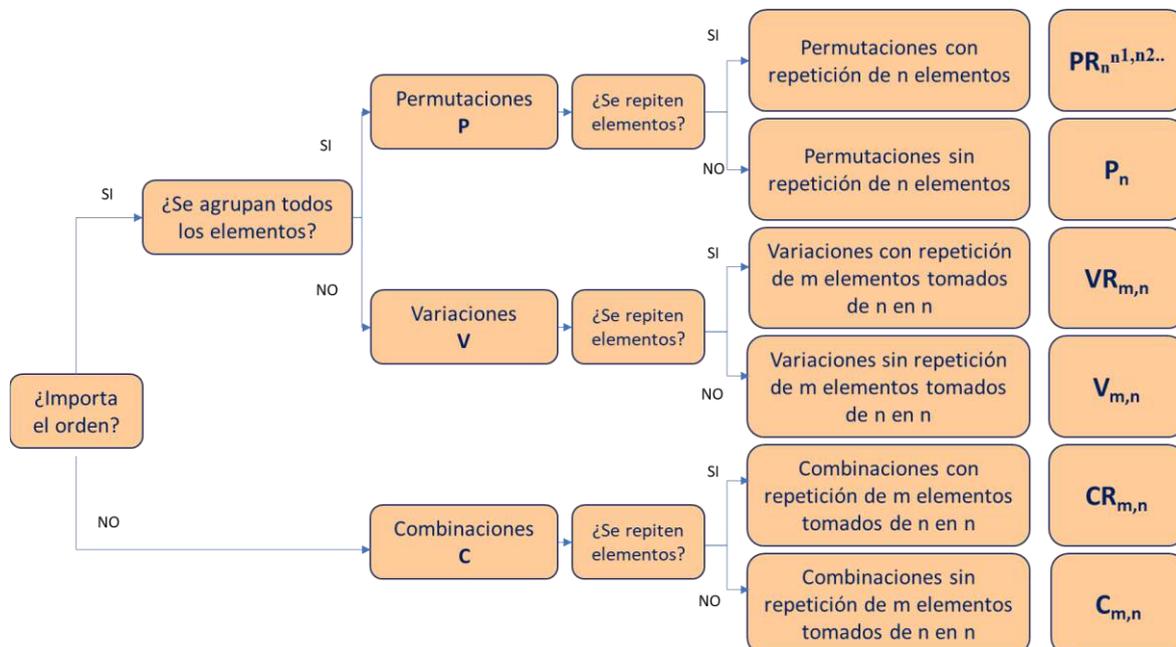


Figura 8. Relación entre características y técnicas combinatorias.

Fuente: elaboración propia.

Esta organización del tema permitirá una mejor comprensión y un aprendizaje más profundo de los conceptos en los que se apoya la primera fase de la resolución de los problemas (núcleo de las principales dificultades identificadas en los alumnos), a la vez que posibilita su consolidación mediante la resolución de planteamientos lógicos de problemas (identificar la técnica sin aplicar las fórmulas).

Una vez dominada esta fase de razonamiento lógico se continuará con la fase de aplicación de fórmulas y resolución numérica de los problemas.

3.6.1.2 Mnemotecnia

Para recordar, de una forma sencilla, la relación entre las características y las técnicas combinatorias (figura 8) se propone la siguiente regla mnemotécnica:

“Variaciones de Vacaciones y Combinaciones en platos Combinados”

Se han buscado dos ejemplos que nos permiten visualizar (figura 9) y recordar la diferencia entre variaciones y combinaciones asociando cada una de ellas a dos palabras similares.

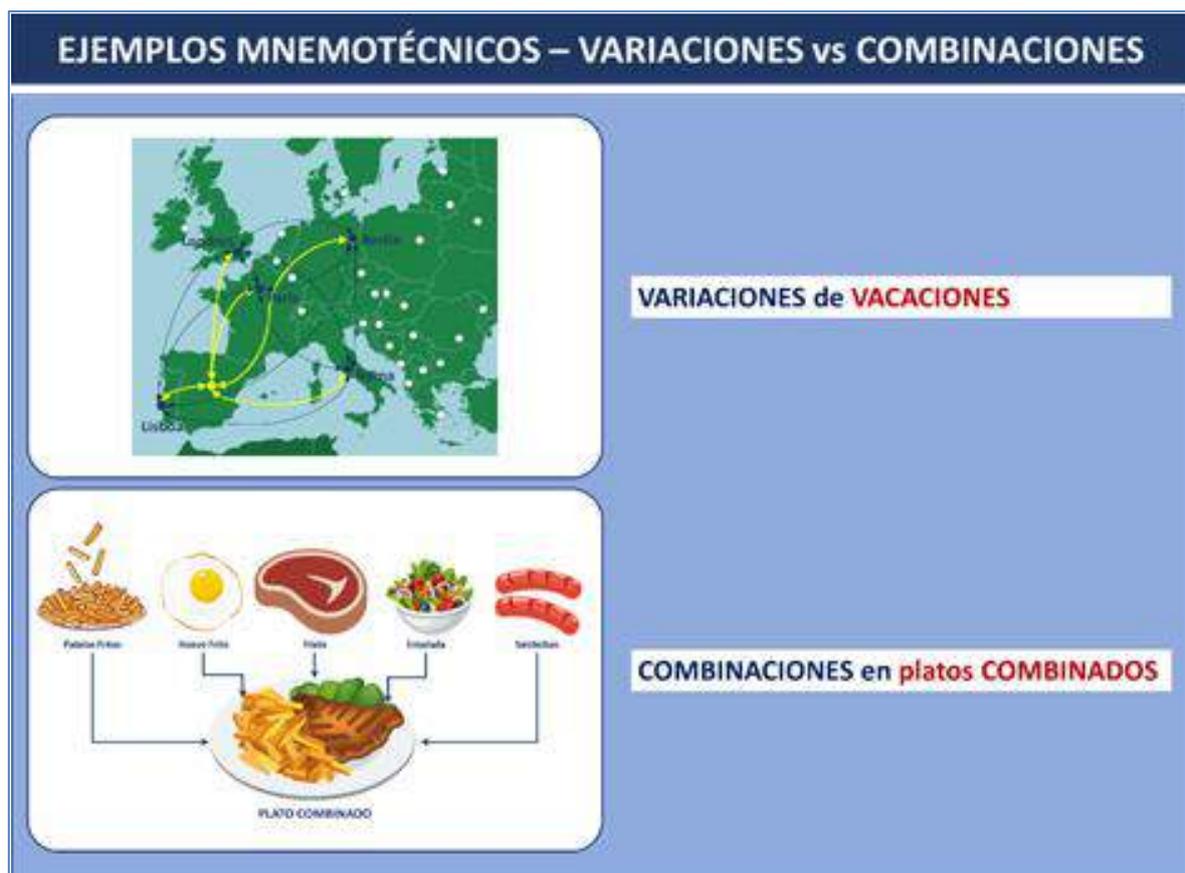


Figura 9. Regla mnemotécnica para relacionar conceptos y técnicas combinatorias.

Fuente: elaboración propia.

Concreta y específicamente se expone el razonamiento que facilita recuperar las características de cada una de ellas:

- A la hora de planificar las **vacaciones** es importante el orden en que voy a ir a los destinos que he seleccionado (de todos los que me gustaría) para comprar los billetes o reservar los hoteles. Por lo tanto, en las **variaciones** el **orden** de los elementos **importa**.
- Cuando voy a preparar un **plato combinado**, da igual el orden en que elijo los ingredientes que el resultado final va a ser siempre el mismo. Por lo tanto, en las **combinaciones** el **orden** de los elementos **no importa**.

Entrando un poco más en detalle en el ejemplo de variaciones, se introducen las **permutaciones** como un caso particular cuando consigo visitar todos los destinos deseados (**participan todos** los elementos posibles).

Y, además, se completan las características incluyendo en los dos ejemplos la posibilidad o no de repetición. Visitar o no más de una vez un mismo destino en mis vacaciones e incluir o no más de una ración del mismo ingrediente en mi plato combinado me llevan a tener variaciones con / sin repetición y combinaciones con / sin repetición.

Los ejemplos y el recuerdo de la correspondencia *vacaciones* con *variaciones* y *platos combinados* con *combinaciones*, permitirán asignar la técnica correcta a utilizar en un problema combinatorio determinado en función de las características del mismo.

3.6.1.3 Generación de enunciados

Para obtener información sobre la comprensión de los conceptos combinatorios de los estudiantes se propone incluir en el desarrollo del tema una actividad específica de generación de enunciados de problemas.

Puede dejarse total libertad al alumno de modo que sea él el que defina totalmente el problema y lo acompañe de la solución correspondiente o se puede proporcionar la solución (parcial o completa) del problema y que la actividad consista en proponer un enunciado que nos lleve a dicha solución. Este último caso nos permite controlar que se trabajen las diferentes técnicas combinatorias, evitando que los alumnos elijan siempre la técnica que más les guste o la que les resulte más sencilla, por ejemplo:

1. *Crea un problema combinatorio que deba resolverse utilizando variaciones con repetición.*
2. *Crea un problema combinatorio en el que la solución sea $C_{7,3}$.*

En función de las características del grupo, de la actitud y motivación de los alumnos y de la temporización de la unidad didáctica, se puede plantear la actividad de diferentes maneras:

- Incluir la invención de problemas entre los propuestos para resolver por los alumnos de forma individual.
- Proponer el trabajo por grupos. Esta modalidad favorece también el desarrollo de otras habilidades como el trabajo en equipo.

Esta actividad impulsa la capacidad de resolución de problemas y el pensamiento matemático, a la vez que fomenta la creatividad de los alumnos.

3.6.1.4 Contexto de ejemplos y problemas combinatorios

Si enmarcamos los ejemplos que utilizamos y los enunciados de los problemas en la realidad del entorno concreto del grupo de alumnos al que nos dirigimos (teniendo en cuenta sus gustos, sus preferencias, sus experiencias de grupo, etc.) aumentaremos su interés y su curiosidad, impulsando su aprendizaje del tema.

Para ello es necesario un análisis previo del grupo, recogiendo información sobre sus áreas concretas de interés y preferencias fuera del entorno escolar (moda, deportes, juegos, música, series, lecturas, redes sociales, lugares de reunión, tipo de comida...), así como de situaciones de su realidad escolar que les resulten divertidas y atractivas como grupo (alguna peculiaridad de algún profesor, alguna anécdota sucedida en clase, alguna actividad extraescolar especialmente interesante para ellos...).

Esta información será la base para construir los ejemplos y enunciados de problemas a utilizar durante la impartición de la unidad didáctica.

Algunos ejemplos:

1. *Para definir el PIN de mi nuevo **iPhone 11 Pro** (4 cifras) he decidido utilizar únicamente números pares {2, 4, 6, 8} sin repetir. ¿De cuántas formas diferentes podré definir mi número PIN?*
2. *Siete amigos se han conectado para jugar al **Fortnite** pero los escuadrones admiten solo 4 jugadores. ¿De cuántas formas diferentes pueden crear el escuadrón?*

La combinatoria en general responde a situaciones que se pueden presentar en la realidad por lo que es relativamente sencillo llevar a cabo esta adaptación al día a día de los alumnos.

3.6.1.5 Actividades de gamificación

Se incorporan en la unidad didáctica dos actividades de gamificación para consolidar cada una de las dos fases en las que hemos estructurado los contenidos de la Combinatoria (figura 1). Un concurso combinatorio para practicar la identificación de las técnicas a utilizar en diferentes problemas combinatorios y un juego tipo *escape room* para consolidar la resolución completa de los problemas combinatorios.

Aunque se pueden incluir otro tipo de actividades se han considerado estas opciones por el carácter competitivo de las mismas, la facilidad de su diseño y la posibilidad que ofrecen de hacer seguimiento del desempeño de cada participante.

Para el concurso se plantean diferentes problemas combinatorios y el alumno debe encontrar la técnica combinatoria que los resuelve. Ganará aquel participante que consiga más respuestas correctas en el menor tiempo posible.

En el juego de *escape* se enlazan varios retos constituidos por problemas combinatorios y secuenciados de forma que la solución correcta del primero lleva al segundo y así sucesivamente hasta llegar al último. Ganará el participante que resuelva el último reto antes que los demás.

Estas actividades se pueden desarrollar tanto de forma individual como en equipo.

3.6.2 Recursos didácticos

Para la aplicación de la propuesta CombiMix 2020 en el cuarto curso de la ESO del Real Colegio Escuelas Pías de San Fernando (Pozuelo de Alarcón) se han diseñado diferentes recursos didácticos.

Debido a la suspensión de las clases presenciales en la Comunidad de Madrid desde el 11 de marzo de 2020 causada por la crisis del COVID 19, esta unidad didáctica tuvo que ser impartida de forma virtual utilizando las tecnologías de la información y comunicación por lo que algunos de los recursos tuvieron que ser adaptados.

Se comparten, mediante los enlaces indicados en el Anexo E, todos los materiales generados, así como las indicaciones para el desarrollo de las actividades propuestas.

3.6.2.1 Presentaciones y vídeo- lecciones

Como soporte a la exposición presencial, se elaboraron cuatro presentaciones que engloban todo el contenido de la unidad didáctica.



Figura 10. Portada y contenidos de las presentaciones de combinatoria (CombiMix 2020).

Fuente: elaboración propia.

Para su adaptación a la formación a distancia, el contenido de las presentaciones, así como las explicaciones del mismo, se trasladaron a cuatro vídeo lecciones utilizando la herramienta *Edpuzzle*. Se incluyeron en ellas diferentes preguntas (con formato de cuestionario de opción múltiple) que permitieron hacer un seguimiento de la comprensión y aprendizaje de los alumnos. Siguiendo la organización de contenidos propuesta en este trabajo, la figura 11 muestra el contenido y la secuencia de utilización de estos recursos.

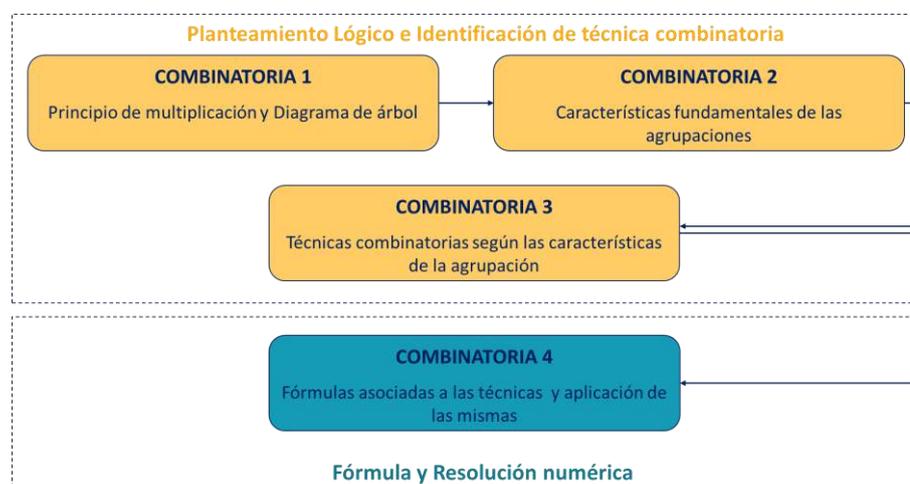


Figura 11. Secuencia y contenidos de las lecciones de combinatoria (CombiMix 2020).

Fuente: elaboración propia.

La explicación de la regla mnemotécnica, así como del uso correcto de la misma queda recogida en la lección “Combinatoria 3” que es donde se establece la relación entre características y técnicas combinatorias.

Cada concepto o procedimiento abordado en las lecciones se ha acompañado de ejemplos aclaratorios intentando, en la medida de lo posible, contextualizar dichos ejemplos en la realidad cercana de los alumnos. En la figura 12 se muestra uno de los ejemplos diseñados que utiliza el lugar de la última salida extraescolar del grupo y prendas de ropa de moda entre los alumnos

EJEMPLO

Al llegar a Cercedilla, Javier descubre que ha metido en su maleta 3 vaqueros, 4 sudaderas, 4 pares de calcetines y 2 tipos de deportivas. ¿Entre cuántos “outfits” distintos puede elegir para vestirse para la cena?



$3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 = 96$ posibilidades

Figura 12. Ejemplo incluido en la lección “Combinatoria 1”

Fuente: elaboración propia.

3.6.2.2 Problemas combinatorios

Siguiendo la misma pauta de elaboración que para los ejemplos aclaratorios incluidos en las lecciones, se han desarrollado cuatro documentos de problemas combinatorios. El orden en que se deben abordar los distintos bloques de problemas se corresponde con la secuencia de presentación de los contenidos como se muestra en la figura 13.

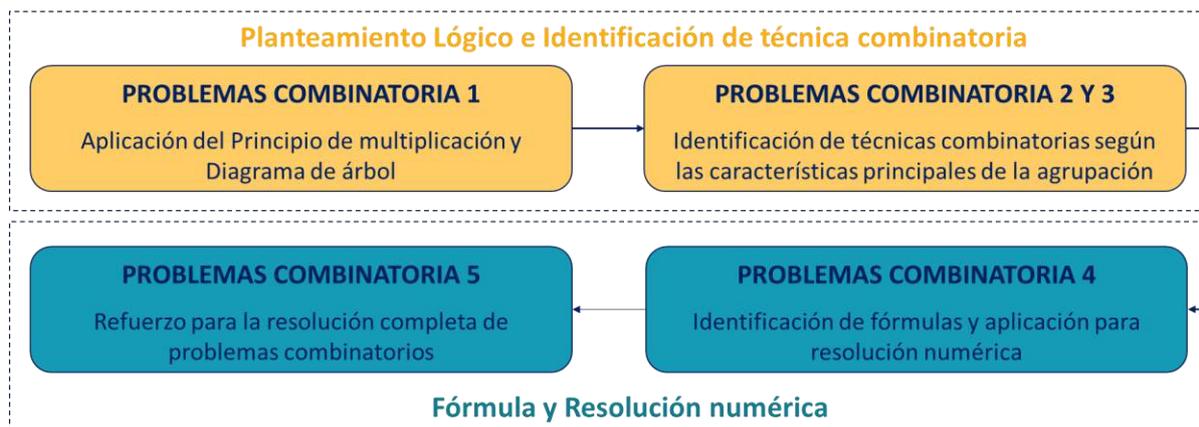


Figura 13. Secuencia y contenidos de los bloques de problemas combinatorios (CombiMix 2020).

Fuente: elaboración propia.

El planteamiento inicial para la formación presencial consistía en:

1. Para cada uno de los tres primeros bloques: trabajar, tanto en el aula (de forma individual, por parejas o grupos) como en casa (individual), después de haber completado la lección correspondiente y puesta en común en la siguiente sesión de clase.
2. Para el último bloque: trabajar de forma conjunta en el aula como actividad de refuerzo y repaso del procedimiento de resolución de problemas.

Como adaptación a la formación a distancia se optó por distribuir los tres primeros documentos de problemas a los alumnos para su resolución individual, después de completar la correspondiente vídeo-lección. Se definieron plazos de entrega de los mismos y, una vez alcanzados, se puso a disposición de los alumnos las respuestas correctas. La resolución de dudas se llevó a cabo mediante videoconferencias planificadas con la clase y mediante mensajes con el profesor (vía classroom).

El último bloque de problemas se trabajó de forma *on-line* con los alumnos en videoconferencia. Una vez acabada la sesión, se distribuyeron entre los alumnos las grabaciones del proceso de resolución trabajado.

Aunque finalmente la actividad no pudo ser implementada en la formación a distancia, la intervención se completaba con el desarrollo de una actividad grupal de generación de problemas combinatorios estructurada de la siguiente manera:

1. Se divide la clase en equipos con tantos miembros como técnicas combinatorias se quieran trabajar.
2. A cada componente del equipo se le asigna una técnica y trabaja en la generación de un problema con la ayuda de sus compañeros de grupo.
3. Una vez diseñados los problemas se intercambian con los de otro equipo.
4. Para poder evaluar la actividad, el profesor recogerá cada problema donde deberán constar los nombres del alumno que lo ha elaborado y del que lo ha resuelto.

3.6.2.3 Actividades de gamificación

Como propuestas de gamificación se han diseñado dos actividades: un *Kahoot* combinatorio para la identificación de técnicas combinatorias y un juego de tipo *escape room* ambientado en la serie “La casa de papel” para la parte de resolución completa de problemas combinatorios.

Con ellas se completa el conjunto de recursos didácticos elaborados para dar soporte al proceso de enseñanza y aprendizaje del tema de combinatoria propuesto en la intervención didáctica CombiMix 2020. El proceso completo se muestra en la figura 14.

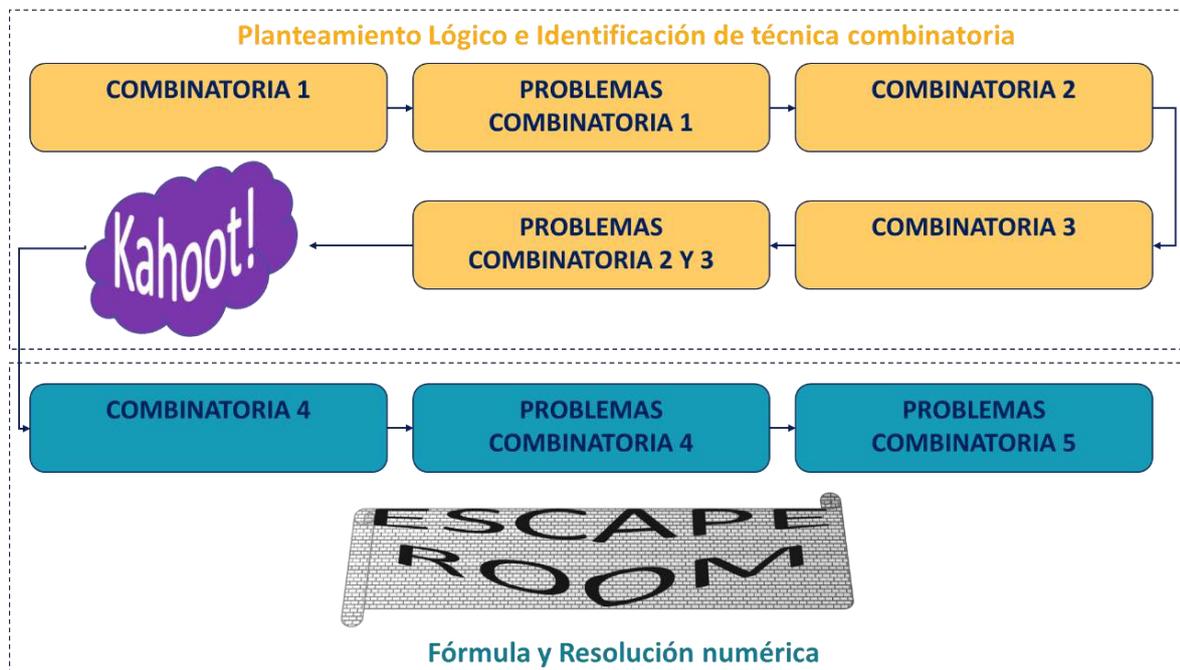


Figura 14. Secuencia de utilización de los recursos didácticos (CombiMix 2020).

Fuente: elaboración propia.

La figura 15 muestra el tipo de preguntas que conforman el Kahoot. Se han incluido cinco preguntas, asignando un tiempo de 30 segundos para registrar cada respuesta.



Figura 15. Pregunta incluida en Kahoot combinatorio (CombiMix 2020).

Fuente: Recuperado de <https://create.kahoot.it/share/planteamiento-combinatorio/4859fd05-7099-4cda-b332-d1636aa065f8>

El *escape room* consta de 4 retos combinatorios como el de la figura 16. El resultado de cada uno de ellos posibilita el acceso al siguiente. La solución al reto final lleva al alumno que la consiga a convertirse en el ganador del juego.

La participación en ambas actividades será considerada positivamente en la evaluación de la unidad didáctica, además de premiar de manera simbólica al ganador.

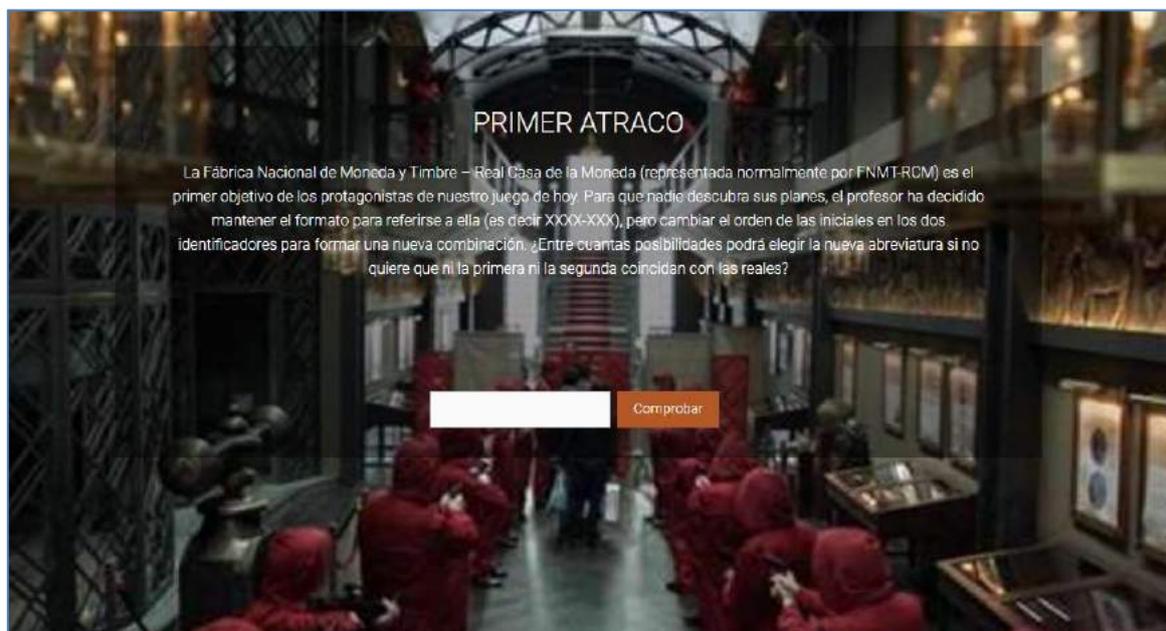


Figura 16. Reto incluido en el *Escape Room* combinatorio (CombiMix 2020).

Fuente: Recuperado de <https://eduescaperoom.com/enigma/Y8cs7UBmkWBJ>

Las actividades se diseñaron para ser puestas en el aula utilizando dispositivos digitales para la primera (solicitando y autorizando el uso de los móviles con anterioridad) y recursos manipulativos (cajas con retos escritos dentro y cerradas con candados numéricos) para la segunda.

La adaptación a la formación a distancia fue sencilla para el *Kahoot*, que se puso en práctica, de forma voluntaria, al finalizar una de las videoconferencias programadas para la asignatura. No todos los alumnos tuvieron la opción de conectarse, por lo que sus resultados no pudieron ser utilizados con la finalidad de evaluar los conocimientos adquiridos por los alumnos.

Sin embargo, el juego de *escape* tuvo que ser rediseñado para que los alumnos pudieran disfrutarlo en formato digital. Finalmente, no fue posible realizar esta actividad con los alumnos de forma *on-line*, aunque se puso a su disposición para todo aquél que quisiera realizarla.

3.6.2.4 Prueba escrita de evaluación

Como recurso para evaluar el nivel de aprendizaje de los alumnos se elaboró una prueba escrita que incluye siete problemas combinatorios que valoran los estándares de aprendizaje asociados al tema (consultar Anexo B).

Siguiendo el modelo de evaluación de la adquisición de competencias definido en el centro, el peso asignado a la prueba es de un 70% en la calificación global de la unidad didáctica.

Los problemas de la prueba escrita fueron incluidos en un formulario de *Google* que fue distribuido a los alumnos utilizando *Google Classroom*. Debía ser contestado durante una conexión *on-line* por videoconferencia y se solicitó a los alumnos que desarrollaran los problemas en una hoja y que la enviaran por el mismo medio al terminar el formulario.

Inicialmente, el 30% restante en formato presencial contemplaría la siguiente distribución:

- Trabajo en el aula (10%). Valoración de los resultados de las actividades de aula: resolución de problemas, actividades de gamificación, actividad de invención de problemas
- Trabajo fuera del aula (10%): Realización de las tareas propuestas fuera del aula: resolución de problemas, realización de resumen de unidad didáctica.
- Actitud (10%). Observación de los alumnos en el aula: trabajo en equipo, participación en clase, actitud positiva, disponibilidad.

El cambio a la modalidad a distancia conllevó la adaptación de criterios de la siguiente manera:

- Trabajo virtual *on-line* (10%). Valoración de los cuestionarios incluidos en las videolecciones.
- Trabajo virtual *off-line* (10%). Realización de las tareas propuestas de resolución de problemas.
- Resumen personal del aprendizaje (10%): Valoración del resumen propuesto de la unidad didáctica.

4 Resultados obtenidos

A continuación, se presentan los resultados obtenidos con cada uno de los instrumentos utilizados en la valoración de la propuesta de intervención docente en el orden en el que se fueron aplicando dentro del proceso de investigación.

4.1 Cuestionarios vídeo-lecciones

Cada alumno ha obtenido cuatro calificaciones (en una escala del 0 al 10) correspondientes a cada uno de los cuestionarios incluidos en las cuatro vídeo-lecciones que dan soporte a la exposición del tema en su totalidad.

En la tabla 2 se presenta la distribución del número total de alumnos que han completado las vídeo-lecciones según las calificaciones que han obtenido en cada una de ellas. Incluye también la distribución de las calificaciones medias obtenidas por los alumnos considerando las cuatro lecciones, tanto en valor absoluto como en porcentaje.

Tabla 2

Resultados cuestionarios vídeo-lecciones. Distribución y valores medios por intervalo de calificación.

Intervalo de calificación	Número de alumnos					Cómputo Medio	% Alumnos según cómputo medio
	Vídeo lección 1	Vídeo lección 2	Vídeo lección 3	Vídeo lección 4			
<5	2	0	3	3	2	4%	
5-6	1	2	3	0	2	4%	
6-7	11	2	3	9	0	0%	
7-8	0	0	9	0	6	12%	
8-9	18	13	13	0	15	29%	
9-10	19	34	20	39	26	51%	
N	51	51	51	51	51	100%	

Considerando los datos promedio, el 51% de los alumnos se sitúan en el intervalo de calificación más alto, y el 80% han obtenido una calificación superior a ocho. Solo un 4% de los alumnos obtienen calificaciones por debajo del 5.

4.2 Participación y valoración Kahoot combinatorio

El concurso combinatorio se planteó a los alumnos al terminar una de las videoconferencias planificadas en la asignatura. La figura 17 muestra el grado de participación de los alumnos entre aquellos que habían asistido previamente a la videoconferencia.



Figura 17. Análisis de participación de los alumnos en la actividad de gamificación.

Fuente: elaboración propia.

Un 75% de los alumnos decidió permanecer conectado para participar en la actividad mientras que un 25% se desconectó sin concursar.

Además de estos datos, el cuestionario de autoevaluación contestado por los alumnos al acabar la unidad didáctica (tabla 3) incluye un apartado cuyas respuestas permiten valorar el grado de satisfacción de los alumnos que realizaron la actividad. La afirmación dice: “Me han gustado las actividades de competición realizadas”, y la escala de valoración va del 1: “Totalmente en desacuerdo” al 5: “Totalmente de acuerdo”.

Los resultados obtenidos se presentan en la figura 18 e incluyen la distribución de las respuestas de los 38 alumnos que realizaron la actividad en función de la valoración asignada.

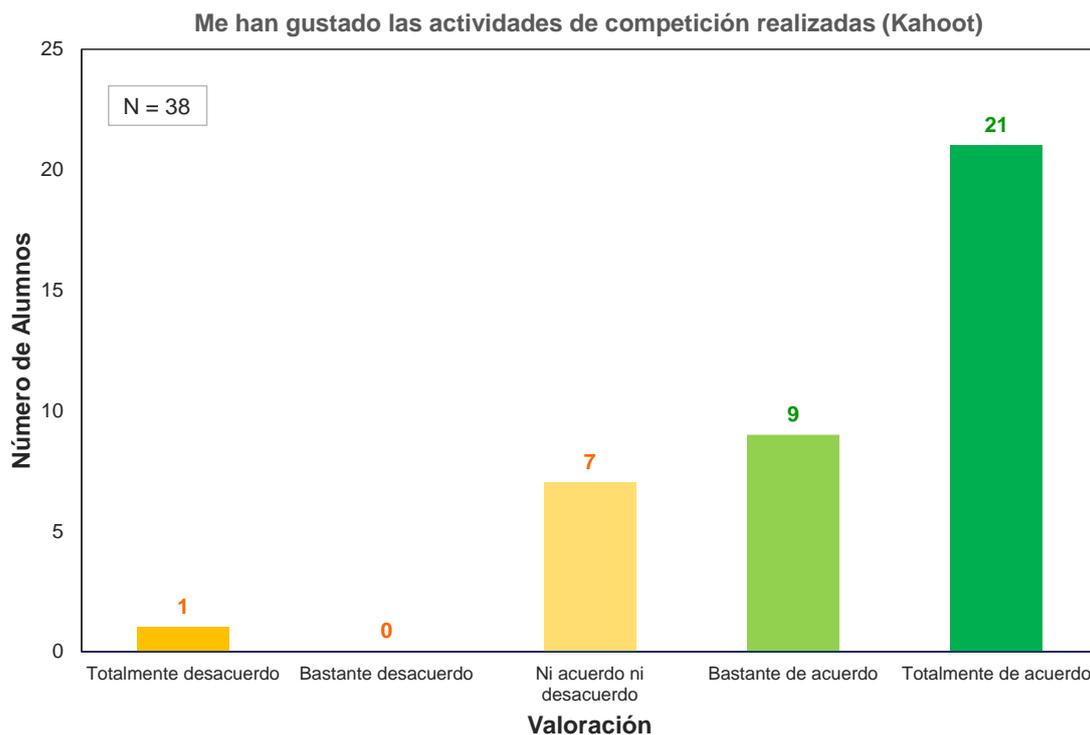


Figura 18. Distribución de valoraciones al ítem de gamificación incluido en el cuestionario de autoevaluación.

Fuente: elaboración propia.

Un 24% de los alumnos manifiesta que le ha gustado la actividad y un 55% afirma estar totalmente de acuerdo con la afirmación. Del resto de alumnos, solo uno manifiesta que no le ha gustado y siete alumnos optaron por el punto medio.

4.3 Cuestionarios de evaluación

En la figura 19 se muestra la distribución de los alumnos según las calificaciones que han obtenido en las dos evaluaciones anteriores al desarrollo de la unidad didáctica, así como las obtenidas en la prueba de combinatoria realizada después de aplicar el CombiMix 2020.

El porcentaje de alumnos con calificaciones inferiores al cinco disminuye en la prueba combinatoria respecto a las dos evaluaciones anteriores a la vez que aumenta el porcentaje de alumnos con calificaciones iguales o superiores a siete en dicha prueba con respecto a la primera y segunda evaluación.

Además, como se recoge en la tabla 3, el valor medio de las calificaciones de la evaluación de combinatoria se sitúa en 7,4 frente a 6,1 en la primera evaluación y 6,0 en la segunda.

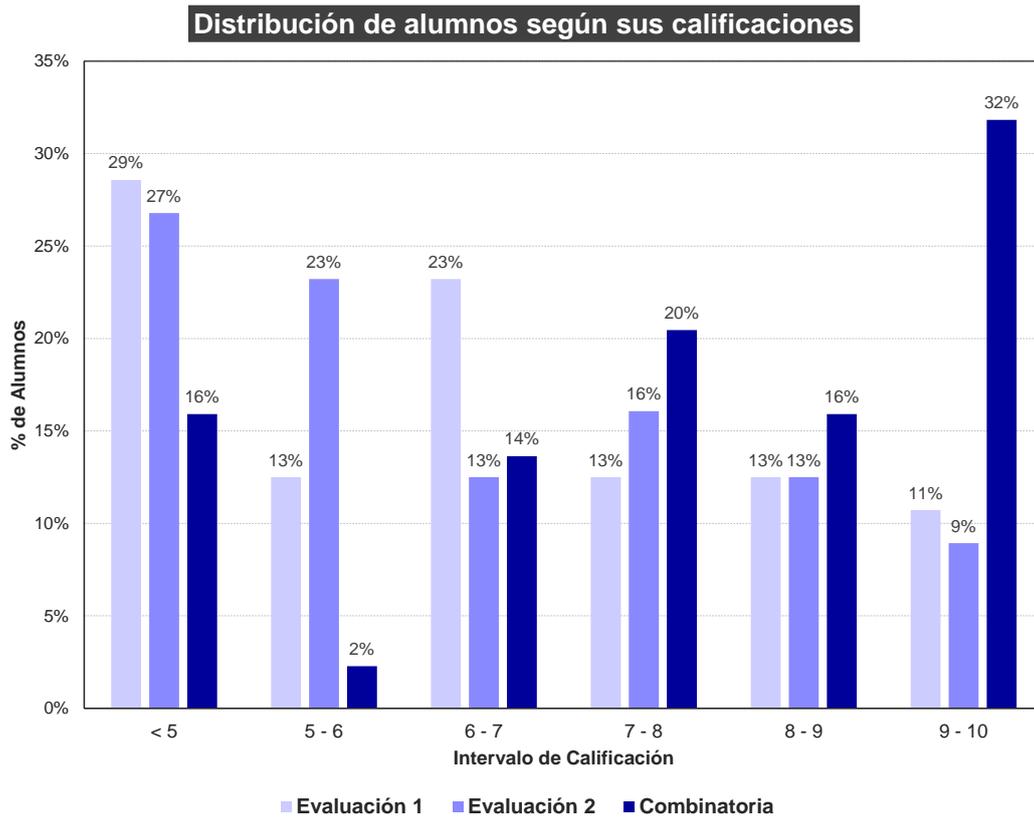


Figura 19. Distribución de alumnos según su calificación en tres momentos de la evaluación.

Fuente: elaboración propia.

Tabla 3

Resultados cuestionarios de evaluación. Estadísticos descriptivos por evaluación.

Evaluación	N	Media	Desviación típica	Puntuación mínima	Puntuación máxima
Primera	56	6,1	2,27	0	9,5
Segunda	56	6,0	2,12	0,9	9,6
Combinatoria	44	7,4	2,36	0,4	10

4.4 Cuestionario de autoevaluación

Los datos relativos a la valoración que ha hecho el alumno (utilizando escala Likert) de las distintas afirmaciones incluidas en el cuestionario de autoevaluación se muestran en la tabla 4. Sabiendo que la escala de valoración va del valor 1: “Totalmente en desacuerdo”, al valor 5: “Totalmente en desacuerdo”, se presentan los valores medios y las desviaciones típicas de cada afirmación.

Se han clasificado las once afirmaciones en tres categorías distintas, en función del tipo de información que se pretendía obtener con ellas.

Tabla 4

Resultados cuestionarios de autoevaluación de los alumnos. Estadísticos descriptivos por afirmación.

Categoría	Afirmación	Media	Desviación típica
Comprensión matemática general	Se me dan bien los ejercicios que se resuelven aplicando directamente un procedimiento o una fórmula. Ejemplo: Resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.	3,96	0,78
	Se me dan bien los problemas que requieren un razonamiento lógico o una deducción. Ejemplos: Resolver un problema de edades de una madre y su hija que cumplen ciertas condiciones. Calcular la altura de un árbol conociendo datos de la sombra que proyecta.	3,21	0,98
	Me resulta fácil pasar del enunciado de un problema a su expresión matemática. Ejemplos: Resolver un problema de edades de una madre y su hija que cumplen ciertas condiciones. Calcular la altura de un árbol conociendo datos de la sombra que proyecta.	3,15	1,00
	En ocasiones me cuesta comprender el enunciado de un problema.	2,96	0,86
Comprensión combinatoria (CombiMix 2020)	Entiendo y diferencio las características propias (elementos, orden y repetición) de las técnicas combinatorias: variación, permutación y combinación (con y sin repetición).	4,11	0,91
	Me ha resultado útil la regla mnemotécnica proporcionada (vacaciones, platos combinados) para recordar cada una de las técnicas combinatorias: variación, permutación y combinación (con y sin repetición).	3,64	1,17
	El haber trabajado durante la primera semana solo en distinguir las técnicas combinatorias (sin fórmulas) me ha ayudado a comprender y resolver los problemas.	4,28	0,88
	El uso de temas y situaciones cercanas a tu realidad en los ejemplos y los enunciados de los problemas propuestos (clase de Amando, equipos para juegos on-line, canciones en playlist, pin del móvil...) han facilitado mi comprensión de los mismos.	4,15	0,78
Interés y motivación (CombiMix 2020)	Estoy satisfecha o satisfecho con los conocimientos que he adquirido en este tema.	4,17	0,87
	El uso de temas y situaciones cercanas a tu realidad en los ejemplos y los enunciados de los problemas propuestos (clase de Amando, equipos para juego on-line, playlist, pin del móvil...) los hacen más interesantes. Me han gustado las actividades de competición realizadas (Kahoot). En esta afirmación tienes una opción de respuesta por si no participaste en la actividad.	4,29	0,96

4.5 Entrevistas personales

Hasta ahora se han presentado los resultados obtenidos en la parte cuantitativa del proyecto. Pero esta investigación tiene también una parte cualitativa conformada por las respuestas de las profesoras a una entrevista virtual mantenida con cada una de ellas.

En las tablas 5 y 6 se recoge la opinión de las profesoras respecto a las estrategias didácticas que conforman la propuesta CombiMix 2020 y los beneficios que introduce frente al método tradicional.

Tabla 5

Comentarios de las profesoras respecto a las estrategias didácticas del CombiMix 2020.

Estrategia didáctica	Comentarios
Separación de los contenidos en dos apartados diferenciados: tipos de operaciones y fórmulas	“Creo que esta ha sido una buena estrategia ya que, habitualmente, les cuesta bastante distinguir entre las distintas técnicas combinatorias. Al haber incidido más al principio en la distinción entre los tipos, creo que lo han podido interiorizar mejor.”
	“Me parece acertado, creo que así los alumnos hacen mejor los razonamientos en lugar de aprenderse fórmulas para aplicar.”
	“En particular esa idea me ha parecido muy acertada. Normalmente no lo explico así y creo que esa una forma mejor puesto que les sirve mejor para entender el concepto.”
Ejemplos y problemas relacionados con la realidad de los alumnos	“Siempre que se ponen ejemplos del día a día despiertan más atención entre los alumnos, por lo que creo que es una buena idea de cara a plantear un problema.”
	“Les motiva mucho más y los anima a trabajar que los ejemplos sean cercanos a ellos.”
	“Me parece fundamental que las actividades sean lo más cercanas a su realidad. A menudo encuentran que las matemáticas no sirven para nada y esta forma de proceder ayuda a cambiar esa percepción en alguna medida.”
Actividades de gamificación / competición para la consolidación de los aprendizajes	“En mi clase no he llegado a realizar estas actividades de momento, pero espero poder realizarlas en los próximos días porque creo que es una buena estrategia a la hora de implicarlos.”
	“Les motivan bastante.”

Tabla 6

Comentarios de las profesoras respecto a los beneficios de Combimix 2020 frente al método tradicional.

Variables	Comentarios
Nivel de comprensión	<p>“Creo que los contenidos estaban bien estructurados y explicados para que los alumnos los entendieran bien.”</p> <p>“Lo comprenden mejor”</p> <p>“Sobre todo en este aspecto se notan mejores resultados. Esta forma de trabajo creo que les ha facilitado la comprensión y más aún en las circunstancias en que nos encontramos.”</p>
Grado de interés y motivación	<p>“Despierta interés al utilizar ejemplos de su día a día.”</p> <p>“La utilización de las diferentes técnicas de gamificación también puede ser un plus a la hora de motivarles.”</p> <p>“Están más motivados y ponen más interés.”</p>
Rendimiento académico	<p>“Creo que está bien pensado el dedicar sesiones enteras a la explicación de las características de las posibles agrupaciones antes de ver cuáles son las técnicas combinatorias y hacer solo ejercicios de distinción de estas características (si importa el orden o no, si se agrupan todos los elementos...) para que lo puedan asimilar bien.”</p> <p>“Aquí ya no estoy tan segura porque este tema es relativamente fácil.”</p> <p>“Al haber asimilado mejor los conceptos, también sus resultados han sido buenos.”</p>

5 Discusión

Los resultados promedio de los cuestionarios incluidos en las vídeo-lecciones permiten afirmar que ha habido un alto nivel de comprensión de los conceptos y procedimientos combinatorios. Casi la totalidad de los alumnos han obtenido calificaciones superiores al cinco y más del 90% han superado la puntuación de notable (7 o más).

Los datos obtenidos a nivel de vídeo-lección presentan una distribución bastante similar, lo que permite extrapolar el resultado del análisis a cada bloque de contenidos que conforman el tema en su totalidad.

Estos datos indican que la estructura y secuencia de contenidos propuesta en el CombiMix 2020 facilita el aprendizaje de los alumnos.

Los mejores resultados se registran en la vídeo-lección 2 en la que se tratan las características principales a tener en cuenta en los problemas combinatorios. A diferencia con el resto, en esta lección no se establecen relaciones entre distintos conceptos ni fórmulas lo que probablemente haya favorecido aún más su comprensión.

Los datos de participación en el *Kahoot* combinatorio señalan el efecto motivador que la actividad de competición generó en los estudiantes. A pesar de ser introducida como una actividad totalmente voluntaria y sin ningún peso en la evaluación de la unidad didáctica, el 75% de los alumnos decidieron permanecer conectados para participar.

Casi un 80% de los participantes valoraron positivamente el concurso y un 70% de ellos lo hicieron de forma contundente lo que manifiesta el interés de los alumnos por este tipo de actividades.

Respecto al rendimiento académico cabe destacar el aumento significativo de la calificación media obtenida por los alumnos en la prueba de combinatoria frente a las de las anteriores evaluaciones. Partiendo de unos datos prácticamente iguales para la primera y segunda evaluación, la calificación media pasa de 6,0 a un valor de 7,4 (tabla 3).

No podemos contrastar con rigor que el CombiMix 2020 mejore el rendimiento académico de los alumnos ya que el número de alumnos evaluados no es el mismo, siendo menor la muestra de estudiantes de los que se disponen datos en combinatoria. Además, disponer solo de las calificaciones medias de los grupos impide realizar los cálculos estadísticos para el contraste. Por otra parte, es necesario considerar que las evaluaciones anteriores comprendían varias

unidades didácticas, mientras que la prueba de combinatoria se ha realizado antes de acabar los contenidos propios de la tercera evaluación.

Lo que sí podemos concluir es que el rendimiento académico de los alumnos evaluados después de la aplicación del CombiMix 2020 ha sido muy favorable, con un 84% de los alumnos con calificaciones superiores al 5 y un 32% en el intervalo más alto de calificación (entre el nueve y el diez).

Los datos promedios de los cuestionarios de autoevaluación contestados por los alumnos muestran información relativa a las dificultades de los alumnos, así como de la propuesta de intervención aplicada.

- De las afirmaciones incluidas en la categoría “Comprensión matemática en general” se desprende que los alumnos encuentran menos dificultades cuando tienen que aplicar fórmulas o procedimientos matemáticos que cuando tienen que razonar un enunciado. Si bien parece que no tienen problema para entender lo que se cuestiona, no se decantan claramente hacia saber razonarlo para plantear su resolución utilizando las matemáticas.
- Respecto a la “Comprensión combinatoria”, los valores medios aportan que los alumnos están satisfechos con su aprendizaje. Están de acuerdo en que tanto la organización del tema como los ejemplos utilizados les han permitido distinguir las características y las técnicas combinatorias facilitando la comprensión y resolución de los problemas combinatorios. También parece que la regla mnemotécnica proporcionada les ha sido de utilidad, aunque probablemente harán un mayor uso de ella cuando, pasado el tiempo, necesiten recordar los conceptos aprendidos.
- Y en relación con el “Interés y motivación”, los resultados corroboran que relacionar el tema con aspectos cercanos al día a día de los alumnos e incorporar actividades basadas en el juego y la competición despiertan el interés de los alumnos y promueven una actitud positiva hacia el aprendizaje.

En cuanto a los datos cualitativos presentados en el estudio podemos considerar que todos los comentarios que las profesoras han hecho al ser entrevistadas en relación con la propuesta CombiMix 2020 han sido positivos. Consideran acertadas las estrategias didácticas aplicadas en el método, en particular el cambio de estructura a la hora de abordar los contenidos. Están de acuerdo en que, siguiendo este modelo, los alumnos han comprendido e interiorizado bien

los conceptos. Incluso comentan que esta forma de trabajo da mejores resultados a nivel de comprensión que la metodología tradicional.

También coinciden en que la cercanía de los ejemplos y actividades a la realidad y la incorporación de actividades de gamificación motiva a los alumnos, los anima a trabajar, despierta su interés y los implica en su proceso de aprendizaje.

Dos de las profesoras establecen la relación *nueva estructura de contenidos – buenos resultados académicos*, mientras que otra lo duda al considerar que el tema de combinatoria “es relativamente fácil”. Comentando en una reunión final esta discrepancia se pone de manifiesto la razón de la misma: la profesora que considera fácil el tema lo está haciendo en relación a los alumnos de bachillerato, por ser este el nivel en el que ha estado desarrollando su práctica docente en los últimos años. Las otras dos, más vinculadas con el curso que nos ocupa, sostienen la dificultad que presentan los alumnos de cuarto de la ESO cuando se enfrentan por primera vez al tema de combinatoria.

6 Conclusiones

A partir de las dificultades que presenta la combinatoria y buscando la mejora de la comprensión, la actitud y el rendimiento académico de los alumnos, se ha diseñado y puesto en práctica una propuesta de intervención didáctica para la enseñanza de la combinatoria en la asignatura de matemáticas académicas de cuarto de la ESO. Además, se ha evaluado la innovación propuesta siguiendo los principios de la investigación-acción por lo que se ha alcanzado el objetivo general de este proyecto.

Los resultados obtenidos en la investigación han permitido contrastar la hipótesis de partida y se puede afirmar que:

La aplicación del CombiMix 2020 facilita la comprensión de los conceptos combinatorios de los alumnos, despertando su interés y motivación por la materia y generando buenos resultados académicos.

Hay que tener en cuenta que las circunstancias excepcionales en las que se ha desarrollado este proyecto (crisis COVID 19) han introducido en el estudio variables extrañas que no han podido medirse ni controlarse y que han alterado, con total seguridad, los resultados obtenidos. Algunas de estas variables intervinientes son: adaptación de la propuesta de la modalidad presencial a la modalidad a distancia, entorno virtual de aplicación de la propuesta, problemas de conectividad, situaciones personales de los participantes por el estado de confinamiento, falta de garantías del desarrollo autónomo de las tareas propuestas a los alumnos (posibilidad de copiar los resultados). Aun así, se han alcanzado casi la totalidad de los objetivos específicos definidos al comienzo.

Al no poder incorporar en el estudio un grupo de control no se ha podido contrastar si el CombiMix 2020 cumple las siguientes expectativas:

- **Resuelve** las dificultades de aprendizaje del tema de combinatoria.
- **Mejora** la comprensión de contenidos en los alumnos.
- **Mejora** el rendimiento académico de los alumnos.

Para ello sería necesaria una nueva aplicación y evaluación de la propuesta en las condiciones que se habían planteado inicialmente.

En cualquier caso, el análisis de los datos obtenidos pone de manifiesto los beneficios, tanto a **nivel académico** como de **comprensión y actitud**, que la intervención ha generado para los alumnos. Las profesoras responsables del curso, desde el marco de su amplia experiencia, muestran su **satisfacción** con la propuesta y se atreven incluso a afirmar que mejora el entendimiento, el interés y la motivación de los alumnos con respecto a la metodología tradicional.

El desarrollo de este proyecto, desde su comienzo hasta el final, demuestra la necesidad de que los docentes estemos **dispuestos y preparados** para modificar y/o adaptar nuestra actividad didáctica en función de las necesidades y circunstancias de cada momento, siempre en beneficio de los alumnos y buscando que se involucren en su propio aprendizaje para que este sea realmente significativo.

Diseñar y proponer actividades de aprendizaje que faciliten el desarrollo de las competencias será nuestra gran aportación a la educación.

“Teaching is more than imparting knowledge; it is **inspiring** change.
Learning is more than absorbing facts; it is acquiring **understanding”**

William Arthur Ward (s.f.)

Referencias

- Alcaide, F. (2016). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas*. Boadilla del Monte, Madrid: SM.
- Ariza, R. P. (1987). El maestro como investigador en el aula. Investigar para conocer, conocer para enseñar. *Investigación en la Escuela*, (1), 63-69. Recuperado de <https://revistascientificas.us.es/index.php/IE/article/view/9433/8216>
- Ausubel, D. (1983). Teoría del aprendizaje significativo. *Fascículos de CEIF*, 1, 1-10. Recuperado de http://www.academia.edu/download/38902537/Aprendizaje_significativo.pdf
- Colón, A. O., Jordán, J., & Agredal, M. (2018). Gamificación en educación: una panorámica sobre el estado de la cuestión. *Educação e Pesquisa: Revista da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo*, 44. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/7315128.pdf>
- Comunidad de Madrid (2015). Decreto 48/2015, de 14 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín oficial de la Comunidad de Madrid*, 20 de Mayo de 2015, Recuperado de https://www.bocm.es/boletin/CM_Orden_BOCM/2015/05/20/BOCM-20150520-1.PDF
- Díaz, J. T., & Gómez, J. I. A. (2009). Desarrollo profesional docente ante los nuevos retos de las tecnologías de la información y la comunicación en los centros educativos. *Píxel-Bit. Revista de Medios y Educación*, (34), 31-47. Recuperado de <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=36812036003>
- Espinoza, J., & Roa, R. (2013). Desarrollo teórico del tema de combinatoria presente en algunos libros de texto de matemática de educación secundaria en España. *Probabilidad Condicionada: Revista de didáctica de la Estadística*, (2), 181-188. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4770267>

- Espinoza, J., & Roa, R. (2014). La combinatoria en libros de texto de matemática de educación secundaria en España. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/6007/1/Espinoza2014LacombinatoriaSEIEM.pdf>
- Espinoza G., J., Lupiañez G., J., & Segovia A., I. (2014). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación en educación matemática. *Revista Digital: Matemática, Educación E Internet*, 14(2). Recuperado de <https://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/download/1664/1523>
- Fernández, E. (2013). Razonamiento Combinatorio y el currículo español. *Probabilidad Condicionada: Revista de didáctica de la Estadística*, (1), 539-554. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5487251>
- López, B. G., & Remesal, A. F. (2001). Un programa de enseñanza de estrategias de aprendizaje en educación secundaria obligatoria y en educación permanente de adultos. *Premios nacionales de investigación educativa 2000* (pp. 13-50). Secretaría general técnica. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=754747>
- Meses del año truco nudillos Portada. (2020). Recuperado de <https://www.imageneseducativas.com/el-mes-tiene-30-o-31-dias-el-truco-con-las-manos-que-lo-revela/meses-del-ano-truco-nudillos-portada/>
- Molas Castells, N., & Rosselló, M. (2010). Revolución en las aulas: Llegan los profesores del siglo. La introducción de las TIC en las aulas y el nuevo rol docente. *Didáctica, innovación y multimedia*, (19), 0001-9. Recuperado de <https://ddd.uab.cat/record/64935>
- Navarro, V., Batanero, C., & Godino, J. D. (1996). Razonamiento combinatorio en alumnos de Secundaria. *Educación matemática*, 8(01), 26-39. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/275097960_Razonamiento_combinatorio_en_alumnos_de_Secundaria
- Pérez, Y., & Ramírez, R. (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos: Fundamentos teóricos y metodológicos. *Revista de investigación*, 35(73), 8-26. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3897810>

RAE (2020). Combinatorio, combinatoria en *Diccionario de la lengua española*. Recuperado de <https://dle.rae.es/combinatorio#9tt2EzH>

RAE (2020). Mnemotecnia en *Diccionario de la lengua española*. Recuperado de <https://dle.rae.es/mnemotecnia?m=form>

Ruiz, Ángel, Alfaro, C., & Gamboa, R. (2003). Aprendizaje de las matemáticas: conceptos, procedimientos, lecciones y resolución de problemas (ING). *Uniciencia*, 20(2), 285-296. Recuperado de <https://www.revistas.una.ac.cr/index.php/uniciencia/article/view/5744>

Una vaca vestida de uniforme.svg. (2020). Recuperado de https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Una_vaca_vestida_de_uniforme.svg

Anexos

Anexo A: Cuestionarios de las vídeo-lecciones

■ COMBINATORIA 1

Principio de Multiplicación

EJEMPLO 2
Al llegar a Cercedilla, Javier descubre que ha metido en su maleta 3 vaqueros, 4 sudaderas, 4 pares de calcetines y 2 tipos de deportivas. ¿Entre cuántos "outfits" distintos puede elegir para vestirse para la cena?



$3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 = 96$ posibilidades

EJEMPLO 3
¿Cuántos números de dos cifras pueden formarse con los dígitos: 1, 2, 3, 4 y 5, si no se puede repetir ninguno de ellos?



MULTIPLE CHOICE QUESTION

¿Cuántas posibilidades tengo para elegir el primer dígito?

Una

Cinco

Dos

Rewatch Skip Submit

Diagrama de árbol

EJEMPLO 2
Estas son las opciones que tiene el menú del día del restaurante de la estación:
1º plato: Verdura, pasta o legumbre
2º plato: Carne, pescado, huevo
Postre: Fruta o yogur
¿Qué posibles menús puedo tomar?



MULTIPLE CHOICE QUESTION

Si aplicamos el principio de multiplicación que acabamos de aprender, ¿sabrías calcular el número de menús que se pueden elaborar con esas opciones?

Dieciocho

Nueve

Doce

Rewatch Skip Submit

Principio de Multiplicación

EJEMPLO 4
Alejandra ha cerrado su diario con un candado numérico de tres dígitos. Pero se le ha olvidado la combinación. Recuerda que el primer dígito era un uno, el segundo era una cifra par y el tercero una cifra impar distinta de uno. ¿Cuántas posibles combinaciones tiene que probar para poder abrir su diario?.



MULTIPLE CHOICE QUESTION

¿Podrías decirme cómo aplicarías el principio de multiplicación

$3 \cdot 1 \cdot 4$

$1 \cdot 5 \cdot 4$

$1 \cdot 4 \cdot 4$

Rewatch Skip Submit

Características principales

IMPORTANCIA ORDEN




El orden en que coloquen los ingredientes del burrito no hace que el burrito sea diferente. Con "jalapeños, queso y tomate" es igual que con "queso, jalapeños y tomate".

No me importa el orden

MULTIPLE CHOICE QUESTION

¿El orden en que se colocan las dos asignaturas del viernes por la tarde hace que tengamos un horario u otro?

Si

No

Rewatch Skip Submit

Características principales

NÚMERO ELEMENTOS



MULTIPLE CHOICE QUESTION

¿Es cierta la siguiente afirmación?
El número de elementos que agrupo coincide con el número total de elementos disponibles.

Si

No

Rewatch Skip Submit

Características principales

REPETICIÓN ELEMENTOS

¿Es posible que alguno de los elementos se repita dentro de la misma agrupación?

NO	SI
SIN REPETICIÓN  <ul style="list-style-type: none"> Ningún niño puede estar dos veces en la fila No es posible crear la pareja "Adriana - Adriana" No es posible que la misma persona ocupe dos o los tres puestos del pódium 	CON REPETICIÓN <ul style="list-style-type: none"> Claves secretas de cuatro cifras formados con los dígitos del 0 al 9 Palabras de tres letras formadas con el abecedario 

MULTIPLE CHOICE QUESTION

¿Podemos encontrar algún tipo de agrupación con elementos repetidos en las matrículas de los coches?

No

Si

Rewatch Skip Submit

Características principales

NÚMERO ELEMENTOS



En clase hay 28 alumnos (m) y los bancos son para 4 alumnos (n)

$n \neq m$

MULTIPLE CHOICE QUESTION

En este caso se cumple que $n = m$

Verdadero

Falso

Rewatch Skip Submit

COMBINATORIA 3

Técnicas según características

```

            graph TD
            A[¿Importa el orden?] -- SI --> B[¿Se agrupan todos los elementos?]
            A -- NO --> C[Variaciones V]
            B -- SI --> D[Permutaciones P]
            B -- NO --> C
            
```

MULTIPLE CHOICE QUESTION

¿Con qué letra crees que vamos a representar la técnica de las Combinaciones?

CM

CB

C

Rewatch Skip Submit

Identifiquemos técnicas

CARACTERÍSTICAS					FGF
¿Importa orden?	SI				
¿n = m?					
¿Se puede repetir?					
Técnica Combinatoria					

MULTIPLE CHOICE QUESTION

¿Es $n = m$ en las distintas filas que se pueden formar?

SI

NO

Rewatch Skip Submit

Identifiquemos técnicas

CARACTERÍSTICAS					FGF
¿Importa orden?	SI				
¿n = m?	SI				
¿Se puede repetir?	NO				
Técnica Combinatoria	P_{2n}				

MULTIPLE CHOICE QUESTION

¿El orden de los integrantes de cada pareja es importante?

NO

SI

Rewatch Skip Submit

Identifiquemos técnicas

CARACTERÍSTICAS					FGF
¿Importa orden?	SI	NO			
¿n = m?	SI	NO			
¿Se puede repetir?	NO	NO			
Técnica Combinatoria	P_{2n}				

MULTIPLE CHOICE QUESTION

¿Qué técnica combinatoria aplicarías en este caso?

Permutación

Combinación

Variación

Rewatch Skip Submit

n! Identifiquemos técnicas ...

CARACTERÍSTICAS					FGF
¿Importa orden?	SI	NO			
¿n = m?	SI	NO			
¿Se puede repetir?	NO	NO			
Técnica Combinatoria	P ₂₈	C _{28,2}			

MULTIPLE CHOICE QUESTION

¿Crees que el orden es importante en este caso?

SI

NO

Rewatch
Skip
Submit

n! Identifiquemos técnicas ...

CARACTERÍSTICAS					FGF
¿Importa orden?	SI	NO	SI	SI	
¿n = m?	SI	NO	NO	NO	
¿Se puede repetir?	NO	NO	NO	SI	
Técnica Combinatoria	P ₂₈	C _{28,2}	V _{28,3}		

MULTIPLE CHOICE QUESTION

¿Qué técnica aplicamos para calcular las posibles claves del candado?

Combinación

Variación con repetición

Variación

Rewatch
Skip
Submit

n! Identifiquemos técnicas ...

CARACTERÍSTICAS					FGF
¿Importa orden?	SI	NO	SI	SI	SI
¿n = m?	SI	NO	NO	NO	NO
¿Se puede repetir?	NO	NO	NO	SI	SI
Técnica Combinatoria	P ₂₈	C _{28,2}	V _{28,3}	VR _{10,4}	

MULTIPLE CHOICE QUESTION

¿Cómo representamos este caso?

VR_{26,3}

VR_{3,26}

V_{26,3}

Rewatch
Skip
Submit

n! Identifiquemos técnicas ...

CARACTERÍSTICAS					FGF
¿Importa orden?	SI	NO	SI	SI	SI
¿n = m?	SI	NO	NO	NO	NO
¿Se puede repetir?	NO	NO	NO	SI	SI
Técnica Combinatoria	P ₂₈	C _{28,2}	V _{28,3}	VR _{10,4}	VR _{26,3}

MULTIPLE CHOICE QUESTION

De los métodos que ya conocemos, ¿cuál te puede ayudar a identificar la técnica correcta?

Diagrama de árbol

Principio de multiplicación

Rewatch
Skip
Submit

Combinatoria 4

Factorial de un número

El **factorial** de un número natural n , se representa por $n!$ y es el producto de n por todos los números naturales menores que él, es decir:

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Se cumple que:

- $0! = 1 = 1!$
- $n! = n(n-1)!$

➤ Ejemplo: Calcula $6!$
 $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

➤ Ejemplo: Calcula $3!$

MULTIPLE CHOICE QUESTION

El factorial de tres vale:

Tres

Nueve

Seis

Rewatch
Skip
Submit

Variaciones con repetición

Importa el orden
Agrupo m elementos de n en n
Se puede repetir

Grupos ordenados de n elementos que se pueden formar con los m elementos de un conjunto habiendo elementos repetidos dentro de la misma agrupación.

Por lo tanto, dos grupos serán distintos tanto si tienen distintos elementos, como si tienen los mismos elementos ordenados de forma distinta.

Variaciones con repetición de m elementos tomados de n en n

$VR_{m,n} = m^n$

✓ Posibles claves de un candado de 4 dígitos: $m = 10$ (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)
 $n = 4$
 $VR_{10,4} = 10^4 = 10.000$ claves

✓ Posibles agrupaciones de tres letras (a,b,c): $m = 3$
 $n = 3$
 $VR_{3,3} = 3^3 = 27$ agrupaciones

MULTIPLE CHOICE QUESTION

Las variaciones con repetición de 26 elementos tomados de tres en tres son:

3^{26}

26^3

$26!$

Rewatch
Skip
Submit

Permutaciones

Importa el orden
Agrupo todos los elementos
No se puede repetir

Grupos ordenados que se pueden formar con todos los elementos de un conjunto sin repetirse ninguno dentro de la misma agrupación.

Por lo tanto, dos grupos serán distintos si los elementos están ordenados de forma distinta.

Permutaciones sin repetición de n elementos

$P_n = n! = n(n-1)(n-2) \dots \cdot 2 \cdot 1$

✓ Posibles filas para ir al polideportivo



MULTIPLE CHOICE QUESTION

El número de filas distintas que pueden hacer los 28 alumnos de 1º ESO son:

Todas las respuestas son correctas

$28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \dots \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$28!$

Rewatch
Skip
Submit

Anexo B: Cuestionario de evaluación

 <p>Esc. Colegio ESCUELAS PIAS SAN FERNANDO POBLENCO</p>	<p>Avda. de Buzanos, 1 28234 Pozuelo de Alarcón, Madrid Tel.: 917 150-488 Fax: 913 529 833 www.escolapiaspozuolo.org Escuela Primaria Compañía</p>	  
--	--	--

Nombre y apellidos del alumno: _____ **Fecha:** _____

Curso y grupo: _____ **Calificación:** _____

Criterios de calificación: Los primeros cinco problemas se valoran sobre una puntuación total de 1,2 puntos cada uno, de los cuales el 50% se corresponde con una identificación correcta de la técnica y el otro 50% con la aplicación correcta de la fórmula asociada. Los dos últimos se valoran en 2 puntos cada uno.

- 1.- En cierto centro escolar se ofrecen 2 asignaturas optativas para 1º ESO, 3 para 2º ESO, 4 para 3º ESO y 5 para 4º ESO. ¿Entre cuántos itinerarios distintos puede elegir un estudiante? ¿Qué procedimiento has utilizado?
- 2.- En una empresa se quieren contratar 5 agentes de seguridad. Al proceso de selección se presentan 10 personas. ¿De cuántas formas distintas se pueden ocupar las cinco plazas? ¿Qué técnica combinatoria has utilizado? ¿Por qué?
- 3.- En una clase de 22 estudiantes se quieren elegir los puestos de delegado y de subdelegado, teniendo en cuenta que no pueden ser la misma persona. ¿Cuántas posibilidades hay para cubrir los puestos? ¿Qué técnica combinatoria has utilizado? ¿Por qué?
- 4.- Tenemos que formar un código de seis cifras con los dígitos 0 y 1. ¿Cuántas posibilidades hay? ¿Qué técnica combinatoria has utilizado? ¿Por qué?
- 5.- La madre de Raquel, Berta, Iván y Jesús ha hecho cuatro bocadillos distintos para que elijan uno cada uno. ¿De cuántas formas pueden hacer el reparto? ¿Qué técnica combinatoria has utilizado? ¿Por qué?
- 6.- Crea un problema de combinatoria que pueda resolverse utilizando combinaciones de seis elementos tomados de tres en tres.
- 7.- Crea un problema de combinatoria que pueda resolverse utilizando variaciones de seis elementos tomados de tres en tres.

Tema 12Introducción a la combinatoria1

Anexo C: Cuestionario de autoevaluación






CUESTIONARIO DE MATEMÁTICAS PARA LOS ALUMNOS DE CUARTO ESO

Queremos conocer tu opinión acerca del tema de Combinatoria que acabamos de terminar.

Por favor, indica tu grado de acuerdo o desacuerdo con las afirmaciones que verás a continuación. Cada una podrá tomar un valor del 1 (totalmente en desacuerdo) al 5 (totalmente de acuerdo) siendo:

- 1: totalmente en desacuerdo;
- 2: bastante en desacuerdo;
- 3: ni acuerdo ni desacuerdo;
- 4: bastante de acuerdo;
- 5: totalmente de acuerdo.

En la pregunta 9 se añadirá una opción más para aquellos alumnos que no hayan participado en las actividades propuestas. - NP : "no participé".

Lee detenidamente antes de marcar cada respuesta y no olvides llegar hasta el final.



1



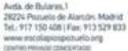
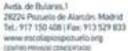



SOBRE LA ASIGNATURA DE MATEMÁTICAS EN GENERAL

Afirmación	1	2	3	4	5
1. Se me dan bien los ejercicios que se resuelven aplicando directamente un procedimiento o una fórmula. Ejemplo: Resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.					
2. Se me dan bien los problemas que requieren un razonamiento lógico o una deducción. Ejemplos: Resolver un problema de edades de una madre y su hija que cumplen ciertas condiciones. Calcular la altura de un árbol conociendo datos de la sombra que proyecta.					
3. Me resulta fácil pasar del enunciado de un problema a su expresión matemática. Ejemplos: Resolver un problema de edades de una madre y su hija que cumplen ciertas condiciones. Calcular la altura de un árbol conociendo datos de la sombra que proyecta.					
4. En ocasiones me cuesta comprender el enunciado de un problema.					

2



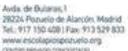
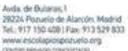


SOBRE EL TEMA DE COMBINATORIA EN PARTICULAR

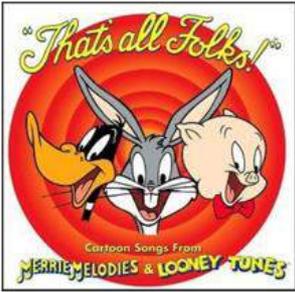
Afirmación	1	2	3	4	5	NP
1. Entiendo y diferencio las características propias (elementos, orden y repetición) de las técnicas combinatorias: variación, permutación y combinación (con y sin repetición).						
2. Me ha resultado útil la regla mnemotécnica proporcionada (vacaciones, platos combinados) para recordar cada una de las técnicas combinatorias: variación, permutación y combinación (con y sin repetición).						
3. El haber trabajado durante la primera semana solo en distinguir las técnicas combinatorias (sin fórmulas) me ha ayudado a comprender y resolver los problemas.						
4. El uso de temas y situaciones cercanas a tu realidad en los ejemplos y los enunciados de los problemas propuestos (clase de Amando, equipos para juegos on line, canciones en playlist, pin del móvil...) han facilitado mi comprensión de los mismos.						
5. Estoy satisfecho con los conocimientos que he adquirido en este tema.						
6. El uso de temas y situaciones cercanas a tu realidad en los ejemplos y los enunciados de los problemas propuestos (clase de Amando, equipos para juego on line, playlist, pin del móvil...) los hacen más interesantes.						
7. Me han gustado las actividades de competición realizadas (*).						

3



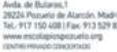




4

Anexo D: Guion de entrevistas







REFLEXIÓN DOCENTES DE MATEMÁTICAS DE CUARTO ESO



Me gustaría conocer tu opinión acerca del tema de Combinatoria que acabamos de terminar. Agradecería tus comentarios personales con respecto a los cambios introducidos en el desarrollo de este tema frente al método tradicional:

1. Separación de los contenidos en dos apartados diferenciados: tipos de operaciones y fórmulas.
2. Ejemplos y problemas relacionados con la realidad de los alumnos.
3. Actividades de gamificación / competición para la consolidación de los aprendizajes.

Y, por último, ¿qué aspectos educativos crees que puede mejorar esta adaptación de la metodología tradicional de la Combinatoria en los alumnos?

1. Comprensión:
2. Interés:
3. Motivación:
4. Rendimiento académico:
5. Otros:



1

Anexo E: Recursos didácticos

Todos los recursos diseñados y utilizados en la aplicación del CombiMix se encuentran accesibles para su consulta a través de los enlaces incluidos en la tabla 7.

Tabla 7

Direcciones de enlace a los recursos CombiMix2020

Recurso	Accesible en
Presentaciones de combinatoria	Combinatoria 1 https://drive.google.com/open?id=1jKYgZnLAREer3XIGHFs_DKOvb18rK0jZ
	Combinatoria 2 https://drive.google.com/open?id=1qJFX49oyPNwS7b9ugVRp1A6wMVNRh7fH
	Combinatoria 3 https://drive.google.com/open?id=1edpWVxvytXo2lZMsGS7xUoYa1h_cri_H
	Combinatoria 4 https://drive.google.com/open?id=1FjSajXLPKm8nt9gZcyVCyKA1Ffc1eExE
Vídeo-lecciones de combinatoria	Combinatoria 1 https://edpuzzle.com/media/5e717b70de67363e3d5b99d0
	Combinatoria 2 https://edpuzzle.com/media/5e71f331ac95993ebf8c2ea3
	Combinatoria 3 https://edpuzzle.com/media/5e7350043419cf3e2b2380c5
	Combinatoria 4 https://edpuzzle.com/media/5e79dc76b53a953f54c4db7f

Recurso	Accesible en
Planteamientos de problemas	Problemas Combinatoria 1 https://drive.google.com/open?id=1OzpcYKUddXdVQH7U3fVjHNS1aywxZ9_J
	Problemas Combinatoria 2 y 3 https://drive.google.com/open?id=1UmnsWu-lZEgpnui4mCsxSW9YsuXvQS8m
	Problemas Combinatoria 4 https://drive.google.com/open?id=1qzgm3jfZIP8_oHg-uTM7ALel1YjXQIBR
	Problemas Combinatoria 5 https://drive.google.com/open?id=1Ik2Ui4jDZ_Topd1IDTLIJZJXvbla1EPj
Vídeos resolución problemas	Proceso resolución Combinatoria 5 (1/4) https://drive.google.com/open?id=1AWJMUUp-fcT3blInCZ8qhVby5C6xMOQY
	Proceso resolución Combinatoria 5 (2/4) https://drive.google.com/open?id=1I0kziQH7Y1ehtEbzRGcxX7CDxqIRWuug
	Proceso resolución Combinatoria 5 (3/4) https://drive.google.com/open?id=1Q_fRFQBs6f-N1Bk0GxxLDoyoFMvHM2xZ
	Proceso resolución Combinatoria 5 (4/4) https://drive.google.com/open?id=116-q65eozx8Mfc82QJ-WD9wLBI56y8Sw
Actividad de gamificación <i>Kahoot</i>	https://create.kahoot.it/share/planteamiento-combinatorio/4859fd05-7099-4cda-b332-d1636aa065f8 Instrucciones https://drive.google.com/open?id=1O07fiwIkxgOvoIE9hbNUxSXWQHrNCboV
Actividad de gamificación <i>Escape Room</i>	https://eduescaperoom.com/enigma/Y8cs7UBmkWBJ Instrucciones https://drive.google.com/open?id=1Z73VcKxSORwN8WZMbN7kLtt89wcYp4AT