DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA

ÁLGEBRA LINEAL

NOTAS DE CLASE

Profesores de la asignatura

CONTENIDOS

Tema 1

ÁLGEBRA MATRICIAL Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1.1. OPERACIONES CON MATRICES.

1.1.1 Introducción.

Antes de presentar las operaciones matriciales y sus propiedades se verán unas definiciones:

Definición. Se llama *matriz de orden* $m\times n$ a un rectángulo de $m\times n$ elementos dispuestos en m filas y n columnas. Tales elementos, que se representan por a_{ij} donde i es la fila y j la columna, pertenecen a un cuerpo $\mathbb{K}$, siendo $\mathbb{K}$ el conjunto de los números reales $\mathbb{C}$ o el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$.

El conjunto de todas las matrices de orden $m\times n$ definidas sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ se representa por $E_{mxn}(\mathbb{K})$ o simplemente E_{mxn}.

Definición. Dos matrices A y B se dicen *equidimensionales o del mismo tipo* si tienen el mismo número de filas y de columnas.

Dos matrices A y B equidimensionales son *iguales* si:

$$a_{ij} = b_{ij} \qquad \forall i = 1, 2,...,m \wedge \forall j = 1, 2, ..., n.$$

Definición. La matriz de E_{mxn} que tiene todos sus elementos nulos se denomina *matriz nula,* y se la representa por $(0)_{mxn}$.

Definición. Dada una matriz $A = (a_{ij})_{mxn}$ se llama *matriz opuesta de* A y se la representa por $-A$, a la matriz $-A = (-a_{ij})_{mxn}$.

Definición. Se llama *matriz línea* la matriz que consta de una sola línea. Si está formada por una sola fila se llama *matriz fila* y si está formada por una sola columna *matriz columna.*

Definición. Una *matriz cuadrada* de orden "n" es un cuadrado de n^2 números colocados en n filas y n columnas.

Definición. Los elementos a_{ii} de una matriz cuadrada se dice que pertenecen a la *diagonal principal* y se llaman *elementos principales.*

Definición. Se llama *matriz diagonal* a toda matriz cuadrada cuyos términos situados fuera de la diagonal principal son todos nulos.

Un caso particular de matriz diagonal es la *matriz escalar* en la que todos los elementos de la diagonal principal son iguales.

Definición. La matriz cuadrada en la que todos los elementos de la diagonal principal son 1 y el resto 0 se denomina *matriz unidad.*

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = (\delta_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

Definición. Una matriz cuadrada se dice *triangular superior* si todos los términos situados por debajo de la diagonal principal son ceros. Análogamente, se *dice triangular inferior* si todos los términos situados por encima de la diagonal principal son ceros.

<u>Ejemplo.</u>

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}}_{\text{matriz triangular superior}} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}}_{\text{matriz triangular inferior}}$$

Definición. Se llama *traza* de una matriz cuadrada a la suma de los elementos de su diagonal principal, es decir, $\text{Traza}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$.

1.1.2. Suma de matrices y producto por un escalar

Sea $E_{mxn}(\mathbb{K})$ el conjunto de matrices de orden $m \times n$ definidas sobre $\mathbb{K}$.

Definición. Dadas dos matrices $A, B \in E_{mxn}$, se llama *suma de* A y B, y se denota por A+B, a otra matriz $C \in E_{mxn}$ tal que sus elementos c_{ij} se obtienen como:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \forall\, i = 1,2,\dots,m \;\wedge\; j = 1,2,\dots,n$$

siendo $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$.

La suma de matrices verifica las siguientes propiedades:

1- Ley interna: $\forall\, A, B \in E_{mxn} \Rightarrow A + B = C \in E_{mxn}$

2- Asociativa: $\forall\, A, B, C \in E_{mxn} \Rightarrow (A + B) + C = A + (B + C)$

3- Conmutativa: $\forall\, A, B \in E_{mxn} \Rightarrow A+B = B+A$.

4- Elemento neutro: $\forall\, A \in E_{mxn} \;\; \exists!(0) \in E_{mxn} \,/\, A + (0) = A$.

5- Elemento opuesto: $\forall\, A \in E_{mxn} \;\; \exists\, (-A) \in E_{mxn} \,/\, A + (-A) = (0)$.

Es decir, el conjunto E_{mxn} con la suma tiene estructura de *grupo conmutativo.*

Definición. Dada una matriz $A \in E_{mxn}$, $A = (a_{ij})$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, se define el *producto del escalar* α *por la matriz* A y se denota por αA a la matriz $B \in E_{mxn}$, cuyos elementos $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$ se obtienen a partir de los elementos de A multiplicando a todos ellos por el escalar α.

El producto de una matriz por un escalar verifica las siguientes propiedades:

1- $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{K} \;\wedge\; \forall\, A, B \in E_{mxn}$

2- $(\alpha+\beta)\cdot A = \alpha\cdot A + \beta\cdot A$ $\quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K} \ \wedge\ \forall\, A \in E_{mxn}$

3- $(\alpha\cdot\beta)\cdot A = \alpha\cdot(\beta\cdot A)$ $\quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K} \ \wedge\ \forall\, A \in E_{mxn}$

4- $1\cdot A = A$ $\quad 1 \in \mathbb{K} \quad \forall\, A \in E_{mxn}$

1.1.3. Producto de matrices.

Definición. Sean las matrices $A \in E_{mxp}$ y $B \in E_{pxn}$, es decir el número de filas de B coincide con el número de columnas de A. Se llama *matriz producto* de A y B, y se denota por $A \cdot B$, a otra matriz C de orden $m{\times}n$ tal que sus elementos son de la forma

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \quad i = 1, 2, \ldots, m \ \wedge\ j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\begin{pmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1} \quad a_{i2} \ldots a_{ip} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}_{m\times p} \cdot \begin{pmatrix} \ldots\ldots b_{1j} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots b_{2j} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots b_{pj} \ldots\ldots \end{pmatrix}_{p\times n} = \begin{pmatrix} \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots c_{ij} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}_{m\times n}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Ejemplo.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{2x3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{3x1} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}_{2x1} \qquad \begin{aligned} c_{11} &= 4\cdot 0 + 2\cdot 1 + 5\cdot 2 = 12 \\ c_{21} &= 3\cdot 0 + 1\cdot 1 + 2\cdot 2 = 5 \end{aligned}$$

$$A \quad \cdot \quad B \quad = \ C$$

Observación. Teniendo en cuenta lo dicho anteriormente el producto $A\cdot B$ sólo tiene sentido cuando el número de columnas de A es igual al número de filas de B. Por tanto puede ocurrir que exista $A\cdot B$ y no exista $B\cdot A$, pero aún existiendo $B\cdot A$ no tiene porqué coincidir con $A\cdot B$, es decir, el producto de matrices **no es conmutativo**.

Ejemplo. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Si $B \cdot A = A \cdot B$ se dice que las matrices A y B son *permutables o conmutables.*

Según lo visto con anterioridad, cuando se multipliquen matrices, ha de tenerse cuidado con el orden de los términos. Para distinguir el orden en el producto $A \cdot B$ se dice que A premultiplica a B o multiplica a B por la izquierda; de la misma manera, B postmultiplica a A o multiplica a A por la derecha. Si se quiere multiplicar ambos miembros de una ecuación $X = Y$ por una matriz P, es importante que o bien premultipliquemos ambos miembros por P , o bien postmultipliquemos ambos miembros por P.

Propiedades.

l- Distributividad del producto respecto de la suma por la izquierda

$$\forall A \in E_{mxn} \quad \wedge \quad \forall B, C \in E_{nxp} \Rightarrow A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$$

2- Distributividad del producto respecto de la suma por la derecha

$$\forall A,\ B \in E_{mxn} \quad \wedge \quad \forall C \in E_{nxp} \Rightarrow (A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

3- Asociatividad

$$\forall A \in E_{mxn}\ ,\ B \in E_{nxp}\ ,\ C \in E_{pxq} \Rightarrow (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

4- $\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B) \qquad \forall A \in E_{mxn},\ B \in E_{nxp},\ \forall \alpha \in \mathbb{K}$

Observaciones

1. Producto nulo: Se verá que esta propiedad no se cumple. En el producto de escalares se sabe que $a \cdot b = 0$ si y sólo si alguno de los factores es cero. En el producto matricial puede ocurrir que, siendo $A \neq (0)$ y $B \neq (0)$**,** su producto $A \cdot B$ sea nulo.

Ejemplo. Sean , entonces

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. En escalares, si $a \cdot b = a \cdot c$ y $a \neq 0 \Rightarrow b = c$, sin embargo la igualdad matricial $A \cdot B = A \cdot C$ aún siendo $A \neq (0)$ no implica $B = C$ pues $A \cdot (B - C) = (0)$ puede darse siendo $B - C \neq (0)$.

Ejemplo. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, entonces

$$A \cdot B = A \cdot C, \quad A \neq (0) \quad y \quad B \neq C$$

Observación. Fácilmente se ve que si A es de orden mxn, entonces $I_m \cdot A = A$ y $A \cdot I_n = A$. Es decir, las matrices I_m y I_n juegan el mismo papel que el número 1 en la multiplicación.

Definición. Una matriz cuadrada A se dice *regular* si existe otra matriz cuadrada A^{-1}, a la que llamaremos *inversa* de A, tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$. En caso contrario se dice que A es *singular*.

Como un caso particular del producto de matrices se presentan a continuación las potencias de matrices cuadradas.

Potencias de matrices cuadradas.

Definición. Sea $p \in \mathbb{N}$; se llama potencia p-ésima de una matriz cuadrada A a la matriz que se obtiene multiplicando A p veces por sí misma.

$$A^p = \underbrace{(A \cdot A \cdot A \cdot ... \cdot A)}_{p \text{ veces}}$$

Propiedades.

1- $A^pA^q = A^{p+q}$ $\forall p,q \in \mathbb{N}$

2- $(A^p)^q = A^{pq}$ $\forall p,q \in \mathbb{N}$

3- $|A|^p = |A^p|$ $\forall p \in \mathbb{N}$

Nota. $A^0 = I$ $\forall A$ cuadrada, por convenio.

Sea $p \in \mathbb{N}$, y se considera una matriz regular A ($\Leftrightarrow \exists\ A^{-1}$), se define la potencia de exponente entero negativo de A, A^{-p}, como:

$$A^{-p} = (A^{-1})^p$$

Propiedades.

1- $A^{-p}A^{-q} = A^{-(p+q)}$ $\forall p,q \in \mathbb{N}$ $\forall$ A regular

2- $(A^{-p})^{-q} = A^{pq}$ $\forall p,q \in \mathbb{N}$ $\forall$ A regular

3- $|A^{-p}| = |A|^{-p}$ $\forall p \in \mathbb{N}$ $\forall$ A regular

Finalmente como propiedades en que intervienen exponentes positivos y negativos se tiene:

a) $(A^{-p}) \cdot (A^q) = A^{-p+q}$ $\forall p,q \in \mathbb{N}$ $\forall$ A regular

b) $(A^{-p})^q = A^{-pq}$ $\forall p,q \in \mathbb{N}$ $\forall$ A regular

<u>Potencias de matrices diagonales</u>

Si A es una matriz diagonal, el cálculo de las potencias se simplifica notablemente.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix},$$

y, en general,

$$A^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^p \end{pmatrix} \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

En el caso de que A sea regular, $\exists\, A^{-1}$ y se debe verificar que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ y como es evidente que:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{-1} \end{pmatrix}$$

y, en general,

$$A^{-p} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-p} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-p} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{-p} \end{pmatrix} \quad \forall\, p \in \mathbb{N} \wedge \ \forall A \text{ regular.}$$

Estos resultados son válidos para cualquier orden de la matriz A.

Estos resultados podrían inducir a pensar que todos los cálculos del Álgebra matricial son análogos a los del Álgebra elemental, pero esto no es cierto.

Ejemplo: Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden,

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + BA + AB + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

pues en general $AB \neq BA$. Del mismo modo

$$(A+B)(A-B) = A^2 + BA - AB - B^2 \neq A^2 - B^2$$

1.2. TIPOS ESPECIALES DE MATRICES.

Definición. Se llama *matriz traspuesta* de una matriz A a la que se obtiene intercambiando las filas de A por las columnas de A, y se representa por A^t. Es decir, si $A = (a_{ij}) \in E_{mxn} \Rightarrow A^t = (a_{ji}) \in E_{nxm}$

Ejemplo. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 8 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$

Propiedades.

1- $(A^t)^t = A \quad \forall A \in E_{mxn}$

2- $\forall A, B \in E_{mxn} \Rightarrow (A + B)^t = A^t + B^t$

3- $\forall A \in E_{mxq}$, $\forall B \in E_{qxn} \Rightarrow (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

En general:

$$(A_1 + A_2 + ... + A_n)^t = A_1^t + A_2^t + ... + A_n^t$$

$$(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n)^t = A_n^t \cdot A_{n-1}^t \cdot ... \cdot A_1^t$$

Definición. Una matriz cuadrada se dice que es *simétrica* si coincide con su traspuesta, es decir $A = A^t$ ($\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \quad \forall\ i, j = 1, 2,..., n$).

Definición. Una matriz cuadrada A se dice *antisimétrica* si coincide con la opuesta de su traspuesta, es decir $A = -A^t$ ($\Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall\ i, j = 1, 2,..., n$).

Ejemplo. $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}}_{\text{matriz simétrica}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & -5 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{matriz antisimétrica}}$

Definición. Una matriz cuadrada A se dice *ortogonal* si su traspuesta es igual a su inversa, es decir, si $A^t = A^{-1} \Leftrightarrow A^t \cdot A = A \cdot A^t = I$.

1.3. DETERMINANTES.

Definición.

Asociado a cada matriz cuadrada existe un escalar que es el valor del determinante y se calcula de la forma siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n) \in P_n} (-1)^p \cdot a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n}$$

donde P_n es el grupo de las permutaciones de n elementos, y donde p indica el número de inversiones de la permutación $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ correspondiente a los indicadores de columnas, respecto al orden natural $(1, 2, \dots, n)$.

Es decir, para hallar $|A|$ se forman todos los productos posibles de n elementos tomados de los n^2 elementos de la matriz, de modo que en cada producto haya un representante y sólo uno de cada columna y de cada fila, asignando al producto el signo + o - según que las permutaciones de los indicadores de fila y de columna sean de la misma paridad o no.

Para hacer esto de modo más simple se ordenan por filas los elementos de cada término, es decir, el primer factor será el correspondiente a la primera fila, el segundo el de la segunda fila,...,el n-ésimo el de la n-ésima fila, es decir, cada término es de la forma $a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot a_{3j_3} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n}$; en total hay $n!$ sumandos.

Cada uno de estos términos llevará el signo + o - según que el número de inversiones de la permutación $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ respecto del orden natural $(1, 2, \dots, n)$ sea par o impar. El número total de sumandos para calcular un determinante es $n!$ pues éste es el número total de posibles formas de tomar un elemento de cada una de las n columnas.

Ejemplos.

1. Si el término es $a_{12}\, a_{23}\, a_{31}$ llevará el signo $+$, pues en este caso $(2,3,1)$ tiene el siguiente número de inversiones:

El 2 está antes que el 1 $\Rightarrow$ 1 inversión

El 3 está antes que el 1 $\Rightarrow$ 1 inversión

luego $(2,3,1)$ tiene dos inversiones, que es un número par $\Rightarrow$ El término llevará signo $+$.

2. *Determinante de orden 2:* Habrá $2!$ sumandos; ordenándolos por filas serán $a_{11}{\cdot}a_{22}$ y $a_{12}{\cdot}a_{21}$:

* $a_{11}a_{22}$ signo $+$ pues $(1,2)$ no tiene inversiones

* $a_{12}a_{21}$ signo - pues $(2,1)$ tiene 1 inversión, es decir

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

3. *Determinante de orden 3*: Habrá $3! = 6$ sumandos; ordenándolos por filas serán:

* $a_{11}a_{22}\, a_{33}$ signo $+$ pues $(1,2,3)$ no tiene inversiones

* $a_{11}a_{23}\, a_{32}$ signo - pues $(1,3,2)$ tiene 1 inversión

* $a_{12}a_{21}\, a_{33}$ signo - pues $(2,1,3)$ tiene 1 inversión

* $a_{12}a_{23}\, a_{31}$ signo $+$ pues $(2,3,1)$ tiene 2 inversiones

* $a_{13}a_{21}\, a_{32}$ signo $+$ pues $(3,1,2)$ tiene 2 inversiones

* $a_{13}a_{22}\, a_{31}$ signo - pues $(3,2,1)$ tiene 3 inversiones, es decir

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$

$$-a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$$

expresión que se obtiene fácilmente haciendo uso de la Regla de Sarrus.

Cuando el orden de la matriz cuadrada es mayor que 3 no tiene sentido el plantear una expresión como las obtenidas para orden 2 y 3, ya que sería difícil usarlas en la práctica para resolver los problemas que se nos van a presentar durante el curso. En su lugar vamos a plantear un método general que nos permita obtener dicho determinante reduciendo el orden de la matriz con la que trabajamos. Para ello, vamos a repasar antes algunos conceptos que nos van a ser útiles en la aplicación de dicho método:

Definición. Si en un determinante D de orden n se suprimen q filas y q columnas, las restantes filas y columnas definen un nuevo determinante de orden $(n-q)$ que se llama *menor del determinante* D.

Definición. A cada elemento a_{ij} de un determinante D se le asocia un menor que se obtiene suprimiendo en D la fila i y la columna j, que se denomina *menor asociado a* a_{ij} y que se denota por D_{ij}.

Definición. Cuando un menor de un determinante está formado por las q primeras filas y las q primeras columnas se denomina *menor principal de orden q*.

Definición. Se llama *adjunto* de un elemento a_{ij} al determinante $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$, es decir, al valor del menor correspondiente a a_{ij} con signo + o - según el lugar que ocupa a_{ij}.

Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea.

Sea $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$, entonces el valor del determinante D es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea (fila o columna) por los adjuntos de los mismos. En general se elige la línea que tenga mayor número de elementos nulos. Desarrollando el determinante por la i-ésima fila se obtiene que

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in}$$

y haciéndolo por la j-ésima columna se obtiene

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj}$$

Ejemplo. Calcular $D = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow 2 \text{ elementos nulos} \\ \\ \end{matrix}$

Desarrollando D por los elementos de la tercera fila:

$$D = 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

Propiedades de los determinantes.

En algunas ocasiones, para calcular un determinante conviene realizar una serie de transformaciones que no alteren su valor, pero que lo conviertan en otro que tenga más elementos nulos, lo cual facilita de forma evidente su desarrollo por los elementos de una línea (sin más que escoger para ello la línea del determinante con más elementos nulos).

Dichas transformaciones deben tener en cuenta siempre las siguientes propiedades de los determinantes:

1- El valor de un determinante no se altera cuando se cambian las filas por las columnas.

2- Si se cambian entre sí dos filas, el valor del determinante cambia de signo (análogamente con las columnas).

3- Un determinante que tiene dos filas (o dos columnas) iguales es cero.

4- Multiplicando a todos los elementos de una fila (o columna) por α, el determinante queda multiplicado por α.

5- Si en un determinante los elementos de una fila o columna son múltiplos de los de otra, el valor del determinante es cero.

6- Sea el determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

En general: Si todos los elementos de una fila (o columna) de un determinante son sumas de p números, se puede descomponer dicho determinante en suma de p determinantes que tienen comunes todas las filas (o columnas) excepto la considerada, la cual viene sustituída por el primer sumando en el primer determinante, por el segundo sumando en el segundo determinante,..., por el p-ésimo sumando en el p-ésimo determinante.

7- Un determinante en el cual una fila (o columna) es combinación lineal de otra es nulo.

8- Si una fila (o columna) tiene todos sus elementos nulos, el determinante es cero.

9- Si a una fila (o columna) se le suma otra multiplicada por un escalar, el determinante no varía.

10- $|A \cdot B| = |A| \cdot |B| \quad \forall$ A, B$\in E_{nxn}$ ($\mathbb{K}$).

1.4. MATRIZ INVERSA DE UNA MATRIZ REGULAR.

Proposición. Una matriz cuadrada es *regular* si y sólo si su determinante es no nulo. En otro caso se dice que la matriz es *singular*.

Definición. Se llama *rango* de una matriz A al orden del mayor menor no nulo que puede extraerse de ella. También, teniendo en cuenta las propiedades de los determinantes, es el mayor número de filas o columnas que son linealmente independientes en A.

Si A es regular de orden n entonces rango(A) = n.

Si A es singular cuadrada de orden n, entonces rango(A) < n.

Definición. Sea A una matriz cuadrada, se denomina *matriz adjunta de* A, y se representa por A^a, a aquella matriz que resulta de sustituir cada elemento de la traspuesta A^t por su adjunto en A^t.

Ejemplo. Hallar la adjunta de $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Su traspuesta es $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y su adjunta

$$A^a = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

La inversa de una matriz regular existe y es única, y una posible forma de calcularla es la siguiente.

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^a.}$$

Ejemplo. Calcular la inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$|A| = 2 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 = 8 \neq 0 \;\Rightarrow\; \exists\, A^{-1}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\; A^a = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \text{ y } A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/8 & -1/4 & 1/4 \\ 1/8 & 1/4 & -1/4 \\ -3/8 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Propiedades.

1- Si A es regular y $A \cdot B = (0)$ entonces $B = (0)$. $\forall A \in E_{nxn}(\mathbb{K}) \wedge \forall B \in E_{nxp}(\mathbb{K})$.

Demostración. Multiplicando a la izquierda por A^{-1}, que existe por ser A regular

$$A^{-1} \cdot A \cdot B = I \cdot B = B = (0)$$ ■

2- Si A es regular y $A \cdot B = A \cdot C \Rightarrow B = C$ $\forall A \in E_{nxn}(\mathbb{K}) \wedge \forall B,C \in E_{nxp}(\mathbb{K})$.

3- El determinante de A^{-1} es el inverso del determinante de A: $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$

$\forall A \in E_{nxn}(\mathbb{K})$ (A regular).

Demostración. $|A| \cdot \left|A^{-1}\right| = \left|A \cdot A^{-1}\right| = |I| = 1 \Rightarrow \left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$ ■

4- $(A^{-1})^{-1} = A$ $\forall$ A regular $\in E_{nxn}(\mathbb{K})$.

Demostración. Recordamos que si dos matrices A y B cumplen que $A \cdot B = I$, entonces $A = B^{-1}$ y $B = A^{-1}$. Como:

$$A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow (A^{-1})^{-1} = A.$$ ■

5- La traspuesta de la inversa de A es igual a la inversa de la traspuesta de A:

$$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1} \qquad \forall \text{ A regular } \in E_{nxn}(\mathbb{K}).$$

Demostración. Por ser , luego $\exists (A^t)^{-1}$. Como

$$A \cdot A^{-1} = I$$

trasponiendo

$$(A \cdot A^{-1})^t = (A^{-1})^t \cdot A^t = I$$

luego la inversa de A^t es $(A^{-1})^t$. ■

6- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ $\quad \forall$ A, B $\in E_{nxn}$ ($\mathbb{K}$) (regulares).

Demostración. Para demostrar que la inversa de la matriz A·B es la matriz $B^{-1} \cdot A^{-1}$ basta comprobar que el producto de estas dos matrices es la identidad:

$$(A \cdot \underbrace{B)\ B^{-1}}_{I} \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I \qquad \blacksquare$$

En general: $(A_1 \cdot A_2 \cdot \quad \cdot A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdot A_{n-1}^{-1} \cdot \quad \cdot A_1^{-1}$

1.5. MATRICES PARTICIONADAS.

En ciertos casos se supondrá que una matriz A está formada por submatrices denominadas bloques de A, diciéndose que A es *una matriz por bloques.* Naturalmente una matriz puede particionarse en bloques de formas diferentes.

Ejemplo. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} A_{11\,2x2} & A_{12\,2x1} \\ \hdashline A_{21\,1x2} & A_{22\,1x1} \end{array}\right)$

1.5.1. Operaciones sobre matrices por bloques.

Las operaciones sobre matrices por bloques se pueden realizar efectuando el cálculo con los bloques como si éstos fueran componentes de las matrices. Para que se pueda operar con los bloques es preciso que las particiones se hagan de modo que las operaciones tengan sentido.

Suma de Matrices por Bloques. Sean A y B dos matrices de la misma dimensión definidas sobre $\mathbb{K}$, y particionadas en bloques de la misma forma: es decir, que cada bloque de A sea de la misma dimensión que el correspondiente bloque de B. Al sumar los bloques se suman los elementos correspondientes en las matrices A y B.

Ejemplo. Sea $A = \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$ y $B = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ \hdashline 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$, entonces

$$A+B=\left(\begin{array}{c|c}\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}0 & 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix} & (4)+(1)\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 2 & 4 & 2\\ 5 & 5 & -2 & 0\\ \hline 1 & 1 & 3 & 5\end{array}\right)$$

Producto de un Escalar por una Matriz por Bloques. Sea A una matriz definida sobre $\mathbb{K}$ particionada en bloques. Para multiplicar A por el escalar λ se multiplica cada bloque de A por λ.

Ejemplo. Sea $A=\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 0 & 1 & 1\\ 3 & 2 & -1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 2 & 4\end{array}\right)$ y $\lambda = 7$,entonces

$$7A=\left(\begin{array}{c|c}7\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix} & 7\cdot\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\\ \hline 7\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\end{pmatrix} & 7\cdot(4)\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}14 & 0 & 7 & 7\\ 21 & 14 & -7 & 0\\ \hline 0 & 0 & 14 & 28\end{array}\right)$$

Producto de Matrices por Bloques. Sean A y B dos matrices definidas sobre $\mathbb{K}$, tales que el número de columnas de A coincide con el número de filas de B. Se particionan estas matrices de la siguiente forma:

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1p}\\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2p}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ A_{q1} & A_{q2} & \dots & A_{qp}\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1m}\\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ B_{p1} & B_{p2} & \dots & B_{pm}\end{pmatrix}$$

siendo

el número de columnas de A_{11} = número de filas de $B_{11}, B_{12},..., B_{1m}$

$\vdots$

el número de columnas de A_{1p} = número de filas de $B_{p1}, B_{p2},..., B_{pm}$

es decir, de forma que el número de columnas de cada bloque A_{ik} de A sea igual al número de filas de cada bloque B_{kj} de B, entonces

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1m}\\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ C_{q1} & C_{q2} & \dots & C_{qm}\end{pmatrix}, \text{ siendo } C_{ij}=\sum_{k=1}^{p} A_{ik}B_{kj}=A_{i1}B_{1j}+A_{i2}B_{2j}+\dots+A_{ip}B_{pj}.$$

<u>Ejemplo</u>. Sea $A=\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 1\\ -1 & 4 & 2\\ \hline 5 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -3\end{array}\right)$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1\\ 3 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 4\end{pmatrix}$ hallar A·B trabajando con matrices particionadas.

Teniendo en cuenta la partición realizada sobre A**,** es obligatorio realizar en B la partición:

$$B=\left(\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 1 & 1\\ 3 & 2 & -1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 2 & 4\end{array}\right)$$

Además de esta partición horizontal se pueden o no hacer otras particiones verticales:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1\\ 3 & 2 & -1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 2 & 4\end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 1\\ 3 & 2 & -1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 2 & 4\end{array}\right) \text{ ó } \left(\begin{array}{c|ccc} 2 & 0 & 1 & 1\\ 3 & 2 & -1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 2 & 4\end{array}\right)$$

Si se elige como partición de $B=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1\\ 3 & 2 & -1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 2 & 4\end{array}\right)$ entonces

$$A\cdot B=\left(\begin{array}{c|c} \underset{3x2}{A_{11}} & \underset{3x1}{A_{12}}\\ \hline \underset{2x2}{A_{21}} & \underset{2x1}{A_{22}}\end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|c} \underset{2x3}{B_{11}} & \underset{2x1}{B_{12}}\\ \hline \underset{1x3}{B_{21}} & \underset{1x1}{B_{22}}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} \underset{3x3}{A_{11}\cdot B_{11}+A_{12}\cdot B_{21}} & \underset{3x1}{A_{11}\cdot B_{12}+A_{12}\cdot B_{22}}\\ \hline \underset{2x3}{A_{21}\cdot B_{11}+A_{22}\cdot B_{21}} & \underset{2x1}{A_{21}\cdot B_{12}+A_{22}\cdot B_{22}}\end{array}\right)=$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (4) \\ \hline \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot (4) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & -3 & -1 \\ 6 & 0 & 5 & 7 \\ 10 & 8 & -1 & 7 \\ \hline 13 & 2 & 6 & 9 \\ 7 & 2 & -5 & -10 \end{array}\right)$$

Las matrices cuadradas suelen particionarse de manera que los bloques diagonales sean también cuadrados.

1.5.2. <u>Aplicación a la inversión de una matriz</u>.

La partición de matrices en bloques es particularmente interesante en la determinación de la matriz inversa de una matriz regular de orden elevado.

Sea A una matriz regular de orden n; se particiona de la forma siguiente:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11\,rxt} & A_{12\,rxu} \\ \hline A_{21\,sxt} & A_{22\,sxu} \end{array}\right) \;/\; \begin{cases} r+s=n \\ t+u=n \end{cases}$$

Supongase que la matriz A^{-1} está particionada de la forma siguiente**:**

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} X_{txr} & Y_{txs} \\ \hline Z_{uxr} & T_{uxs} \end{array}\right) \;/\; \begin{cases} r+s=n \\ t+u=n \end{cases}$$

Las dimensiones de los bloques de A^{-1} han de ser ésas ya que se tiene que cumplir, para poder calcular AA^{-1} :

nº de columnas de A_{ik} = nº de filas de los bloques de la fila k de A^{-1}

y para poder calcular $A^{-1}A$

nº de filas de A_{ij} = nº de columnas de los bloques de la columna k de A^{-1}.

Debe cumplirse que

$$A\cdot A^{-1}=I \;\Rightarrow\; \left(\begin{array}{c:c} \underset{rxt}{A_{11}} & \underset{rxu}{A_{12}} \\ \hdashline \underset{sxt}{A_{21}} & \underset{sxu}{A_{22}} \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c:c} \underset{txr}{X} & \underset{txs}{Y} \\ \hdashline \underset{uxr}{Z} & \underset{uxs}{T} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c:c} \underset{rxr}{I} & \underset{rxs}{(0)} \\ \hdashline \underset{sxr}{(0)} & \underset{sxs}{I} \end{array}\right)$$

de donde, operando con los bloques:

$$\left.\begin{array}{l} A_{11}X+A_{12}Z=I \\ A_{11}Y+A_{12}T=(0) \\ A_{21}X+A_{22}Z=(0) \\ A_{21}Y+A_{22}T=I \end{array}\right\}$$

Resolviendo este sistema matricial se obtiene X, Y, Z y T , y por lo tanto A^{-1}.

La partición de A puede efectuarse de varias maneras, dependiendo de la forma de dicha matriz.

Una de las particiones más interesantes es aquélla en que los bloques diagonales son cuadrados, pues entonces la partición en A^{-1} es idéntica a la de A (es decir, los bloques de A^{-1} tienen las mismas dimensiones que sus homólogos en A). De la misma manera es interesante la búsqueda de bloques nulos o bloques unidad, ya que de esta manera se simplifican los cálculos notablemente.

Ejemplo. Calcular la inversa de $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, aplicando la teoría de bloques.

$$A=\left(\begin{array}{cc:ccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} \underset{3x2}{A_{11}} & \underset{3x3}{A_{12}} \\ \hdashline \underset{2x2}{A_{21}} & \underset{2x3}{A_{22}} \end{array}\right), \quad A^{-1}=\left(\begin{array}{c:c} \underset{2x3}{X} & \underset{2x2}{Y} \\ \hdashline \underset{3x3}{Z} & \underset{3x2}{T} \end{array}\right)$$

$$A\cdot A^{-1}=I=\left(\begin{array}{c:c} \underset{3x3}{I} & \underset{3x2}{(0)} \\ \hdashline \underset{2x3}{(0)} & \underset{2x2}{I} \end{array}\right)$$

de donde, operando con los bloques:

$$\left.\begin{array}{l} A_{11}X + A_{12}Z = I \\ A_{11}Y + A_{12}T = (0) \\ A_{21}X + A_{22}Z = (0) \\ A_{21}Y + A_{22}T = I \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} A_{11}X + Z = I \\ A_{11}Y + T = (0) \\ A_{21}X = (0) \underset{\substack{A_{21} \\ \text{regular}}}{\Rightarrow} X = (0) \\ A_{21}Y = I \Rightarrow Y = (A_{21})^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} Z = I \\ T = -A_{11}Y = -\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -13 & 10 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

1.6. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

El problema central del Álgebra Lineal es la resolución de sistemas de ecuaciones simultáneas. El caso más importante, y el más simple, es aquél en el que el número de incógnitas es igual al número de ecuaciones.

Antes de abordar la resolución del sistema es conveniente enunciar una serie de definiciones y estudiar cuándo el sistema de ecuaciones tiene solución.

Definición. Se llama *ecuación lineal* o *ecuación de primer grado* a una expresión de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

en la que $a_1, a_2, \dots, a_n$ se llaman *coeficientes* y b es el *término independiente*. Todos ellos son escalares pertenecientes a un cuerpo K. Por último $x_1, x_2, \dots, x_n$ son variables que se suelen llamar *indeterminadas* o *incógnitas*.

Definición. Cuando el término independiente de la ecuación es 0 se dice que la ecuación es *homogénea*.

Definición. Se llama *solución de la ecuación* $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ a un conjunto de escalares $r_1, r_2,..., r_n$ tales que:

$$a_1r_1 + a_2r_2 + ... + a_nr_n = b \,.$$

Definición. Se dice que dos ecuaciones son *equivalentes* cuando tienen la misma solución.

Definición. Se llama *sistema lineal* de m ecuaciones con n incógnitas a toda agrupación de la forma:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

que puede expresarse matricialmente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \cdot x = b$$

A la matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} = A$ se la denomina *matriz de los coeficientes del sistema*, y a la matriz $\left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right) = (A\,|\,b)$ se la denomina *matriz ampliada del sistema*.

Definición. Se llama *solución de un sistema* de m ecuaciones con n incógnitas a un conjunto de n números reales que satisfacen todas las ecuaciones del sistema, es decir, una n-tupla $t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \dots \\ t_n \end{pmatrix}$, tal que $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \dots \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$

Definición. Un sistema de ecuaciones se dice *homogéneo* cuando todas sus ecuaciones son homogéneas.

Definición. Se dice que un sistema de ecuaciones es *compatible* cuando posee una o varias soluciones.

Definición. Se dice que un sistema de ecuaciones es *compatible determinado* cuando posee una única solución.

Definición. Se dice que un sistema de ecuaciones es *compatible indeterminado* cuando posee infinitas soluciones.

Definición. Se dice que un sistema de ecuaciones es *incompatible* cuando no tiene ninguna solución.

Definición. Se dice que dos sistemas de ecuaciones son *equivalentes* cuando tienen las mismas soluciones.

A continuación se tratará de analizar en qué condiciones estos sistemas admiten solución. En este sentido se tiene el siguiente resultado:

Teorema de Rouché-Frobenius: Sea un sistema no homogéneo de m ecuaciones y n incógnitas. Sea r= rango(A) y r'=$\text{rango}(A \mid b)$. Se cumple:

1) Si r ≠ r' el sistema es incompatible.

2) Si r = r' el sistema es compatible. En este caso pueden darse dos situaciones diferentes:

a) Si r = r' = n el sistema es compatible determinado.

b) Si $r = r' < n$ el sistema es compatible indeterminado.

Para estudiar los rangos de las matrices que aparecen en este teorema, podemos utilizar la definición de rango y calcular el orden del mayor menor no nulo de ellas. Otra posible forma es transformar el sistema inicial en otro equivalente en el que el estudio de los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada sea fácil de ver. Para realizar esta transformación vamos a utilizar lo que se conoce como *transformaciones elementales* sobre una matriz.

Definición. Se dice que se ha realizado una *transformación elemental de filas* sobre una matriz $A \in E_{mxn}(\mathbb{K})$ si se ha realizado una de las operaciones siguientes:

1. Intercambiar la fila i-ésima de A por la fila j-ésima de A:

$$F_i \sim F_j$$

2. Reemplazar la fila i-ésima de A por la fila i-ésima de A multiplicada por λ: λF_i donde $\lambda \neq 0$.

3. Reemplazar la fila i-ésima de A por la fila i-ésima más la fila j-ésima multiplicada por λ :

$$F_i + \lambda F_j \text{ donde } \lambda \neq 0 .$$

Cuando las operaciones se realizan sobre las columnas de la matriz se dice que se ha realizado una *transformación elemental de columnas* sobre A.

Las transformaciones elementales no alteran el rango ni la dimensión de la matriz.

Definición. Se denomina *transformación inversa de una transformación elemental* a la que deshace el cambio hecho por una transformación elemental.

A continuación, veremos que realizando transformaciones elementales sobre las matrices de un sistema se obtiene otro sistema equivalente. Para ello, enunciaremos previamente los dos teoremas siguientes.

Teorema. Sea A una matriz de dimensiones mxn y sea P una matriz de tamaño mxm obtenida al aplicar una determinada transformación elemental de filas a la matriz unidad de orden m. Si la misma operación elemental se aplica a la matriz A se obtiene la matriz PA.

A la matriz P se le llama *matriz elemental de filas*.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} < F_2 - F_1 > \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix} = B$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} < F_2 - F_1 > \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = P$$

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix} = B$$

Teorema. Sea A una matriz de dimensiones mxn y sea Q una matriz de tamaño nxn obtenida al aplicar una determinada transformación elemental de columnas a la matriz unidad. Si la misma operación elemental se aplica a la matriz A se obtiene la matriz AQ.

A la matriz Q se le llama *matriz elemental de columnas*.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} < 3C_2 > \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} = B$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} < 3C_2 > \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Q$$

$$A \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} = B$$

Teorema. Supóngase que el sistema de ecuaciones $Ax = b$ es transformado mediante una secuencia de transformaciones elementales de filas en el sistema $Cx = d$. Entonces ambos sistemas son equivalentes.

Demostración. Como se ha visto en el resultado anterior al tratar las transformaciones elementales de filas, hay una matriz regular P tal $PAx = Pb$. Esto significa que $C = PA$ y $d = Pb$. Supóngase que $\mathbf{t}$ es solución de $Ax = b$. Premultiplicando por P obtenemos $PAt = Pb$, es decir, $Ct = d$ y, de esta manera $\mathbf{t}$ resuelve también el sistema de ecuaciones modificado. Recíprocamente, si t satisface $Cx = d$, entonces premultiplicando por P^{-1} se obtiene que t resuelve $Ax = b$. Por lo tanto los dos conjuntos de soluciones son idénticos. ■

Una vez analizada la existencia de soluciones de un sistema, se procederá a su cálculo en el caso de que existan. Empezaremos considerando que el sistema $A \cdot x = b$ es compatible determinado, es decir, su matriz A es una matriz de orden $n \times n$ regular. Para resolver este sistema se puede proceder de varias formas:

1. Premultiplicando por A^{-1}, es decir $x = A^{-1} \cdot b$.

2. Aplicando el método de Cramer.

3. Aplicando el método de Gauss, que consiste en realizar transformaciones elementales de filas para convertir el sistema de ecuaciones inicial en otro equivalente que sea triangular superior y por tanto, de resolución inmediata.

Si el sistema es compatible indeterminado, podemos proceder de cualquiera de las tres formas anteriores, sin más que considerar como matriz del sistema a resolver la asociada al menor de orden r que define el rango de la matriz A del sistema inicial.

<u>Ejemplos</u>:

1. Discutiremos la existencia de solución según los valores de λ para el sistema:

$$\left.\begin{aligned} \lambda x + y + z &= \lambda^2 \\ x + y + \lambda z &= \lambda \\ x + y + 2\lambda z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

y resolveremos el sistema en los casos en que sea compatible.

Las matrices A y $(A\,|\,b)$ son $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & 2\lambda\end{pmatrix}$ $\quad (A\,|\,b)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1 & |\ \lambda^2\\ 1 & 1 & \lambda & |\ \lambda\\ 1 & 1 & 2\lambda & |\ 2\end{pmatrix}$

Se tiene que $|A|=\lambda\cdot(\lambda-1) \;\Rightarrow\; |A|=0 \Leftrightarrow \lambda=0$ ó $\lambda=1$.

Luego, $\text{rango}(A)=\text{rango}(A\,|\,b)=3=$ número de incógnitas $\forall\,\lambda\neq 0,1$, siendo el sistema compatible determinado. Resolviéndolo mediante la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}\lambda^2 & 1 & 1\\ \lambda & 1 & \lambda\\ 2 & 1 & 2\lambda\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{\lambda^3-2\lambda^2+3\lambda-2}{\lambda(\lambda-1)}=\frac{2-\lambda+\lambda^2}{\lambda}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}\lambda & \lambda^2 & 1\\ 1 & \lambda & \lambda\\ 1 & 2 & 2\lambda\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{\lambda^3-2\lambda^2-\lambda+2}{\lambda(\lambda-1)}=\frac{-2-\lambda+\lambda^2}{\lambda}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}\lambda & 1 & \lambda^2\\ 1 & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-\lambda^2+3\lambda-2}{\lambda(\lambda-1)}=\frac{2-\lambda}{\lambda}$$

$$\text{Si }\lambda=0 \Rightarrow (A\,|\,b)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & |\ 0\\ 1 & 1 & 0 & |\ 0\\ 1 & 1 & 0 & |\ 2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\text{rango}(A)=2 \text{ pues } \begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\neq 0\\[2ex] \text{rango}(A\,|\,b)=3 \text{ pues } \begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}\neq 0\end{cases}\Rightarrow$$

sistema incompatible.

$$\text{Si }\lambda=1 \Rightarrow (A\,|\,b)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & |\ 1\\ 1 & 1 & 1 & |\ 1\\ 1 & 1 & 2 & |\ 2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\text{rango}(A)=2 \text{ pues } \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\neq 0\\ \text{rango}(A\,|\,b)=2\end{cases}\Rightarrow$$

sistema compatible indeterminado. Para resolverlo consideramos las dos últimas ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x+y+2z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+z=1-y \\ x+2z=2-y \end{array}\right\} \Rightarrow (\text{Restando})\ z=1 \Rightarrow x=-y$$

2. Comprobaremos que el sistema

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \qquad\quad +10x_3=5 \\ 3x_1+x_2-4x_3=-1 \\ 4x_1+x_2+6x_3=1 \end{array}\right\}$$

es incompatible, transformándolo en un sistema triangular superior mediante transformaciones elementales de filas.

Trabajando a partir de la matriz ampliada del sistema obtenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 10 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & -1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-4F_1]{F_2-3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & -34 & -16 \\ 0 & 1 & -34 & -19 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & -34 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Se observa claramente que el rango de la matriz de coeficientes es 2, mientras que el rango de la matriz ampliada es 3.

Para un sistema compatible determinado, estas transformaciones elementales de filas habrían transformado el sistema inicial en otro equivalente cuya matriz sería triangular superior y regular. El sistema final se resolvería despejando x_3 de la tercera ecuación, posteriormente x_2 de la segunda ecuación y por último x_1 de la primera.

EJERCICIOS TEMA 1

1. Hallar el conjunto de matrices B, tales que :

a) Conmuten con la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) Cumplan la ecuación $A \cdot B = (0)$.

c) Cumplan la ecuación $A \cdot B = I$.

2. Probar que las matrices escalares de orden n conmutan con cualquier otra matriz cuadrada de orden n .

3. ¿Para que valores de α, la igualdad matricial $A \cdot (B - C) = (0)$ implica que $B = C$, siendo $A = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & \alpha - 2 \\ \alpha - 3 & \alpha - 4 \end{pmatrix}$?

4. Resolver el sistema matricial:

$$\left. \begin{array}{r} A + B = C \\ A + A^t = (0) \\ B - B^t = (0) \end{array} \right\} \quad \text{donde} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

5. Calcular la matriz A que verifica el sistema:

$$\begin{cases} A + A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 9/4 \\ 9/2 & 0 \end{pmatrix} \\ A + A^t = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \\ A^t + A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 17/4 \\ 5/2 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

6. Calcular la matriz incógnita X de la siguiente ecuación matricial:

$$X \cdot A + B = C$$

siendo: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$.

7. Calcular las matrices X e Y en el siguiente sistema matricial:

$$\begin{cases} X + A \cdot Y^t = B \\ X^t + Y \cdot C = D \end{cases}$$

siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$.

8. Demostrar que el conjunto de matrices $\{A \in E_{nxn}(\mathbb{R}) \,/\, A \text{ ortogonal}\}$ es grupo respecto del producto de matrices, es decir esta operación es ley de composición interna, cumple la propiedad asociativa, existe elemento neutro y elemento inverso.

9. Demostrar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) $\forall A \in E_{nxn}(\mathbb{R})$ simétrica, A^2 también es simétrica.

b) El conjunto $V = \left\{A \in E_{nxn}(\mathbb{R}) \,/\, A^t + A = (0)\right\}$ tiene estructura de grupo respecto de la suma de matrices, es decir, esta operación es ley interna y cumple las propiedades: asociativa, elemento neutro y elemento opuesto o simétrico.

10. Una Matriz A se denomina nilpotente de orden p, con $p \in \mathbb{N}$, si $A^p = (0)$ y $A^k \neq (0)$ para todo $k < p$ $(k \in \mathbb{N})$.

a) Estudiar si es cierto que toda matriz nilpotente es singular.

b) Demostrar que si A es nilpotente de orden p, entonces (I-A) es regular y además

$$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + \ldots + A^{p-1}.$$

11. Demostrar que el determinante de una matriz antisimétrica de orden impar es nulo.

12. a) Si B es antisimétrica, ¿qué puede decirse de la matriz $A^t \cdot B \cdot A$?

b) Si A y B son simétricas, ¿de qué tipo es la matriz $A \cdot B - B \cdot A$?

13. Hallar el conjunto de matrices X que verifican $A \cdot X = (X^t \cdot A)^t$ en los siguientes supuestos:

a) Siendo A simétrica y $A \cdot X$ cuadrada.

b) Siendo A antisimétrica regular y $A \cdot X$ cuadrada.

14. a) Demostrar que las matrices $(\mathrm{I}+\mathrm{A})$ y $(\mathrm{I}-\mathrm{A})$ conmutan.

    b) Demostran que tambien conmutan $(\mathrm{I}-\mathrm{A})$ e $(\mathrm{I}+\mathrm{A})^{-1}$ siempre que $(\mathrm{I}+\mathrm{A})$ sea regular

15. Sea A una matriz cuadrada de orden n. Demostrar que :

    a) $\mathrm{A}+\mathrm{A}^{\mathrm{t}}$ es una matriz simétrica

    b) $\mathrm{A}-\mathrm{A}^{\mathrm{t}}$ es una matriz antisimétrica.

    c) Existen matrices únicas S (matriz simétrica) y T (matriz antisimétrica) cumpliendo que $\mathrm{A}=\mathrm{S}+\mathrm{T}$.

16. Sabiendo que A y B son dos matrices simétricas invertibles comprobar si se cumple o no la siguiente igualdad

$$\left((\mathrm{B}\cdot\mathrm{A})^{\mathrm{t}}-(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}^{\mathrm{t}})^{-1}\right)\left((\mathrm{A}\cdot\mathrm{B})^{-1}-(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}^{-1})^{\mathrm{t}}\right)=\mathrm{I}-\mathrm{A}^{2}-(\mathrm{B}^{-1}\cdot\mathrm{A}^{-1})^{2}+(\mathrm{B}^{-1})^{2}$$

17. Demostar la siguiente igualdad sin desarrollar los determinantes:

$$\begin{vmatrix}1&6&9\\1&8&2\\0&4&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1&1\\5&6&8\\4&9&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&6&9\\1&8&2\\1&9&5\end{vmatrix}$$

18. Sea A una matriz cuadrada de orden n cuyo determinante vale Δ. Sea realizan las siguientes transformaciones:

    1. Se multiplica por α la matriz A.
    2. Se cambian entre si las dos primeras filas de A .
    3. Se cambian entre si las dos primeras columnas de A.
    4. Se divide entre $\beta\neq 0$ una de las filas y se multiplica por γ una de las columnas.
    5. Desde $i=1$ hasta $(n-1)$ sustituimos cada fila F_i de A por $\mathrm{F}_i+\mathrm{F}_{i+1}$.
    6. Trasponemos la matriz.

Obtener el valor del determinante de la matriz obtenida en cada uno de los apartados.

19. Sea A una matriz singular ¿cuánto vale $\mathrm{A}\cdot\mathrm{A}^{a}$ (A^{a} : matriz adjunta de A)? ¿Y si A es una matriz regular?.

20. Calcular el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$$

21. Hallar el valor del determinante de A_n, (n natural):

$$A_n = \begin{pmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ n & 2 & 1 & \dots & 1 \\ n & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 1 & 1 & \dots & n \end{pmatrix}_{nxn}$$

22. Calcular el determinante de orden n:

$$\begin{vmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$$

23. Calcular el valor del determinante de la matriz de orden n cuyo elemento genérico es:

$$a_{ij} = \begin{cases} x & \text{si } i = j \\ a & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

24. Calcular las inversas de las siguientes matrices particionándolas en bloques:

$$\text{a)}\ M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)}\ P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

25. a) Calcular la inversa, M^{-1}, de la de la matriz por bloques $M = \begin{pmatrix} I_n & A \\ (0) & I_m \end{pmatrix}$. ¿Es necesario que A sea regular para que exista M^{-1} ?.

b) Hallar la inversa de $P = \begin{pmatrix} B & (0) \\ (0) & C \end{pmatrix}$, donde B y C son matrices regulares de órdenes respectivos *n y m*.

26. Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} I & B \\ (0) & A \end{pmatrix}$, donde $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$. Calcular M^{-1}.

27. Realiza sobre la matriz $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\-2&0&-4\\0&2&2\\1&1&1\end{pmatrix}$ las transformaciones elementales siguientes, así como sus inversas:

a) Intercambiar las filas (columnas) primera y tercera.

b) Multiplicar la segunda fila (columna) por (-3) .

c) Sumar a la segunda fila (columna), la tercera multiplicada por (-2).

28. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\6&4&5\\4&1&3\end{pmatrix}$, encontrar tres matrices elementales P_1, P_2, P_3 tales que $P_3\cdot P_2\cdot P_1\cdot A = U$, siendo U una matriz triangular superior.

29. Discutir, y resolver cuando sea posible, los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x+y+2z=1\\ x+2y+z=1\\ 2x+y+z=1\\ 2x+3y+3z=2\end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y+3z+t=2\\ x-y+z-t=0\\ x+3y-z+2t=-2\\ 3x+y+z=2\end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y+z=1\\ x+2y+2z=0\\ x+2y+3z=k\end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x-2y+z=2\\ x-y+z=1\\ x+y+kz=2\end{cases}$ e) $\begin{cases} x+2y+z=1\\ 2x+y+3z=-4\\ x-y+(a+2)z=-3a-5\\ 4x+2y+(a+6)z=-3a^2-8\end{cases}$ f) $\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-a&3\\3&-3&4\\5&-(a+b)&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\7\\8+b\end{pmatrix}$

SOLUCIONES EJERCICIOS TEMA 1

1. a) $B=\begin{pmatrix} a & 2c/3 \\ c & a+c \end{pmatrix} \quad a,c\in\mathbb{R}$

   b) $B=(0)$

   c) $B=A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

3. $\forall\alpha\in\mathbb{C}$

4. $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

5. $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

6. $X=\begin{pmatrix} -3/4 & -1 & 1/2 \\ 4 & -7/3 & -5 \end{pmatrix}$

7. $X=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad Y=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

9. a) Cierto b) Cierto

10. a) Cierto

12. a) Antisimétrica.

    b) Antisimétrica.

13. a) $\forall X\in E_{nxn}(\mathbb{R})$

    b) $X=(0)\in E_{nxn}(\mathbb{R})$

16. La igualdad es falsa

18. 1) $\alpha^n\Delta$
    2) $-\Delta$
    3) $-\Delta$
    4) $\dfrac{\gamma}{\beta}\Delta$

5) Δ
6) Δ

19. (0); $|A|\cdot I$

20. x^2z^2

21. $n!$

22. 0

23. $\left[x+(n-1)a\right](x-a)^{n-1}$

24. $M^{-1}=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ $P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

25. a) $M^{-1}=\begin{pmatrix} I_n & -A \\ (0) & I_m \end{pmatrix}$. No es necesario que A sea regular.

b) $P^{-1}=\begin{pmatrix} B^{-1} & (0) \\ (0) & C^{-1} \end{pmatrix}$

26. $M^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$

27. a) $F_{13}(A)=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $C_{13}(A)=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $-3F_2(A)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $-3C_2(A)=\begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

c) $(F_2 - 2F_3)(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -8 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad (C_2 - 2C_3)(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 8 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

28. $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

29. a) Sistema compatible determinado: $x = y = z = \frac{1}{4}$.

b) Sistema incompatible.

c) $\forall k \in \mathbb{R}$: Sistema compatible determinado: $x = 2, \quad y = -1 - k, \quad z = k$

d) $\begin{cases} k \neq -3: \text{Sistema compatible determinado: } x = \frac{3}{k+3}, \quad y = \frac{3-k}{k+3}, \quad z = \frac{3}{k+3} \\ k = -3: \text{Sistema incompatible.} \end{cases}$

e) $a \neq 0$ y $a \neq 1$: Incompatible.

$a = 0$: compatible indeterminado: $x = -3 - \frac{5\lambda}{3}, \quad y = 2 + \frac{\lambda}{3}, \quad z = \lambda$

$a = 1$: compatible determinado: $x = 2, \quad y = 1, \quad z = -3$

f) $a = 4, \quad b = 3$: compatible indeterminado: $x = \frac{8}{3} - \frac{7z}{6}, \quad y = \frac{1}{3} + \frac{z}{6}, \quad \forall z \in \mathbb{R}$

$a = 4, \quad b \neq 3$: compatible determinado: $x = 12, \quad y = -1, \quad z = -8$

$a \neq 4, \quad b = 3$: compatible determinado: $x = 5, \quad y = 0, \quad z = -2$

$a \neq 4, \quad b \neq 3$: Incompatible.

Tema 2

ESPACIOS VECTORIALES

2.0. INTRODUCCION. VECTORES EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO.

Definición. Se llama *vector geométrico* a todo segmento orientado.

Puesto que un segmento viene determinado por dos puntos A y B, el vector quedará perfectamente definido si nos dan estos dos puntos y un cierto orden. El primer punto se llama *origen* y el segundo recibe el nombre de *extremo*.

Notación: Normalmente $\vec{v}$ = AB representa un vector geométrico de origen A y extremo B.

Definición. Definida una unidad de medida, se llama *módulo del vector* AB, a la longitud del vector AB, lo cual se representa por $|AB|$.

Definición. Se dice que dos vectores tienen la *misma dirección* si están situados sobre la misma recta o en rectas paralelas.

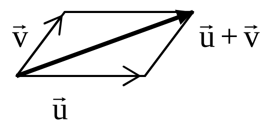
Definición. Se define como *sentido* del vector AB el que determinan sobre la recta r_{AB} los puntos A y B tomados en este orden.

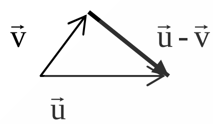
Definición. **Equipolencia de vectores.** Se dice que dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son *equipolentes* si tienen igual módulo dirección y sentido. Se representa $\vec{u} <> \vec{v}$.

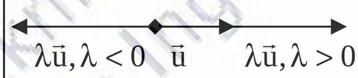
Proposición. La equipolencia de vectores es una *relación de equivalencia*.

Esta relación de equivalencia efectúa en el conjunto de todos los vectores una partición en clases de equivalencia. Como representante de cada clase de equivalencia se elige el vector con origen en el origen de coordenadas, el cual recibe el nombre de *vector libre*. A partir de ahora trabajaremos con el conjunto de los vectores libres, que se denota por V.

Antes de definir axiomáticamente el concepto de espacio vectorial, se trabaja con el conjunto de los vectores libres (del plano o del espacio). Se definen las operaciones: “suma de vectores (+)”, “resta de vectores(-)” y “producto de un vector por un escalar λ de $\mathbb{R}$”, cuyas interpretaciones geométricas son las siguientes:







Algunas propiedades de estas operaciones son:

1.- $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$, $(\vec{u}+\vec{v}) \in V$ (ley de composición interna).

2.- $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$, $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ (propiedad asociativa).

3.- Denotando por $\vec{0}$ (vector nulo) el vector 00, se tiene de inmediato

$$\forall \vec{u} \in V, \exists ! \vec{0} \in V \ / \ \vec{u}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{u} = \vec{u}$$

4.- Denotando por $-\vec{u}$ =BA al vector opuesto o simétrico del $\vec{u}$ =AB, es fácil deducir que $\forall \vec{u} \in V, \exists (-\vec{u}) \in V \ / \ \vec{u}+(-\vec{u}) = (-\vec{u})+\vec{u} = \vec{0}$.

5.- $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$, $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$.

De donde se concluye que (V,+) tiene estructura de *grupo abeliano* o *conmutativo.*

Con respecto la operación externa se cumple:

1.- $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \wedge \forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\quad \alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha \cdot \vec{u} + \alpha \cdot \vec{v}$.

2.- $\forall \vec{u} \in V \wedge \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\quad (\alpha+\beta) \cdot \vec{u} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{u}$.

3.- $\forall \vec{u} \in V \wedge \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\quad (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{u} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{u})$.

4.- $\forall \vec{u} \in V \quad 1 \in \mathbb{R} \ / \quad 1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

Con estas propiedades se puede afirmar que $(V,+,\cdot)$ tiene estructura de *espacio vectorial real.*

2.1. ESTRUCTURA DE ESPACIO VECTORIAL.

Las propiedades que acabamos de ver no sólo las cumplen los vectores geométricos, hay una familia muy numerosa de conjuntos que las verifican, denominándose a éstos espacios vectoriales.

Definición. Sea E un conjunto no vacío cuyos elementos se llaman *vectores* (**x**, **y**, **z**,...), y $\mathbb{K}$ un cuerpo (por ejemplo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) cuyos elementos se denominan *escalares* (α, β, γ,...). Definimos en E dos leyes de composición: una interna, que denotaremos por (+) y denominaremos "Suma o adición de vectores de E", y otra externa, a la que llamaremos "Producto de un vector por un escalar". En estas condiciones, se dice que E es un *espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$ si se verifican las siguientes condiciones:

I) Para la ley interna "Suma de vectores de E", el par (E,+) es un Grupo Abeliano, por lo que cumple las propiedades siguientes:

1) $\forall\ \mathbf{x},\mathbf{y} \in E \qquad \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ Conmutatividad

2) $\forall\ \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in E \qquad (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ Asociatividad

3) $\forall\ \mathbf{x} \in E \quad \exists!\mathbf{0} \in E \ / \ \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$ Elemento neutro

4) $\forall\ \mathbf{x} \in E \quad \exists\ (\mathbf{-x}) \in E \ / \quad \mathbf{x} + (\mathbf{-x}) = (\mathbf{-x}) + \mathbf{x} = \mathbf{0}$ Elemento opuesto

II) Para la ley de composición externa, "Producto de un vector por un escalar", que asocia a cada escalar α, y a cada vector **x** de E un vector único, llamado producto de α y **x**, y que se representa por $\alpha\mathbf{x}$ o $\mathbf{x}\alpha$, se satisfacen las siguientes propiedades:

1) $\forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E \wedge \forall\ \alpha \in \mathbb{K} \qquad \alpha\,(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$

2) $\forall\ \mathbf{x} \in E \wedge \forall\ \alpha,\beta \in \mathbb{K} \qquad (\alpha+\beta)\,\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$

3) $\forall\ \mathbf{x} \in E \wedge \forall\ \alpha,\beta \in \mathbb{K} \qquad (\alpha\beta)\,\mathbf{x} = \alpha\,(\beta\mathbf{x})$

4) $\forall\ \mathbf{x} \in E, \qquad 1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ (siendo 1 el elemento neutro del producto en $\mathbb{K}$).

Un *espacio vectorial real* es un espacio vectorial en el que los escalares pertenecen al cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales, y un *espacio vectorial complejo* es un espacio vectorial en el que los escalares pertenecen al cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos (en nuestro caso, trabajaremos preferentemente sobre espacios vectoriales reales).

Ejemplos de Espacios Vectoriales.

Cada uno de los siguientes ejemplos es un espacio vectorial con el conjunto apropiado de escalares ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), con las apropiadas definiciones de suma de vectores y de producto de un vector por un escalar.

a) El espacio vectorial real de todos los vectores geométricos V en el espacio físico de tres dimensiones con las operaciones suma de vectores y producto por un escalar.

b) El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es un espacio vectorial sobre sí mismo.

c) $\mathbb{R}^n$ es el espacio vectorial real de todas las matrices columna *nx1* reales, siendo la suma de vectores en este caso la suma de matrices, y el producto el producto por un escalar el usual para matrices.

d) $\mathbb{C}^n$ es el espacio vectorial complejo de todas las matrices columna nx1 complejas, con las operaciones definidas como en $\mathbb{R}^n$.

e) El conjunto de funciones E={f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$}, es decir, las funciones reales de variable real, dotado de las operaciones:

Suma de funciones: $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Producto por un escalar: $(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad \lambda \in \mathbb{R}$

tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. El elemento neutro de la suma es la función nula.

f) El conjunto de polinomios de grado menor o igual que *n*, de variable real x, $\mathbb{P}_n$:

$\mathbb{P}_n = \{ \ p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \ \ / \ a_i \in \mathbb{R} \ \}$, con las operaciones:

suma de polinomios:

$$\left.\begin{array}{l} p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \\ q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \end{array}\right\}$$

$$p(x) + q(x) = (a_n+b_n)\, x^n + (a_{n-1}+b_{n-1})\, x^{n-1} + \ldots + (a_1+b_1)\, x + (a_0+b_0) \in \mathbb{P}_n$$

producto de un polinomio por un escalar:

$$\left.\begin{array}{l} p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{array}\right\}$$

$$\lambda p(x) = (\lambda a_n)\, x^n + (\lambda a_{n-1})\, x^{n-1} + \ldots + (\lambda a_1)\, x + \lambda\, a_0 \in \mathbb{P}_n$$

es espacio vectorial real.

g) El conjunto de matrices $E_{mxn}(\mathbb{R})$ es espacio vectorial real; $E_{mxn}(\mathbb{C})$ es espacio vectorial complejo.

<u>Consecuencias de la definición de Espacio Vectorial</u>

Veamos algunas de las consecuencias que se deducen de la definición de espacio vectorial:

1) $\forall \mathbf{x} \in E \quad 0\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (vector nulo).

Demostración. $\alpha\mathbf{x} = (\alpha + 0)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + 0\mathbf{x}$ de donde se deduce que $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (vector nulo).

2) $\forall \mathbf{x} \in E$ y $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ se tiene que $(-\alpha)\mathbf{x} = -\alpha\mathbf{x}$.

Demostración. Como $[(-\alpha)+\alpha]\, \mathbf{x} = 0\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad (-\alpha)\mathbf{x} + \alpha\mathbf{x} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; (-\alpha)\mathbf{x} = -\alpha\mathbf{x}$.

En particular $(-1)\mathbf{x} = -(1\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$.

3) $\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Demostración. $\alpha\mathbf{0} + \alpha\mathbf{0} = \alpha(\mathbf{0}+\mathbf{0}) = \alpha\mathbf{0}$, sumando $-\alpha\mathbf{0}$ en las dos partes de la igualdad, se obtiene que $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

4) La igualdad $\alpha\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sólo se verifica si $\alpha = 0$ ó si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Demostración. Supongamos que $\alpha\mathbf{x} = \mathbf{0}$, pueden pasar dos cosas, que $\alpha = 0$ o que $\alpha \neq 0$. Si $\alpha \neq 0$ existirá $\alpha^{-1} \in \mathbb{K}$ / $\alpha\,\alpha^{-1} = 1$. Multiplicando en $\alpha\mathbf{x} = \mathbf{0}$ por α^{-1} se obtiene:

$$\alpha^{-1}\alpha\,\mathbf{x} = \alpha^{-1}\mathbf{0} \overset{3)}{=} \mathbf{0} \;\Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}\,.$$

De donde se deduce que, ó $\alpha = 0$ ó $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

5) i) $\forall \alpha \neq 0 \quad \alpha\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{y}$

ii) $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad \alpha\mathbf{x} = \beta\mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta$

Demostración. i) De la igualdad $\alpha\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y} \Rightarrow \alpha\mathbf{x} - \alpha\mathbf{y} = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \mathbf{0}$, y de 4) se tiene que $\alpha = 0$ ó $\mathbf{x}-\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Pero como estamos suponiendo que $\alpha \neq 0$, debe verificarse que $\mathbf{x}-\mathbf{y} = \mathbf{0}$; luego $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

ii) De la igualdad $\alpha\mathbf{x} = \beta\mathbf{x} \Rightarrow \alpha\mathbf{x} - \beta\mathbf{x} = \mathbf{0}$, y de 4) $\alpha - \beta = 0$ ó $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, pero como estamos suponiendo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, debe cumplirse $\alpha - \beta = 0$, luego $\alpha = \beta$.

2.2. SUBESPACIOS VECTORIALES

Muchos espacios vectoriales están relacionados entre sí, por ejemplo cada polinomio de grado ≤ 3 es a su vez un polinomio de grado ≤ 4, ≤ 5,..., y a la vez una función continua definida sobre $\mathbb{R}$, siendo las operaciones de cada uno de estos espacios vectoriales las mismas. Esta situación es muy común y muy importante en nuestro estudio de los espacios vectoriales.

Definición. Sean E y F espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, si F es un subconjunto no vacío de E y las operaciones que hacen de F un espacio vectorial son las mismas que las que hacen a E espacio vectorial, se dice que F es un subespacio vectorial de E.

Para establecer si un subconjunto F de un espacio vectorial E es subespacio vectorial o no no es necesario comprobar que se cumplen los axiomas de espacio vectorial como nos indica el siguiente teorema:

Teorema. Sea E espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. La condición necesaria y suficiente para que un subconjunto F (no vacío) de E sea subespacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ es que contenga al vector nulo de E y sea estable para las operaciones suma de vectores y producto por un escalar; es decir

I) $\forall\, \mathbf{x},\mathbf{y} \in F \quad \mathbf{x}+\mathbf{y} \in F$ ($\Rightarrow$ F estable para la suma).

II) $\forall \mathbf{x} \in F \wedge \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \alpha\mathbf{x} \in F$ ($\Rightarrow$ F estable para el producto por un escalar).

Demostración. Tenemos que demostrar que $F \subset E$, $F \neq \emptyset$, es subespacio vectorial sobre $\mathbb{K} \Leftrightarrow$ [$\mathbf{0} \in F$ (por tanto, $F \neq \emptyset$) y se cumplen las propiedades I) y II)].

$\Rightarrow$) Esta implicación es evidente.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\mathbf{0} \in F$ y se cumplen I) y II), y veamos que entonces también se cumplen el resto de las propiedades para que F sea espacio vectorial.

Para la suma:

1) Por I) la ley de composición es interna en F, pues $\forall \mathbf{x,y} \in F \quad \mathbf{x}+\mathbf{y} \in F$.
2) Asociatividad: se cumple por cumplirse en E.
3) Conmutatividad: se cumple por cumplirse en E.
4) $\forall \mathbf{x} \in F \ \exists ! \mathbf{0} \in F / \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ (se cumple pues el $\mathbf{0} \in F$, ya que se ha exigido)
5) Comprobemos si $\forall \mathbf{x} \in F \quad \exists \, -\mathbf{x} \in F \ / \ \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

   si $\mathbf{x} \in F \Rightarrow$ como $-\mathbf{x} = (-1)\,\mathbf{x} \in F$, por ser $(-1) \in \mathbb{K}$ y por verificarse II).

El resto de los axiomas correspondientes a las propiedades del producto por un escalar se cumplen siempre en F por cumplirse en E y $F \subset E$. ■

Observaciones:

1. La condición exigida a un subespacio vectorial F de contener al vector **0**, es equivalente a exigir que $F \neq \emptyset$.

2. El vector nulo **0** pertenece a todos los subespacios vectoriales de E.

3. En todo espacio vectorial E, el conjunto $\{\mathbf{0}\}$ es subespacio vectorial de E.

<u>Ejemplos.</u>

1.- Consideremos un sistema de ecuaciones lineales homogéneo y real, que en forma matricial se expresa como $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, siendo **A** una matriz de orden *mxn*, y tanto **x** como **0** matrices columna de órdenes respectivos *nx1* y *mx1*.

Sea S el conjunto de soluciones del sistema, que serán vectores de $\mathbb{R}^n$, es decir,

$$S = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} / \mathrm{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{0} \right\} \subset \mathbb{R}^n .$$

Veamos que S es un subespacio vectorial real de $\mathbb{R}^n$. Para demostrarlo hacemos uso del teorema anterior:

Si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{Ax} = \mathbf{A0} = \mathbf{0}$, luego $\mathbf{0} \in$ F.

I) $\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in S \Rightarrow \mathbf{x}+\mathbf{y} \in S$?.

Sean $\mathbf{x},\mathbf{y} \in S \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{Ay} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}+\mathbf{y} \in S$.

II) $\forall\, \mathbf{x} \in S$ y $\forall\, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha\mathbf{x} \in S$?.

Sean $\mathbf{x} \in S$ y $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathbf{A}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{Ax} = \alpha\mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha\mathbf{x} \in S$.

Luego S es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

2.-El conjunto $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} / x, z \in \mathbb{R} \right\}$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$.

3.- Sea $F = \{A \in E_{3x3}(\mathbb{R}) \,/\, A = A^t\}$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial real $E_{3x3}(\mathbb{R})$.

2.3. DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL.

En las aplicaciones necesitamos ser capaces de calcular y manipular vectores; esto requiere algún tipo de representación concreta de vectores. Por ejemplo, el subespacio F de $\mathbb{P}_3$ formado por los polinomios que cumplen

$$p(x) = p(0) + 2p(1)\, x + p(0)\, x^2 + p(1)\, x^3 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

es un subespacio vectorial que no puede manejarse fácilmente con esa caracterización; los cálculos con F se simplifican cuando se sabe que cada elemento de F se puede escribir como $\lambda(1 - 2x + x^2 - x^3) / \lambda \in \mathbb{R}$. Por esta razón es importante poder expresar el elemento general de un espacio vectorial como combinación lineal de vectores especiales del espacio.

Definición. Sea E espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Sea S = {$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_q$}* un sistema finito de vectores de E, se dice que el vector $\mathbf{x} \in E$ es *combinación lineal* de los vectores de S si existen *q* escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_q \in \mathbb{K}$ tales que:

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + ... + \alpha_q \mathbf{e}_q.$$

Proposición. Sea $S=\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_q\} \subset E$. Todos los vectores que se pueden formar por combinación lineal de los vectores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_q$ pertenecen a E y, además, forman un subespacio vectorial de E denominado *subespacio generado por* S, y se representa como Span(S)

$$\text{Span(S)} = \{ \mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + ... + \alpha_q \mathbf{e}_q \ / \ \alpha_i \in \mathbb{K} \ , \ i = 1,2,...,q \} \subset E.$$

También se dice que S es un *sistema generador* de Span(S), y es el menor subespacio vectorial de E que contiene a S.

Demostración. E es espacio vectorial y Span(S)$\subset$E, veamos que Span(S) cumple la condición necesaria y suficiente para ser subespacio vectorial de E.

$\mathbf{0} \in$ Span(S) pues el vector nulo puede escribirse como la combinación lineal:

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + ... + 0\mathbf{e}_q$$

I) $\forall \ \mathbf{x},\mathbf{y} \in$ Span(S) $\Rightarrow$ $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in$ Span(S) ?

Sean $\mathbf{x},\mathbf{y} \in$ Span(S) $\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + ... + \alpha_q\mathbf{e}_q \\ \mathbf{y} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + ... + \beta_q\mathbf{e}_q \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x}+\mathbf{y} = (\alpha_1+\beta_1)\mathbf{e}_1 + (\alpha_2+\beta_2)\mathbf{e}_2 + ... + (\alpha_q+\beta_q)\mathbf{e}_q \in \text{Span(S)}.$$

II) $\forall \ \mathbf{x} \in$ Span(S) $\wedge$ $\forall \ \alpha \in \mathbb{K}$ $\Rightarrow$ $\alpha\mathbf{x} \in$ Span(S) ?

Sea $\mathbf{x} \in$ Span(S) y sea $\alpha \in \mathbb{K}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + ... + \alpha_q\mathbf{e}_q$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \alpha\mathbf{x} = (\alpha\alpha_1)\mathbf{e}_1 + (\alpha\alpha_2)\mathbf{e}_2 + ... + (\alpha\alpha_q)\mathbf{e}_q \quad \Rightarrow \quad \alpha\mathbf{x} \in \text{Span(S)}.$$

Además, todo subespacio que incluya a S ha de contener a las combinaciones lineales de los vectores de S, esto es, ha de incluir a Span(S). Como, además, Span(S) es subespacio vectorial e incluye a S, se concluye de todo ello que Span(S) es el menor subespacio vectorial que incluye a S. ■

* S es un conjunto de vectores dado en un cierto orden.

Cuando S engendra a todo el espacio vectorial E se dice que S es una *familia total de vectores* para E.

Ejemplo.

En el espacio vectorial real de las matrices cuadradas reales de orden 2, $E_{2x2}(\mathbb{R})$, consideremos el conjunto S = { $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ } $\subset E_{2x2}(\mathbb{R})$.

El subespacio vectorial F = Span(S) engendrado por el sistema de generadores S es el conjunto de matrices de $E_{2x2}(\mathbb{R})$ que se pueden escribir como combinación lineal de las matrices de S, es decir F = Span(S) = $\left\{ A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \lambda \end{pmatrix} / \alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$, es decir, F es el subespacio vectorial de $E_{2x2}(\mathbb{R})$ formado por las matrices simétricas reales de orden 2.

Observación. Cuando S es un sistema con infinitos vectores de un espacio E, se llama Span(S) al conjunto de todas las combinaciones lineales de cualquier cantidad finita de vectores de S. Se verifica que Span(S) es un subespacio vectorial de E; Span(S) es el menor subespacio vectorial de E que contiene a S y se le llama subespacio generado por S.

Definición. Sean S = {$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_q$} y T = {$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_q$} dos sistemas de vectores del espacio vectorial E, se dice que S y T son *sistemas equivalentes* si engendran el mismo subespacio, o sea, si Span(S) = Span(T).

Ejemplo.

En el espacio vectorial real de las matrices cuadradas reales de orden 2, $E_{2x2}(\mathbb{R})$, consideremos el conjunto S = { $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ } y el conjunto T = { $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 11 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ }. El subespacio vectorial engendrado por el sistema de generadores S y el engendrado por T es el subespacio vectorial de $E_{2x2}(\mathbb{R})$ formado por las matrices simétricas reales de orden 2. Por tanto S y T son sistemas equivalentes.

Definiciones. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sea S = { $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ } un sistema finito de vectores de E. Se dice que S es una *familia* o *sistema libre* de vectores o también que los vectores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ son *linealmente independientes* si la relación

$$\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + ... + \alpha_n \mathbf{e}_n = \mathbf{0}$$

se cumple sólo cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

En el caso de que existan *n* escalares α_1, α_2, ... , α_n *no todos nulos,* tales que

$$\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + ... + \alpha_n \mathbf{e}_n = \mathbf{0}$$

se dice que los vectores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ son *linealmente dependientes* o que S es un *sistema ligado.*

Se dice que un vector *depende linealmente de otros* si aquél es igual a una combinación lineal de éstos.

Observación. Sea S una familia de infinitos vectores de un espacio vectorial E. Se dice que S es *libre*, si toda subfamilia finita extraída de ella es libre.

Los conceptos de dependencia e independencia lineal son cruciales en álgebra lineal, ya que conducen a nuevas formas de estudiar los conceptos de rango de matrices y de existencia y unicidad de soluciones de sistemas de ecuaciones, constituyen la clave para entender cómo representar elementos de espacios vectoriales de una manera simple, nos ayudan a entender las dificultades numéricas que pueden aparecer en el cálculo de soluciones a problemas aplicados, etc. Así, es absolutamente esencial manejar estos conceptos y ser capaces de determinar si un conjunto de vectores es linealmente independiente.

Ejemplo. Estudiar si S = $\left\{ \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \right\}$, es o no familia libre de vectores en $\mathbb{R}^4$.

Solución. Para ver si la familia S es libre hay que considerar la combinación lineal

$$\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_3 + \alpha_4 \mathbf{e}_4 = \mathbf{0}.$$

Ésta da lugar al sistema homogéneo de cuatro incógnitas siguiente:

$$\begin{array}{rrrrl} \alpha_1 & & & +\ \alpha_4 & = 0 \\ & 2\alpha_2 + & \alpha_3 & & = 0 \\ & & \alpha_3 & -\ 2\alpha_4 & = 0 \\ & 6\alpha_2 + & 3\alpha_3 & & = 0 \end{array}$$

cuya matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ tiene rango tres. Por lo tanto, al tratarse de un sistema homogéneo y ser el rango de la matriz de coeficientes menor que el número de incógnitas (que es cuatro), existe solución distinta de la nula. Resolviendo el sistema resultante de eliminar la última ecuación obtenemos como soluciones:

$$\alpha_1 = -\alpha_4, \qquad \alpha_2 = -\alpha_4 \qquad \alpha_3 = 2\,\alpha_4, \qquad \alpha_4 \in \mathbb{R}.$$

Así por ejemplo, si $\alpha_4 = 1$, entonces $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = -1$ y $\alpha_3 = 2$, con lo cual resulta:

$$-\mathbf{e}_1 + (-1)\,\mathbf{e}_2 + 2\,\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 = 0$$

es decir, estos vectores son linealmente dependientes.

‣ En general, si se forma una matriz cuyas columnas son las componentes de los q vectores de un sistema S de vectores de $\mathbb{R}^n$, el rango r de dicha matriz nos indica el número de vectores independientes del conjunto S. Si $r = q$, entonces S es una *familia libre* de vectores. Mientras que si $r < q$, entonces existen $q\text{-}r$ vectores dependientes de los r y el conjunto S *no es libre*. Esta propiedad es válida utilizando componentes de los vectores de $\mathbb{R}^n$ o “coordenadas” de vectores de cualquier otro espacio vectorial de dimensión finita (concepto que se definirá más adelante).

<u>Ejemplo</u>. Sea el espacio vectorial real $E = \{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f \text{ continua} \}$, y considérense las siguientes familias finitas de vectores de E :

a) $S = \{1, x, x^2\}$ b) $U = \{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\}$ c) $T = \{1, x, x^2, x^2-2x\}$.

Estudiar si S, T y U son o no libres.

a) Supongamos que

$$\alpha_1 1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 = \mathbf{0},$$

donde **0** es la función que vale cero cualquiera que sea x. Esta igualdad se ha de cumplir para todo x real, en particular se ha de cumplir para x = 0, x = 1 y para x = -1, de donde se obtienen las ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2(0) + \alpha_3(0)^2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2(1) + \alpha_3(1)^2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2(-1) + \alpha_3(-1)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

este sistema admite como solución única $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, es decir, la familia S es libre.

b) La familia U = $\{1, x, x^2, ..., x^{n-1}\}$ también es libre, ya que si suponemos que

$$\alpha_1 1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + ... + \alpha_n x^{n-1} = \mathbf{0}$$

donde **0** es la función que vale cero cualquiera que sea x. Esta igualdad se ha de verificar para todo x real, lo cual implica que $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$ (esto se puede demostrar cogiendo puntos y resolviendo el sistema, ó teniendo en cuenta que el único polinomio de grado n-1 que vale cero en todo $\mathbb{R}$ es el polinomio nulo). Luego U es libre.

c) Por el contrario, si consideramos la familia finita de E, T = $\{1, x, x^2, x^2-2x\}$, y suponemos que

$$\alpha_1 1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 (x^2-2x) = \mathbf{0}$$

$$\alpha_1 1 + (\alpha_2-2\alpha_4) x + (\alpha_3+\alpha_4) x^2 = \mathbf{0}.$$

Esta relación se verifica cuando $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 2\alpha_4$ y $\alpha_3 = -\alpha_4$, $\alpha_4 \in \mathbb{R}$ (por ejemplo, para $\alpha_4 = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 2$ y $\alpha_3 = -1$, escalares no todos nulos). Luego T es un conjunto de vectores de E linealmente dependientes.

Observaciones:

- Si uno de los vectores de un sistema es el vector nulo, entonces el sistema es linealmente dependiente.

- Si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, entonces el sistema S = $\{\mathbf{u}\}$ es linealmente independiente. Un sistema $\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}$, formado por dos vectores, es linealmente dependiente sí y sólo si uno de ellos es proporcional al otro.

- Si un sistema de vectores S es linealmente dependiente, entonces también lo es cualquier sistema que resulte de añadir algún vector a S.

- Si un sistema de vectores S es linealmente independiente, entonces también lo es cualquier sistema que resulte de prescindir de alguno de los vectores de S.

Propiedades de la dependencia e independencia.

Sea E espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$:

1. Un sistema de vectores S = $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_p\}$ es linealmente dependiente sí y solo si alguno de sus vectores depende linealmente de los demás.

2. Si un vector **w** depende linealmente de los vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_p$ y éstos dependen a su vez de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_q$, entonces **w** depende de éstos últimos.

3. Dos sistemas de vectores S = $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_p\}$ y T = $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_p\}$ son equivalentes, o sea Span (S) = Span (T), sí y sólo si todo vector de uno de los sistemas depende linealmente de los vectores del otro y recíprocamente.

4. Si S es un sistema linealmente independiente de vectores y **v** es un vector que no depende de los vectores de S, entonces el sistema $S \cup \{\mathbf{v}\}$ también es linealmente independiente.

Demostración.

1. $\Leftarrow$) Supongamos que en el conjunto $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_p\}$ hay un vector, digamos el $\mathbf{e}_1$, combinación lineal de los demás. Entonces se tiene

$$\mathbf{e}_1 = \alpha_2\, \mathbf{e}_2 + ... + \alpha_p\, \mathbf{e}_p$$

o equivalentemente

$$(-1)\,\mathbf{e}_1 + \alpha_2\,\mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_p\mathbf{e}_p = \mathbf{0}$$

por tanto $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es linealmente dependiente, pues los coeficientes no son todos nulos.

$\Rightarrow$) Recíprocamente, si $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es linealmente dependiente, la combinación lineal nula $\alpha_1\,\mathbf{e}_1 + \alpha_2\,\mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_p\,\mathbf{e}_p = \mathbf{0}$ se cumple con algún coeficiente diferente de cero. Supongamos que el coeficiente no nulo es α_1. Entonces

$$\mathbf{e}_1 = \frac{-1}{\alpha_1}(\alpha_2\,\mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_p\mathbf{e}_p).$$

2. Supongamos que un vector $\mathbf{w}$ depende linealmente de los vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p$ y éstos dependen a su vez de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_q$, entonces existen unos escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \mu_{11}, \mu_{12}, \ldots, \mu_{1p}, \mu_{21}, \mu_{22}, \ldots, \mu_{2p}, \ldots, \mu_{q1}, \mu_{q2}, \ldots, \mu_{qp}$ en $\mathbb{K}$ tales que

   $$\mathbf{w} = \alpha_1\,\mathbf{e}_1 + \alpha_2\,\mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_q\mathbf{e}_p = \sum_{i=1}^{p}\alpha_i\mathbf{e}_i \quad \text{y} \quad \mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^{q}\mu_{jk}\mathbf{v}_k \quad \text{para } j=1,2,\ldots,p,$$

   de donde

   $$\mathbf{w} = \alpha_1\,\mathbf{e}_1 + \alpha_2\,\mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_q\mathbf{e}_p = \sum_{i=1}^{p}\alpha_i\left(\sum_{k=1}^{q}\mu_{ik}\mathbf{v}_k\right) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q}\alpha_i\mu_{ik}\mathbf{v}_k =$$

   $$= \sum_{k=1}^{q}\left(\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\mu_{ik}\right)\mathbf{v}_k\,.$$

3. Si Span(S) = Span(T), entonces todo vector de cualquiera de estos dos subespacios, en particular los vectores que lo engendran, pertenecen también al otro subespacio, o sea, dependen linealmente de los vectores que engendran a este último, que es lo que se quería comprobar. Recíprocamente, si los vectores de S dependen linealmente de los de T, como todo vector de Span(S) depende linealmente de los vectores de S, según la propiedad anterior resulta que los vectores de Span(S) dependen linealmente de los vectores de T, es decir, Span(S) $\subset$ Span(T). Como además, se sabe que los vectores de T dependen linealmente de los de S, nos encontramos con que también se verifica que Span(T) $\subset$ Span(S). Por lo tanto, Span(S) = Span(T), como había que probar.

4. Sea S = {$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_p$} linealmente independiente y sea **v** un vector que no depende de $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_p$. Suponiendo que

$$a\mathbf{v} + b_1\mathbf{u}_1 + b_2\,\mathbf{u}_2 + \ldots + b_p\,\mathbf{u}_p = \mathbf{0}$$

hay que probar que todos los coeficientes son nulos. Si alguno fuera distinto de cero, por ejemplo a, resultaría

$$\mathbf{v} = \left(-\frac{b_1}{a}\right)\mathbf{u}_1 + \left(-\frac{b_2}{a}\right)\mathbf{u}_2 + \ldots + \left(-\frac{b_p}{a}\right)\mathbf{u}_p \Rightarrow \mathbf{v} \in \mathrm{Span}\{S\}$$

lo que es falso, ya que **v** no depende linealmente de $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_p$, y por tanto, a ha de ser cero, y en consecuencia, se verifica que

$$b_1\mathbf{u}_1 + b_2\,\mathbf{u}_2 + \ldots + b_p\,\mathbf{u}_p = \mathbf{0}.$$

Ahora bien, como {$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_p$ } es linealmente independiente de esta última relación se deduce que $b_1 = b_2 = \ldots = b_p = 0$, con lo que se concluye la demostración. ■

Teorema (fundamental de la independencia lineal). Sea E un espacio vectorial que está engendrado por un cierto sistema S = {$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$,..., $\mathbf{e}_p$}, de un número finito p de vectores. Si G = {$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$,..., $\mathbf{u}_h$} es un sistema independiente, formado por h vectores, entonces se verifica que $h \le p$.

Existen dos tipos de espacios vectoriales:

1) Espacios vectoriales en los que no es posible formar una familia que sea infinita y libre como, por ejemplo, el formado por los vectores usuales (pues una familia libre no puede contener más de tres vectores), $\mathbb{R}^n$, E_{mxn}, ...

2) Espacios vectoriales, como el de las funciones continuas sobre $\mathbb{R}$, donde es posible formar familias que son a la vez libres e infinitas. Por ejemplo:

$S_1 = \{ 1, x, x^2, \ldots , x^{n-1}, x^n, \ldots\}$

$S_2 = \{ 1, \cos x, \cos 2x, \ldots ,\cos nx, \ldots\}$.

$S_3 = \{e^x, e^{2x}, \ldots, e^{nx}, \ldots\}$.

2.4. ESPACIO VECTORIAL DE DIMENSION FINITA. BASES. COORDENADAS. CAMBIO DE BASE.

Nos vamos a ocupar aquí de aquellos espacios vectoriales que están generados por un número finito de vectores; esto es, tales que todos sus vectores son combinaciones lineales de un número finito de ellos. Estos espacios se llamarán de *dimensión finita* aunque, de momento y hasta que hayamos definido el concepto de dimensión, los denominaremos de *tipo finito*. En estos espacios vectoriales no pueden formarse familias infinitas y libres.

Definición. Un espacio vectorial E sobre $\mathbb{K}$ se dice que es *de tipo finito* si está generado por un número finito de vectores.

En un espacio vectorial de tipo finito, tienen especial interés aquellos sistemas generadores que son, además, independientes; a ellos se les llama *bases*. Todo vector del espacio se podrá expresar de una única manera como combinación lineal de los vectores de una base; a los coeficientes de esa combinación se les llama *coordenadas* del vector dado.

2.4.1. Bases y coordenadas

Definición. Un conjunto *finito* de vectores de un espacio vectorial E sobre $\mathbb{K}$ se dice que es *base* de E si es una familia de E que es a la vez libre y total; es decir, es un conjunto de vectores generadores de E linealmente independiente.

Observación. Un conjunto *infinito* de vectores se dice que es *base* de un espacio vectorial E si y sólo si es libre y genera todo E, es decir si es libre y cada vector del espacio E se puede obtener como una combinación lineal de un número finito de vectores de la base.

Así, por ejemplo, el conjunto $\{1, x, x^2, ...\}$ es una base del espacio vectorial real de todos los polinomios.

Estas definiciones *no* permiten afirmar para un espacio vectorial E la existencia de una base salvo que el espacio vectorial sea de tipo finito.

Ejemplos.

1. Tres vectores libres usuales $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, paralelos a las tres direcciones de un triedro, constituyen una base del espacio usual de los vectores libres.

2. La familia libre $\{1, x, x^2\}$ es un sistema de generadores del espacio de polinomios de grado ≤ 2. Por tanto, es una base de este espacio vectorial.

3. En el espacio vectorial de las funciones continuas f(x), la familia libre infinita $\{e^x, e^{2x}, e^{nx}, ...\}$ no es una base, pues a partir de ella no se pueden obtener todas las funciones continuas.

Teorema (Representación única en una base). Sea $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ una base de un espacio vectorial E sobre $\mathbb{K}$. Entonces, todo vector $\mathbf{x} \in$ E se puede expresar únicamente de una forma como combinación lineal de los vectores de B.

Demostración. Supongamos que el vector se puede expresar de dos formas:

$$\mathbf{x} = x_1\,\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + ... + x_n\,\mathbf{e}_n$$

$$\mathbf{x} = x'_1\mathbf{e}_1 + x'_2\mathbf{e}_2 + ... + x'_n\,\mathbf{e}_n$$

Restando ambas expresiones resulta:

$$\mathbf{0} = (x_1 - x'_1)\,\mathbf{e}_1 + (x_2 - x'_2)\,\mathbf{e}_2 + ... + (x_n - x'_n)\,\mathbf{e}_n.$$

Ahora bien, siendo la base una familia libre se llega a que:

$$x_1 - x'_1 = x_2 - x'_2 = ... = x_n - x'_n = 0$$

de donde

$$x_i = x'_i \qquad \forall i=1,2,\ldots,n.$$

En consecuencia, $\mathbf{x}$ se expresa de manera única. ■

A los escalares $x_1, x_2, ..., x_n$ se les denomina *coordenadas* del vector $\mathbf{x}$ en la base B.

Las coordenadas se representan mediante el *vector coordenado* que es la matriz columna n *x* 1 siguiente:

$$\mathbf{x} = x_1\,\mathbf{e_1} + x_2\,\mathbf{e_2} + \dots + x_n\,\mathbf{e_n} \quad \to \qquad C_B(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

Observamos que para cada vector **x** de E hay un único vector coordenado con respecto a la base B y para cada $\mathbf{x}_B$ de $\mathbb{K}^n$ hay exactamente un **x** de E tal que $C_B(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_B$.

Representar vectores abstractos usando una base es una herramienta fundamental en las aplicaciones. Todos los cálculos con vectores abstractos de E pueden equivalentemente efectuarse con sus coordenadas en $\mathbb{K}^n$. Tambien podemos verificar la independencia lineal y la generación de vectores trabajando con las coordenadas.

Ejemplos.

1.- Probar que el conjunto de vectores $\left\{ \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}, \right\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$.

Solución. Veamos primero que generan $\mathbb{R}^n$. Dado el vector $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ u_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$, se tiene

$$\mathbf{u} = u_1\,\mathbf{e}_1 + u_2\,\mathbf{e}_2 + \dots + u_n\,\mathbf{e}_n$$

luego **u** es combinación lineal de los vectores $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ y además los coeficientes de la combinación lineal son los elementos del vector **u** (únicos).

Veamos ahora que son linealmente independientes. Supongamos que

$$\alpha_1\,\mathbf{e}_1 + \alpha_2\,\mathbf{e}_2 + \dots + \alpha_n\,\mathbf{e}_n = \mathbf{0}$$

con lo cual es fácil ver que $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ son las soluciones de un sistema lineal homogéneo, cuya matriz de coeficientes es la matriz identidad. Por tanto

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$$

Así pues, el conjunto $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$. Esta base recibe el nombre de *base canónica* de $\mathbb{R}^n$.

Teorema (Existencia de bases). Todo espacio vectorial E de tipo finito, distinto de $\{\mathbf{0}\}$, tiene alguna base.

Demostración. Supongamos que E = Span $\{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_m \}$. Si los vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_m$ son linealmente independientes, entonces son una base de E.

Si no son linealmente independientes habrá al menos uno de ellos que sea combinación lineal de los restantes. Si suprimimos todos estos vectores, obtendremos un conjunto linealmente independiente que sigue siendo total, pues los vectores suprimidos no desempeñaban papel alguno en la obtención de vectores de E. Es decir, se obtiene una base de E. ■

2.4.2. Dimensión.

Teorema de la dimensión. Sea E un espacio vectorial y sean B = $\{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, ...,\mathbf{b_n}\}$ y D =$\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, ...,\mathbf{d_m}\}$ dos bases de E. Entonces n = m.

Demostración. Como B es un sistema generador de E y D es una familia independiente, del teorema fundamental de la independencia se deduce que $m \leq n$. Intercambiando los papeles de B y D, se obtiene, análogamente, que $n \leq m$. En consecuencia n = m. ■

Este resultado pone de manifiesto que todas las bases de un espacio vectorial E de tipo finito tiene el mismo número de vectores. El número de vectores de una base no es, por lo tanto, una propiedad de ella sino del espacio vectorial. Así, es natural dar la siguiente definición.

Definición. Se llama *dimensión* de un espacio vectorial E al número de vectores de una base de E. Se escribe dim E.

Por convenio, se dice que la dimensión del espacio vectorial $\{\mathbf{0}\}$ es 0.

Cuando la dimensión es finita se dice que el espacio vectorial es de *dimensión finita*. En otro caso se dice *dimensión infinita*.

<u>Ejemplo</u>.

Ya se ha visto que el espacio vectorial real $\mathbb{R}^n$, tiene una base formada por n vectores; por tanto dim $\mathbb{R}^n = n$.

Análogamente, la dimensión del espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^n$ sobre $\mathbb{C}$ es n.

<u>Ejemplo.</u>

Comprobar que $\{1, x, x^2\}$ es una base del espacio vectorial $\mathbb{P}_2$ de los polinomios de grado menor o igual que dos (en consecuencia, dim $\mathbb{P}_2 = 3$). Comprobar también que la dimensión del espacio vectorial $\mathbb{P}_n$ de los polinomios de grado menor o igual que n, es n+1.

Solución. El espacio vectorial $\mathbb{P}_2$ está generado por $\{1, x, x^2\}$. Por otro lado, si

$$a + bx + cx^2 = 0$$

identificando los coeficientes de las variables del mismo grado se obtiene que $\forall x$, $a = b = c = 0$, con lo que el conjunto de polinomios $\{1, x, x^2\}$ es linealmente independiente.

En consecuencia $\{1, x, x^2\}$ es una base de $\mathbb{P}_2$, y por tanto dim $\mathbb{P}_2 = 3$.

Generalizando el razonamiento anterior se obtiene que $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ es una base de $\mathbb{P}_n$, y por tanto dim $\mathbb{P}_n = n+1$.

Propiedades de las Bases y de la Dimensión:

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita n y supongamos que S= $\{ \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_p} \}$ es un sistema de vectores de E, entonces se verifica que:

1. Si S = $\{ \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_p} \}$es un sistema de generadores de E, entonces $p \geq \dim E$.

2. Si S = $\{ \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_p} \}$es un sistema independiente, entonces $p \leq \dim E$.

3. Si S ={ $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, ..., $\mathbf{u_p}$ }es un sistema de generadores de E y p = dimE, entonces S es base de E.

4. Si S ={ $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, ..., $\mathbf{u_p}$ }es independiente y dimE = p, entonces entonces S es base. de E.

Demostración.

1. Sabemos que S, por ser un sistema de generadores, incluye una base de E y, por ello, la dimensión de E, que es el número de vectores de una de sus bases, no puede ser mayor que el número p de vectores de S, es decir , ha de ser p ≥ dimE

2. Sabemos que una base B de E es un sistema independiente. Por el teorema fundamental de la independencia lineal, como S es independiente y B es un sistema generador, el número de vectores de S (p) ha de ser menor o igual que el de B (n), o sea, p ha de ser menor o igual que dim(E).

3. Como S ={ $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, ..., $\mathbf{u_p}$ }es un sistema de generadores de E sabemos que incluye una base de E; que será el propio sistema S, ya que en caso de tener que eliminar alguno de sus vectores (si no fuera familia libre) obtendríamos una base de E con menos vectores que p, y p = dimE, lo cual es un absurdo. Luego entonces S es base de E

4. Supongamos que S no es base, es decir, que no genera el espacio vectorial E. habrá entonces un vector $\mathbf{u_{p+1}}$ independiente de S y, por lo tanto S'=S∪{$\mathbf{u_{p+1}}$} será un sistema independiente. De ser así, y de acuerdo con la propiedad 2, como S' es independiente y tiene p+1 vectores, se verificará que p+1 ≤ dimE, que es falso ya que p=dimE. Esta contradicción prueba que S es base de E. ∎

Observaciones:

1. La dimensión de un espacio vectorial es el número máximo de vectores de E linealmente independientes.

2. La dimensión de un espacio vectorial es el número mínimo de vectores de un sistema generador de E.

Teorema (Teorema de la base incompleta). Sea E un espacio vectorial de dimensión *n*. Si $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2,..., \mathbf{u}_p\}$ $(p < n)$, es un conjunto linealmente independiente de vectores de E, entonces se pueden encontrar *n-p* vectores $\mathbf{u}_{p+1}, \mathbf{u}_{p+2}, ..., \mathbf{u}_n$ de E, tales que

$$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2,..., \mathbf{u}_p, \mathbf{u}_{p+1}, \mathbf{u}_{p+2}, ..., \mathbf{u}_n\}$$

es una base de E.

Demostración. Si $n > p$, como E ≠ Span $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2,..., \mathbf{u}_p\}$, existe un vector $\mathbf{u}_{p+1}$ de E que no está en Span$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2,..., \mathbf{u}_p\}$. Por ello, el conjunto $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2,..., \mathbf{u}_p, \mathbf{u}_{p+1}\}$ es linealmente independiente. Después de repetir este razonamiento $n - p$ veces, obtendremos un conjunto linealmente independiente con *n* vectores

$$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2,..., \mathbf{u}_p, \mathbf{u}_{p+1}, \mathbf{u}_{p+2}, ..., \mathbf{u}_n\}$$

que, por la propiedad 4 anterior, son una base de E. ■

Corolario. Sea F un subespacio vectorial de un espacio vectorial E de dimensión finita, y $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, ..., \mathbf{d}_p\}$ una base de F. Entonces se puede encontrar una base de E que contenga al conjunto $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, ..., \mathbf{d}_p\}$.

Demostración. Basta aplicar el Teorema de la Base Incompleta con el conjunto inicial $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, ..., \mathbf{d}_p\}$. ■

Corolario. Sea E un espacio vectorial de dimensión finita. Si F es un subespacio vectorial de E, entonces dim F ≤ dim E.

Demostración. Si F = $\{\mathbf{0}\}$ es obvio. En otro caso, es consecuencia inmediata del corolario anterior, ya que cualquier base de F puede incluirse en una base de E. ■

Además, se puede demostrar que, cuando E es un espacio vectorial de dimensión finita, si $F \subset E$ y dim F = dim E , entonces F = E.

2.5. CAMBIO DE BASE EN ESPACIO VECTORIAL DE DIMENSIÓN FINITA.

Puesto que un espacio vectorial de dimensión finita tiene infinitas bases, en este apartado nos vamos a interesar por conocer cual es la relación que existe entre las coordenadas de un vector respecto a dos bases distintas.

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n. Sean $B=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,...,\mathbf{e}_n\}$ y $B'=\{\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,...,\mathbf{e}'_n\}$ dos bases de E, de forma que cada vector de la base B' se puede expresar en la base B de la siguiente forma

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = a_{11}\,\mathbf{e}_1 + a_{21}\,\mathbf{e}_2 + ... + a_{n1}\,\mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}'_2 = a_{12}\,\mathbf{e}_1 + a_{22}\,\mathbf{e}_2 + ... + a_{n2}\,\mathbf{e}_n \\ \qquad ... \\ \mathbf{e}'_n = a_{1n}\,\mathbf{e}_1 + a_{2n}\,\mathbf{e}_2 + ... + a_{nn}\,\mathbf{e}_n \end{cases}$$

con lo que

$$C_B(\mathbf{e}'_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{n1} \end{pmatrix},\ C_B(\mathbf{e}'_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{n2} \end{pmatrix}, ... ,\ C_B(\mathbf{e}'_n) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Si $\mathbf{x}$ es un vector cualquiera del espacio vectorial E, por ser B una base de E, existirán n escalares en $\mathbb{K}$ $x_1, x_2, ..., x_n$ tales que $\mathbf{x} = x_1\,\mathbf{e_1} + x_2\,\mathbf{e_2} + ... + x_n\,\mathbf{e_n}$.

Análogamente, por ser B' una base de E, existirán *n* escalares en $\mathbb{K}$ $x'_1,\ x'_2,\ ...,\ x'_n$ tales que $\mathbf{x} = x'_1\,\mathbf{e}'_1 + x'_2\,\mathbf{e}'_2 + ... + x'_n\,\mathbf{e}'_n$.

Veámos cómo están relacionadas las coordenadas de $\mathbf{x}$ en B', $C_{B'}(\mathbf{x})$, y las coordenadas de $\mathbf{x}$ en B, $C_B(\mathbf{x})$, es decir, $x'_1,\ x'_2,\ ...,\ x'_n$ y $x_1, x_2, ..., x_n$.

Teniendo en cuenta la relación existente entre los vectores de B y de B', resulta:

$$\mathbf{x} = x'_1\,\mathbf{e}'_1 + x'_2\,\mathbf{e}'_2 + ... + x'_n\,\mathbf{e}'_n = x'_1\,(a_{11}\,\mathbf{e}_1 + a_{21}\,\mathbf{e}_2 + ... + a_{n1}\,\mathbf{e}_n) + x'_2\,(a_{12}\,\mathbf{e}_1 + a_{22}\,\mathbf{e}_2 + ... + a_{n2}\,\mathbf{e}_n)$$

$$+ ...\ ... + x'_n\,(a_{1n}\,\mathbf{e}_1 + a_{2n}\,\mathbf{e}_2 + ... + a_{nn}\,\mathbf{e}_n) =$$

$$= (a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + \ldots + a_{1n}x_n')\mathbf{e}_1 + (a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + \ldots + a_{2n}x_n')\mathbf{e}_2 + \ldots$$

$$+ (a_{n1}x_1' + a_{n2}x_2' + \ldots + a_{nn}x_n')\mathbf{e}_n .$$

De donde, teniendo en cuenta que las coordenadas de un vector en una base son únicas, se deduce

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + \ldots + a_{1n}x_n' \\ x_2 = a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + \ldots + a_{2n}x_n' \\ \qquad \ldots \\ x_n = a_{n1}x_1' + a_{n2}x_2' + \ldots + a_{nn}x_n' \end{cases},$$

es decir

$$C_B(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{P} \cdot C_{B'}(\mathbf{x}) ,$$

de donde,

$$P = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{n1} \end{pmatrix}}_{C_B(\mathbf{e}_1')} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{n2} \end{pmatrix}}_{C_B(\mathbf{e}_2')} \ldots \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{nn} \end{pmatrix}}_{C_B(\mathbf{e}_n')} \right).$$

A la matriz P, que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la base B' en la base B, se la denomina *matriz de paso de la base* B *a la base* B’, es una matriz regular de orden n ya que los vectores $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \ldots, \mathbf{e}_n'$ forman la base B’ y, por la tanto, son independientes.

<u>Ejemplo</u>.

Sean B = $\left\{ \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ y B' = $\left\{ \mathbf{e'_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{e'_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ dos bases del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Obtener las coordenadas en la base B del vector **x** que tiene por coordenadas $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ respecto de la base B'.

Solución. B y B' tienen sus vectores referidos a la base canónica:

$$B_C = \left\{ \mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Expresemos los vectores de B' en la base B. Así:

$$\mathbf{e'_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

de donde

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_1 = -1 \text{ y } \alpha_2 = 1 \text{; luego } \mathbf{e'_1} = -\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}.$$

$$\mathbf{e'_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2 = \alpha_3 + \alpha_4 \\ 1 = \alpha_3 + 2\alpha_4 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_3 = 3 \text{ y } \alpha_4 = -1 \text{; luego } \mathbf{e'_2} = 3\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2}.$$

Por tanto, las coordenadas en B del vector cuyas coordenadas en B' son $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ se obtendrán haciendo:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2.6. DIMENSIÓN Y ECUACIONES DE UN SUBESPACIO VECTORIAL.

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n y sea $B = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, ..., \mathbf{e_n}\}$ una base de E.

Si se considera un subespacio vectorial U de E, entonces dado un elemento cualquiera $\mathbf{u} \in U$, se expresará en la base B como

$$\mathbf{u} = x_1\, \mathbf{e_1} + x_2\, \mathbf{e_2} + ... + x_n\, \mathbf{e_n},$$

las coordenadas de **u** en B se expresarán mediante el vector coordenado

$$C_B(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Las coordenadas de **u** van a estar ligadas por alguna o algunas relaciones lineales que van a caracterizar al subespacio. Es decir, todo subespacio U va a venir caracterizado por una serie de restricciones lineales homogéneas (han de serlo para así garantizar la estabilidad respecto a la suma y al producto por un escalar) del tipo:

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + ... + b_{1n}x_n = 0 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + ... + b_{2n}x_n = 0 \\ \quad .... \\ b_{r1}x_1 + b_{r2}x_2 + ... + b_{rn}x_n = 0 \end{cases} \quad \text{, donde} \quad r \le n\,,$$

estas restricciones (no idénticamente nulas) son las *ecuaciones cartesianas o implícitas* del subespacio.

La dimensión del subespacio U será:

dim U = n - r = dim E - número de restricciones (ecuaciones independientes).

Otro tipo de ecuaciones que caracterizan un subespacio son las *ecuaciones paramétricas*, donde aparecen las coordenadas de los vectores del subespacio expresadas en función de unos parámetros. Hay tantos parámetros libres como sea la dimensión del subespacio U. Es decir, son ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}\lambda_1 + c_{12}\lambda_2 + \dots + c_{1,n-r}\lambda_{n-r} \\ x_2 = c_{21}\lambda_1 + c_{22}\lambda_2 + \dots + c_{2,n-r}\lambda_{n-r} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = c_{n1}\lambda_1 + c_{n2}\lambda_2 + \dots + c_{n,n-r}\lambda_{n-r} \end{cases},$$

donde: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-r} \in \mathbb{K}$ son parámetros libres (es decir, el rango de la matriz de elementos c_{ij} es n-r).

Ejemplos.

- Si consideramos el espacio total E, la dim E = n; por tanto, no tiene ecuaciones implícitas, siendo sus ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x_1 = \lambda_1 \\ x_2 = \lambda_2 \\ \dots \\ x_n = \lambda_n \end{cases}, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

- Sea ahora el subespacio nulo: dim $\{\mathbf{0}\} = 0$; luego, el subespacio $\{\mathbf{0}\}$ tiene n ecuaciones implícitas $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \dots \\ x_n = 0 \end{cases}$, que también pueden considerarse como ecuaciones paramétricas.

Ejemplo.

Hallar las ecuaciones del subespacio U generado por $\left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Solución. Como los vectores anteriores pertenecen al espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ entonces E = $\mathbb{R}^4$, luego dim E = dim $\mathbb{R}^4$ = 4. Por otro lado, como los tres vectores son linealmente independientes, constituyen una base del subespacio U, luego dim U = 3. Por tanto, U tiene una única ecuación cartesiana.

$$\text{Si } \mathbf{u} \in U \subset \mathbb{R}^4 \Rightarrow \mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta - \gamma \\ x_2 = \alpha & , \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \\ x_3 = \quad \beta \\ x_4 = \quad \gamma \end{cases}$$

que son las ecuaciones paramétricas de U. Eliminando los tres parámetros se obtienen la ecuación cartesiana de U: $2\,x_1 - x_2 + x_3 + 2\,x_4 = 0$.

Otra forma de obtener la ecuación de U es considerar que cualquier vector de subespacio ha de ser combinación lineal de los tres vectores que generan el subespacio, por lo que si $\mathbf{u} \in U \subset \mathbb{R}^4$ y $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ y si formamos la matriz que tiene por columnas las coordenadas de dichos vectores y las de **u**,

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & -1 & x_1 \\ 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_4 \end{bmatrix}$$

el rango de la matriz ha de ser tres. Entonces la ecuación del subespacio la obtendremos anulando el determinante de la matriz; esto es, haciendo

$$\begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 & -1 & x_1 \\ 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_4 \end{vmatrix} = 0,$$

de donde

$$2\,x_1 - x_2 + x_3 + 2\,x_4 = 0$$

es la ecuación cartesiana o implícita del subespacio U.

Si despejamos

$$x_2 = 2\,x_1 + x_3 + 2\,x_4$$

y tomamos como parámetros

$$x_1 = t, \qquad x_3 = s, \quad x_4 = r$$

resultan las ecuaciones paramétricas del subespacio

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = t \\ x_2 = 2t + s + 2r \\ x_3 = s \\ x_4 = r \end{array}\right. ,r,s,t \in \mathbb{R}$$

donde t, s y r son los parámetros. Luego hay tres parámetros libres, que es la dimensión del subespacio.

<u>Ejemplo.</u>

Hallar las ecuaciones del subespacio V generado por $\left\{\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

Solución. Como los vectores anteriores pertenecen al espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ entonces E = $\mathbb{R}^4$ y dim E = dim $\mathbb{R}^4$ = 4. Por otro lado, como los dos vectores son linealmente independientes, constituyen una base del subespacio V, luego dim V = 2. Por tanto, V tiene dos ecuaciones cartesianas.

$$\text{Si } \mathbf{u} \in V \subset \mathbb{R}^4 \Rightarrow \mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta \\ x_4 = 0 \end{array}\right. ,\alpha,\beta \in \mathbb{R}$$

que son las ecuaciones paramétricas de V. Eliminando los dos parámetros se obtienen las ecuaciones cartesianas de V: $\left\{\begin{array}{l} 2\,x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{array}\right.$.

Otra forma de obtener las ecuaciones cartesianas de V es considerar que cualquier vector de subespacio ha de ser combinación lineal de los dos vectores que generan el subespacio, por lo que si $\mathbf{u} \in V \subset \mathbb{R}^4$ y $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ y si formamos una matriz con las coordenadas de dichos vectores y con las de **u**, el rango de dicha matriz ha de ser dos:

$$\text{rango}\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_4 \end{bmatrix} = 2 .$$

Por lo que todo menor de orden tres extraído de esta matriz ha de tener determinante nulo, de donde obtenemos: $\begin{cases} 2\,x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$, que son las ecuaciones cartesianas de V.

Si hacemos

$$x_2 = 2\,x_1 + x_3$$

y tomamos como parámetros

$$x_1 = t, \qquad x_3 = s, \quad x_4 = 0$$

resultan las ecuaciones paramétricas del subespacio V:

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 2t + s \\ x_3 = s \\ x_4 = 0 \end{cases} ,s,t \in \mathbb{R}$$

donde t y s son los parámetros. Luego hay dos parámetros libres, que es la dimensión del subespacio.

2.7. OPERACIONES CON SUBESPACIOS VECTORIALES

2.7.1. Intersección de subespacios vectoriales.

Proposición. Sean F y G dos subespacios vectoriales de E (espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$). Entonces la intersección $F \cap G$ es otro subespacio vectorial de E.

Demostración. Para demostrar que $F \cap G$ es subespacio vectorial veremos que es estable para la suma y para el producto por un escalar, dado que la condición $\mathbf{0} \in F \cap G$ se cumple (pues $\mathbf{0} \in F$ y $\mathbf{0} \in G$ por ser espacios vectoriales).

I) $\forall\, \mathbf{x},\mathbf{y} \in F \cap G, \quad \mathbf{x}+\mathbf{y} \in F \cap G$?.

Sean $\mathbf{x},\mathbf{y} \in F \cap G$, entonces

$$\mathbf{x} \in F \cap G \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} \in F \text{ y } \mathbf{x} \in G$$

$$\mathbf{y} \in F \cap G \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} \in F \text{ y } \mathbf{y} \in G$$

luego

$$\mathbf{x},\mathbf{y} \in F, \text{ y como F es subespacio, } \mathbf{x}+\mathbf{y} \in F$$

además

$$\mathbf{x},\mathbf{y} \in G, \text{ y como G es subespacio, } \mathbf{x}+\mathbf{y} \in G$$

de donde

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} \in F \cap G$$

II) $\forall \alpha \in \mathbb{K} \ \wedge \ \forall\, \mathbf{x} \in F \cap G \quad \alpha\mathbf{x} \in F \cap G$?.

Sea $\mathbf{x} \in F \cap G$ y sea $\alpha \in \mathbb{K}$, de donde

$$\mathbf{x} \in F \cap G \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x} \in F, \text{ y como F es subespacio vectorial } \Rightarrow \alpha\mathbf{x} \in F \\ \mathbf{x} \in G, \text{ y como G es subespacio vectorial } \Rightarrow \alpha\mathbf{x} \in G \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha\mathbf{x} \in F \cap G$$

Luego $F \cap G$ es subespacio vectorial. ■

Este resultado se puede generalizar a un número cualquiera de subespacios; es decir: dados n subespacios vectoriales del espacio vectorial E, sean éstos F_1, F_2, ..., F_n, la intersección de ellos $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n$ es también subespacio vectorial de E.

Observación. La intersección de subespacios vectoriales nunca puede ser vacía, pues, como se ha visto, el vector **0** siempre pertenece a $F \cap G$.

En el caso de que $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$ se dice que F y G son *subespacios vectoriales disjuntos*.

2.7.2. <u>Suma de subespacios vectoriales.</u>

Sean F y G dos subespacios vectoriales de E, espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Por definición, se llama *suma de los subespacios vectoriales* F *y* G a un subconjunto de E que denotaremos por F+G, y tal que

$$F+G = \{ \mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} \in E \ / \ \mathbf{x} \in F \wedge \mathbf{y} \in G \}$$

donde + es la suma de vectores definida en E.

Proposición. F+G es un subespacio vectorial de E.

Demostración. Veamos que se cumple la condición necesaria y suficiente.

El vector $\mathbf{0} \in F+G$, dado que puede escribirse como suma de **0**+**0**, siendo **0** de F y **0** de G.

I) $\forall\ \mathbf{z},\mathbf{t} \in F+G \quad \mathbf{z} + \mathbf{t} \in F+G$?.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sea } \mathbf{z} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 \ / \ \mathbf{x}_1 \in F,\ \mathbf{y}_1 \in G \\ \text{sea } \mathbf{t} = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2 \ / \ \mathbf{x}_2 \in F,\ \mathbf{y}_2 \in G \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{z}+\mathbf{t} = (\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2) \ / \ \left\{\begin{array}{l} \mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2 \in F \\ \mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2 \in G \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \mathbf{z}+\mathbf{t} \in F+G$$

II) $\forall\ \alpha \in \mathbb{K} \ \wedge \ \forall\ \mathbf{z} \in F+G \quad \alpha\mathbf{z} \in F+G$?.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sea } \mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} \ / \ \mathbf{x} \in F \wedge \ \mathbf{y} \in G \\ \text{sea } \alpha \in \mathbb{K} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \alpha\mathbf{z} = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y} \ \text{ donde } \ \alpha\mathbf{x} \in F \wedge \alpha\mathbf{y} \in G$$

$$\Rightarrow \alpha \mathbf{z} \in F+G. \qquad \blacksquare$$

En general, todo vector de un subespacio suma F+G se podrá descomponer de infinitas formas como suma de vectores de los dos subespacios F y G que lo generan.

Observaciones. a) $F \cup G$ no tiene por qué ser un subespacio vectorial.

b) Además, en general la suma F+G es distinta a la unión $F \cup G$.

Por ejemplo: En el espacio vectorial E de las matrices 2x2, consideremos los subespacios F y G de matrices triangulares superiores e inferiores respectivamente. Entonces, $F \cup G$ es el conjunto de todas las matrices triangulares; sin embargo F+G = E. Luego es claro que $F \cup G$ es distinto de F+G = E.

c) Se cumple que $F \cap G \subset F+G$, como fácilmente puede deducirse.

Definición. Sean F y G dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial E. Se dice que los subespacios vectoriales F y G son *subespacios suplementarios* respecto de E si:

$$\left.\begin{array}{l} E = F + G \\ F \cap G = \{\mathbf{0}\} \end{array}\right\}$$

En este caso se dice que E es *suma directa* de los subespacios F y G y se denota $E=F\oplus G$.

Proposición. Sean F y G dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial E. Si $E=F\oplus G$, todo vector **z** perteneciente de E se expresa de forma única como suma de un vector de F y otro vector de G, es decir

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} \,/\, \mathbf{x} \in F \;\wedge\; \mathbf{y} \in G \qquad \text{siendo } \mathbf{x} \text{ e } \mathbf{y} \text{ \emph{únicos}.}$$

Demostración. Supongamos que dado $\mathbf{z} \in E$ admite dos representaciones de la forma

$$\mathbf{z} = \mathbf{x_1} + \mathbf{y_1} = \mathbf{x_2} + \mathbf{y_2} \quad / \; \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in F \;\wedge\; \mathbf{y_1},\mathbf{y_2} \in G$$

Por ser

$$\mathbf{x_1} + \mathbf{y_1} = \mathbf{x_2} + \mathbf{y_2} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{x_1} - \mathbf{x_2} = \mathbf{y_2} - \mathbf{y_1}$$

donde $\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2} \in F$, $\mathbf{y_2} - \mathbf{y_1} \in G$; y por ser iguales

$$\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2} = \mathbf{y_2} - \mathbf{y_1} \in F \cap G$$

Al ser $E = F \oplus G$ suma directa, $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$, luego

$$\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2} = \mathbf{y_2} - \mathbf{y_1} = \mathbf{0}$$

de donde

$$\mathbf{x_1} = \mathbf{x_2}$$

$$\mathbf{y_1} = \mathbf{y_2}$$

Por tanto, la representación $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ es *única*. ■

Ejemplo.

Si E es el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden *n* entonces $E = S \oplus T$, siendo S el subespacio de las matrices simétricas y T el formado por las matrices antisimétricas.

Sin embargo, si S es el conjunto de matrices triangulares superiores de orden *n* y T el de triangulares inferiores, $E \neq S \oplus T$ ya que $S \cap T \neq \{\mathbf{0}\}$.

2.7.3. Dimensión de la suma de subespacios.

Es fácil probar que dados dos subespacios vectoriales F y G de E, espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita, se cumple que

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

En el caso de que F y G sean subespacios suplementarios, $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$, luego $\dim(F \cap G) = 0$, con lo que

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G$$

Nota. La unión de bases respectivas de F y G es sistema de generadores de F+G. Eliminando de ella los vectores que son linealmente dependientes de los demás se obtiene una base de F+G.

2.8. DEFINICIÓN DE NORMAS. EJEMPLOS DE NORMAS.

Definición. Sea E un espacio vectorial <u>real</u>. Se llama *norma* sobre E, a una aplicación

$$\| \ \| : \quad E \quad \to \quad \mathbb{R}^+$$

$$\mathbf{x} \quad \to \quad \|\mathbf{x}\|$$

tal que a cada vector $\mathbf{x}$ de E le asigna un número real no negativo, llamado norma de $\mathbf{x}$ que se denota $\|\mathbf{x}\|$, y que verifica los siguientes axiomas:

(a) $\|\mathbf{x}\| \geq 0, \ \forall \ \mathbf{x} \in \ E \quad \wedge \quad \|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$

(b) $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda| \, \|\mathbf{x}\|, \quad \forall\lambda \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad \forall\mathbf{x} \in E$, donde $|\lambda|$ representa el valor absoluto de λ.

(c) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|, \quad \forall\mathbf{x},\mathbf{y} \in E$ (*desigualdad triangular*).

La tercera condición, (c) se denomina *desigualdad triangular* porque es una generalización del hecho de que la longitud de cualquier lado de un triángulo es menor o igual que la suma de las longitudes de los otros dos lados.

Definición. El par (E, $\|\cdot\|$) se le denomina *Espacio Vectorial Normado*.

En $E = \mathbb{R}^n$, habitualmente se utilizan las siguientes normas:

Norma del valor absoluto: $\quad \| \mathbf{x} \|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

Norma euclídea: $\quad \| \mathbf{x} \|_2 = \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

Norma del supremo: $\quad \| \mathbf{x} \|_\infty = \max \left\{ |x_1| , |x_2| , \ldots , |x_n| \right\}$

Ejemplo.

Sea $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Entonces

$$\| \mathbf{x} \|_1 = |-5| + |3| + |-2| = 10$$

$$\| \mathbf{x} \|_2 = \left((-5)^2 + (3)^2 + (-2)^2 \right)^{1/2} = 38^{1/2}$$

$$\| \mathbf{x} \|_\infty = \max \left\{ |-5| , |3| , |-2| \right\} = 5 .$$

Puesto que las normas miden la magnitud de los vectores, proporcionan la herramienta para describir precisamente lo que queremos decir, por ejemplo, al hablar de que una sucesión de vectores $\mathbf{x_i}$ tiende a $\mathbf{0}$; queremos decir que $\|\mathbf{x}_i\|$ tienden a 0.

Definición. Si (E, $\| \cdot \|$) es un espacio vectorial normado, puede definirse una aplicación

$$d : ExE \to \mathbb{R}^+$$

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) \to d\,(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

Que verifica los axiomas correspondientes que hacen de d una distancia definida sobre E, que se denomina *distancia inducida por la norma* $\|\cdot\|$.

Si E = $\mathbb{R}^n$, las distancias inducidas por las tres normas vistas son:

$$d_1 (x , y) = \| x - y \|_1 = \sum_{i=1}^{n} | x_i - y_i |$$

$$d_2 (x , y) = \| x - y \|_2 = \sqrt{ \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 } \qquad \text{(distancia euclídea)}$$

$$d_\infty (x , y) = \| x - y \|_\infty = \max \left\{ | x_1 - y_1 | , | x_2 - y_2 | , \ldots , | x_n - y_n | \right\} .$$

EJERCICIOS TEMA 2

1.- Se considera el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual que *n*, en variable real *x*, $\mathbb{P}_n = \{\ p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad / \quad a_i \in \mathbb{R}\ \}$. Demostrar que $\mathbb{P}_n$ es espacio vectorial real con las operaciones:

suma de polinomios: $\left.\begin{array}{l} p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \\ q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \end{array}\right\}$

$$p(x) + q(x) = (a_n+b_n)\, x^n + (a_{n-1}+b_{n-1})\, x^{n-1} + \ldots + (a_1+b_1)\, x + (a_0+b_0) \in \mathbb{P}_n$$

producto de un polinomio por un escalar:

$$\lambda p(x) = (\lambda a_n)\, x^n + (\lambda a_{n-1})\, x^{n-1} + \ldots + (\lambda a_1)\, x + \lambda\, a_0 \quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

2.- Indicar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^4$ son subespacios vectoriales:

$$\text{a) } U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} / \, x_1 + x_2 + x_3 = 1 \right\} \quad \text{b) } V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} / \, x_1 \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{c) } W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} / \, a + b = 0 \right\}.$$

3.- Sea $V = E_{nxn}(\mathbb{K})$ el espacio vectorial de todas las matrices cuadradas de orden n sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Estudiar si los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de V:

a) $W = \left\{ A \in E_{nxn}(\mathbb{K}) \,/\, A = A^t \right\}$

b) $U = \left\{ A \in E_{nxn}(\mathbb{K}) \,/\, A \cdot T = T \cdot A \right\}$, siendo T una matriz dada.

4.- En el espacio vectorial real de de todos los polinomios de grado menor o igual que 3, en x, $\mathbb{P}_3$ se consideran los conjuntos U y V:

$$U = \left\{ p(x) = a + bx + cx^2 \,/\, a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \qquad V = \left\{ p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \,/\, p(1) = 1 \right\}.$$

¿Son U y V subespacios vectoriales?.

5- Sea V= $E_{2x2}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de todas las matrices cuadradas de orden 2 sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Estudiar si los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de V:

a) W= $\{A \in E_{2x2}(\mathbb{R}) / |A| = 0\}$ b) U= $\{A \in E_{2x2}(\mathbb{R}) / A = A^2\}$.

6.- Determinar si el vector $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ pertenece al subespacio generado por $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

7.- Escribir la matriz $E = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

8.- Escribir el polinomio $\mathbf{v} = x^2 + 4x - 3$ como una combinación lineal de los polinomios $\mathbf{e}_1 = x^2 - 2x + 5$, $\mathbf{e}_2 = 2x^2 - 3x$ y $\mathbf{e}_3 = x + 3$.

9.- ¿Para qué valores de α dejan de formar base de $\mathbb{R}^3$ los vectores: $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3\alpha - 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$?.

10.- Sea V= $E_{2x2}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de todas las matrices cuadradas de orden 2 sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Hallar las coordenadas de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \in V$ en la base B'= $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

11.- En $\mathbb{R}^3$ se consideran las bases B=$\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ y B'=$\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ siendo:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = 2\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{v}_2 = \quad -\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{v}_3 = \qquad\quad -3\mathbf{e}_3 \end{cases}.$$

Hallar las coordenadas del vector $4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3$ en la base B'.

12.- Dado el vector **u**, cuyas coordenadas en la base $\text{B} = \{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4\}$ son $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$, calcular sus coordenadas en la base $\text{B'} = \{\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3,\mathbf{e}'_4\}$, relacionada con la anterior por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}'_2 = \qquad\quad \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_3 = \qquad \mathbf{e}_2 \qquad + \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{e}'_4 = \qquad \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \end{cases}.$$

13.- En $\mathbb{R}^3$ se considera la base B=$\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$

i) Demostrar que el conjunto S=$\{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\}$ es linealmente independiente.

ii) Sea **x** un vector cuyas coordenadas en la base B son $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$.Completar S para formar una base B' en la que las coordenadas de **x** sean $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

14.- En el espacio vectorial real de todos los polinomios en x de grado menor o igual que 3, $\mathbb{P}_3$ se considera el subespacio $F=\left\{p(x)=a+bx+cx^2+dx^3 \,/\, \int_0^1 p(x)\,dx=0\right\}$. Hallar una base de F y completarla hasta formar una base de $\mathbb{P}_3$.

15.- Sea $V=E_{2x2}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de todas las matrices cuadradas de orden 2 sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ y sea W el subespacio generado por $\left\{\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\right\}$. Hallar la dimensión y una base de W.

16.- En $V=E_{2x2}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de todas las matrices cuadradas de orden 2 reales se considera el subconjunto $N=\left\{A=\begin{pmatrix} -a & 0 \\ b & a+b \end{pmatrix} / \, a,b \in \mathbb{R}\right\}$.

i) Demostrar que N es un subespacio vectorial de V.

ii) Hallar la dimensión y una base de N.

17.- En el espacio vectorial real de de todos los polinomios en *x* de grado menor o igual que 3, $\mathbb{P}_3$, hallar la dimensión y una base de los siguientes subespacios:

a) $S=\left\{p(x)=a+bx+cx^2+dx^3 \,/\, p(0)=p(1)=0\right\}$.

b) $U=\left\{p(x)=a+bx+cx^2+dx^3 \,/\, p(0)=0\right\}$.

c) $V=\left\{p(x)=a+bx+cx^2+dx^3 \,/\, p'(x)=0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}\right\}$.

d) $W=\left\{p(x)=a+bx+cx^2+dx^3 \,/\, p(x)=p(-x) \;\; \forall x \in \mathbb{R}\right\}$.

18.- En el espacio vectorial W de las matrices simétricas reales de orden 2, se considera la base $B=\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$. Hallar las coordenadas de la matriz A en la base B en los siguientes casos:

i) A=$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$ ii) A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

19.- En el espacio vectorial real de de todos los polinomios en x de grado menor o igual que 2, $\mathbb{P}_2$ se considera el subespacio M generado por $\begin{cases} \mathbf{e}_1 = x^2 - 1 \\ \mathbf{e}_2 = x + 1 \\ \mathbf{e}_3 = x^2 - 7x - 10 \end{cases}$. Hallar una base de $\mathbb{P}_2$ que contenga una base de M.

20.- Demostrar que el subespacio generado por $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$ y el generado por $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ 11 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \\ 14 \end{pmatrix}$ son iguales.

21.- Dados los vectores $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$. Hallar la dimensión, las ecuaciones cartesianas y las ecuaciones paramétricas del subespacio que generan.

22.- Indicar si las siguientes afirmaciones son verdadera o falsas:

Si E es un espacio vectorial de dimensión 4 y F es un subespacio vectorial de E de dimensión 3, entonces:

a) F tiene 3 ecuaciones paraméricas.

b) F tiene 3 ecuaciones cartesianas independientes.

c) F tiene 1 ecuación paramétricas.

d) F tiene 1 ecuación cartesiana independiente.

23.- Hallar las ecuaciones implícitas y paramétricas del subespacio F de $\mathbb{R}^4$,

$$F=\text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\\2\end{pmatrix}\right\}.$$

24.- Se considera en $\mathbb{R}^4$ el subespacio W cuyas ecuaciones en la base B=$\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_4\}$

son: $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=0\\x_1+x_2+x_3+x_4=0\end{cases}$. Se elige como nueva base B'=$\{\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_3-\mathbf{u}_4,\mathbf{u}_4\}$.

i) ¿Cuáles son las ecuaciones de W en la nueva base B'?.

ii) El vector $\mathbf{v}=\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2$ ¿qué coordenadas tiene en la base B?¿y en la base B'?.

iii) ¿Pertenece el vector **v** al subespacio W?.

25.- Se considera en $\mathbb{R}^4$ la base B=$\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_4\}$ y los subespacios:

$$V=\left\{\begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\beta\end{pmatrix}/\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}\ \text{y}\ \ W=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}/\,x_1+x_2+x_3=0\right\}.$$

a) Hallar la dimensión, una base y las ecuaciones del subespacio $V\cap W$.

b) Hallar la dimensión, una base y las ecuaciones del subespacio $V+W$.

c) Hallar los valores de a, b, c y d para que la ecuación de W en la base B'=$\{\mathbf{u}'_1=\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}'_2=\mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}'_3=\mathbf{u}_4,\ \mathbf{u}'_4=a\,\mathbf{u}_1+b\,\mathbf{u}_2+c\,\mathbf{u}_3+d\,\mathbf{u}_4\}$ sea $x'_2=0$.

26.- Se consideran los subespacios de $\mathbb{R}^4$

$$U=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} / b+c+d=0\right\} \quad \text{y} \quad W=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} / a+b=0 \ \wedge \ c=2d\right\}.$$

Hallar la dimensión y una base de:

i) U. ii) W. iii) $U\cap W$. iv) U+W.

27.- Si U y W son dos subespacios de V, siendo dim(U)=4, dim(W)=5 y dim(V)=7. Hallar la posible dimensión de $U\cap W$.

28.- Sea $V=E_{nxn}(\mathbb{K})$ el espacio el espacio vectorial de todas las matrices cuadradas de orden n sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Se considera U el subespacio de las matrices triangulares superiores y W el subespacio de las matrices triangulares inferiores. Hallar U+W y $U\cap W$.

29.- En $V=E_{3x3}(\mathbb{R})$, el espacio vectorial de todas las matrices cuadradas de orden 3 reales se considera el conjunto $U=\left\{\begin{pmatrix}a & b & c\\0 & a+c & 0\\c & b & a\end{pmatrix} / a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$.

i) Comprobar que U es subespacio vectorial de V.

ii) Hallar la dimensión y la base de U.

iii) Sea W el subespacio de las matrices simétricas de orden 3. Hallar el subespacio U+W y el $U\cap W$.

30.- En el espacio vectorial real de todos los polinomios en x de grado menor o igual que 3, $\mathbb{P}_3$ se consideran $B=\left\{e_1=1, e_2=x, e_3=x^2, e_4=x^3\right\}$ y $B'=\left\{e_1'=1, e_2'=x+a, e_3'=(x+a)^2, e_4'=(x+a)^3\right\}$ (a fijo). Se pide:

a) Demostrar que B' es base y hallar la matriz de paso de B a B'.

b) Hallar las ecuaciones implícitas de los subespacios:

$$U=\text{Span}\left\{x^3+2x^2-x+1, 2x^3+x^2+5, x^3-x^2+x-1\right\} \text{ y}$$

$$V=\left\{\lambda x^3+(\lambda+\mu)x+\mu \,/\, \lambda,\mu\in\mathbb{R}\right\}$$

en la base B.

c) Hallar una base de $U\cap V$ y otra de U+V.

d) Hallar las ecuaciones implícitas de U y las de V en B' para a=1.

31.- Sea $V=E_{nxn}(\mathbb{K})$ el espacio el espacio vectorial de todas las matrices cuadradas de orden n sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Sea U el subespacio de las matrices simétricas y W el subespacio de las matrices antisimétricas. Hallar U+W y $U\cap W$.

32.- Sean U y V dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial E de dimensión finita n, tales que $E=U\oplus V$. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) U+V=E y $U\cap V=\{\mathbf{0}\}$.

b) $\forall \mathbf{x}\in E\;\; \exists \mathbf{y}\in U \wedge\; \exists \mathbf{z}\in V \,/\, \mathbf{x}=\mathbf{y}+\mathbf{z}$ siendo $\mathbf{y}$ y $\mathbf{z}$ únicos.

c) $\forall \mathbf{x}\in E\;\; \exists \mathbf{y}\in U \wedge\; \exists \mathbf{z}\in V \,/\, \mathbf{x}=\mathbf{y}+\mathbf{z}$ siendo $\mathbf{y}$ y $\mathbf{z}$ no únicos.

d) U y V son suplementarios.

e) dim(U+V)=dim(U)+dim(V).

f) dim(U)+dim(V)=0.

33.- Sea E un espacio vectorial de dimensión finita *n*, y sean U y V dos subespacios de E tales que dim(U)> $\frac{n}{2}$ y dim(V) > $\frac{n}{2}$. ¿Son U y V subespacios suplementarios? Razona la respuesta.

34.- Sea $C[a,b]=\{f:[a,b]\to\mathbb{R}\,/\,f\ \text{continua}\}$, y sean $x_1, x_2, ..., x_m$ m puntos (fijos) de $[a,b]$. Se considera la aplicación: $\|\cdot\|:C[a,b]\to\mathbb{R}\ /\ \|f\|=|f(x_1)|+|f(x_2)|+...+|f(x_m)|$. ¿Es esta aplicación una norma? Indicar que axiomas fallan.

35.- Sea $C[0,1]=\{f:[0,1]\to\mathbb{R}\,/\,f\ \text{continua}\}$. Se considera la aplicación: $\|\cdot\|_\infty:C[0,1]\to\mathbb{R}\ /\ \|f\|_\infty=\max_{x\in[0,1]}|f(x)|$. ¿Es esta aplicación una norma? Indicar que axiomas fallan.

36.- Indicar si las aplicaciones siguientes son normas:

a) $\|\cdot\|_1:E_{nxn}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}\ /\ \|A\|_1=\det(A)$.

b) $\|\cdot\|_2:E_{nxn}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}\ /\ \|A\|_2=n\cdot\max\{|a_{ij}|\ /\ i,j=1,2,...,n\}$.

SOLUCIONES EJERCICIOS TEMA 2

2.- a) U no es sub. vec. b) V no es sub. vec. c) W sí es sub. vec.

3.- Los dos conjuntos son subespacios vectoriales de V.

4.- U sí es subespacio vectorial y V no lo es.

5.- Ninguno de los dos conjuntos es subespacio vectorial de V.

6.- $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = 1\,\mathbf{u}_1 + 3\,\mathbf{u}_2 - 2\,\mathbf{u}_3$, luego sí pertenece.

7.- $E = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 3A - 2B - C$.

8.- $\mathbf{v} = x^2 + 4x - 3 = -3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3$

9.- Para $\alpha = 0, \alpha = 1$ y $\alpha = -\frac{4}{3}$ dejan de formar base los vectores de $\mathbb{R}^3$

$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3\alpha - 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

10.- $C_{B'} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \\ -21 \\ 30 \end{pmatrix}$.

11.- $C_{B'}(4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

12.- $C_{B'}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

13.- ii) B'=$\{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, -\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$

14.- Base de F=$\left\{x - \frac{1}{2}, x^2 - \frac{1}{3}, x^3 - \frac{1}{4}\right\}$. Base de $\mathbb{P}_3 = \left\{1, x - \frac{1}{2}, x^2 - \frac{1}{3}, x^3 - \frac{1}{4}\right\}$.

15.- La dimensión de W es 2 y una base de W es $\left\{\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\right\}$.

16.- ii) La dimensión de N es 2 y una base de N es $\left\{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

17.- a) La dimensión de *S* es 2 y una base de *S* es $B_S = \{x^3 - x, x^2 - x\}$.

b) La dimensión de U es 3 y una base de U es $B_U = \{x, x^2, x^3\}$.

c) La dimensión de V es 1 y una base de V es $B_V = \{1\}$.

d) La dimensión de W es 2 y una base de W es $B_W = \{1, x^2\}$.

18.- i) $C_B\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ii) A=$C_B\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

19.- M coincide con $\mathbb{P}_2$, luego cualquier base de $\mathbb{P}_2$ contiene una base de M, por ejemplo $\{1, x, x^2\}$.

21.- La dimensión de subespacio es 2, su ecuación cartesiana es $-2x_1 + x_2 + 6x_3 = 0$ y sus ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = 2s - 6t, \quad t, s \in \mathbb{R}. \\ x_1 = t \end{cases}$

22.- a) F; b) F, c) F, d) V.

23.- Ecuación implícita de F: $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$ y ecuaciones paramétricas de

$$F: \begin{cases} x_1 = r \\ x_2 = s \\ x_3 = t \\ x_4 = r - s + t \end{cases} \qquad r, s, t \in \mathbb{R}.$$

24.- i) Ecuaciones de W en B': $\begin{cases} 2x'_2 - x'_3 = 0 \\ x'_4 = 0 \end{cases}$.

ii) $C_B(\mathbf{v}) = C_B(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C_{B'}(\mathbf{v}) = C_{B'}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

iii) Sí pertenece.

25.-a) $V \cap W$: $\dim(V \cap W) = 1$, $B_{V\cap W} = \{\mathbf{u}_4\}$, ecuaciones de $V \cap W$: $\begin{cases} x_2 - x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$.

b) $V + W$: $\dim(V + W) = 4$, $B_{V+W}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$, no tiene ecuaciones.

c) a+b+c=0, d cualquiera.

26.- i) dim(U)=3, $B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, ii) dim(W)=2, $B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,

iii) $\dim(U \cap W) = 1$, $B_{U\cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, iv) dim(U+W)=4, $B_{U+W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

27.- $2 \leq \dim(U \cap W) \leq 4$.

28.- U+W= V= $E_{nxn}(\mathbb{K})$ y $U\cap W$ es el subespacio de las matrices diagonales.

29.- ii) Dim(U)=3 y $B_U=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\right\}$.

iii) Dim($U\cap W$)=2, $B_{U\cap W}=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\right\}$.

Dim(U+W)=7,

$$B_{U+W}=\left\{\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

30.- a) $P=\begin{pmatrix}1&a&a^2&a^3\\0&1&2a&3a^2\\0&0&1&3a\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

b) Ecuación implícita de U en la base B: $3a_1+2a_2-a_3=0$; ecuaciones implícitas de V en la base B: $\begin{cases}-a_0+a_1-a_3=0\\ a_2=0\end{cases}$.

c) Base de $U\cap V$=$\left\{-2+x+3x^3\right\}$; base de U+V cualquier base de $\mathbb{P}_3$.

d) Ecuación implícita de U en la base B’: $3a_1'+8a_2'+14a_3'=0$; ecuaciones implícitas de V en la base B’: $\begin{cases}-a_0'+a_2'+a_3'=0\\ a_2'+3a_3'=0\end{cases}$.

31.- U+W = V= $E_{nxn}(\mathbb{K})$ y $U\cap W$ es el espacio nulo.

32.- a) V. b) V. c) F. d) V. e) V. f) F.

33.- No pueden ser subespacios suplementarios, ya que si lo fueran la dimensión del subespacio suma de ambos sería mayor que *n*.

34.-No es una norma. Falla el axioma 2.

35.- Sí es una norma.

36.- a) $\|\cdot\|_1 : E_{nxn}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \ / \ \|A\|_1 = \det(A).$ No es norma. Fallan los axiomas 1,2,3 y 4

b) $\|\cdot\|_2 : E_{nxn}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \ / \ \|A\|_2 = n\cdot\max\left\{\left|a_{ij}\right| / \ i, j = 1, 2, ..., n\right\}$, sí es norma.

Tema 3

ESPACIOS CON PRODUCTO ESCALAR

3.1. ESPACIOS EUCLÍDEOS

Definición. Sea E un espacio vectorial real. Se llama *producto escalar* a toda aplicación de $E \times E$ en $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \longrightarrow & <\mathbf{x},\mathbf{y}> \end{array}$$

verificando:

- 1. $<\mathbf{x},\mathbf{x}> \ \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in E \quad \wedge \quad <\mathbf{x},\mathbf{x}> = 0 \ \Leftrightarrow \ \mathbf{x} = \mathbf{0}$ (Positividad).
- 2. $<\mathbf{x},\mathbf{y}> = <\mathbf{y},\mathbf{x}> \quad \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ (Simetría).
- 3. $<\mathbf{x}, (\alpha\mathbf{y}+\beta\mathbf{z})> = \alpha<\mathbf{x},\mathbf{y}> + \beta<\mathbf{x},\mathbf{z}> \quad \forall\, \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in E \ \wedge \ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

  (Bilinealidad).

Al espacio vectorial real dotado de un producto escalar se le llama *espacio euclídeo.*

Para denotar el producto escalar de dos vectores **x** e **y**, además de $<\mathbf{x},\mathbf{y}>$ se suele poner también $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ o $(\mathbf{x} \,|\, \mathbf{y})$.

<u>Ejemplos.</u>

1. El producto escalar usual entre los vectores libres del espacio, definido de forma que dados dos vectores libres $\vec{u}$ y $\vec{v}$, les asocia el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman,

$$< \vec{u}, \vec{v} > \ = \ |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

cumple los axiomas de producto escalar.

2. La aplicación de $\mathbb{R}^n$ x $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que a dos n-tuplas de $\mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{asocia} \qquad < \mathbf{x},\mathbf{y} > = x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + \dots + x_n\, y_n$$

es un producto escalar, que se denomina *producto escalar usual* en $\mathbb{R}^n$.

3. En el espacio vectorial de las funciones continuas definidas en un intervalo [a,b], C[a,b], la aplicación de C[a,b]xC[a,b] $\rightarrow$ $\mathbb{R}$ que asocia a cada par de funciones la integral siguiente:

$$< f, g >= \int_a^b f(x) \cdot g(x) \cdot dx$$

es también producto escalar.

3.2. PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR. DESIGUALDAD DE SCHWARZ.

Sea E un espacio vectorial en el que se ha definido un producto escalar. Entonces:

1. $\forall\, \mathbf{y} \in E$: $\quad < \mathbf{0},\mathbf{y} > = < \mathbf{y},\mathbf{0} > = 0$.

Demostración.

$\forall\, \mathbf{x},\mathbf{y} \in E \quad < \mathbf{x},\mathbf{y} > = < (\mathbf{x}+\mathbf{0})\, , \mathbf{y} > = < \mathbf{x},\mathbf{y} > + < \mathbf{0},\mathbf{y} > \;\Rightarrow\; < \mathbf{0},\mathbf{y} > = 0 \quad \forall\, \mathbf{y} \in E.$

2. Si $\forall\, \mathbf{y} \in E$ $< \mathbf{x},\mathbf{y} > = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Demostración.

Si $\forall\, \mathbf{y} \in E < \mathbf{x},\mathbf{y} > = 0 \;\Rightarrow\;$ como $\mathbf{x} \in E$, $< \mathbf{x},\mathbf{x} > = 0 \;\Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

3. $\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E : \left| < \mathbf{x}, \mathbf{y} > \right| \le \sqrt{< \mathbf{x}, \mathbf{x} >} \cdot \sqrt{< \mathbf{y}, \mathbf{y} >}$ (Desigualdad de Schwarz).

Demostración. Si **x** o **y** son el vector **0**, la desigualdad se cumple trivialmente. Se hará, pues, la demostración suponiendo que ambos son no nulos. Si se considera el vector **z** de E, $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \dfrac{<\mathbf{x},\mathbf{y}>}{<\mathbf{y},\mathbf{y}>}\mathbf{y}$, se tiene:

$$0 \leq <\mathbf{z},\mathbf{z}> = \left(\mathbf{x} - \frac{<\mathbf{x},\mathbf{y}>}{<\mathbf{y},\mathbf{y}>}\mathbf{y}\right)\cdot\left(\mathbf{x} - \frac{<\mathbf{x},\mathbf{y}>}{<\mathbf{y},\mathbf{y}>}\mathbf{y}\right) =$$

$$= <\mathbf{x},\mathbf{x}> - \frac{<\mathbf{x},\mathbf{y}>}{<\mathbf{y},\mathbf{y}>}<\mathbf{x},\mathbf{y}> - \frac{<\mathbf{x},\mathbf{y}>}{<\mathbf{y},\mathbf{y}>}<\mathbf{y},\mathbf{x}> + \frac{<\mathbf{x},\mathbf{y}>}{<\mathbf{y},\mathbf{y}>}\cdot\frac{<\mathbf{x},\mathbf{y}>}{<\mathbf{y},\mathbf{y}>}<\mathbf{y},\mathbf{y}> =$$

$$= <\mathbf{x},\mathbf{x}> - \frac{<\mathbf{x},\mathbf{y}>}{<\mathbf{y},\mathbf{y}>}<\mathbf{y},\mathbf{x}> = <\mathbf{x},\mathbf{x}> - \frac{<\mathbf{x},\mathbf{y}><\mathbf{x},\mathbf{y}>}{<\mathbf{y},\mathbf{y}>} \geq 0$$

Teniendo en cuenta que $<\mathbf{y},\mathbf{x}> = <\mathbf{x},\mathbf{y}>$, se tiene

$$<\mathbf{x},\mathbf{y}>^2 \leq <\mathbf{x},\mathbf{x}>\cdot<\mathbf{y},\mathbf{y}> \Rightarrow \left|<\mathbf{x},\mathbf{y}>\right| \leq \sqrt{<\mathbf{x},\mathbf{x}>}\cdot\sqrt{<\mathbf{y},\mathbf{y}>}$$

3.3. NORMA INDUCIDA POR UN PRODUCTO ESCALAR.

Proposición. Sea E un espacio vectorial real dotado de un producto escalar. La aplicación de E en $\mathbb{R}$ que a cada elemento del espacio euclídeo **x** le asocia el escalar $+\sqrt{<\mathbf{x},\mathbf{x}>}$ es una norma sobre E, que se denomina *norma asociada al producto escalar* $<\mathbf{x},\mathbf{y}>$.

Demostración. Se comprueba fácilmente que dicha aplicación cumple los axiomas de norma:

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0 \quad \forall\, \mathbf{x} \in E \quad \wedge \quad \|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

La primera parte es evidente por tomarse la raíz positiva siempre. Y en cuanto a la segunda parte,

$$\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{<\mathbf{x},\mathbf{x}>} = 0 \Leftrightarrow <\mathbf{x},\mathbf{x}> = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

2. $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\,\|\mathbf{x}\| \quad \forall\, \mathbf{x} \in E \quad \wedge \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\|\lambda\mathbf{x}\| = \sqrt{<\lambda\mathbf{x},\lambda\mathbf{x}>} = \sqrt{\lambda^2<\mathbf{x},\mathbf{x}>} = |\lambda|\,\|\mathbf{x}\|.$$

3. $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\| \quad \forall\, \mathbf{x},\mathbf{y} \in E$

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = <(\mathbf{x}+\mathbf{y}),(\mathbf{x}+\mathbf{y})> = <\mathbf{x},\mathbf{x}> + <\mathbf{x},\mathbf{y}> + <\mathbf{y},\mathbf{x}> + <\mathbf{y},\mathbf{y}> =$$

$$= <\mathbf{x},\mathbf{x}> + 2<\mathbf{x},\mathbf{y}> + <\mathbf{y},\mathbf{y}> = \|\mathbf{x}\|^2 + \|y\|^2 + 2<\mathbf{x},\mathbf{y}>$$

y teniendo en cuenta la desigualdad de Schwarz se cumple que:

$$<\mathbf{x},\mathbf{y}> \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$$

por lo que la expresión anterior queda:

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| = (\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|)^2 \Rightarrow$$

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

Ejemplos.

En $\mathbb{R}^n$, la norma inducida por el producto escalar usual

$$<\mathbf{x},\mathbf{y}> = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

es: $$\|\mathbf{x}\| = <\mathbf{x},\mathbf{x}>^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

que es la norma euclídea de $\mathbb{R}^n$.

Se puede definir el ángulo formado por dos vectores **x** e **y** no nulos de la forma siguiente:

Definición. Sea E un espacio euclídeo, y sean **x** e **y** dos vectores de E no nulos. Se llama *ángulo formado* por **x** e **y** al ángulo cuyo coseno es:

$$\frac{<\mathbf{x},\mathbf{y}>}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}$$

Notar que por la desigualdad de Schwarz, este cociente siempre es un número real comprendido entre -1 y 1.

En el caso de considerar el espacio vectorial de los vectores libres, esta definición coincide con la de ángulo geométrico. Así, en un espacio vectorial cualquiera si $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, entonces el ángulo correspondiente es 0 (rad); y si $< \mathbf{x} , \mathbf{y} > = 0$, el ángulo formado por **x** e **y** es $\pi/2$.

3.4. VECTORES ORTOGONALES, NORMADOS Y ORTONORMADOS.

Definición. Sea E un espacio vectorial euclídeo. Se dice que dos *vectores* **x** e **y** no nulos de E son *ortogonales* si $< \mathbf{x} , \mathbf{y} > = 0$ (se denota por $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$).

Definición. Sea E un espacio vectorial euclídeo. Se dice que un vector **x** de E es un *vector normalizado o unitario* si $\| \mathbf{x} \| = 1$.

Definición. Sea E un espacio euclídeo, y $S = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_p}\}$ un sistema de vectores de E que no incluye al vector **0**. Se dice que S es un *sistema ortogonal* si todos sus vectores son ortogonales dos a dos, es decir, si $<\mathbf{u_i} , \mathbf{u_j}> = 0 \quad \forall \ i \neq j$. Si además todos los vectores tienen norma 1, se dice que S es un *sistema ortonormado u ortonormal*.

Proposición. Sea E un espacio euclídeo, y sea $S = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_p}\}$ un sistema de vectores de E. Si S es un sistema ortogonal o, en particular, si es un sistema ortonormal, entonces es un sistema libre.

Demostración. Supóngase que existen $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$ escalares de $\mathbb{R}$, tales que

$$\alpha_1 \mathbf{u_1} + \alpha_2 \mathbf{u_2} + ... + \alpha_p \mathbf{u_p} = \mathbf{0}$$

Si se multiplica escalarmente esta expresión por un vector $\mathbf{u_j}$ de S, se obtiene

$$< \alpha_1 \mathbf{u_1} + \alpha_2 \mathbf{u_2} + ... + \alpha_p \mathbf{u_p} , \mathbf{u_j} > = < \mathbf{0} , \mathbf{u_j} > = \mathbf{0} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \alpha_1 < \mathbf{u_1} , \mathbf{u_j} > + \alpha_2 < \mathbf{u_2} , \mathbf{u_j} > + ... + \alpha_p < \mathbf{u_p} , \mathbf{u_j} > = \alpha_j < \mathbf{u_j} , \mathbf{u_j} > = 0 \ \Rightarrow \ \alpha_j = 0$$

Pero esto es cierto para $j \in \{1,2,...,p\}$,luego

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_p = 0$$

Es decir, $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_p}$ son linealmente independientes. ■

Ejemplos.

1. Los vectores $\{(\ 1\ 0\ ...\ 0\ )^T\ ,\ (\ 0\ 1\ ...\ 0\ )^T\ ,\ ...\ ,\ (\ 0\ 0\ ...\ 1\ )^T\ \}$ son una familia ortonormada de vectores de $\mathbb{R}^n$ para el producto usual.

2. En el espacio de funciones definidas y continuas en el intervalo $[-\pi,\ \pi]$ considerando el producto escalar

$$< f, g > = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot g(x)\cdot dx$$

las funciones {1, sen(x), cos(x), sen(2x), cos(2x), ..., sen(px), cos(px)} forman un sistema ortogonal.

Existen varios métodos para obtener bases ortogonales en un espacio de dimensión finita n; uno de ellos es el *método de Gram-Schmidt*, el cual se expone a continuación.

3.5. MÉTODO DE ORTOGONALIZACIÓN DE GRAM-SCHMIDT

En este apartado se va a estudiar el método de ortogonalización de Gram-Schmidt que permite obtener a partir de una familia de vectores linealmente independientes una familia ortogonal.

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita n, y sea $B = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, ..., \mathbf{e_n}\}$ una base de E; a partir de ella se obtiene la base ortogonal $B' = \{\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}, ..., \mathbf{e'_n}\}$ de la forma siguiente:

$\mathbf{e'_1} = \mathbf{e_1}$

$\mathbf{e'_2} = \mathbf{e_2} + \lambda\,\mathbf{e'_1}$ donde $\lambda \in \mathbb{R}\ \ /\ <\mathbf{e'_2}, \mathbf{e'_1}> = 0$,

$\mathbf{e'_3} = \mathbf{e_3} + \alpha\,\mathbf{e'_2} + \beta\,\mathbf{e'_1}$ donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \ /\ <\mathbf{e'_3}, \mathbf{e'_2}> = 0\ \ \wedge <\mathbf{e'_3}, \mathbf{e'_1}> = 0$,

...

$\mathbf{e'_n} = \mathbf{e_n} + \gamma\,\mathbf{e'_{n-1}} + ... + \psi\,\mathbf{e'_1}$ donde $\gamma, ..., \psi \in \mathbb{R}\ /\ <\mathbf{e'_n}, \mathbf{e'_k}> = 0\ \ \forall\, k = 1, 2, ..., n-1$

De esta forma se obtiene una base ortogonal. Si lo que se requiere es una base ortonomal basta con tomar $B^* = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_n}\}$, siendo

$$\mathbf{u_i} = \frac{\mathbf{e'_i}}{\| \mathbf{e'_i} \|} \qquad \text{para } i = 1, 2, ..., n.$$

Este método también se puede aplicar para obtener una familia ortonormada a partir de una familia de vectores linealmente independiente cualquiera.

3.6. EXPRESIÓN MATRICIAL DEL PRODUCTO ESCALAR. CAMBIO DE BASE.

Sea E un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita *n* y sea B = {$\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, ..., \mathbf{e_n}$} una base de E. Sean dos vectores cualesquiera $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y} \in$ E que se expresan en la base B en la forma:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e_1} + x_2 \mathbf{e_2} + ... + x_n \mathbf{e_n}, \quad \mathbf{y} = y_1 \mathbf{e_1} + y_2 \mathbf{e_2} + ... + y_n \mathbf{e_n}$$

Entonces, el producto escalar de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ puede expresarse en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} <\mathbf{x},\mathbf{y}> &= <(x_1 \mathbf{e_1} + x_2 \mathbf{e_2} + ... + x_n \mathbf{e_n}),\ (y_1 \mathbf{e_1} + y_2 \mathbf{e_2} + ... + y_n \mathbf{e_n})> = \\ &= x_1 y_1 <\mathbf{e_1},\mathbf{e_1}> + x_1 y_2 <\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}> + ... + x_1 y_n <\mathbf{e_1},\mathbf{e_n}> + \\ &\quad + x_2 y_1 <\mathbf{e_2},\mathbf{e_1}> + x_2 y_2 <\mathbf{e_2},\mathbf{e_2}> + ... + x_2 y_n <\mathbf{e_2},\mathbf{e_n}> + \\ &\quad + ... + \\ &\quad + x_n y_1 <\mathbf{e_n},\mathbf{e_1}> + x_n y_2 <\mathbf{e_n},\mathbf{e_2}> + ... + x_n y_n <\mathbf{e_n},\mathbf{e_n}> \qquad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$<\mathbf{x},\mathbf{y}> = (x_1\ x_2 \ldots x_n) \begin{pmatrix} <\mathbf{e_1},\mathbf{e_1}> & <\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}> & \ldots & <\mathbf{e_1},\mathbf{e_n}> \\ <\mathbf{e_2},\mathbf{e_1}> & <\mathbf{e_2},\mathbf{e_2}> & \ldots & <\mathbf{e_2},\mathbf{e_n}> \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ <\mathbf{e_n},\mathbf{e_1}> & <\mathbf{e_n},\mathbf{e_2}> & \ldots & <\mathbf{e_n},\mathbf{e_n}> \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{x}_B^T \cdot G_B \cdot \mathbf{y}_B$$

donde $\mathbf{x}_B$ e $\mathbf{y}_B$ son las coordenadas de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ en la base B y a $G_B = (<\mathbf{e_i},\mathbf{e_j}>)_{nxn}$ se la llama *matriz del producto escalar* en la base B. Teniendo en cuenta la propiedad de simetría del producto escalar se cumple que $<\mathbf{e_i},\mathbf{e_j}> = <\mathbf{e_j},\mathbf{e_i}>$ y consecuentemente la matriz G_B es una matriz simétrica.

Si se considera en el espacio vectorial E otra base B' = {$\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}, ..., \mathbf{e'_n}$}, siendo P la matriz de paso de la base B a la base B', teniendo en cuenta la relación existente entre las coordenadas de dos vectores **x** e **y** respecto a las bases B y B' ($\mathbf{x}_B = P\,\mathbf{x}_{B'}$), y que el producto escalar de dos vectores es un escalar que no depende de la base que se esté considerando en E, se tiene:

$$<\mathbf{x},\mathbf{y}> = \mathbf{x}_B^T \cdot G_B \cdot \mathbf{y}_B = (P \cdot \mathbf{x}_{B'})^T \cdot G_B \cdot (P \cdot \mathbf{y}_{B'}) = \mathbf{x}_{B'}^T \cdot P^T \cdot G_B \cdot P \cdot \mathbf{y}_{B'} = \mathbf{x}_{B'}^T \cdot G_{B'} \cdot \mathbf{y}_{B'}$$

Es decir, la matriz del producto escalar en la nueva base es:

$$G_{B'} = P^T \cdot G_B \cdot P$$

y sigue teniendo por elementos los productos escalares de los vectores $\mathbf{e'}_i$ de la base B',

esto es: $$G_{B'} = \begin{pmatrix} <\mathbf{e'}_1,\mathbf{e'}_1> & <\mathbf{e'}_1,\mathbf{e'}_2> & \dots & <\mathbf{e'}_1,\mathbf{e'}_n> \\ <\mathbf{e'}_2,\mathbf{e'}_1> & <\mathbf{e'}_2,\mathbf{e'}_2> & \dots & <\mathbf{e'}_2,\mathbf{e'}_n> \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ <\mathbf{e'}_n,\mathbf{e'}_1> & <\mathbf{e'}_n,\mathbf{e'}_2> & \dots & <\mathbf{e'}_n,\mathbf{e'}_n> \end{pmatrix}.$$

Observaciones.

1. Las matrices asociadas a un producto escalar en bases distintas verifican la relación $G_{B'} = P^T \cdot G_B \cdot P$. Dos matrices A y B verificando la relación $B = P^T \cdot A \cdot P$, siendo P una matriz regular se dice que son *matrices congruentes*. Por tanto, las matrices asociadas a un producto escalar en bases distintas son todas *congruentes*.

2. El producto escalar es indispensable para manejar longitudes y ángulos; por ello, interesa conseguir que su expresión analítica, en coordenadas, sea lo más simple posible. Dicho de otro modo, interesa que la matriz sea cuanto más sencilla mejor. Esto se conseguirá, por ejemplo, trabajando con bases ortogonales, en las cuales la matriz del producto escalar asociada es diagonal. Si la base es ortonormada, entonces, la matriz del producto escalar en ella es la matriz identidad I_n.

3. Las matrices G asociadas a un producto escalar son todas *regulares*, pues según se ha comentado en las observaciones anteriores, todas son congruentes con la matriz identidad, es decir, pueden expresarse en la forma $G = P^T \cdot I_n \cdot P$, entonces

tomando determinantes en esta expresión, se deduce trivialmente que $|G|\neq 0$, por ser P una matriz regular.

4. Por la positividad del producto escalar sabemos que se cumple $<\mathbf{x},\mathbf{x}> > 0 \;\; \forall \mathbf{x} \in E$, $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$, lo que significa, teniendo en cuenta la expresión matricial que acabamos de establecer, que:

$$\mathbf{x}_B^T \cdot G_B \cdot \mathbf{x}_B > 0 \quad \text{para todo vector } \mathbf{x} \text{ no nulo.}$$

Las matrices simétricas G que cumplen esta relación reciben el nombres de *definidas positivas*. Se dispone del siguiente criterio de carácter práctico, conocido como *Criterio de Sylvester*, para averiguar si una matriz $G=(g_{ij})_{i,j}$ simétrica es definida positiva: Sean Δ_i los determinantes de la misma:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{i1} & \cdots & g_{ii} \end{vmatrix}$$

Entonces, se verifica que G es definida positiva $\Leftrightarrow$ $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, ..., \Delta_n > 0$. En particular, $g_{11} > 0$ y $\det G > 0$, ya que: $g_{11} = \Delta_1$ y $\det G = \Delta_n$. Obviamente, también serán positivos todos los elementos de la diagonal principal de G: $g_{22} > 0$, …, $g_{nn} > 0$, ya que representan los productos escalares $< \mathbf{e_i}, \mathbf{e_i} >$.

3.7. SUBESPACIO ORTOGONAL DE UN SUBESPACIO VECTORIAL.

Sea E un espacio vectorial euclídeo.

Definición. Se dice que dos *subespacios* U y V de E son *ortogonales* si cualquier vector de uno de ellos es ortogonal a todos los vectores del otro, es decir si:

$\forall\, \mathbf{x}\in U \;\wedge\; \forall\, \mathbf{y}\in V \quad < \mathbf{x} , \mathbf{y} > = 0$ (Se denota $U \perp V$).

Teorema. Dado un subespacio U de E el conjunto de todos los vectores de E que son ortogonales a U, es decir, el conjunto:

$$U^{\perp} = U^* = \{\mathbf{x} \in E / < \mathbf{x}, \mathbf{y} >= 0 \ \forall \mathbf{y} \in U\}$$

es el mayor de los subespacios de E que son ortogonales a U y se verifica que $U \cap U^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$. Se dice que $U^{\perp}$ es el *subespacio ortogonal* de U.

Demostración.

1. El conjunto $U^{\perp}$ es subespacio vectorial de E, ya que $U^{\perp} \neq \emptyset$, pues al menos el vector nulo pertenece a él y, como demostraremos a continuación, es estable para la suma y para el producto por un escalar. En efecto, $\forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U^{\perp}$, $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y para cualquier $\mathbf{z} \in U$ se verifica:

$$< (\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}), \mathbf{z} >= \alpha < \mathbf{x}, \mathbf{z} > + \beta < \mathbf{y}, \mathbf{z} >= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in U^{\perp}$$

2. La intersección $U \cap U^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$, ya que si $\mathbf{x} \in U \cap U^{\perp} \Rightarrow < \mathbf{x}, \mathbf{x} >= 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ por la positividad del producto escalar. ■

<u>Ejemplos</u>.

1. En el espacio de los vectores libres del espacio de dimensión 3, los ejes X y Y son ortogonales entre sí, pero el subespacio ortogonal del eje X es todo el plano YZ, es decir, el plano de ecuación x=0.

2. En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual, se considera el subespacio $U=\{(x\ \ 0\ \ 0)^t \ / \ x \in \mathbb{R}\}$. El subespacio ortogonal de U es el subespacio formado por todos los vectores de la forma $U^{\perp}=\{(0\ \ y\ \ 0)^t, (0\ \ 0\ \ z)^t \ / \ y, z \in \mathbb{R}\}$, es decir, de ecuación x=0.

3. En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual, se considera el subespacio $U=\{(a\ \ a\ \ b\ \ b)^t \ / \ a, b \in \mathbb{R}\}$. El subespacio ortogonal de U es el subespacio formado por todos los vectores de la forma $U^{\perp}=\{(\alpha\ \ {-\alpha}\ \ \beta\ \ {-\beta})^t \ / \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

EJERCICIOS TEMA 3

1. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ referido a la base canónica $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ se define el producto escalar por la matriz $G_B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Demostrar que $\mathbb{R}^3$ es un espacio vectorial euclídeo.

   b) Calcular la norma del vector $\mathbf{e_1} + \mathbf{e_3}$.

   c) Construir una base ortonormal del subespacio $U = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^3 \,/\, y = 0 \right\}$.

   d) Demostrar que los vectores $\left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}^t / \, a = <\mathbf{x}, \mathbf{e_1}>, b = <\mathbf{x}, \mathbf{e_2}>, c = <\mathbf{x}, \mathbf{e_3}> \right\}$ forman un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ y dar una base del mismo.

2. En un espacio vectorial euclídeo bidimensional, el producto escalar de dos vectores $\mathbf{x_B} = (x_1 \quad x_2)^t$ e $\mathbf{y}_B = (y_1 \quad y_2)^t$ referidos a la base $B = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ viene definido por:

$$< \mathbf{x}, \mathbf{y} > = 4x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

   a) Demostrar que esta expresión define un producto escalar.

   b) Hallar la matriz G que caracteriza al producto escalar en la base B, G_B, y las normas y los ángulos que forman los vectores de dicha base B.

   c) Obtener la matriz del producto escalar referida a la nueva base B', $G_{B'}$, siendo $B' = \left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}^t, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3/2 \end{pmatrix}^t \right\}$, donde los vectores $\mathbf{u_1}$ y $\mathbf{u_2}$ están referidos a la base B.

   d) Sean $\mathbf{x} = (1 \quad 1)^t$ e $\mathbf{y} = (1 \quad 2)^t$ dos vectores referidos a B. Hallar $< \mathbf{x}, \mathbf{y} >$ según sus expresiones en las bases B y B'.

3. a) Demostrar que en el espacio vectorial de las funciones reales $x(t)$ continuas en el intervalo [-1,1], la expresión $< x, y > = \int_{-1}^{1} t^2 \cdot x(t) \cdot y(t) dt$ define un producto escalar.

b) Hallar el ángulo formado por los vectores $x(t)=1$ e $y(t)=t$.

c) Obtener el valor de a para el que los vectores $x(t)=t+a$ e $y(t)=t-a$ sean ortogonales.

d) Ortonormalizar el conjunto $\{1,t,t^2\}$.

4. Sea $G=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}$ la matriz que define el producto escalar en la base $B=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$ de un espacio euclídeo.

a) Calcular las normas de los vectores de la base B.

b) Calcular los cosenos de los ángulos que forman entre sí los vectores de la base B.

5. Sea E un espacio vectorial euclídeo tridimensional y sea $B=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ una base del mismo tal que si $\mathbf{u}=\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2$ se tiene:

$<\mathbf{u},\mathbf{u}>=14$	$\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_3$ son ortogonales.
$<\mathbf{u},\mathbf{e}_1>=4$	$\cos(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)=\frac{1}{\sqrt{6}}$
$<\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1>=<\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2>$	$<\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_3>=3$

a) Obtener la expresión del producto escalar en la base B.

b) Ortonormalizar la base B utilizando el método de ortogonalización de Gram-Schmidt.

c) Calcular la matriz de paso de la base B a la base ortonormal B'.

d) Hallar la expresión del producto escalar en la base B'.

6. En el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ referido a la base canónica se consideran los subespacios:

$$S_1=\left\{\mathbf{u}=(x\quad y\quad z)^t\in\mathbb{R}^3 \,/\, x-y-z=0 \wedge 2x-2y+3z=0\right\}$$

$$S_2=\left\{\mathbf{v}=(x\quad y\quad z)^t\in\mathbb{R}^3 \,/\, x+y-z=0\right\}$$

Hallar una base ortonormada de $\mathbb{R}^3$ en la que, si es posible, uno de los vectores de la misma sea perteneciente a S_1 y otro perteneciente a S_2.

7. Sea E un espacio vectorial de dimensión 3, y $B=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ una base de E. Se define un producto escalar por la expresión $<\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j>=\min\{4-i,4-j\}$.

   a) Hallar la matriz asociada en la base B, G_B.

   b) Construir una base ortogonal de E.

8. En un espacio vectorial E de dimensión 3 y referido a una base $B=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$, se define un producto escalar mediante la matriz $G_B=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&16\end{pmatrix}$. Construir una base ortonormal de E respecto de dicho producto escalar.

9. Sea $B=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ una cierta base de un espacio euclídeo. Se sabe que:

$$\|\mathbf{e}_1\|=1,\qquad \|\mathbf{e}_2\|=3,\qquad \|\mathbf{e}_3\|=2$$
$$\text{ang}(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)=\frac{\pi}{2},\qquad \text{ang}(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_3)=\frac{\pi}{3},\qquad \mathbf{e}_2 \text{ y } \mathbf{e}_3 \text{ son ortogonales}$$

a) Hallar la matriz G_B del producto escalar en la base B.

b) Comprobar que efectivamente se cumplen los axiomas de producto escalar.

c) Hallar la matriz $G_{B'}$ del producto escalar en la base $B'=\{\mathbf{e'}_1,\mathbf{e'}_2,\mathbf{e'}_3\}$, siendo

$$\begin{cases}\mathbf{e'}_1=\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e'}_2=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\\ \mathbf{e'}_3=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\end{cases}$$

10. a) Sea E un espacio vectorial real de dimensión 3 y B una base de E. ¿Alguna de estas matrices puede estar asociada a un producto escalar?

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) En caso afirmativo, escribir la expresión matricial de dicho producto escalar. Posteriormente, particularizándolo a los siguientes espacios vectoriales, calcular el producto escalar indicado en cada caso:

i) $E = \mathbb{P}_2(x), \quad B_E = \{1, x, x^2\}$

$$< x^2, 1 + 2x >$$

ii) $E = \mathbb{R}^3, \quad B_E = \{\mathbf{e}_1 = (0\ 1\ 0)^t, \mathbf{e}_2 = (1\ 0\ 0)^t, \mathbf{e}_3 = (0\ 0\ 1)^t\}$

$$< \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 >$$

iii) $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in E_{2x2}(\mathbb{R}) \,/\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \quad , \quad B_E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

11. En un espacio vectorial E de dimensión 2, referido a una base B ={$\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ }, se define un producto escalar mediante la matriz $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Sean S ={ $\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}, \mathbf{e_1} - \mathbf{e_2}$} dos vectores de E

a) ¿Es S un conjunto ortogonal respecto al producto escalar anterior?. Justifica la respuesta.

b) Empleando el método de Gram-Schmidt obtener a partir de S un conjunto ortonormal.

12. En el espacio vectorial real de los polinomios de grado $\leq$ 2 con coeficientes reales, $\mathbb{P}_2$, se considera el producto escalar $< p, q > = \sum_{k=1}^{3} p(k) \cdot q(k)$. Se pide:

a) Obtener la matriz G de dicho producto escalar en la base B={1, t, t^2}, así como la expresión matricial del mismo en dicha base.

b) Calcular el ángulo formado por los polinomios $p(t) = t^2 + 1$ y $q(t) = t^2 - 1$.

13. Indicar razonadamente cuáles de las siguientes matrices pueden estar asociadas a un producto escalar:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

14. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual, se considera el subespacio $S \equiv \{(x \;\; y \;\; z)^t \,/\, x + y - z = 0\}$. Hallar su subespacio ortogonal, dando sus ecuaciones implícitas y una base del mismo.

15. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual, se consideran los vectores **a**=$(0 \;\; 1 \;\; -1 \;\; 4)^t$ y **b**=$(2 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0)^t$.

a) Hallar el subespacio $V \subset \mathbb{R}^4$ formado por todos los vectores que son ortogonales a **a** y a **b** y tienen iguales sus dos últimas componentes.

b) Hallar el subespacio ortogonal a V.

SOLUCIONES EJERCICIOS TEMA 3

1. b) $\|\mathbf{e_1}+\mathbf{e_3}\|=2$; c) $\mathrm{B}^*{}_{\mathrm{U}}=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1 \quad 0 \quad 0)^t,(0 \quad 0 \quad 1)^t\right\}$; d) $\mathrm{B}=\left\{(0 \quad 0 \quad 1)^t\right\}$

2. a) $\mathrm{G_B}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$; b) $\|\mathbf{e_1}\|=2, \|\mathbf{e_2}\|=1, \alpha=\frac{\pi}{3}$; c) $\mathrm{G_{B'}}=\begin{pmatrix}16 & 3\\ 3 & \frac{9}{4}\end{pmatrix}$; d) $<\mathbf{x},\mathbf{y}>=9$

3. b) $\alpha=\frac{\pi}{2}$; c) $\mathrm{a}=\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$; d) $\left\{\sqrt{\frac{3}{2}},\ \sqrt{\frac{5}{2}}\,\mathrm{t},\ \frac{5}{2}\cdot\sqrt{\frac{7}{2}}\left(\mathrm{t}^2-\frac{3}{5}\right)\right\}$

4. a) $\|\mathbf{u_1}\|=1, \quad \|\mathbf{u_2}\|=\sqrt{2}, \quad \|\mathbf{u_3}\|=\sqrt{3}$

b) $\cos(\mathbf{u_1},\mathbf{u_2})=\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos(\mathbf{u_1},\mathbf{u_3})=\frac{\sqrt{3}}{3}, \cos(\mathbf{u_2},\mathbf{u_3})=\frac{\sqrt{6}}{3}$

5. a) $<\mathbf{x},\mathbf{y}>_{\mathrm{B}}=(\mathrm{x}_1 \quad \mathrm{x}_2 \quad \mathrm{x}_3)_{\mathrm{B}}\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}_{\mathrm{B}}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}_{\mathrm{B}}$

b) $\mathrm{B}'=\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0\end{pmatrix}^t,\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0\end{pmatrix}^t,\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{21}} & -\frac{2}{\sqrt{21}} & \sqrt{\frac{3}{7}}\end{pmatrix}^t\right\}$

c) $\mathrm{P}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{21}}\\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{2}{\sqrt{21}}\\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{7}}\end{pmatrix}$

d) $<\mathbf{x},\mathbf{y}>_{\mathrm{B}'}=(\mathrm{x}_1 \quad \mathrm{x}_2 \quad \mathrm{x}_3)_{\mathrm{B}'}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}_{\mathrm{B}'}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}_{\mathrm{B}'}$.

6. $B^{''}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}^{t},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\end{pmatrix}^{t},\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{t}\right\}$

7. a) $G_B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$; b) $B'=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}^{t},\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & 1 & 0\end{pmatrix}^{t},\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}^{t}\right\}$

8. $B^{''}=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}^{t},\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\end{pmatrix}^{t},\begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}^{t}\right\}$

9. a) $G_B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 9 & 0\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}$.

c) $G_{B'}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 10 & 11\\ 2 & 11 & 16\end{pmatrix}$.

10. a) G_1 **no** puede ser la matriz de un producto escalar ya que, aunque es cuadrada y simétrica, no se cumple que todos sus menores principales son mayores que 0.

G_2 **sí** puede ser la matriz de un producto escalar ya que es cuadrada, simétrica y se cumple que todos sus menores principales son mayores que 0.

b) $<\mathbf{x},\mathbf{y}>_B=C_B(\mathbf{x})^t\cdot G_2\cdot C_B(\mathbf{y})$

i) $<x^2,1+2x>=5$

ii) $<\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2>=5$

iii) $\left\langle\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\right\rangle=5$

11. a) S no es un conjunto ortogonal.

b) Conjunto ortonormal: $\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{11}}\end{pmatrix}^{t},\begin{pmatrix}\frac{16}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{8}} & \frac{-6}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{8}}\end{pmatrix}^{t}\right\}$

12.- a) G= $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 14 \\ 6 & 14 & 36 \\ 14 & 36 & 98 \end{pmatrix}$, $<p,q>=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 6 & 14 \\ 6 & 14 & 36 \\ 14 & 36 & 98 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, siendo

$$p(t)=a_0+a_1t+a_2t^2 \quad y \quad q(t)=b_0+b_1t+b_2t^2.$$

b) $\alpha=\arccos\dfrac{95}{\sqrt{129}\sqrt{73}}$.

13. A **no** puede ser la matriz de un producto escalar ya que no es cuadrada.

B **sí** puede ser la matriz de un producto escalar ya que es cuadrada, simétrica y se cumple que todos sus menores principales son mayores que 0.

C **no** puede ser la matriz de un producto escalar ya que no es simétrica.

D **no** puede ser la matriz de un producto escalar ya que aunque sí es cuadrada y simétrica, no cumple la condición de que todos sus menores principales son mayores que 0, ya que $|D|=-63$.

14. $S^{\perp}$ = {(x y z)^t / y = x, z = -x}. Base: {(1 1 -1)^t}.

15. a) V= {(λ -3λ λ λ)^t / $\lambda \in \mathbb{R}$ }.

b) $V^{\perp}$ ={(x y z t)^t/ x -3y + z + t = 0}.

Tema 4

APLICACIONES LINEALES

4.1. DEFINICIÓN DE APLICACIÓN LINEAL. PROPIEDADES.

Definicion: Sean E y F dos espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, de dimensiones n y m respectivamente. Una aplicación f de E en F que asigna a cada vector $\mathbf{x}$ de E un vector $f(\mathbf{x})$ de F

$$\begin{aligned} f: \mathrm{E} &\to \mathrm{F} \\ \mathbf{x} &\to f(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

es una *aplicación* o *transformación lineal* si verifica las dos condiciones siguientes:

i) $\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathrm{E} \qquad f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$

ii) $\forall\, \mathbf{x} \in \mathrm{E}$ y $\forall\, \alpha \in \mathbb{K} \quad f(\alpha\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x})$

La condición i) indica que la aplicación conserva la suma de vectores. Hay que señalar que la suma $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ y la suma $f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y})$ se realizan en los espacios vectoriales E y F respectivamente, por tanto pueden ser operaciones "suma" distintas. La condición ii) mantiene el producto por un escalar. Otra vez hay que señalar que el producto $\alpha\mathbf{x}$ puede ser distinto del producto $\alpha f(\mathbf{x})$ ya que están definidos en espacios vectoriales distintos.

Nota:

Como consecuencia inmediata de las condiciones i) y ii) se cumple:

$f(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y}) \quad \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathrm{E} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ (Caracterización que también puede utilizarse para comprobar que una aplicación es lineal).

Por extensión, la propiedad puede generalizarse a combinaciones lineales de cualquier número de sumandos. Esto es:

$$\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n \in \mathrm{E} \;\text{ y }\; \forall \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K},$$
$$f(\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{x}_n) = \lambda_1 f(\mathbf{x}_1) + \lambda_2 f(\mathbf{x}_2) + \cdots + \lambda_n f(\mathbf{x}_n)$$

Definición:

Una aplicación lineal de un espacio vectorial en sí mismo recibe el nombre de *endomorfismo*.

$$\begin{aligned} f:\mathrm{E} &\to \mathrm{E} \\ \mathbf{x} &\to f(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

<u>Ejemplos</u>**:**

1. Se define la aplicación :

$$\begin{array}{ccc} f:\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \to & f(\mathbf{x})=\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Probar que f es aplicación lineal.

Sean $\mathbf{x}=(x_1 \quad x_2 \quad x_3)^t$ e $\mathbf{y}=(y_1 \quad y_2 \quad y_3)^t$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$ comprobemos las dos condiciones i) y ii) anteriores.

i) Dado que

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(x_1 \quad x_2 \quad x_3)^t+(y_1 \quad y_2 \quad y_3)^t=(x_1+y_1 \quad x_2+y_2 \quad x_3+y_3)^t$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= (x_1+y_1+x_2+y_2 \quad x_3+y_3)^t=(x_1+x_2 \quad x_3)^t+(y_1+y_2 \quad y_3)^t= \\ &= f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

ii) $\forall\, \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$ y $\forall\alpha\in\mathbb{K}\Rightarrow \alpha\mathbf{x}=\alpha(x_1 \quad x_2 \quad x_3)^t=(\alpha x_1 \quad \alpha x_2 \quad \alpha x_3)^t$, por tanto,

$$f(\alpha\mathbf{x})=(\alpha x_1+\alpha x_2 \quad \alpha x_3)^t=\alpha(x_1+x_2 \quad x_3)^t=\alpha f(\mathbf{x})$$

2. Se define la aplicación :

$$\begin{array}{ccc} f:\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \to & f(\mathbf{x})=\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_3+1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Veamos si f es una aplicación lineal.

Sean $\mathbf{x}=(x_1 \quad x_2 \quad x_3)^t$ e $\mathbf{y}=(y_1 \quad y_2 \quad y_3)^t$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$. Comprobemos las dos condiciones i) y ii) anteriores.

i) Dado que

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(x_1 \quad x_2 \quad x_3)^t+(y_1 \quad y_2 \quad y_3)^t=(x_1+y_1 \quad x_2+y_2 \quad x_3+y_3)^t$$

se tiene que, $f(\mathbf{x}+\mathbf{y})=(x_1+y_1+x_2+y_2 \quad x_3+y_3+1)^t$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y}) &= (x_1+x_2 \quad x_3+1)^t+(y_1+y_2 \quad y_3+1)^t= \\ &=(x_1+y_1+x_2+y_2 \quad x_3+y_3+2)^t \end{aligned}$$

De donde $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \neq f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y})$, luego f no es lineal.

3. Sea A una matriz real de tamaño $m \times n$. Probar que la siguiente aplicación es lineal.

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ \mathbf{x} &\rightarrow f(\mathbf{x})=A\mathbf{x} \end{aligned}$$

Sean $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$ y α un número real. La comprobación de las dos condiciones de linealidad es directa, utilizando las propiedades de matrices

i) $f(\mathbf{x}+\mathbf{y})=A(\mathbf{x}+\mathbf{y})=A\mathbf{x}+A\mathbf{y}=f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y})$

ii) $f(\alpha\mathbf{x})=A(\alpha\mathbf{x})=\alpha A\mathbf{x}=\alpha f(\mathbf{x})$

Por tanto, f es lineal.

4. Sea E un espacio vectorial real y $B=\{\mathbf{u_1}, \quad \mathbf{u_2}, \quad \cdots \quad ,\mathbf{u_n}\}$ una base de E. Probar que la aplicación coordenada es lineal

$$\begin{aligned} f:E &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} &\rightarrow f(\mathbf{x})=C_B(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Supóngase que:

$$C_B(\mathbf{x})=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad y \quad C_B(\mathbf{y})=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=\left(x_1\mathbf{u_1}+\quad x_2\mathbf{u_2}+\quad \cdots+\quad x_n\mathbf{u_n}\right)+\left(y_1\mathbf{u_1}+\quad y_2\mathbf{u_2}+\quad \cdots+\quad y_n\mathbf{u_n}\right)=$$
$$=\left(x_1+y_1\right)\mathbf{u_1}+\left(x_2+y_2\right)\mathbf{u_2}+\cdots+\left(x_n+y_n\right)\mathbf{u_n}$$

con lo que,

$$C_B(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\\vdots\\x_n+y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=C_B(\mathbf{x})+C_B(\mathbf{y})$$

es decir,

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{y})=f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y})$$

Por otro lado,

$$\alpha\mathbf{x}=\alpha\left(x_1\mathbf{u_1}+x_2\mathbf{u_2}+\cdots+x_n\mathbf{u_n}\right)=\alpha x_1\mathbf{u_1}+\alpha x_2\mathbf{u_2}+\cdots+\alpha x_n\mathbf{u_n}$$

luego,

$$C_B(\alpha\mathbf{x})=\begin{pmatrix}\alpha x_1\\\alpha x_2\\\vdots\\\alpha x_n\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\alpha C_B(\mathbf{x})$$

y así

$$f(\alpha\mathbf{x})=\alpha f(\mathbf{x})$$

En consecuencia, *f* es una aplicación lineal.

Esta propiedad se sigue verificando si se cambia $\mathbb{R}^n$ por $\mathbb{K}^n$.

Aplicaciones lineales especiales:

1. *Aplicación Identidad* $I:\mathrm{E}\to\mathrm{E}\,/\,\forall\mathbf{x}\in\mathrm{E}, I(\mathbf{x})=\mathbf{x}$ que es claramente una aplicación lineal. En esta aplicación la imagen de cada vector es él mismo.

2. *Aplicación nula:* $O:\mathrm{E}\to\mathrm{F}\,/\,\forall\mathbf{x}\in\mathrm{E}, O(\mathbf{x})=\mathbf{0}$ que también es lineal .

La aplicación nula transforma cualquier vector del espacio vectorial E en el vector nulo del espacio F.

Son muchos los ejemplos de aplicaciones lineales definidas entre espacios vectoriales. Así la proyección y la simetría respecto a cualquier eje coordenado son también aplicaciones lineales (en el espacio V_3 de los vectores libres).

Propiedades de las aplicaciones lineales.

Sea f una aplicación lineal definida entre los espacios vectoriales E y F. Entonces:

1) Si se denota por $\mathbf{0_E}$ el elemento neutro para la suma en E y por $\mathbf{0_F}$ el neutro para la suma en F se tiene que $f(\mathbf{0_E}) = \mathbf{0_F}$ puesto que

$$f(\mathbf{0_E}) = f(0 \cdot \mathbf{x}) = 0 \cdot f(\mathbf{x}) = \mathbf{0_F}$$

Sin embargo, puede haber más elementos de E que tengan por imagen el $\mathbf{0_F}$. Todos ellos constituirán un subespacio, que estudiaremos más adelante y se denomina núcleo de f.

2) Si el conjunto $S = \{\mathbf{e_1}, \ \mathbf{e_2}, \ \cdots \ ,\mathbf{e_p}\}$ es linealmente dependiente, entonces el conjunto $f(S) = \{f(\mathbf{e_1}), \ f(\mathbf{e_2}), \ \cdots \ , f(\mathbf{e_p})\}$ es también linealmente dependiente.

Demostración: Si el conjunto $S = \{\mathbf{e_1}, \ \mathbf{e_2}, \ \cdots \ ,\mathbf{e_p}\}$ es linealmente dependiente entonces la combinación lineal nula

$$\alpha_1\mathbf{e_1} + \alpha_2\mathbf{e_2} + \cdots + \alpha_p\mathbf{e_p} = \mathbf{0_E}$$

se cumple con algún $\alpha_i \neq 0 \quad (\alpha_i \in \mathbb{K})$. Sea:

$f(\alpha_1\mathbf{e_1} + \alpha_2\mathbf{e_2} + \cdots + \alpha_p\mathbf{e_p}) = f(\mathbf{0_E}) = \mathbf{0_F} = \alpha_1 f(\mathbf{e_1}) + \alpha_2 f(\mathbf{e_2}) + \cdots + \alpha_p f(\mathbf{e_p})$

Esto es una relación nula de los $f(\mathbf{e_i})$ con algún $\alpha_i \neq 0 \quad (\alpha_i \in \mathbb{K})$. Luego, $f(S) = \{f(\mathbf{e_1}), \ f(\mathbf{e_2}), \ \cdots \ , f(\mathbf{e_p})\}$ es linealmente dependiente. ■

3) Si $f(S) = \{f(\mathbf{e_1}), \ f(\mathbf{e_2}), \ \cdots \ , f(\mathbf{e_p})\}$ es linealmente independiente, entonces $S = \{\mathbf{e_1}, \ \mathbf{e_2}, \ \cdots \ ,\mathbf{e_p}\}$ es también linealmente independiente.

Demostración: Es evidente por la propiedad anterior, ya que si S es ligado, entonces f(S) también es ligado. ■

4) Si el conjunto $S = \{\mathbf{e_1}, \ \mathbf{e_2}, \ \cdots \ ,\mathbf{e_p}\}$ es linealmente independiente, entonces el conjunto $f(S) = \{f(\mathbf{e_1}), \ f(\mathbf{e_2}), \ \cdots \ , f(\mathbf{e_p})\}$ puede ser o no linealmente independiente.

Ejemplo. Sea la aplicación lineal:

$$f:\mathbb{R}^3 \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^2$$
$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow f(\mathbf{x})=\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Consideremos el conjunto de vectores $B=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}^t, \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}^t, \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}^t\right\}$ de $\mathbb{R}^3$ que es libre. Calculemos $f(B)$:

$f(B)=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}^t, \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}^t, \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}^T\right\}$ que es un conjunto linealmente dependiente en $\mathbb{R}^2$.

Si ahora se considera el conjunto $U=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}^t, \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}^t\right\}$ de $\mathbb{R}^3$ se tiene que $f(U)=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}^t, \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}^t\right\}$ es un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{R}^2$.

4.2. IMAGEN Y NÚCLEO DE UNA APLICACIÓN LINEAL

Definición: Sea f una aplicación lineal definida entre los espacios vectoriales E y F ($f:E\rightarrow F$). Se llama *núcleo* de f al subconjunto de E

$$\operatorname{Ker} f=\left\{\mathbf{x}\in E \,/\, f(\mathbf{x})=\mathbf{0_F}\right\}$$

es decir, $\operatorname{Ker} f$ es el conjunto de vectores de E, que tienen como imagen por f el vector nulo de F.

El siguiente Teorema prueba que el núcleo de una aplicación lineal es un subespacio vectorial de E.

Teorema: Sea $f:E\rightarrow F$ una aplicación lineal. Entonces $\operatorname{Ker} f$ es un subespacio vectorial de E.

Demostración: Hay que comprobar las tres condiciones de subespacio vectorial.

i) El vector $\mathbf{0_E}\in \operatorname{Ker} f$ ya que $f(\mathbf{0_E})=\mathbf{0_F}$ y por tanto, $\operatorname{Ker} f \neq \{\varnothing\}$

ii) $\forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in \text{Ker } f \Rightarrow \mathbf{x}+\mathbf{y}\in \text{Ker } f$

Sean $\mathbf{x},\mathbf{y}\in \text{Ker } f$:

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \underset{f \text{ lineal}}{=} f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y}) \underset{\mathbf{x}\in \text{Ker } f, \mathbf{y}\in \text{Ker } f}{=} \mathbf{0_F}+\mathbf{0_F}=\mathbf{0_F} \Rightarrow \mathbf{x}+\mathbf{y}\in \text{Ker } f$$

iii) $\forall \mathbf{x}\in \text{Ker } f \wedge \forall \alpha\in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha\mathbf{x}\in \text{Ker } f$

Sean $\mathbf{x}\in \text{Ker } f \wedge \alpha\in \mathbb{K}$, luego $f(\alpha\mathbf{x}) \underset{f \text{ lineal}}{=} \alpha f(\mathbf{x}) \underset{\mathbf{x}\in \text{Ker } f}{=} \alpha\mathbf{0_F}=\mathbf{0_F} \Rightarrow \alpha\mathbf{x}\in \text{Ker } f$

Queda así demostrado que Ker *f* es un subespacio vectorial de E. ■

Definición: Sea *f* una aplicación lineal definida entre los espacios vectoriales E y F. Se llama *imagen* de *f* al subconjunto de F:

$$\text{Im } f=\{f(\mathbf{x})\in \text{F} / \mathbf{x}\in \text{E}\}$$

Es decir, Im *f* es el subconjunto de F, formado por las imágenes, mediante *f* de los vectores de E.

El siguiente Teorema prueba que la imagen de una aplicación lineal es un subespacio vectorial de F.

Teorema: Sea $f:\text{E}\to\text{F}$ una aplicación lineal. Entonces Im *f* es un subespacio vectorial de F.

Demostración: Hay que comprobar las tres condiciones de subespacio vectorial.

i) Puesto que $f(\mathbf{0_E})=\mathbf{0_F}$, se tiene que Im *f* contiene al vector nulo y por tanto, $\text{Im } f\neq\{\varnothing\}$

ii) $\forall\, \mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2\in \text{Im } f \Rightarrow \mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2\in \text{Im } f$

Sean $\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2\in \text{Im } f$. Entonces existen dos vectores $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$ en E tales que:

$$f(\mathbf{x_1})=\mathbf{y_1} \quad \wedge \quad f(\mathbf{x_2})=\mathbf{y_2}$$

Como $\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2=f(\mathbf{x}_1)+f(\mathbf{x}_2) \underset{f \text{ lineal}}{=} f(\mathbf{x_1}+\mathbf{x_2})$ se tiene que, $\mathbf{y_1}+\mathbf{y_2}\in \text{Im } f$, ya que es imagen por *f* del vector $\mathbf{x_1}+\mathbf{x_2}$ de E.

iii) $\forall \mathbf{y}\in \text{Im } f \wedge \forall\alpha\in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha\mathbf{y}\in \text{Im } f$

Sean $\mathbf{y}\in \text{Im } f \wedge \alpha\in \mathbb{K}$, luego, existe un vector **x** en E tal que

$$\alpha\mathbf{y}=\alpha f(\mathbf{x}) \underset{f \text{ lineal}}{=} f(\alpha\mathbf{x}) \Rightarrow \alpha\mathbf{y}\in \text{Im } f$$

Queda así demostrado que Im *f* es un subespacio vectorial de F. ■

Observación. La imagen de un subespacio vectorial S de E.

$$f(\mathrm{S}) = \{ f(\mathbf{x}) \in \mathrm{F} \,/\, \mathbf{x} \in \mathrm{S} \}$$

es un subespacio vectorial de F.

El subespacio imagen más importante es f(E), es decir la imagen de todo el espacio vectorial E, que se denota, tal y como hemos visto como $\mathrm{Im}\, f$.

Definición: Se llama *rango* de una aplicación lineal a la dimensión del subespacio $\mathrm{Im}\, f$:

$$\mathrm{rang}\, f = \dim f(\mathrm{E}) = \dim \mathrm{Im}\, f$$

Teorema: Sea $f: \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ una aplicación lineal. Si $\mathrm{B} = \{ \mathbf{e_1}, \ \mathbf{e_2}, \ \cdots \ , \mathbf{e_n} \}$ es una base de E, entonces $f(\mathrm{B}) = \{ f(\mathbf{e_1}), \ f(\mathbf{e_2}), \ \cdots \ , f(\mathbf{e_n}) \}$ es un conjunto generador de f(E) (es decir, de $\mathrm{Im}\, f$).

Demostración: Sea **x** un vector arbitrario de E y $\mathrm{B} = \{ \mathbf{e_1}, \ \mathbf{e_2}, \ \cdots \ , \mathbf{e_n} \}$ una base de E. Entonces, $\mathbf{x} = \mathrm{x}_1 \mathbf{e_1} + \mathrm{x}_2 \mathbf{e_2} + \cdots + \mathrm{x}_n \mathbf{e_n}$ y

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathrm{x}_1 \mathbf{e_1} + \mathrm{x}_2 \mathbf{e_2} + \ldots + \mathrm{x}_n \mathbf{e_n}) = \mathrm{x}_1 f(\mathbf{e_1}) + \mathrm{x}_2 f(\mathbf{e_2}) + \cdots + \mathrm{x}_n f(\mathbf{e_n})$$

luego

$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Span}\{ f(\mathbf{e_1}), \ f(\mathbf{e_2}), \ \cdots \ , f(\mathbf{e_n}) \}$$

y por tanto $f(\mathrm{B}) = \{ f(\mathbf{e_1}), \ f(\mathbf{e_2}), \ \cdots \ , f(\mathbf{e_n}) \}$ es un conjunto generador de $\mathrm{Im}\, f$.

■

Como consecuencia de este teorema se tiene que:

$$\dim \mathrm{Im}\, f \le \dim \mathrm{E} = \mathrm{n}$$

Observación. Si B es una base de E entonces f(B) genera $\mathrm{Im}\, f$, por lo que para obtener una base de $\mathrm{Im}\, f$ habrá que extraer los elementos linealmente independientes de f(B).

<u>Ejemplo</u>. Sea la aplicación lineal:

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \to & f(\mathbf{x})=\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_1-x_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

siendo $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^t$. Se pide:

(i) Hallar Ker *f*.

(ii) Encontrar dos vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^3$ con la misma imagen.

(iii) Calcular Im *f*.

(i) $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^t \in \text{Ker } f \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x_1+x_2=0 \\ x_1-x_2=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x_1=x_2=0$

Así pues $\text{Ker } f=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}^t / x_3\in\mathbb{R}\right\}$ siendo $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t\right\}$ una base del Ker *f*, y por tanto dim Ker *f* =1.

(ii) De la definición de *f* se deduce que los vectores $\mathbf{u}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t$ y $\mathbf{v}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^t$ cumplen: $f(\mathbf{u})=f(\mathbf{v})=\begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}^t$

(iii) Sea $f(\mathbf{x})$ un vector de Im *f*, siendo $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^t$, entonces

$$f(\mathbf{x})=\begin{pmatrix} x_1+x_2 & x_1-x_2 \end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \end{pmatrix}^t+\begin{pmatrix} x_2 & -x_2 \end{pmatrix}^t=x_1\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^t+x_2\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^t$$

Luego, $\text{Im } f=\text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^t \ \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^t\right\}$.

Puesto que $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^t, \ \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^t\right\}$ es un conjunto linealmente independiente, es una base de Im *f*, con lo que dim Im *f* = 2.

Obsérvese que se cumple la siguiente relación de dimensiones:

$$\dim \mathbb{R}^3=\dim \text{Ker } f+\dim \text{Im } f$$

4.3. TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAS APLICACIONES LINEALES

Teorema: Sean E y F dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, siendo E de dimensión finita. Si $f:\text{E}\to\text{F}$ es una aplicación lineal entonces:

$$\dim \text{E} = \dim \text{Ker} f + \dim \text{Im} f$$

Demostración: Sea E un espacio vectorial de dimensión n y $\{\mathbf{e_1}, \ \mathbf{e_2}, \ \cdots \ ,\mathbf{e_p}\}$ una base del Ker *f*, luego dim Ker *f* = p. Se probará que dim Im *f* = n − p.

Por el Teorema de la Base Incompleta, (ya estudiado en el Tema 2), se puede encontrar una base de E de la forma

$$\{\mathbf{e_1}, \ \mathbf{e_2}, \ \cdots, \ \mathbf{e_p}, \ \mathbf{e_{p+1}}, \ \mathbf{e_{p+2}}, \ \cdots, \ \mathbf{e_n}\}$$

Entonces, se tiene que

$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Span}\{f(\mathbf{e_1}), \ f(\mathbf{e_2}), \ \cdots, \ f(\mathbf{e_p}), \ f(\mathbf{e_{p+1}}), \ \cdots, \ f(\mathbf{e_n})\}$$

y como $f(\mathbf{e_i}) = \mathbf{0_F} \quad \forall\, i = 1, 2, \cdots, p$, entonces

$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Span}\{f(\mathbf{e_{p+1}}), \ f(\mathbf{e_{p+2}}), \ \cdots, \ f(\mathbf{e_n})\}$$

Veamos que $\{f(\mathbf{e_{p+1}}), \ f(\mathbf{e_{p+2}}), \ \cdots, \ f(\mathbf{e_n})\}$ es un conjunto linealmente independiente. Para ello se construye la combinación lineal nula

$$b_{p+1} f(\mathbf{e_{p+1}}) + b_{p+2} f(\mathbf{e_{p+2}}) + \cdots + b_n f(\mathbf{e_n}) = \mathbf{0_F}$$ y por ser *f* lineal ⇒

$$f(b_{p+1}\mathbf{e_{p+1}} + b_{p+2}\mathbf{e_{p+2}} + \cdots + b_n \mathbf{e_n}) = \mathbf{0_F}$$

Luego el vector $b_{p+1}\mathbf{e_{p+1}} + b_{p+2}\mathbf{e_{p+2}} + \cdots + b_n \mathbf{e_n}$ está en Ker f y por tanto es combinación lineal de los vectores de la base del Ker *f*, es decir

$$b_{p+1}\mathbf{e_{p+1}} + b_{p+2}\mathbf{e_{p+2}} + \cdots + b_n \mathbf{e_n} = a_1\mathbf{e_1} + a_2\mathbf{e_2} + \cdots + a_p\mathbf{e_p}$$

O equivalentemente

$$-a_1\mathbf{e_1} - a_2\mathbf{e_2} - \cdots - a_p\mathbf{e_p} + b_{p+1}\mathbf{e_{p+1}} + b_{p+2}\mathbf{e_{p+2}} + \cdots + b_n \mathbf{e_n} = \mathbf{0_E}$$

y como $\{\mathbf{e_1}, \ \mathbf{e_2}, \ \cdots, \ \mathbf{e_p}, \ \mathbf{e_{p+1}}, \ \mathbf{e_{p+2}}, \ \cdots, \ \mathbf{e_n}\}$ es una base de E, necesariamente todos los coeficientes anteriores son nulos. En particular $b_{p+1} = b_{p+2} = \cdots = b_n = 0$

Luego, $\{f(\mathbf{e_{p+1}}), \ f(\mathbf{e_{p+2}}), \ \cdots, \ f(\mathbf{e_n})\}$ es un conjunto linealmente independiente y, en consecuencia, una base de Im *f*. Claramente dim Im *f* = n − p

Por tanto:

dim Ker *f* + dim Im *f* = p + (n – p) = n =dim E.

Observación. Si Ker $f = \{\mathbf{0_E}\}$ la demostración del teorema no se empezaría construyendo una base de Ker *f* por no existir, sino que se partiría de una base B arbitraria de E y todo el razonamiento sería el mismo.

Si Ker f = E, es decir $f \equiv 0$, entonces $\operatorname{Im} f = \{\mathbf{0}_F\}$ y se cumple trivialmente:

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = n + 0 = n \qquad \blacksquare$$

4.4. CLASIFICACIÓN DE LAS APLICACIONES LINEALES

Definición: Sean E y F dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y $f: E \to F$ una aplicación lineal. Se dice que:

(i) f es *inyectiva* si $\forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \ /\ f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}) \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$

(ii) f es *sobreyectiva* si $\forall\ \mathbf{y} \in F \Rightarrow \exists\, \mathbf{x} \in E \ /\ f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$

(iii) f es *biyectiva* si f es inyectiva y sobreyectiva.

Teorema (Caracterización de las aplicaciones inyectivas):
Sean E y F dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y $f: E \to F$ una aplicación lineal. La condición necesaria y suficiente para que f sea inyectiva es que $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_E\}$, esto es: f inyectiva $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_E\}$.

Demostración:

$\Rightarrow|$ Supóngase que $f: E \to F$ es una aplicación lineal inyectiva.

Sea $\mathbf{x} \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_F$, además por ser f lineal $f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_F$, luego $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{0}_E) \underset{f \text{ inyectiva}}{\Rightarrow} \mathbf{x} = \mathbf{0}_E$. Por tanto, $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_E\}$.

$\Leftarrow|$ Sea $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_E\}$. Se va a demostrar que entonces f es inyectiva.

Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E \ /\ f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$ o equivalentemente $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) = \mathbf{0}_F$ y por ser f lineal, $f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{0}_F$. Luego, $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_E\}$, de donde $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}_E$, y por tanto, $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Luego, f es inyectiva. $\blacksquare$

Observación. Como consecuencia del teorema anterior, si E y F son dos espacios vectoriales de dimensión finita y $f: E \to F$ es una aplicación lineal inyectiva, entonces: $\dim E \le \dim F$

De acuerdo con las propiedades vistas al comienzo del tema, las aplicaciones lineales conservan la dependencia lineal. Sin embargo, en general, no conservan la independencia lineal. Ahora bien, vamos a ver a continuación un resultado que garantiza que las aplicaciones lineales inyectivas conservan también la independencia lineal.

Teorema: Sea $f: \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ una aplicación inyectiva y $\{\mathbf{e}_1, \ \mathbf{e}_2, \ \cdots \ , \mathbf{e}_\mathbf{p}\}$ un conjunto de vectores de E linealmente independientes, entonces $\{f(\mathbf{e}_1), \ f(\mathbf{e}_2), \ \cdots \ f(\mathbf{e}_\mathbf{p})\}$ son también linealmente independientes en F.

Demostración: Sea $\{\mathbf{e}_1, \ \mathbf{e}_2, \ \cdots \ , \mathbf{e}_\mathbf{p}\}$ un conjunto de vectores de E linealmente independientes. Consideremos la combinación lineal nula:

$$\alpha_1 f(\mathbf{e}_1) + \alpha_2 f(\mathbf{e}_2) + \cdots + \alpha_p f(\mathbf{e}_\mathbf{p}) = \mathbf{0}_\mathbf{F} \ .$$

que puede escribirse, por ser lineal, como: $f(\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_p \mathbf{e}_\mathbf{p}) = \mathbf{0}_\mathbf{F}$.

Luego: $\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_p \mathbf{e}_\mathbf{p} \in \operatorname{Ker} f$ y por ser f inyectiva, $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_\mathrm{E}\}$, de donde $\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_\mathrm{p} \mathbf{e}_\mathbf{p} = \mathbf{0}_\mathbf{E}$. Como los vectores $\{\mathbf{e}_1, \ \mathbf{e}_2, \ \cdots \ , \mathbf{e}_\mathbf{p}\}$ son linealmente independientes, entonces: $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_\mathrm{p} = 0$.

Por tanto: $\{f(\mathbf{e}_1), \ f(\mathbf{e}_2), \ \cdots \ f(\mathbf{e}_\mathbf{p})\}$ son linealmente independientes. ■

Teorema (Caracterización de las aplicaciones lineales sobreyectivas):
Sea $f: \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ una aplicación lineal. La condición necesaria y suficiente para que f sea sobreyectiva es que Im *f* = F, es decir:

$$f \text{ sobreyectiva} \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = F.$$

Demostración: $\Rightarrow|$ Supongamos que $f: \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ es una aplicación lineal sobreyectiva, es decir, para cualquier vector **y** de F se puede encontrar un vector **x** de E tal que $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Luego, Im *f* = F.

$\Leftarrow|$ Sea $\mathbf{y} \in \mathrm{F} = \operatorname{Im} f$ entonces existe un vector $\mathbf{x} \in \mathrm{E}$ tal que $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Luego, *f* es sobreyectiva. ■

Observación. Si $f: \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ es una aplicación lineal sobreyectiva, y E y F son dos espacios vectoriales de dimensión finita, se sigue, del teorema anterior, que

$$\dim \mathrm{E} \geq \dim \mathrm{F}.$$

Corolario: Sea $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ una aplicación lineal. La condición necesaria y suficiente para que f sea biyectiva es que $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0_E}\}$ e Im f = F, es decir:

$$f \text{ biyectiva} \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0_E}\} \text{ e } \operatorname{Im} f = \mathrm{F}.$$

Como consecuencia de este corolario, se deduce que, si E y F son dos espacios vectoriales de dimensión finita y $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ es una aplicación lineal biyectiva, entonces: $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{F}$.

Recíprocamente, si $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{F}$, entonces la aplicación lineal $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ cumple:

a) f es biyectiva $\Leftrightarrow$ es inyectiva ($\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0_E}\}$).

b) f es biyectiva $\Leftrightarrow$ es sobreyectiva (Im f = F)

Este resultado se cumple siempre que tengamos un endomorfismo, esto es, una aplicación lineal definida de un espacio vectorial E en sí mismo, $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ y la dimensión de E sea finita, es decir, en este caso, se verifica:

a) f es biyectiva $\Leftrightarrow$ es inyectiva ($\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0_E}\}$).

b) f es biyectiva $\Leftrightarrow$ es sobreyectiva (Im f = E).

4.5. EXPRESIÓN MATRICIAL DE UNA APLICACIÓN LINEAL

Se ha visto en un ejemplo anterior que las matrices $m \times n$ definen aplicaciones lineales entre los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$. Este hecho, da una pista, sobre el resultado que vamos a ver a continuación con respecto a las aplicaciones lineales definidas entre espacios vectoriales de dimensión finita: todas admiten una expresión matricial.

Sean E y F dos espacios vectoriales de dimensión finita sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Sea $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ una aplicación lineal definida entre E y F. En este apartado se va a calcular la imagen de un vector $\mathbf{x}$ de E en función de las coordenadas de dicho vector respecto a una base de E. Como $f(\mathbf{x})$ es un vector de F se considerará también una base de F. Con la ayuda de estas bases se obtendrán las coordenadas de $f(\mathbf{x})$ como el producto de una matriz por las coordenadas del vector $\mathbf{x}$.

Sean $\mathrm{U}=\{\mathbf{u_1},\ \mathbf{u_2},\ \cdots\ ,\mathbf{u_n}\}$ y $\mathrm{V}=\{\mathbf{v_1},\ \mathbf{v_2},\ \cdots\ ,\mathbf{v_m}\}$ bases de E y F respectivamente. Si $\mathbf{x}\in \mathrm{E}$ entonces :

$\mathbf{x}=\mathrm{x_1}\mathbf{u_1}+\mathrm{x_2}\mathbf{u_2}+\cdots+\mathrm{x_n}\mathbf{u_n}$ luego, $\mathrm{C_U}(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}\mathrm{x_1}\\ \mathrm{x_2}\\ \vdots\\ \mathrm{x_n}\end{pmatrix}$ son las coordenadas de **x** en la base U.

Consideremos su imagen, $f(\mathbf{x})\in \mathrm{F}$, que se expresará como:

$f(\mathbf{x})=\mathrm{y_1}\mathbf{v_1}+\mathrm{y_2}\mathbf{v_2}+\cdots+\mathrm{y_m}\mathbf{v_m}$, es decir, $\mathrm{C_V}\left(f(\mathbf{x})\right)=\begin{pmatrix}\mathrm{y_1}\\ \mathrm{y_2}\\ \vdots\\ \mathrm{y_m}\end{pmatrix}$ son las coordenadas de *f*(**x**) en la base V.

Por ser *f* una aplicación lineal:

$$f(\mathbf{x})=f(\mathrm{x_1}\mathbf{u_1}+\mathrm{x_2}\mathbf{u_2}+\cdots+\mathrm{x_n}\mathbf{u_n})=\mathrm{x_1}f(\mathbf{u_1})+\mathrm{x_2}f(\mathbf{u_2})+\cdots+\mathrm{x_n}f(\mathbf{u_n})$$

Por tanto

$$\mathrm{C_V}\left(f(\mathbf{x})\right)=\mathrm{x_1}\mathrm{C_V}\left(f(\mathbf{u_1})\right)+\mathrm{x_2}\mathrm{C_V}(f(\mathbf{u_2}))+\cdots+\mathrm{x_n}\mathrm{C_V}\left(f(\mathbf{u_n})\right)$$

Es decir,

$$\begin{pmatrix}\mathrm{y_1}\\ \mathrm{y_2}\\ \vdots\\ \mathrm{y_m}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\uparrow & \uparrow & & \uparrow\\ \mathrm{C_V}\left(f(\mathbf{u_1})\right) & \mathrm{C_V}\left(f(\mathbf{u_2})\right) & \cdots & \mathrm{C_V}\left(f(\mathbf{u_n})\right)\\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{x_1}\\ \mathrm{x_2}\\ \vdots\\ \mathrm{x_n}\end{pmatrix}$$

Abreviadamente:

$$\mathrm{C_V}\left(f(\mathbf{x})\right)=\mathrm{M_{VU}}(f)\cdot \mathrm{C_U}(\mathbf{x})$$

La matriz $\mathrm{M_{VU}}(f)$ se llama matriz de f respecto a las bases U y V.

Nótese que la primera columna de $\mathrm{M_{VU}}(f)$ está formada por las coordenadas, respecto a la base V, de la imagen, por *f*, del primer vector de la base U. La segunda columna, está formada por las coordenadas, respecto a la base V, de la imagen, por *f*, del segundo vector de la base U. En general, la j-ésima columna está formada por las coordenadas, respecto a la base V, de la imagen, por *f*, del j-ésimo vector de la base U. Además, $M_{VU}(f)$ es una matriz de orden $m \times n$, siendo dim E = n y dim F = m.

Del resultado anterior se deduce que todas las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales de dimensión finita reales o complejos son equivalentes a la multiplicación matricial de los vectores coordenados. Esquemáticamente:

$$\mathrm{E} \xrightarrow{\ f\ } \mathrm{F}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{x} \in \mathrm{E} \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \in \mathrm{F} \arrow[d, leftrightarrow] \\
\mathbf{x}_{\mathrm{U}} \arrow[r, "\mathrm{A}"] & \mathbf{y}_{\mathrm{V}} = \mathrm{A}\mathbf{x}_{\mathrm{U}}
\end{tikzcd}$$

siendo:

E y F dos espacios vectoriales de dimensión finita sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y U y V dos bases de E y F respectivamente;

$\mathbf{x}_{\mathrm{U}}$: vector coordenado de **x** referido a la base U, es decir, $\mathbf{x}_{\mathrm{U}} = C_{\mathrm{U}}(\mathbf{x})$.

$\mathbf{y}_{\mathrm{V}}$: vector coordenado de **y** referido a la base V , es decir, $\mathbf{y}_{\mathrm{V}} = C_{\mathrm{V}}(\mathbf{y})$.

A: matriz de f respecto a las bases U y V, es decir, $M_{VU}(f)$.

4.6. RANGO DE UNA APLICACIÓN LINEAL

Sea $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Si se considera $\mathrm{U} = \{\mathbf{u}_1, \ \mathbf{u}_2, \ \cdots \ , \mathbf{u}_n\}$ como una base de E, ya se ha visto que $f(\mathrm{U}) = \{f(\mathbf{u}_1), \ f(\mathbf{u}_2), \ \cdots \ , f(\mathbf{u}_n)\}$ genera el subespacio imagen Im f = f(E). Por tanto, para obtener una base de Im f hay que extraer de dicho conjunto los vectores que sean linealmente independientes.

Teniendo en cuenta que las coordenadas, en una cierta base de F, de los vectores $f(\mathbf{u}_1), \ f(\mathbf{u}_2), \ \cdots \ , f(\mathbf{u}_n)$ son las columnas de la matriz A (matriz de f respecto de las bases consideradas en E y en F), y que el rango de dicha matriz es el número de columnas (o de filas) linealmente independientes, es inmediata la siguiente conclusión

$$\text{Rang}\, f = \dim \text{Im}\, f = \text{rang A}$$

es decir, el rango de una aplicación lineal *f* es igual al rango de su matriz asociada.

Ejemplos.

1. Sea la aplicación:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{P}_2 & \rightarrow & \mathbb{P}_1 \\ & \text{p(t)} & \rightarrow & f(\text{p(t)}) = \dfrac{\text{p(t)-p(0)}}{\text{t}} \end{array}$$

(i) Hallar la matriz de f respecto a las bases $\text{U}=\{1+\text{t}, \ \ \text{t}+\text{t}^2, \ \ \text{t}^2+1\}$ de $\mathbb{P}_2$ y $\text{V}=\{1+\text{t}, \ \ 1\text{-t}\}$ de $\mathbb{P}_1$.

(ii) Empleando la expresión matricial de la aplicación lineal obtener $f(1+\text{t}+\text{t}^2)$.

(i) La matriz de f respecto a las bases U y V es de la forma:

$$\text{M}_{\text{VU}}(f)=\left(\text{C}_\text{V}\left(f(1+\text{t})\right) \ \ \text{C}_\text{V}\left(f(\text{t}+\text{t}^2)\right) \ \ \text{C}_\text{V}\left(f(\text{t}^2+1)\right)\right)$$

Calculemos $\text{C}_\text{V}\left(f(1+\text{t})\right)$. Obsérvese que $f(1+\text{t})=1$ y este vector se expresa en función de la base V como:

$$1 = 0.5\ (1 + \text{t}) + 0.5\ (1 - \text{t})$$

luego, $\text{C}_\text{V}\left(f(1+\text{t})\right)=\text{C}_\text{V}(1)=\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$

Por otra parte, $f(\text{t}+\text{t}^2)=1+\text{t}$ que en la base V se expresa como

$$1 + \text{t} = 1\ (1 + \text{t}) + 0\ (1 - \text{t})$$

luego, $\text{C}_\text{V}\left(f(\text{t}+\text{t}^2)\right)=\text{C}_\text{V}\left(1+\text{t}\right)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Finalmente, $f(\text{t}^2+1)=\text{t} = 0.5\ (1 + \text{t}) - 0.5\ (1 - \text{t})$

luego, $\text{C}_\text{V}\left(f(\text{t}^2+1)\right)=\text{C}_\text{V}\left(\text{t}\right)=\begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}$

Por tanto la matriz de f respecto a las bases U y V es:

$$\text{M}_{\text{VU}}(f)=\begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & -0.5 \end{pmatrix}$$

(ii) Sea $1+\text{t}+\text{t}^2$, que se expresa en la base U como:

$$1+\text{t}+\text{t}^2=0.5(1+\text{t})+0.5(\text{t}+\text{t}^2)+0.5(\text{t}^2+1)$$

luego, $C_U\left(1{+}t{+}t^2\right)=\begin{pmatrix}0.5\\0.5\\0.5\end{pmatrix}$

Por lo tanto:

$$C_V\left(f(1{+}t{+}t^2)\right)=M_{VU}(f)\cdot C_U\left(1{+}t{+}t^2\right)=\begin{pmatrix}0.5 & 1 & 0.5\\0.5 & 0 & -0.5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0.5\\0.5\\0.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

y como consecuencia $f(1{+}t{+}t^2)=t+1$.

Según la notación comentada anteriormente:

$$M_{VU}(f)\cdot C_U\left(1+t+t^2\right)=A\cdot\mathbf{x}=\begin{pmatrix}0.5 & 1 & 0.5\\0.5 & 0 & -0.5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0.5\\0.5\\0.5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\mathbf{y}=C_V\left(f(1+t+t^2)\right)$$

2. Sea la aplicación lineal f:

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2\\ & \mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} & \to & f(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}-x_1\\-x_2\end{pmatrix}\end{array}$$

Se pide:

(i) Hallar la matriz de f respecto a las bases canónicas.

(ii) Calcular $f(\mathbf{z})$, donde $\mathbf{z}=(2 \quad -3)^t$ utilizando la matriz de f.

(i) Sea $B=\left\{\mathbf{e_1}=(1 \quad 0)^t,\quad \mathbf{e_2}=(0 \quad 1)^t\right\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Entonces:

$$M_{BB}(f)=\left(C_B\left(f(\mathbf{e_1})\right) \quad C_B\left(f(\mathbf{e_2})\right)\right)$$

Como $f(\mathbf{e_1})=(-1 \quad 0)^t=C_B\left(f(\mathbf{e_1})\right)$ $\qquad f(\mathbf{e_2})=(0 \quad -1)^t=C_B\left(f(\mathbf{e_2})\right)$

se tiene que, $M_{BB}(f)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$.

(ii) Como $C_B\left(f(\mathbf{z})\right)=M_{BB}(f)\cdot C_B(\mathbf{z})$, entonces

$$C_B\left(f(\mathbf{z})\right)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=f(\mathbf{z}).$$

Obsérvese que, fijadas las bases, la matriz de una aplicación lineal es única. Ahora bien, una aplicación lineal puede representarse por distintas matrices si se usan bases diferentes, estando tales matrices relacionadas entre sí, tal y como veremos en el siguiente apartado.

4.7. RELACIÓN ENTRE LAS MATRICES QUE CARACTERIZAN A UNA MISMA APLICACIÓN EN BASES DISTINTAS

Sea f una aplicación lineal definida entre E y F, siendo estos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n y m respectivamente.

Sean $U=\{\mathbf{u_1}, \ \mathbf{u_2}, \ \cdots \ ,\mathbf{u_n}\}$ y $V=\{\mathbf{v_1}, \ \mathbf{v_2}, \ \cdots \ ,\mathbf{v_m}\}$ bases de E y F respectivamente, y $M_{VU}(f)$ la matriz de f respecto a las bases U y V.

Veamos cómo cambia esta matriz al cambiar las bases U y V , por las nuevas bases U' y V' , siendo éstas: $U=\{\mathbf{u'_1}, \ \mathbf{u'_2}, \ \cdots \ ,\mathbf{u'_n}\}$ y $V=\{\mathbf{v'_1}, \ \mathbf{v'_2}, \ \cdots \ ,\mathbf{v'_m}\}$.

Esquemáticamente:

$$\mathrm{E}\ (\dim n) \xrightarrow{\ f\ } \mathrm{F}\ (\dim m)$$

$$\begin{tikzcd}
\text{Base U} \arrow[r, "M_{VU}"] \arrow[d, "P"'] & \text{Base V} \arrow[d, "R"] \\
\text{Base U}' \arrow[r, "M_{V'U'}"] & \text{Base V}'
\end{tikzcd}$$

La relación que existe entre las coordenadas de un vector de un espacio vectorial respecto a dos bases distintas ya se ha visto en el Tema 2 de Espacios Vectoriales. Así, si $\mathbf{x}\in E$ y P es la matriz de paso (regular) de la base U de E a la base U' de E, se tiene que: $\mathbf{x}_U = P\cdot\mathbf{x}_{U'}$

Análogamente, si $\mathbf{y}\in F$ y R es la matriz de paso (regular) de la base V de F a la base V' de F, $\mathbf{y}_V = R\cdot\mathbf{y}_{V'}$

Por otro lado, la expresión matricial de f respecto de las bases U y V, de E y F respectivamente, resulta: $\mathbf{y}_V = M_{VU}(f)\cdot\mathbf{x}_U$

Si a la matriz $M_{VU}(f)$ se le representa como A_1 la expresión anterior resulta: $\mathbf{y_V} = A_1 \cdot \mathbf{x_U}$

Si se escribe la expresión matricial de *f* respecto de las bases U' y V', de E y F respectivamente, se tiene: $\mathbf{y_{V'}} = M_{V'U'}(f) \cdot \mathbf{x_{U'}}$

Si a la matriz $M_{V'U'}(f)$ se le representa por A_2 la expresión anterior resulta: $\mathbf{y_{V'}} = A_2 \cdot \mathbf{x_{U'}}$

Sustituyendo en $\mathbf{y_V} = A_1 \cdot \mathbf{x_U}$ las expresiones obtenidas para $\mathbf{y_V}$ y para $\mathbf{x_U}$ en las que aparecen las matrices de paso P y R se obtiene:

$$R \cdot \mathbf{y_{V'}} = A_1 \cdot P \cdot \mathbf{x_{U'}}$$

Premultiplicando por R^{-1}: $\mathbf{y_{V'}} = R^{-1} \cdot A_1 \cdot P \cdot \mathbf{x_{U'}}$

y como: $\mathbf{y_{V'}} = A_2 \cdot \mathbf{x_{U'}}$

se llega a que $A_2 = R^{-1} \cdot A_1 \cdot P$

o lo que es lo mismo:

$$M_{V'U'}(f) = R^{-1} \cdot M_{VU}(f) \cdot P$$

Esta es la relación que verifican las matrices asociadas a una misma aplicación lineal f cuando se cambian las bases en E y en F.

Definición: Dos matrices A_1 y A_2 ambas pertenecientes a $E_{m\times n}(\mathbb{K})$, se dicen *equivalentes* si están asociadas a una misma aplicación lineal de E en F (respecto de bases adecuadas) o, lo que es lo mismo, si existen dos matrices regulares P y R, cuadradas de órdenes n y m respectivamente, tales que:

$$A_2 = R^{-1} \cdot A_1 \cdot P$$

Las matrices equivalentes A_1 y A_2 se caracterizan también por tener iguales dimensiones $m \times n$ y rango.

En el caso particular en que E=F y se tenga un endomorfismo, se puede tomar iguales las bases U y V, así como las bases U' y V', por lo que las matrices de paso P y R son idénticas. Esquemáticamente:

$$E\ (\dim n) \xrightarrow{\ f\ } E\ (\dim n)$$

$$\begin{array}{ccc}
\text{Base } U & \xrightarrow{\ M_{UU}\ } & \text{Base } U \\
P \downarrow & & \downarrow P \\
\text{Base } U' & \xrightarrow{\ M_{U'U'}\ } & \text{Base } U'
\end{array}$$

Así, la relación entre las matrices del endomorfismo *f* al cambiar de base en E es:

$$M_{U'U'}(f) = P^{-1} \cdot M_{UU}(f) \cdot P$$

o bien, llamando A_1 a la matriz $M_{U'U'}(f)$ y A_2 a la matriz $M_{UU}(f)$:

$$A_2 = P^{-1} \cdot A_1 \cdot P$$

Esta es la relación que verifican las matrices asociadas a un mismo endomorfismo *f* cuando se cambia la base en E.

Definición: Dos matrices cuadradas A_1 y A_2, ambas pertenecientes a $E_{n\times n}(\mathbb{K})$, se dicen *semejantes* si están asociadas a un mismo endomorfismo (respecto de bases adecuadas), lo que equivale a que exista una matriz regular P, cuadrada de orden n, tal que

$$A_2 = P^{-1} \cdot A_1 \cdot P\ .$$

EJERCICIOS TEMA 4

1.- Estudiar si las siguientes aplicaciones son lineales:

a) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,/\, f(x_1,\ x_2) = x_1^2 \cdot x_2^2$

b) $g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,/\, g(x_1,\ x_2,\ x_3) = (0,\ x_2,\ x_3)$

2.- Dada la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ que en las bases canónicas viene dada por la expresión:

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = (x_1,\ x_2,\ -x_1 + x_2 + x_3).$$

Hallar la matriz A de f en estas bases. ¿Es inyectiva?¿Es sobreyectiva?. Si las coordenadas del vector $\mathbf{x}$ respecto de la base

B' $=\{(1,\ 1,\ 0,\ 0)\ (0,\ 1,\ 0,\ 0)\ (0,\ 0,\ 1,\ 0)\ (1,\ 1,\ 1,\ 1)\}$ son $(2,\ 1,\ 1,\ 1)$ hallar su transformado, es decir, $f(\mathbf{x})$.

3.- Sea el endomorfismo *f*:

$$f:\ V_3 \longrightarrow V_3$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow f(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} -2x + 4y + 2z \\ x + \lambda y + \lambda z \\ -x + 2y + z \end{pmatrix}$$

a) Demostrar que rang *f*= 2, $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$.

b) Hallar Ker *f* e Im *f* para $\lambda = -2$.

4.- En el espacio vectorial $E = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} / x, y, z, t \in \mathbb{R} \right\}$ se define la transformación *T* de E en si mismo:

$$T:\ E \longrightarrow E$$

$$A \longrightarrow T(A) = M \cdot A - A \cdot M$$

siendo $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) ¿Es la transformación *T* lineal?

b) Ecuación matricial de la transformación.

c) Dimensión y base del núcleo de T, Ker T.

d) Dimensión y base del subespacio imagen de T, Im T.

e) Naturaleza de la transformación.

5.- Sean $B=\{\mathbf{e}_1, \ \mathbf{e}_2, \ \mathbf{e}_3, \ \mathbf{e}_4\}$ y $B'=\{\mathbf{e'}_1, \mathbf{e'}_2, \mathbf{e'}_3\}$ las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente y sea la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ que verifica:

$$\text{Ker } f = \text{Span}\{\mathbf{e}_1, \ \ 3\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\}$$

$$f(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4)=\mathbf{e'}_2-2\mathbf{e'}_1-2\mathbf{e'}_3$$

$$f(\mathbf{e}_2)=\mathbf{e'}_1+\mathbf{e'}_3$$

a) Hallar la matriz de f en las bases canónicas.

b) Hallar el rango de f.

c) Hallar (obtener una base) del subespacio vectorial F de $\mathbb{R}^4$ de ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} x&=\lambda+2\mu \\ y&=-6\mu \qquad\qquad \lambda,\mu\in\mathbb{R} \\ z&=-\lambda-3\mu \\ t&=2\lambda+2\mu \end{aligned}$$

Sea el subespacio G de $\mathbb{R}^3$ dado por $G=\left\{\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^3 / z=0\right\}$.

Demostrar que f (F) y G son subespacios suplementarios.

6.- Analizar si las siguientes aplicaciones son o no lineales

a) $f: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2 / f(p(t)) = t^2 \cdot p''(t) + t \cdot p'(t) + p(t)$

b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x_1-2x_2\\3|x_2|\end{pmatrix}$

7.- En el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que tres:

a) Demostrar que $\left\{1, \ \ (x+1), \ \ (x+1)^2, \ \ x^3\right\}$ es base.

b) Hallar las coordenadas de $(x+1)^3$ en esta base.

c) Sea la aplicación lineal f que a cada polinomio le hace corresponder su derivada. Hallar la matriz de dicha aplicación en la base usual $B=\{1, \quad x, \quad x^2, \quad x^3\}$ y también en la definida en el apartado a).

8.- Sea V el espacio vectorial de las funciones reales de variable real con las operaciones usuales. Si $f:\mathbb{R}^3 \to V$, es la aplicación que a cada terna $(a, \quad b, \quad c) \in \mathbb{R}^3$ le asocia la función $f(a, \quad b, \quad c) = a\sin^2 x + b\cos^2 x + c$, hallar una base de Ker *f* y otra de Im *f*, analizando si *f* es inyectiva y si es sobreyectiva.

9.- En el espacio E_3, de vectores libres del espacio, se define una aplicación que transforma un vector en su simétrico respecto del plano horizontal *Z*=0. Se pide:

a) Ecuación matricial de la transformación lineal y naturaleza de la misma.
b) Dimensión, base y ecuaciones cartesianas del subespacio imagen.
c) Idem para el núcleo de la aplicación.

10.- En el espacio vectorial V de las matrices cuadradas de orden n sobre $\mathbb{R}$ se considera la aplicación:

$$\begin{array}{rccc} F: & V & \longrightarrow & V \\ & A & \longrightarrow & F(A) = A^t + A \end{array}$$

Demostrar que *F* es lineal y calcular su núcleo e imagen.

11.- Sean $\mathbb{P}_3$ y $\mathbb{P}_2$ los espacios vectoriales de los polinomios de grado menor o igual que 3 y 2 respectivamente. Se define una aplicación:

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{P}_2 & \to & \mathbb{P}_3 \\ & p(x) & \to & T(p(x)) = \int_0^x p(t)dt \end{array}$$

Se pide:

a) Hallar la matriz de la transformación.
b) Hallar $T(2x^2+4x)$ y el vector ó vectores originales de x^3-2x^2+2x respecto de la transformación lineal *T*.

12.- En el conjunto de vectores libres del espacio se define una transformación lineal *T* del modo siguiente:

- $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \quad \forall\ \mathbf{v} \in \ \pi \equiv x_1 - x_2 - x_3 = 0$

- El vector (0, 1, 1) pertenece al núcleo.

Se pide:

a) Transformados de los vectores de la base usual.

b) Ecuación matricial de la transformación y naturaleza de la misma.

c) Dimensión, bases y ecuaciones de los subespacios núcleo e imagen.

13.- Sea $\mathbb{P}_2$ el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual que 2. Se considera la aplicación lineal $f:\ \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ dada por:

$$f(t+1) = 1$$
$$f(t^2+1) = t+1$$
$$\text{Ker } f = \text{Span}\left\{t^2 - t - 1\right\}$$

Se pide:

a) Hallar la expresión matricial de *f* respecto de la base $B = \left\{1, t, t^2\right\}$.

b) Calcular la dimensión, una base y ecuaciones de los subespacios Ker *f* e Im *f*.¿Es *f* sobreyectiva ? Razona la respuesta.

c) Hallar *f*(T), donde $T = \text{Span}\left\{t^2+1, 3t-2\right\}$.

14.- Se considera el espacio vectorial V_2 de las matrices cuadradas de orden 2 sobre los números reales y el espacio $\mathbb{P}_3(x)$ de los polinomios de coeficientes reales de grado menor o igual que tres. Se define la aplicación:

$$f: V_2 \to \mathbb{P}_3(x) \ \ / \ \forall \quad B \in V_2 \qquad f(B) = \begin{pmatrix}1 & x\end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Demostrar que es una aplicación lineal.

b) Calcular la matriz A de *f* en las bases canónicas y dar bases de la imagen y del núcleo.

c) Calcular el conjunto de matrices que se transforman en el polinomio $x^3 + x^2 + 2x$.

15.- Sea $\mathbb{P}_2(x)$ el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual que 2 y $E_{2x2}(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices cuadradas reales de orden 2. Se define la aplicación lineal:

$$T : \mathbb{P}_2(\mathrm{x}) \longrightarrow \mathrm{E}_{2\mathrm{x}2}(\mathbb{R})$$

$$\mathrm{p(x)} \longrightarrow T(\mathrm{p(x)}) = \begin{pmatrix} \mathrm{p}(0) & \mathrm{p}'(1) \\ \mathrm{p}'(1) & \mathrm{p}(0) \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Matriz de la aplicación *T*.

b) Ecuación implícita del núcleo, así como una base y su dimensión.

c) Ecuación implícita del subespacio imagen, así como una base y su dimensión.

d) ¿Son los subespacios núcleo e imagen suplementarios? Razona la respuesta.

16.- En el espacio vectorial E_3 sobre $\mathbb{R}$ relativo a la base $\mathrm{B} = \{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$ se define una transformación T del siguiente modo:

- $T(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}}$

- El transformado del subespacio de ecuación $\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_3 = 0$ es el vector nulo.

Se pide:

a) Ecuación matricial y naturaleza de la transformación.

b) Dimensión, base y ecuaciones de Im *T*.

c) Transformado (ecuaciones cartesianas) del subespacio S de ecuación $\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_3 = 0$, razonando el resultado.

d) Expresión de la transformación lineal en la base $\mathrm{B}' = \{\mathbf{e}'_1,\ \mathbf{e}'_2,\ \mathbf{e}'_3\}$ siendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_2 &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}'_3 &= \mathbf{e}_1 \end{aligned} .$$

SOLUCIONES EJERCICIOS TEMA 4

1.- a) No

a) Si

2.- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

No es inyectiva.

Es sobreyectiva.

$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3, & 4, & 3 \end{pmatrix}$

3.- b)

$$B_{\text{Im}f} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^t, \; \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^t \right\}$$

$$B_{\text{Ker}f} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t \right\}$$

4.- a) Si

b) $$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

b) $\dim \text{Ker } T = 2$, $B_{\text{Ker T}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

c) $\dim \text{Im T} = 2$, $B_{\text{Im T}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$

d) Endomorfismo no inyectivo y no sobreyectivo.

5.- a) $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Rang f = rang A = 2

c) $F = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^t, \; \begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}^t \right\}$

6.- a) Es lineal.

b) No es lineal.

7.- b) $(x+1)^3 = (1 \quad -3 \quad 3 \quad 1)^t_{B'} = 1 - 3(x+1) + 3(x+1)^2 + x^3$

c) $A_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A_{B'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

8.- $B_{\mathrm{Ker}\, f} = \left\{ (1 \quad 1 \quad -1)^t \right\}$; $B_{\mathrm{Im}\, f} = \left\{ \sin^2(x), \quad \cos^2(x) \right\}$

f no es inyectiva. f no es sobreyectiva.

9.- a) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; endomorfismo biyectivo.

b) Im T = E_3 ; una base de Im T será cualquier base de E_3 (no hay ecuaciones cartesianas o implícitas para Im T).

c) Ker $T = \{0\}$; sus ecuaciones cartesianas son $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

10.- Ker F = $\{ B \in M_{n\,x\,n} \ / \ B \text{ antisimétrica} \}$

Im F = $\{ B \in M_{n \times n} \ / \ B \text{ simétrica} \}$

11.- a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

b) $T\left(2x^2 + 4x\right) = 2x^2 + \frac{2}{3}x^3$; el vector original de $x^3 - 2x^2 + 2x$ es $2 - 4x + 3x^2$.

12.- a) Tomando como base $B^* = \{(1\ \ 1\ \ 0)\ \ (1\ \ 0\ \ 1)\ \ (0\ \ 1\ \ 1)\}$

$$A_{B^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b) No es sobreyectiva y por lo tanto (por ser endomorfismo) no es inyectiva

c) dim Imf=2; Ecuación: $y_1 - y_2 - y_3 = 0$;

$$B_{\mathrm{Im}f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^t, \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^t \right\}$$

dim Ker f = 1 ; Ecuaciones $\equiv \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$; $B_{\mathrm{Ker}f} = \left\{ (0\ \ 1\ \ 1)^t \right\}$

13.- a) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

b) $B_{\mathrm{Ker}f} = \{t^2 - t - 1\}$ $\quad \dim(\mathrm{Ker}\, f) = 1$;

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} a = \alpha \\ b = -\alpha \quad / \alpha \in \mathbb{R} \\ c = \alpha \end{cases}$

Ecuaciones implícitas: $\begin{cases} a + b = 0 \\ a + c = 0 \end{cases}$

$B_{\mathrm{Im}f} = \{1, t\}$ $\quad \dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$; Ecuaciones paramétricas $\begin{cases} a = 0 \\ b = \alpha \quad / \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ c = \beta \end{cases}$

Ecuación implícita: $a = 0$

f no es sobreyectiva.

c) $B_{f(T)} = \{t + 1, 3 - 5t\}$

14.- b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B_{\mathrm{Im} f} = \{x, x^2, x^3\} \quad B_{\mathrm{Ker} f} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

c) $B = \begin{pmatrix} 2 & b \\ 1-b & 1 \end{pmatrix}$

15.- a) Matriz respecto a las bases canónicas: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $B_{\mathrm{Ker} f} = \{-2x + x^2\}$ $\dim(\mathrm{Ker} f) = 1$, ecuaciones implícitas: $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 + 2a_2 = 0 \end{cases}$

c) $B_{\mathrm{Imf}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ $\dim \mathrm{Imf} = 2$

Ecuaciones implícitas: $\begin{cases} x - t = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}.$

d) Es imposible que sean subespacios suplementarios porque pertenecen a espacios vectoriales distintos.

16.- a) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; T no es inyectiva ni sobreyectiva.

b) $B_{\mathrm{Im}\, T} = \{(1 \quad 1 \quad 1)\}$; Ecuaciones $\equiv \begin{cases} y_1 = y_2 \\ y_2 = y_3 \end{cases}$

c) $T(S) = \mathrm{Span}\left\{ (2 \quad 2 \quad 2)^t, \quad (-1 \quad -1 \quad -1)^t \right\} \equiv \mathrm{Im}\, T$

d) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Tema 5

DIAGONALIZACIÓN POR TRANSFORMACIONES DE SEMEJANZA

5.1. INTRODUCCIÓN: EL PROBLEMA DE REDUCCIÓN DE LOS ENDOMORFISMOS

El estudio de autovalores y autovectores de matrices cuadradas y de endomorfismos es de fundamental importancia en Matemática Aplicada.

Debido a que todo endomorfismo de un espacio vectorial de dimensión finita se puede representar por matrices cuadradas, y que dada una matriz cuadrada se puede interpretar siempre como un endomorfismo sobre un espacio vectorial, fijada una base, podemos restringirnos al estudio de autovalores y autovectores de matrices, y así la teoría relacionada con estos conceptos y desarrollada para matrices cuadradas, se puede extender a los endomorfismos representados por aquéllas (en ocasiones no se va a hacer aquí para evitar repeticiones innecesarias).

Se considera un endomorfismo f de un espacio vectorial E, de dimensión finita n. Sea A la matriz cuadrada de orden n que representa esta transformación en una base dada B_E. Si se cambia a la base $B_E^{'}$ el endormorfismo vendrá representado por otra matriz A_1 semejante a A, es decir, $A_1 = P^{-1}AP$, siendo P la matriz de paso a la nueva base $B_E^{'}$.

De forma esquemática:

$$\mathrm{E}\ (\dim n) \xrightarrow{\ f\ } \mathrm{E}\ (\dim n)$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{B_E} \arrow[r, "\mathrm{A}=\mathrm{M_{BB}}(f)"] \arrow[d, "\mathrm{P}"'] & \mathrm{B_E} \arrow[d, "\mathrm{P}"] \\
\mathrm{B'_E} \arrow[r, "\mathrm{A_1}=\mathrm{M_{B'B'}}(f)"] & \mathrm{B'_E}
\end{tikzcd}$$

Dado que cualquier espacio vectorial de dimensión n es isomorfo a $\mathbb{K}^n$ [1], consideraremos aquí únicamente matrices A asociadas a endomorfismos $f:\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$.

En este tema se plantea el problema de encontrar, si es posible, una base en la que la representación del endomorfismo sea lo más simple posible. En términos matriciales el problema se traduce en encontrar la matriz más sencilla posible que sea semejante a A, así como la matriz de paso correspondiente.

Es evidente que cuanto más sencilla sea la estructura de una matriz, más fácil será obtener información acerca del endomorfismo al que representa. Entre las matrices más sencillas se encuentran las diagonales, las cuales nos ofrecen muchas facilidades de cálculo.

Definición. Sea f un endomorfismo del espacio vectorial $\mathbb{K}^n$; f es *diagonalizable* si existe una base de $\mathbb{K}^n$ respecto de la cual la matriz de f es diagonal.

o lo que es lo mismo,

Definición. Se dice que una matriz $\mathrm{A} \in \mathrm{E}_{nxn}(\mathbb{K})$ es *diagonalizable* si es semejante a una matriz diagonal D, es decir, si existe una matriz P inversible tal que $\mathrm{P^{-1}AP}$ sea diagonal.

Hay que tener en cuenta que no se puede esperar diagonalizar todos los endomorfismos (ó lo que es lo mismo, sus matrices correspondientes). Sin embargo, sí es posible

---

[1] Esta afirmación se basa en que existe una aplicación lineal biyectiva (isomorfismo) entre E y $\mathbb{K}^n$, que es la aplicación coordenada ($\mathbf{x} \in \mathrm{E} \to \mathrm{C_B}(\mathbf{x})$).

triangularizar un endomorfismo cuando se trabaja en el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$ (como se verá más adelante).

Se va tratar de resolver aquí el siguiente problema general: dado un endomorfismo, (ó la matriz que lo representa) encontrar los vectores que tengan una imagen que les sea proporcional, y estudiar luego el conjunto de vectores sujetos ó ligados a un factor de proporción dado (valor propio).

5.2. AUTOVALORES Y AUTOVECTORES: CÁLCULO Y PROPIEDADES

Definición. Sea $\mathrm{A} \in \mathrm{E}_{\mathrm{n\,x\,n}}(\mathbb{K})$ la matriz asociada al endomorfismo $f : \mathbb{K}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ en una base dada de $\mathbb{K}^{\mathrm{n}}$.

Se dice que el vector $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (no nulo), es un *autovector o vector propio* de A (ó del endomorfismo f) si existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que

$$\mathrm{A}\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x} \qquad (\text{es decir }, \ f(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x})$$

El escalar λ, así asociado a $\mathbf{x}$ (no puede haber más que uno) se llama *autovalor o valor propio* de A (ó de f) asociado a $\mathbf{x}$.

Así pues, un escalar λ es un autovalor de A (ó de f) si y solamente si el núcleo de $\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}$ no se reduce al vector nulo de $\mathbb{K}^{\mathrm{n}}$, es decir, si el endomorfismo $f - \lambda\mathrm{I}$ caracterizado por la matriz $\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}$ no es inyectivo.

Así, 0 es un autovalor de f si y solamente si f no es inyectivo.

Definición. Sea $\mathrm{A} \in \mathrm{E}_{\mathrm{n\,x\,n}}(\mathbb{K})$ la matriz asociada al endomorfismo $f : \mathbb{K}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ en una base dada de $\mathbb{K}^{\mathrm{n}}$, y λ un autovalor de A (ó de f). El subespacio vectorial

$$\mathrm{V}(\lambda) = \mathrm{Ker}\ (\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n \,/\, \mathrm{A}\cdot\mathbf{x} = \lambda\cdot\mathbf{x}\right\} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n \,/\, (\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I})\cdot\mathbf{x} = \mathbf{0}\right\}$$

se llama *subespacio propio* de A asociado a λ ; sus vectores no nulos son los vectores propios asociados a λ.

Cálculo de autovalores y autovectores. La ecuación $A\cdot\mathbf{x}=\lambda\cdot\mathbf{x}$ que sirve para definir los autovalores y autovectores se puede escribir como $(A-\lambda I)\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}$, con lo que los autovectores, si existen, son los vectores solución del sistema lineal homogéneo resultante. Sabemos que este sistema tiene soluciones distintas de la trivial nula si y sólo si la matriz $A-\lambda I$ es singular, lo cual ocurre si y sólo si el determinante de $A-\lambda I$ es igual a cero: $|A-\lambda I|=0$.

Así podemos comenzar por encontrar los autovalores deA, es decir, aquellos valores λ de $\mathbb{K}$ que hacen $|A-\lambda I|=0$, y a continuación, para cada autovalor λ así obtenido, calcular los subespacios propios $V(\lambda)$, es decir resolver el sistema $A\cdot\mathbf{x}=\lambda\cdot\mathbf{x}$.
Vamos ahora a estudiar la naturaleza de la expresión $|A-\lambda I|$.

Definición. Se llama *polinomio característico* de una matriz cuadrada A de orden n, definida sobre $\mathbb{K}$, al polinomio $p_A(\lambda)=|A-\lambda I|$ que es un polinomio con coeficientes en $\mathbb{K}$ y de grado n, en la variable λ; su coeficiente de índice n es igual a $(-1)^n$, su coeficiente de índice $n-1$ se obtiene multiplicando la traza de A por $(-1)^{n-1}$ y su término independiente es igual al determinante de A (como se verá a continuación).

La ecuación $p_A(\lambda)=0$ se llama *ecuación característica* de A.

Para obtener la fórmula general del polinomio característico de A empezamos considerando una matriz cuadrada de orden 2:

- Sea $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$, entonces su polinomio característico es :

$$p_A(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-a_{12}a_{21}=\lambda^2-\left(a_{11}+a_{22}\right)\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=$$

$$=\lambda^2-\mathrm{tr}(A)\lambda+|A|$$

- Si la matriz fuera de orden 3, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, entonces :

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = ... = -\left[\lambda^3 - \text{tr}(A)\lambda^2 + \alpha\lambda - |A|\right]$$

- Si A fuera de orden n:

$$p_A(\lambda) = |A \ \ - \lambda I| = (-1)^n \left[\lambda^n - \text{tr}(A)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A|\right] = (-1)^n \cdot \lambda^n + (-1)^{n+1} \text{tr}(A)\lambda^{n-1} + \cdots + |A|$$

Luego, $\lambda \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) es autovalor de $A \in E_{n\,x\,n}(\mathbb{K})$ si y sólo si es raíz del polinomio característico y está en $\mathbb{K}$.

Por el teorema Fundamental del Algebra, si $\mathbb{K}$ es el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos, entonces A posee exactamente n autovalores, siendo n el orden de la matriz. Por otra parte, si $\mathbb{K}$ es el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales, entonces la matriz A posee a lo sumo n autovalores (en ambos casos considerando las multiplicidades de las soluciones de la ecuación característica).

<u>Ejemplo.</u> Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Su polinomio característico es $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$, y su ecuación característica $\lambda^2 + 1 = 0$, que no se anula para ningún valor real. Luego, la matriz A considerada como una matriz real, no tiene valores propios. Pero si se considera A como una matriz sobre el cuerpo de los números complejos, sus autovalores son +*i* y –*i*.

Si la matriz A posee n autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ (no tienen por qué ser distintos), entonces podemos escribir:

$$p_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n) =$$

$$= (-1)^n \left[\lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n (\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n)\right]$$

Como esta fórmula debe coincidir con la vista anteriormente:

$$p_A(\lambda) = (-1)^n \left[\lambda^n - tr(A)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A| \right]$$

si se comparan los coeficientes de λ^{n-1} y los términos independientes, se obtienen dos importantes propiedades que cumplen los autovalores de una matriz A :

$$tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

$$|A| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

Corolario. Una matriz cuadrada A es inversible si y sólo si $\lambda = 0$ no es autovalor de A.

Ejemplo. Sea el endomorfismo :

$$f: \quad \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix}$$

en la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Por tanto, la expresión matricial de f, en la base canónica de $\mathbb{R}^2$, es:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Luego, la matriz asociada en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Los autovalores de A son las soluciones de la ecuación característica de la matriz A :

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = 0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2 \quad \wedge \quad \lambda_2 = -2$$

Los subespacios propios asociados son respectivamente:

$$V(\lambda_1) = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,/\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,/\, (A - \lambda_1 I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,/\, \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,/\, -2x_1 + 2x_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = x_2 \right\} = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,/\, x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$V(\lambda_2)=\left\{\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \,/\, A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\lambda_2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right\}=$$

$$=\left\{\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \,/\, (A-\lambda_2 I)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}=\left\{\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \,/\, \begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}=$$

$$=\left\{\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \,/\, 2x_1+2x_2=0 \;\Leftrightarrow\; x_1=-x_2\right\}=\left\{\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\-x_1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \,/\, x_1\in\mathbb{R}\right\}$$

Notemos que los autovalores de A verifican las dos propiedades siguientes:

$$\mathrm{tr}(A) = 0 = \lambda_1+\lambda_2$$

$$|A| = -4 = \lambda_1\cdot\lambda_2$$

Los autovalores de una matriz cuadrada pueden ser repetidos ó no. Lo que da lugar a las siguientes definiciones:

Definición. Se llama *multiplicidad algebraica*, m_i, de un autovalor λ_i, a la multiplicidad de λ_i como raíz de la ecuación característica, es decir, el número de veces que aparece λ_i como raíz de dicha ecuación.

Definición. Se llama *multiplicidad geométrica*, μ_i, de un autovalor λ_i, a la dimensión del subespacio propio asociado a él, es decir, a la dim $V(\lambda_i)$.

Se cumple que: $1\le\mu_i\le m_i$, como se verá más adelante.

Puesto que las ecuaciones de $V(\lambda_i)$ vienen dadas a partir del sistema: $(A-\lambda_i I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$, y teniendo en cuenta que la dimensión de un subespacio S de $\mathbb{K}^n$ es:

dim S = n – número de restricciones

se verifica que

$$\dim V(\lambda_i) = n - \mathrm{rang}(A-\lambda_i I)$$

Ejemplo. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}7&0&0&0&0\\0&7&1&0&0\\0&0&4&2&0\\0&0&0&4&0\\0&0&0&0&4\end{pmatrix}$. Fácilmente se obtiene que el polinomio característico de A es: $p_A(\lambda)=(\lambda-7)^2\cdot(\lambda-4)^3$.

Luego, los autovalores de A son: $\lambda_1=7$ de multiplicidad algebraica $m_1=2$, y $\lambda_1=4$ de multiplicidad algebraica $m_2=3$, que son los elementos diagonales de A.

Ejemplo. Calcular los autovalores y autovectores de la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}2&2&1\\1&3&1\\1&2&2\end{pmatrix}.$$

Solución. Primeramente se calculan los autovalores de A, a partir de la ecuación característica de A, es decir:

$$p_A(\lambda)\ =\ |A-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda&2&1\\1&3-\lambda&1\\1&2&2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda-5)=0$$

De donde los autovalores de A son $\lambda_1=1$ (raíz doble ó con multiplicidad algebraica $m_1=2$) y $\lambda_2=5$ (raíz simple ó $m_2=1$).

En segundo lugar, para cada autovalor se calculan los vectores propios, es decir, los subespacios propios:

$$V(\lambda)=\text{Ker }(A-\lambda I)=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3\ /\ A\cdot\mathbf{x}=\lambda\cdot\mathbf{x}\}=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3\ /\ (A-\lambda I)\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}\}$$

- Así, para $\underline{\lambda_1=1}$ se tiene :

$$V(1)=\text{Ker }(A-I)=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3\ /\ (A-I)\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}\}$$

de donde el sistema que resulta es:

$$(A-I)\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&2&1\\1&2&1\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+x_3=0\end{cases}\Rightarrow x_1=-2x_2-x_3$$

Esta es la ecuación implícita del subespacio $V(1)$. Entonces:

$$\dim V(1)=n-\text{rang}(A-I)=3-1=2$$

y el subespacio propio asociado a $\lambda_1 = 1$ es:

$$V(1) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,/\, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \forall x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\},$$

De donde una base de autovectores de $V(1)$ es $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Así,

$\mu_1 = \dim V(1) = 2$.

- Parar $\underline{\lambda_2 = 5}$ se tiene :

$$V(5) = \operatorname{Ker}(A - 5I) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,/\, (A - 5I) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \right\}$$

de donde el sistema que resulta es:

$$(A - 5I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_3 = x_1 \end{cases}$$

Estas son las dos ecuaciones implícitas del subespacio $V(5)$, luego

$$\dim V(5) = n - \operatorname{rang}(A - 5I) = 3 - 2 = 1$$

y el subespacio propio asociado a $\lambda_2 = 5$ es:

$$V(5) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,/\, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}, \forall x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

De donde una base de autovectores de $V(5)$ está formada por el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Luego, $\mu_2 = \dim V(5) = 1$.

Veamos a continuación algunas propiedades relacionadas con los autovalores y autovectores.

Proposición. Un autovector de una matriz cuadrada está asociado a un único autovalor.

Demostración. Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ ($\mathbf{x}$ vector no nulo) un autovector de $A \in E_{nxn}(\mathbb{K})$ asociado al autovalor $\lambda \in \mathbb{K}$, es decir, $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Supongamos que $\mu \in \mathbb{K}$ es otro autovalor de $\mathbf{x}$, así $A\mathbf{x} = \mu\mathbf{x}$. Restando ambas ecuaciones se obtiene $(\lambda - \mu)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, y como $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, necesariamente $\lambda = \mu$, es decir, el autovalor es único.

Proposición. Sea $A \in E_{nxn}(\mathbb{K})$ un matriz triangular (superior ó inferior). Entonces los autovalores de A son los elementos diagonales de A.

Demostración. Sea A una matriz triangular superior: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Para hallar sus autovalores se emplea su ecuación característica (al tratarse del determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos diagonales:

$$|A - \lambda I| = 0 = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\cdots(a_{nn} - \lambda)$$

Siendo las soluciones de esta ecuación: $\lambda_1 = a_{11}, \lambda_2 = a_{22}, \cdots, \lambda_n = a_{nn}$.

Proposición. Los autovectores de una matriz cuadrada de orden n asociados a autovalores distintos son linealmente independientes.

Consecuencia de esta proposición es que los subespacios propios asociados a autovalores distintos son disjuntos, es decir:

$$V(\lambda_i) \cap V(\lambda_j) = \{0_{\mathbb{K}^n}\}, \quad \forall \lambda_i \neq \lambda_j, \text{ siendo } \lambda_i,\ \lambda_j \text{ autovalores distintos de } A.$$

Proposición. Las matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico y los mismos autovalores.

Demostración. Si existe P regular tal que $B = P^{-1}AP$, se cumple que:

$$p_B(\lambda) = |B - \lambda I| = |P^{-1} \cdot A \cdot P - \lambda P^{-1} \cdot P| = |P^{-1} \cdot (A - \lambda I) \cdot P| = |P^{-1}||A - \lambda I||P| = |A - \lambda I| = p_A(\lambda)$$

Es decir, los polinomios característicos de A y B son iguales. Dado que los autovalores son las raíces de la ecuación característica, queda demostrada la proposición.

En el párrafo siguiente, vamos a enunciar condiciones para que un endomorfismo ó la matriz que lo representa sean diagonalizables, ya que no todos lo son. Se va a ver que el problema está relacionado con la multiplicidad algebraica de los autovalores múltiples.

5.3. DIAGONALIZACIÓN EN DIMENSIÓN FINITA

Proposición. Sea $A \in E_{n\,x\,n}(\mathbb{K})$. Una condición necesaria de diagonalización de la matriz A es que A posea exactamente n autovalores.

Demostración. Si A es diagonalizable entonces es semejante a una matriz D diagonal. Los autovalores de A y los de D son iguales por semejanza. Como la matriz D posee exactamente n autovalores (los elementos diagonales), entonces la matriz A tendrá también n autovalores (los mismos autovalores que D).

El Teorema siguiente establece la condición necesaria y suficiente de diagonalización.

Teorema. Una matriz cuadrada de orden n es diagonalizable si y sólo si tiene n autovectores linealmente independientes.

Demostración. $\Leftarrow$) Sean los autovectores de A linealmente independientes:

$$\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \cdots\cdots, \mathbf{x_n} = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$$

Observemos que si P es una matriz cualquiera de orden n cuyas columnas son los autovectores de A linealmente independientes $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, ..., \mathbf{x_n}$, y si D es una matriz diagonal cualquiera cuyos elementos diagonales son $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, entonces

$$AP = A\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = A[\mathbf{x_1} \quad \mathbf{x_2} \quad \mathbf{...} \quad \mathbf{x_n}] = [A\mathbf{x_1} \quad A\mathbf{x_2} \quad \cdots \quad A\mathbf{x_n}] \qquad (1)$$

mientras que

$$PD = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_{11} & \lambda_2 x_{12} & \cdots & \lambda_n x_{1n} \\ \lambda_1 x_{21} & \lambda_2 x_{22} & \cdots & \lambda_n x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1 x_{n1} & \lambda_2 x_{n2} & \cdots & \lambda_n x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{x_1} & \lambda_2 \mathbf{x_2} & \cdots & \lambda_n \mathbf{x_n} \end{bmatrix} \quad (2)$$

de donde

$$AP = PD$$

Como P es una matriz inversible ya que sus columnas son los autovectores deA, que son linealmente independientes, entonces $D = P^{-1}AP$, es decir, A es diagonalizable.

$\Rightarrow$) Recíprocamente, supongamos ahora que A es diagonalizable, entonces se puede encontrar una matriz inversible P tal que $D = P^{-1}AP$ sea una matriz diagonal, ó equivalentemente $AP = PD$. Empleando las expresiones (1) y (2), se obtiene:

$$\begin{bmatrix} A\mathbf{x_1} & A\mathbf{x_2} & \cdots & A\mathbf{x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{x_1} & \lambda_2 \mathbf{x_2} & \cdots & \lambda_n \mathbf{x_n} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Igualando las columnas se tiene que:

$$A\mathbf{x_1} = \lambda_1 \mathbf{x_1}, \quad A\mathbf{x_2} = \lambda_2 \mathbf{x_2}, \ \ldots, \ A\mathbf{x_n} = \lambda_n \mathbf{x_n} \quad (4)$$

Dado que P es inversible, sus columnas $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, ..., \mathbf{x_n}$ son necesariamente linealmente independientes. Además, como estas columnas son no nulas, de (4) se obtiene que $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ son autovalores y $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, ..., \mathbf{x_n}$ sus autovectores asociados.

Observaciones.

1.- Este Teorema se puede enunciar en otros términos como sigue:

Una matriz $A \in E_{n\,x\,n}(\mathbb{K})$ es diagonalizable si y sólo si existe una base de $\mathbb{K}^n$ formada por autovectores de A. Lo que equivale a decir que $\mathbb{K}^n$ es la suma directa de subespacios propios de A.

2.- Para terminar, dados n autovectores cualesquiera $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, ..., \mathbf{x_n}$, los colocamos como columnas de P y situamos los autovalores asociados $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ sobre la diagonal de

D, es decir, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$. Según (1), (2) y (3) se tiene que $AP = PD$. Hasta aquí, este resultado no exige ninguna condición a los autovectores. Pero si los autovectores son linealmente independientes, P es inversible y $AP = PD$ conlleva a $D = P^{-1}AP$.

<u>Ejemplo.</u> Diagonalizar, si es posible, la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $(A \in E_{3x3}(\mathbb{R}))$.

Dicho de otra forma, encontrar una matriz inversible P y una matriz diagonal D tales que $D = P^{-1}AP$.

Solución. Hace falta pasar por cuatro etapas para realizar lo que se describe en el Teorema precedente.

<u>Etapa 1. Encontrar los autovalores de A a partir de la ecuación característica</u>. En este caso en la ecuación característica aparece un polinomio de grado 3 que se puede factorizar:

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -2 \\ 2 & -\lambda & -2 \\ 2 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \cdot (\lambda - 1)^2 = 0$$

Los autovalores son $\lambda_1 = 1$ (multiplicidad algebraica 2) y $\lambda_2 = 0$ (simple).

<u>Etapa 2. Encontrar los autovectores linealmente independientes de A.</u> Hacen falta tres autovectores de A porque la matriz A es de orden tres.

Para cada autovalor se va a calcular el subespacio propio asociado, es decir:

$$V(\lambda) = \text{Ker}\,(A - \lambda I) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,/\, A \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}\right\} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,/\, (A - \lambda I) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}\right\}$$

- Para $\underline{\lambda_1 = 1}$: $V(1) = \text{Ker}\,(A - I) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,/\, (A - I) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}\right\}$, de donde:

$$(A - I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 2x_1 - 2x_3 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

entonces, el subespacio propio asociado a $\lambda_1 = 1$ es:

$$V(1)=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 / \mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1-2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}, \forall x_1, x_3\in\mathbb{R}\right\}$$

De donde una base de autovectores de $V(1)$ es $B_{V(1)}=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$.

- Para $\underline{\lambda_2=0}$: $V(0)=\text{Ker }(A-0I)=\text{Ker } A=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 / A\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}\right\}$, y los autovalores son las soluciones del sistema $A\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}$, es decir

$$\begin{pmatrix}3 & -1 & -2\\ 2 & 0 & -2\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}3x_1-x_2-2x_3=0\\ 2x_1 \qquad -2x_3=0\\ 2x_1-x_2-\ x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2=x_1\\ x_3=x_1\end{cases}$$

entonces, el subespacio propio asociado a $\lambda_2=0$ es:

$$V(0)=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 / \mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_1\\x_1\end{pmatrix}, \forall x_1\in\mathbb{R}\right\}$$

y una base de autovectores de $V(0)$ es $B_{V(0)}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Ya se ha visto que los autovectores de una matriz cuadrada de orden n asociados a autovalores distintos, son linealmente independientes. Luego, el conjunto de vectores $\left\{\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\mathbf{y}=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix},\mathbf{z}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ es linealmente independiente. Esto implica que existe una base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de A, luego $A\in E_{3x3}(\mathbb{R})$ es diagonalizable, es decir, $D=P^{-1}AP$.

Etapa 3. Construir* P *a partir de los autovectores de la etapa 2. El orden de colocación de los autovectores no tiene importancia. Adoptamos el de la etapa 2 y los ponemos como columnas de P, así se tiene:

$$P=\begin{bmatrix}\mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z}\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

__Etapa 4. Construir__* __D__ *__a partir de los autovalores asociados.__ Es esencial que el orden de colocación de los autovalores para formar la matriz D sea el mismo que el de los autovectores dispuestos en columnas para formar P. El autovalor $\lambda_1=1$ se repite dos veces, una vez por autovector asociado a $\lambda_1=1$:

$$\mathrm{D}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es conveniente comprobar si P y D las hemos calculado bien. Para ello, basta con, evitando calcular P^{-1}, comprobar que $\mathrm{AP}=\mathrm{PD}$, lo que es equivalente a $\mathrm{D}=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ cuando P es inversible. (¡Hay que asegurarse a pesar de todo que P es inversible!).

$$\mathrm{AP}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{PD}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Observaciones. A partir de este ejercicio se puede deducir que:

1.- Dada la matriz diagonal D, la matriz P formada por autovectores no es única. Así en este ejercicio, dada la matriz diagonal $\mathrm{D}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, las dos opciones posibles de P serían:

$$\mathrm{P}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \mathrm{P}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.- Como $\lambda=0$ es un autovalor de A, $\mathrm{V}(0)=\mathrm{Ker}\, f\neq\{\mathbf{0}\}$, luego el endomorfismo f asociado a la matriz A no es inyectivo, y por tanto tampoco sobreyectivo.

3.- Para $\lambda_1=1$, la multiplicidad algebraica: $\mathrm{m}_1 = 2$, por tanto es igual a la multiplicidad geométrica: $\mu_1=\dim\ \mathrm{V}(1)=2$. Para $\lambda_2=0$, la multiplicidad algebraica:

m_2=1, es igual a la multiplicidad geométrica: $\mu_2 = \dim V(0) = 1$. En general se tiene el siguiente resultado:

Teorema. La multiplicidad geométrica: μ_i de un autovalor λ_i nunca es mayor que la multiplicidad algebraica de dicho autovalor, es decir $\mu_i \leq m_i$.

Por último se va a ver otra caracterización de las matrices diagonalizables en función de la multiplicidad de las raíces de la ecuación característica.

Teorema. Un matriz cuadrada A de orden n es diagonalizable si y sólo si la multiplicidad algebraica de cada autovalor $\lambda \in \mathbb{K}$ de A coincide con la multiplicidad geométrica de dicho autovalor, es decir, con la dimensión del subespacio propio correspondiente): $m_i = \mu_i, \quad \forall\, i$.

Como corolario a este Teorema se establece una condición suficiente de diagonalización:

Corolario. Sea A una matriz cuadrada de orden n. Si A tiene n autovalores distintos, entonces A es diagonalizable.

5.4. DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES SIMETRICAS REALES POR SEMEJANZA ORTOGONAL

Las matrices simétricas reales aparecen en numerosos problemas en relación con el estudio de la dinámica de sistemas físicos. Así por ejemplo, cantidades como la energía cinética y la potencial se representan a través de ellas. En física, un tensor de inercia tiene asociada una matriz simétrica real, resultando importante su diagonalización mediante una transformación ortogonal.

Como vamos a ver a continuación, las matrices simétricas reales son matrices que tienen la propiedad de ser siempre diagonalizables. Además, va a existir una base ortonormada formada por autovectores.

Autovalores y autovectores de matrices simétricas reales.

Teorema. Sea A una matriz simétrica real de orden n. Entonces A tiene n autovalores reales (teniendo en cuenta la multiplicidad algebraica de cada uno).

Teorema. Sea A una matriz simétrica real de orden n. Entonces, los autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales (respecto del producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$).

El teorema anterior indica que los autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales, sin embargo no indica nada respecto a los autovectores asociados a un autovalor múltiple. Por lo tanto, los autovectores asociados a un autovalor múltiple no necesariamente son ortogonales; si se quiere ortogonalizarlos, se empleará, por ejemplo, el método de Gram-Schmidt. Por lo tanto, una base ortonormal de autovectores de la matriz simétrica real A, para el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, se puede obtener uniendo bases ortonormales de cada subespacio propio, obtenidas por el método de Gram-Schmidt.

Teorema. Una matriz A cuadrada (real) de orden n se dice que es <u>diagonalizable ortogonalmente</u> si existe una matriz ortogonal (real) P (es decir, $P^{-1} = P^t$) y una matriz diagonal D, tales que

$$D = P^t AP = P^{-1}AP$$

Para diagonalizar ortogonalmente una matriz cuadrada de orden n hace falta disponer de n autovectores ortonormados y linealmente independientes. ¿Cuándo es esto posible? Si A es diagonalizable ortogonalmente entonces

$$A^t = (PDP^t)^t = (P^t)^t D^t P^t = PDP^t = A$$

De donde se tiene que A es una matriz <u>simétrica</u>.

Inversamente, toda matriz simétrica es diagonalizable ortogonalmente. Esto es lo que afirma el siguiente teorema:

Teorema. Una matriz A cuadrada (real) de orden n es diagonalizable ortogonalmente si y solamente si A es una matriz simétrica.

Esto permite enunciar el siguiente Teorema:

Teorema. Si A es una matriz simétrica real, entonces existe una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ formada por n autovectores de A.

Esta base ortonormal formada por autovectores de A se obtiene uniendo bases ortonormales de cada subespacio propio, que pueden hallarse en cada subespacio propio empleando el método de Gram-Schmidt.

Ejemplo. Diagonalizar ortogonalmente la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución. La ecuación característica de A es:

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2+\lambda) = 0$$

Por tanto, los autovalores de A son: $\lambda_1 = 1$ (con multiplicidad algebraica $m_1 = 2$) y $\lambda_2 = -2$.

A continuación para cada autovalor se va a calcular el subespacio propio asociado, es decir:

$$V(\lambda) = \text{Ker}\,(A - \lambda I) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,/\, A \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x} \right\} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,/\, (A - \lambda I) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \right\}$$

- Para $\underline{\lambda_1 = 1}$: $V(1) = \text{Ker}\,(A - I) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,/\, (A - I) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \right\}$, es decir:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

Por tanto, el subespacio propio asociado a $\lambda_1 = 1$ es:

$$V(1) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,/\, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} / \, x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Siendo una base de autovectores de $V(1)$: $B_{V(1)} = \left\{ \mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,

y $\mu_1 = \dim V(\lambda_1) = 2 = m_1$, algo que está asegurado ya que A es una matriz simétrica real y por tanto A siempre es diagonalizable.

- $\underline{\lambda_2 = -2}$: $V(-2) = \text{Ker }(A + 2I) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,/\, (A + 2I) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \right\}$, es decir:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_3 = x_1 \end{cases}$$

Por tanto, el subespacio propio asociado a $\lambda_2 = -2$ es:

$$V(-2) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,/\, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}, x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

y una base de autovectores de $V(-2)$ es $B_{V(-2)} = \left\{ \mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. En este caso,

$\mu_2 = \dim V(\lambda_2) = 1 = m_2$, como era de esperar.

Así $B = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de A.

Para construir una matriz P ortogonal tal que $P^t A P$ sea una matriz diagonal, D, se necesita una base ortonormal formada por autovectores de A. El subconjunto $\{\mathbf{u_1}, \ \mathbf{u_2}\}$ es ortogonal al vector $\mathbf{u_3}$, puesto que son autovectores asociados a autovalores distintos de la matriz simétrica A. Sin embargo, a pesar de que $\mathbf{u_1}$ y $\mathbf{u_2}$ son linealmente independientes, no son ortogonales entre sí. Entonces, ortogonalizamos sólo $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$ mediante el método de Gram Schmidt:

$$\mathbf{v_1} = \mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v_2} = \mathbf{u_2} + \lambda \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 + \lambda \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ tal que } < \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} > = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow < \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} > = 1 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Asi, el subconjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es una base ortogonal de autovectores del subespacio propio V(1).

Por tanto, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3\}$ es una base ortogonal de autovectores de A.

Para obtener una base ortonormada de autovectores de A se normaliza la base ortogonal anterior, es decir:

$$\mathbf{w_1} = \frac{1}{\|\mathbf{v_1}\|}\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{w}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|}\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{w}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_3\|}\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Luego, $\mathrm{B}' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ es una base ortonormada de autovectores de A.

La matriz P ortogonal es:

$$\mathrm{P} = [\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \mathbf{w}_3] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Se puede comprobar que

$$\mathrm{P}^t\mathrm{AP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

es la matriz diagonal D que es semejante a la matriz A.

EJERCICIOS TEMA 5

1.- Calcular los autovalores y autovectores de las siguientes matrices:

a) $A\,(\mathbb{C}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A\,(\mathbb{C}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

c) $A\,(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d) $A\,(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & 0 \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

2.- Estudiar si las matrices del ejercicio anterior son diagonalizables.

3.- Para cada matriz del ejercicio 1, obtener una matriz diagonal D que sea semejante a la matriz A, así como la matriz regular P tales que $D = P^{-1}AP$.

4.- Estudiar si las siguientes matrices son diagonalizables, y obtener, si es posible, una matriz diagonal D que sea semejante a la matriz A, así como la matriz regular P tales que $D = P^{-1}AP$.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

5.- Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 & 0 \\ b & d & 1 & 0 \\ c & e & f & 1 \end{pmatrix}$. Discutir las condiciones que deben cumplir a, b, c, d, e y f para que la matriz A sea diagonalizable.

6.- Sea $A = \begin{pmatrix} \alpha & m & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ una matriz donde α y $m \in \mathbb{R}$ $(m \neq 0)$. Obtener los autovalores y autovectores de A. ¿ En qué casos la matriz A es diagonalizable?.

7.- Dada $A=\begin{pmatrix} a & -1 & d \\ b & 0 & e \\ c & 1 & f \end{pmatrix}$, hallar a, b, c, d, e, f sabiendo que los autovectores de A son:

$$\mathbf{v_1}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v_2}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v_3}=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

8.- Sea $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Demostrar (<u>sin utilizar el polinomio característico</u>) que $\mathbf{v}=\begin{pmatrix} -5 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}$ es un vector propio de A y encontrar el correspondiente valor propio.

9.- Supóngase que $A=P\cdot D\cdot P^{-1}$, siendo $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Demostrar que $B=2I+3A^2$ es diagonalizable y encontrar una matriz diagonal semejante a B.

10.- Indicar y <u>demostrar</u> si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Las matrices semejantes tienen los mismos valores propios.
b) Si una matriz A tiene el 0 como valor propio entonces A es singular.
c) Si una matriz A es semejante a B, siendo $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $|A|=6$.

11.- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Establecer razonadamente si es posible obtener una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de A. ¿Podemos conseguir que esta base sea **ortogonal?** Justifica la respuesta.

b) Calcular los valores y vectores propios de A, así como la base **ortonormal** de vectores propios de A.

12.- Dada una matriz $A\in E_{nxn}(\mathbb{R})$ simétrica:

a) ¿Es A diagonalizable? Razona la respuesta.

b) ¿Qué puede decirse de los vectores propios de A? ¿Pueden formar una base ortogonal? Razona la respuesta.

13.- Diagonalizar ortogonalmente si es posible la siguiente matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ a & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad a\neq 0.$$

14.-¿Es posible diagonalizar ortogonalmente la siguiente matriz A real? Justificarlo y, en caso de ser posible, hacerlo, indicando quién es la matriz D semejante a A y la matriz P de semejanza ortogonal.

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

(**NOTA**: los valores propios de *A* son $\lambda_1 = 3$ doble y $\lambda_2 = 0$ doble).

SOLUCIONES EJERCICIOS TEMA 5

1.- a) $\lambda_1 = 2+i$, $B_{V(\lambda_1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1+i \end{pmatrix} \right\}$; $\lambda_2 = 2-i$, $B_{V(\lambda_2)} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1-i \end{pmatrix} \right\}$

b) $\lambda_1 = 5$, $B_{V(\lambda_1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; $\lambda_2 = 1$, $B_{V(\lambda_2)} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

c) $\lambda_1 = 0$ (Triple) , $B_{V(\lambda_1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$; d) $\lambda_1 = 6$, $B_{V(\lambda_1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

2.- a) Diagonalizable.

b) Diagonalizable.

c) No es diagonalizable.

d) No es diagonalizable.

3.- a) $D = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1+i & -1-i \end{pmatrix}$

b) $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

4.- a) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) No es diagonalizable.

5.- a = 0, f = 0 $\forall$ b, c, d, e .

6.- Autovalores de A: $\lambda_1 = \alpha$; $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = 2$

Si $\alpha = 1$, entonces A no es diagonalizable. En cualquier otro caso, sí lo es.

7.- $a = \dfrac{5}{2}$; $b = 1$; $c = -2$; $d = -1$; $e = 2$; $f = -1$.

8.- Valor propio = -1.

9.- La matriz diagonal semejante a B es $D=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 77\end{pmatrix}$.

10.- a) Verdadera (Ver Teoría).

b) Verdadera (Ver Teoría).

c) Verdadera (Ver Teoría).

11.- a) Sí por ser A una matriz simétrica real (Ver Teoría para dar justificación).

b) Valores propios de A: 0, 1 y 3.

Base ortonormal de vectores propios de $A=\left\{\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\ 0\\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{3}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\ -2/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{6}\end{pmatrix}\right\}$.

12.- Sí, por ser A simétrica real (Ver Teoría).

13.- $P=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1+a & 0\\ 0 & 0 & 1-a\end{pmatrix}$.

14.- a) **Sí** es posible diagonalizar ortogonalmente la matriz A por ser **una matriz simétrica real.**

b) $D=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -\sqrt{6}/6\\ 0 & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -\sqrt{6}/6\\ 0 & 1/\sqrt{3} & 0 & \sqrt{2/3}\end{pmatrix}$.

Tema 6

TRIANGULARIZACIÓN POR TRANSFORMACIONES DE SEMEJANZA

6.1. INTRODUCCIÓN

El siguiente Teorema permite caracterizar las matrices que son triangularizables por semejanza.

Teorema. Sea $A \in E_{n\times n}(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Para que A sea semejante en $\mathbb{K}$ a una matriz triangular es condición necesaria y suficiente que la ecuación característica de A, $p_A(\lambda) = 0$, posea n raíces en $\mathbb{K}$, iguales ó distintas.

Esta propiedad se verifica cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Luego, toda matriz cuadrada compleja es semejante a una matriz triangular de números complejos, es decir, es triangularizable.

Existen distintas formas de triangularizar por semejanza una matriz A. Nosotros vamos a estudiar en este tema la llamada *forma canónica de Jordan* de una matriz A, que se representa por J, y es una matriz diagonal por bloques, cuyos bloques diagonales son bloques elementales de Jordan.

Es decir, en este tema se resuelve el problema de reducir por semejanza una matriz cuadrada A de orden n, con n autovalores (repetidos ó no), a la forma canónica de Jordan, mediante una matriz regular P, tal que:

$$J = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

ó equivalentemente

$$A = P \cdot J \cdot P^{-1}$$

Las columnas de P forman la llamada base de Jordan ó base de $\mathbb{K}^n$ formada por cadenas de "autovectores generalizados" de A.

Es conveniente observar que aún cuando los elementos de A sean reales, las matrices J y P pueden ser complejas (es decir, si es necesario se considera $\mathbb{K}=\mathbb{C}$).

6.2. FORMA DE JORDAN DE MATRICES DE ORDEN DOS Y TRES

6.2.1. Forma de Jordan de matrices de orden 2.

Sea $A \in E_{2x2}(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), la matriz asociada al endomorfismo $f:\mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^{2\mathbb{F}}$ en una cierta base.

Si $A=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, su polinomio característico es

$$p_A(\lambda)=\begin{vmatrix} a-\lambda & c \\ b & d-\lambda \end{vmatrix}=(a-\lambda)(d-\lambda)-bc$$

con lo que $p_A(\lambda)=0$ es una ecuación de grado 2 en la variable λ.

Habrá dos casos diferentes, según que las dos soluciones de esta ecuación sean iguales o distintas:

Caso I. Las dos raíces de la ecuación característica, λ y μ, son distintas: $\lambda \neq \mu \Rightarrow$ la matriz A es diagonalizable y su forma de Jordan es

$$J=D=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

Siendo P la matriz de paso, cuyas columnas son los autovectores.

Caso II . Las dos raíces de la ecuación característica, λ y μ, son iguales: $\lambda=\mu$. En este caso se calcula $V(\lambda)=\mathrm{Ker}\,(A-\lambda\cdot I)$:

a) Si $\dim\,\mathrm{Ker}\,(A-\lambda\cdot I)=2$ se puede encontrar una base de autovectores de A, y por tanto A es diagonalizable, siendo su forma de Jordan:

$$J=D=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

y la matriz de paso queda determinada por cualquier base de $\mathrm{Ker}\,(A-\lambda\cdot I)$.

b) Si, por el contrario, $\dim \text{Ker}\,(A - \lambda \cdot I) = 1$, entonces no se puede encontrar una base de autovectores de A. En este caso, se observa el siguiente resultado:

Lema. Si A tiene dos autovalores iguales, $\lambda = \mu$, entonces $(A - \lambda \cdot I)^2 = (0)$.

Sean $V_1(\lambda) = \text{Ker}\,(A - \lambda I)$ y

$$V_2(\lambda) = \text{Ker}\,(A - \lambda I)^2 = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2 \,/\, (A - \lambda I)^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \equiv \mathbb{K}^2$$

El lema anterior prueba que $\dim V_2(\lambda) = 2$ y entonces $V_2(\lambda)$ coincide con $\mathbb{K}^2$. Como $\dim V_1(\lambda) = 1$, se puede encontrar un vector $\mathbf{u_2} \in V_2(\lambda) - V_1(\lambda)$ y obtener otro vector $\mathbf{u_1}$ haciendo: $\mathbf{u_1} = (A - \lambda I) \cdot \mathbf{u_2}$.

Los vectores $\mathbf{u_1}$ y $\mathbf{u_2}$ son linealmente independientes, $\mathbf{u_2} \notin V_1(\lambda)$ y $\mathbf{u_1} \in V_1(\lambda)$, ya que $(A - \lambda I) \cdot \mathbf{u_1} = (A - \lambda I)^2 \cdot \mathbf{u_2} = (0) \cdot \mathbf{u_2} = \mathbf{0}$, y ninguno de ellos es el vector nulo. Como $\mathbb{K}^2$ es un espacio de dimensión 2, $\{\mathbf{u_1}, \ \mathbf{u_2}\}$ es una base de $\mathbb{K}^2$. En esta base se tiene:

$$\begin{aligned} (A - \lambda I) \cdot \mathbf{u_1} &= \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad A \cdot \mathbf{u_1} = \lambda \cdot \mathbf{u_1} \\ (A - \lambda I) \cdot \mathbf{u_2} &= \mathbf{u_1} \quad \Leftrightarrow \quad A \cdot \mathbf{u_2} = \mathbf{u_1} + \lambda \cdot \mathbf{u_2} \end{aligned}$$

con lo que, la matriz de la transformación lineal f en esta nueva base es:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Esta matriz no es una matriz diagonal, pero es casi diagonal, y es, en este caso, la forma reducida de Jordan de la matriz A.

Proposición. Dada una matriz $A \in E_{2x2}(\mathbb{K})$, siempre puede encontrarse una matriz $J \in E_{2x2}(\mathbb{K})$ de una cualquiera de las formas siguientes:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad / \, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

y una matriz $P \in E_{2x2}(\mathbb{K})$ regular, tal que

$$J = P^{-1} \cdot A \cdot P \quad (\Leftrightarrow \; A = P \cdot J \cdot P^{-1})$$

La matriz J se denomina matriz de Jordan de A.

Ejemplo. Obtener la forma reducida de Jordan de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Solución. La ecuación característica de A es:

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-\lambda)+4 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2 = 0$$

cuyos autovalores son $\lambda = 2$ (doble).

- Para $\lambda = 2$ se tiene:

$$V_1(2) = \operatorname{Ker}(A - 2I) = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,/\, (A - 2I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

de donde

$$V_1(2) = \operatorname{Ker}(A - 2I) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} / \, x_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

A partir del Lema anterior se sabe que $V_2(2) = \operatorname{Ker}(A - 2I)^2 \equiv \mathbb{R}^2$, es decir $\dim V_2(2) = 2$.

Se elige $\mathbf{u_2}$ de modo que perteneciendo a $V_2(2)$ no esté en $V_1(2)$, es decir, $\mathbf{u_2} \in V_2(2) - V_1(2)$, por ejemplo $\mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Entonces

$$\mathbf{u_1} = (A - 2I) \cdot \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \in V_1(\lambda)$$

La matriz de Jordan es $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz de paso de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ a la nueva base $\{\mathbf{u_1}, \ \mathbf{u_2}\}$ es $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Así pues, se debe verificar $J = P^{-1} \cdot A \cdot P$ ó equivalentemente $P \cdot J = A \cdot P$, siendo P regular:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad P \ \text{regular}$$

6.2.2. Forma de Jordan de matrices de orden 3.

A continuación se realizarán varios ejemplos que servirán para comprender mejor los resultados necesarios para la obtención de la forma de Jordan de matrices que representan aplicaciones entre espacios vectoriales de cualquier dimensión.

Ejemplo 1. Obtener la forma reducida de Jordan de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Solución: A partir de la ecuación característica de A se obtienen los autovalores de A:

$$|A - \lambda I| = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda + 8 = -(\lambda - 2)(\lambda + 2)^2 = 0$$

de donde $\lambda = 2$ (simple) y $\mu = -2$ (doble).

A continuación se calculan los subespacios propios asociados:

- Para $\underline{\lambda = 2}$ se calcula $V_1(2) = \text{Ker}(A - 2I)$, que es el subespacio vectorial definido por las ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \\ -4x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = -x_2 \end{cases}$$

de donde:

$$V_1(2) = \text{Ker}(A - 2I) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} / x_1 \in \mathbb{R} \right\} \quad \Rightarrow \quad \dim V_1(2) = 1.$$

Entonces, $\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ es un autovector asociado a $\lambda = 2$.

- Para $\underline{\mu=-2}$ se calcula $V_1(-2)=\mathrm{Ker}\,(A+2I)$ que es el subespacio vectorial definido por las ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de donde

$$V_1(-2)=\left\{ x_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} / \, x_1\in\mathbb{R} \right\} \quad\Rightarrow\quad \dim V_1(-2)=1.$$

Luego, $\dim V_1(-2)=1<$ multiplicidad algebraica de $\mu=-2$. Esto implica que A no es diagonalizable. La matriz más sencilla posible semejante a la matriz A es su forma reducida de Jordan.

Además, $V_1(2)+V_1(-2)\neq\mathbb{R}^3$, es decir, la suma de los subespacios propios no completa todo el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, entonces se puede asegurar que no existe una base de autovectores de A. Es necesario en este caso recurrir al procedimiento realizado en el caso de raíces iguales de matrices de orden 2.

Se calcula $V_2(-2)=\mathrm{Ker}\,(A+2I)^2$, que es el subespacio vectorial cuyas ecuaciones son:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \\ -8 & -8 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1=-x_2$$

por tanto,

$$V_2(-2)=\mathrm{Ker}\,(A+2I)^2=\left\{ x_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} / \, x_1,x_3\in\mathbb{R} \right\}$$

que es un subespacio vectorial de dimensión 2. Como la suma $V_1(2)+V_1(-2)$ completa todo el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, se puede elegir una base de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz de Jordan de A sea bastante sencilla en esta base. La forma de elegir esta base es la siguiente:

Sea $\mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vector de $V_2(-2)$ que no pertenece a $V_1(-2)$, y se toma:

$$\mathbf{u_2} = (A+2I)\cdot \mathbf{u_3} = (A+2I)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se comprueba fácilmente que $\{\mathbf{u_1},\ \mathbf{u_2},\ \mathbf{u_3}\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ formada por « autovectores generalizados », y en esta base la expresión del endomorfismo que tiene a A como matriz es:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u_1}) = A\cdot \mathbf{u_1} &= 2\,\mathbf{u_1} \\ f(\mathbf{u_2}) = A\cdot \mathbf{u_2} &= -2\,\mathbf{u_2} \\ f(\mathbf{u_3}) = A\cdot \mathbf{u_3} &= \mathbf{u_2} - 2\,\mathbf{u_3} \end{aligned}$$

De donde la matriz de Jordan de A es $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, y la matriz de paso es

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Se cumple que $J = P^{-1}\cdot A\cdot P$, es decir, $P\cdot J = A\cdot P$ (P regular):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Ejemplo 2.</u> Obtener la forma reducida de Jordan de la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Solución. A partir de la ecuación característica de A se obtienen los autovalores de A:

$$|A-\lambda I| = -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 12\lambda - 8 = -(\lambda+2)^3 = 0$$

de donde $\lambda = -2$ (triple).

A continuación se calcula el subespacio propio asociado a $\lambda = -2$:

➢ Para $\underline{\lambda = -2}$ se calcula $V_1(-2) = \text{Ker}\,(A + 2I)$ que es el subespacio vectorial definido por las ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3$$

se obtiene que $\quad V_1(-2) = \text{Ker}(A + 2I) = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} / \, x_1 \in \mathbb{R} \right\}$

En este ejemplo $\dim V_1(-2) = 1 < 3 =$ multiplicidad algebraica de $\lambda = -2$, lo que implica que no existe una base de autovectores de A, entonces A no es diagonalizable. La matriz más sencilla posible semejante a la matriz A es su forma reducida de Jordan.

Se procede a calcular $V_2(-2) = \text{Ker}(A + 2I)^2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = x_3$$

$$V_2(-2) = \text{Ker}\,(A + 2I)^2 = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} / \, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Pero $\dim V_2(-2) = 2 < 3 =$ multiplicidad algebraica de $\lambda = -2$. Luego, el subespacio $V_2(-2)$ no completa todo el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. Por tanto, se va a calcular $V_3(-2) = \text{Ker}\,(A + 2I)^3$; y como se tiene que $(A + 2I)^3 = (0)$, lo cual puede comprobarse fácilmente, se forma la cadena de subespacios:

$$V_1(-2) \underset{\neq}{\subset} V_2(-2) \underset{\neq}{\subset} V_3(-2) = \mathbb{R}^3$$

y se elige un vector $\mathbf{u_3} \in V_3(-2) = \mathbb{R}^3$, tal que $\mathbf{u_3} \notin V_2(-2)$; por ejemplo, $\mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Se toma $\mathbf{u_2} = (A + 2I)\mathbf{u_3}$ y $\mathbf{u_1} = (A + 2I)\mathbf{u_2}$. Entonces, se tiene:

$$\mathbf{u_2} = (A+2I)\mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{u_1} = (A+2I)\mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Luego, $B' = \{\mathbf{u_1}, \ \mathbf{u_2}, \ \mathbf{u_3}\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, formada por autovectores generalizados. En esta base:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u_1}) = A\cdot\mathbf{u_1} &= -2\,\mathbf{u_1} \\ f(\mathbf{u_2}) = A\cdot\mathbf{u_2} &= \mathbf{u_1} \ -2\,\mathbf{u_2} \\ f(\mathbf{u_3}) = A\cdot\mathbf{u_3} &= \mathbf{u_2} \ -2\,\mathbf{u_3} \end{aligned}$$

De donde la forma reducida de Jordan de A es $J = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, que es la matriz asociada al endomorfismo en la nueva base B', y $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz de paso de la base canónica a la base B'. Se comprueba fácilmente que $J = P^{-1}\cdot A\cdot P$.

<u>Ejemplo 3.</u> Obtener la forma reducida de Jordan de la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución. A partir de la ecuación característica de A se obtienen los autovalores de A:

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = -(\lambda+1)^3 = 0$$

luego, los autovalores de A son $\lambda = -1$ (triple).

A continuación se calcula el subespacio propio asociado a $\lambda = -1$:

- Para $\underline{\lambda = -1}$ se calcula $V_1(-1) = \mathrm{Ker}(A+I)$ que es el subespacio vectorial definido por las ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = x_3$$

se obtiene que $$V_1(-1) = \mathrm{Ker}(A+I) = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} / \, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

En este ejemplo dim $V_1(-1) = 2 < 3$ = multiplicidad algebraica de $\lambda = -1$, lo que implica que no existe una base de autovectores de A, luego A no es diagonalizable. La matriz más sencilla posible semejante a la matriz A es su forma reducida de Jordan.

Se calcula $V_2(-1) = \mathrm{Ker}(A+I)^2$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene la cadena de subespacios: $V_1(-1) \underset{\neq}{\subset} V_2(-1) = \mathbb{R}^3$, y se elige $\mathbf{u_3} \in \mathbb{R}^3 - V_1(-1)$, por ejemplo, $\mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Se toma ahora $\mathbf{u_2} = (A+I)\mathbf{u_3}$, luego

$$\mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Como $V_1(-1)$ es un subespacio de dimensión 2, se puede elegir aún un vector $\mathbf{u_1} \in V_1(-1)$ de manera que $B' = \{\mathbf{u_1}, \ \mathbf{u_2}, \ \mathbf{u_3}\}$ sea una base de $\mathbb{R}^3$. Por ejemplo, $\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. En esta base B':

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u_1}) = A \cdot \mathbf{u_1} &= -\mathbf{u_1} \\ f(\mathbf{u_2}) = A \cdot \mathbf{u_2} &= \qquad -\mathbf{u_2} \\ f(\mathbf{u_3}) = A \cdot \mathbf{u_3} &= \qquad\ \ \mathbf{u_2} \ -\mathbf{u_3} \end{aligned}$$

Entonces la forma reducida de Jordan de A es $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, que es la matriz asociada al endomorfismo en la nueva base B', y $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz de paso de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ a la base B'. Se comprueba fácilmente que $J = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

A continuación se va a resumir el procedimiento utilizado en la obtención de las matrices de Jordan de los ejemplos anteriores:

Una vez calculados los autovalores, λ, de A, se obtienen los núcleos de $(A-\lambda I)$, donde A es la matriz dada. Se pueden dar dos casos:

1) Si estos núcleos completan todo el espacio vectorial, entonces se puede encontrar una base de autovectores de A y la matriz A es diagonalizable.

2) Si por el contrario, los núcleos no completan todo el espacio vectorial, es porque existen autovalores de A dobles (multiplicidad algebraica 2) o triples (multiplicidad algebraica 3), cuya multiplicidad geométrica, μ, es inferior a su multiplicidad algebraica, m, y en este caso, es necesario construir la cadena de los núcleos de $(A-\lambda I)^j$, $j = 1, 2, 3$. Cuando se haya completado todo el espacio vectorial, se procede a elegir una base adecuada tal y como se ha mostrado en los ejemplos (para cada autovalor λ hay que obtener un total de m autovectores generalizados).

6.3. TEOREMA DE CLASIFICACIÓN DE JORDAN

Definición. Se denomina *matriz elemental de Jordan ó bloque de Jordan* de orden k y autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$ a toda matriz cuadrada, $J_k(\lambda)$ de orden k, cuyos elementos son todos nulos, excepto los de la diagonal principal, que valen λ, y los situados inmediatamente encima de la diagonal principal, que son todos unos. Por ejemplo:

$$J_1(\lambda) = (\lambda) \qquad J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad J_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad J_4(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Definición. Se llama *matriz de Jordan,* J, a cualquier matriz cuadrada formada por yuxtaposición de matrices elementales de Jordan la lo largo de la diagonal, de la forma:

$$J = \begin{bmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & & & \\ & J_{k_2}(\lambda_2) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & J_{k_{r-1}}(\lambda_{r-1}) & \\ & & & & J_{k_r}(\lambda_r) \end{bmatrix}$$

Teorema de clasificación de Jordan. Toda matriz cuadrada A (real o compleja) de orden n, es semejante a una matriz de Jordan (compleja), determinada de manera única salvo por permutaciones de las matrices de Jordan elementales que la componen.

6.4. ALGORITMO PARA OBTENER LA FORMA DE JORDAN DE UNA MATRIZ

El algoritmo que se utilizará para la obtención de la forma de Jordan de una matriz cuadrada A (real o compleja) de orden n, consta de los siguientes pasos:

1) Dada la matriz A, se comienza calculando los autovalores de A. Sean éstos $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m$ con multiplicidades algebraicas $r_1, r_2, \cdots r_m$ respectivamente, tal que $r_1 + r_2 + \cdots + r_m = n$.

2) Para cada autovalor λ se calcula la cadena de subespacios :

$$V_1(\lambda) = \mathrm{Ker}(A - I\lambda) \underset{\neq}{\subset} V_2(\lambda) = \mathrm{Ker}(A - I\lambda)^2 \underset{\neq}{\subset} \cdots \underset{\neq}{\subset}$$

$$\underset{\neq}{\subset} V_p(\lambda) = \mathrm{Ker}(A - I\lambda)^p = V_{p+1}(\lambda) = \mathrm{Ker}(A - I\lambda)^{p+1} = \cdots$$

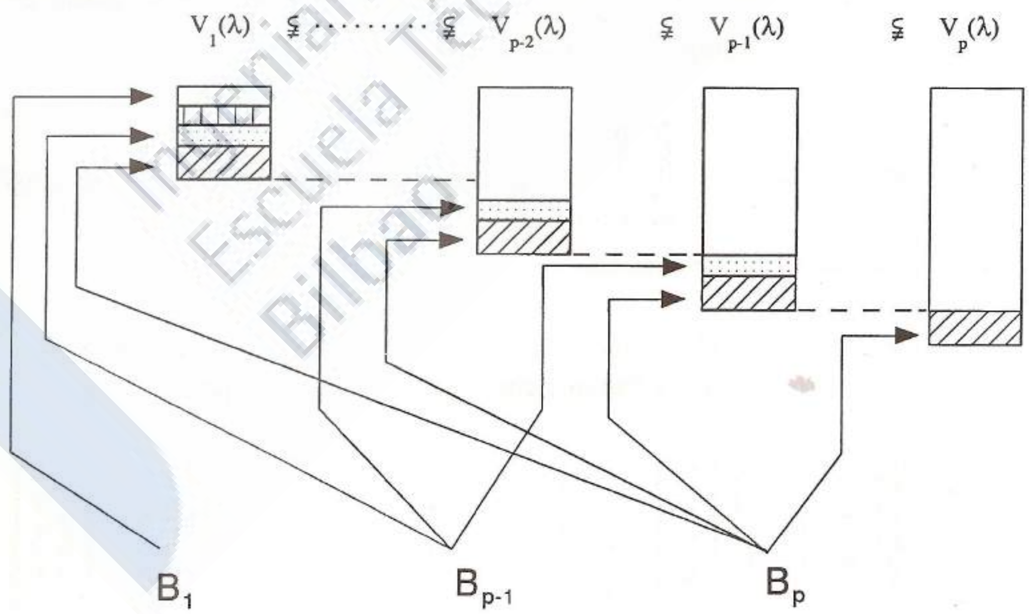
formada por los núcleos de las potencias sucesivas de $(A - \lambda I)$; la cadena anterior se estabiliza después de un cierto número de pasos p (el subespacio $V_p(\lambda)$ se denomina *autoespacio máximo* asociado a λ). El valor de p puede conocerse porque $\dim V_p(\lambda) =$ multiplicidad algebraica de λ.

3) Se toma el mayor número posible de vectores linealmente independientes de $V_p(\lambda) - V_{p\text{-}1}(\lambda)$; sean éstos $F_p = \{\mathbf{u_1} \quad ,..., \quad \mathbf{u_r}\}$.

Las imágenes sucesivas a partir de $(A - \lambda I)$ de cada uno de los vectores de F_p forman una *matriz elemental de Jordan* $J_p(\lambda)$. En el subespacio generado por F_p y las potencias sucesivas mediante $(A - \lambda I)$ de los elementos de F_p, la forma de Jordan de A, respecto a la base

$$B_p(\lambda) = (A - \lambda I)^{p-1}(F_p) \cup \cdots \cup (A - \lambda I)(F_p) \cup F_p,$$

está formada por yuxtaposición de r matrices elementales de Jordan de orden p dispuestas sobre la diagonal principal.



4) A continuación se elige el mayor número posible de vectores de $V_{p-1}(\lambda)-V_{p-2}(\lambda)$ que sean linealmente independientes entre sí y linealmente independientes con la colección $B_p(\lambda)$, sean éstos $F_{p-1}=\{\mathbf{u}_{\mathbf{r+1}}, \quad \cdots, \quad \mathbf{u}_{\mathbf{t}}\}$.

Las imágenes sucesivas de cada uno de estos vectores mediante la matriz $(A-\lambda I)$ nos dan un conjunto de vectores linealmente independientes, $B_{p-1}(\lambda)$, con respecto a los cuales la matriz de f es una yuxtaposición en la diagonal principal de $t-r$ matrices elementales de Jordan de orden $p-1$.

5) Se continúa realizando el procedimiento descrito en 4) hasta llegar a $V_1(\lambda)$, en donde se eligen, si es posible, los vectores necesarios para que junto con todos los vectores anteriormente elegidos se tenga una base $B(\lambda)$ del autoespacio máximo $V_p(\lambda)$.

6) Se repiten los pasos del 2) al 5) con cada uno de los autovalores λ_j; la matriz de Jordan de A es la yuxtaposición de las matrices elementales de Jordan de A . El cambio de base viene dado por todos los vectores anteriormente elegidos.

<u>Ejemplo 4.</u> Obtener la matriz de Jordan de $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, y una matriz P tal que $AP = PJ$.

Solución. A partir de la ecuación característica de A se obtienen los autovalores de A :

$$p_A(\lambda) = |A-\lambda I| = (\lambda-1)^3(\lambda-2)=0$$

de donde los autovalores de A son $\lambda_1=1$ (triple) y $\lambda_2=2$ (simple) .

A continuación se calculan los subespacios propios asociados a cada autovalor:

➢ Para $\underline{\lambda_1 = 1}$ se calcula $V_1(1) = \mathrm{Ker}(A - I)$ que es el subespacio vectorial definido por las ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow V_1(1) = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

En este ejemplo $\dim V_1(1) = 2 < 3 =$ multiplicidad algebraica de $\lambda_1 = 1$. Esto implica que no existe una base de autovectores de A, luego A no es diagonalizable. Entonces vamos a calcular una base de “autovectores generalizados”, en la cual la matriz más sencilla posible semejante a la matriz A sea su forma reducida de Jordan.

A continuación calculamos $V_2(1) = \mathrm{Ker}(A - I)^2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_4 = 0$$

de donde
$$V_2(1) = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Como $(A - I)^3 = (A - I)^2$, entonces $V_2(1)$ es el autoespacio máximo correspondiente a $\lambda_1 = 1$, por tanto se verifica que $V_2(1) \oplus V_1(2) = \mathbb{R}^4$. Se elige

$$\mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_2(1) - V_1(1)$$

y

$$\mathbf{u_2} = (A - I)\mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_1(1)$$

Luego se elige $\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ de modo que pertenezca a $V_1(1)$ y sea linealmente independiente con el vector $\mathbf{u_2}$.

- Finalmente, para $\underline{\lambda_2 = 2}$ se calcula $V_1(2) = \mathrm{Ker}(A - 2I)$, que es el subespacio vectorial definido por las ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} -x_1 + 2x_3 - 6x_4 = 0 \\ -x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_3 + 3x_4 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 3x_4 \end{array} \right.$$

de donde

$$V_1(2) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Si se toma $\mathbf{u_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, se tiene una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$: $B' = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4}\}$.

Luego, la matriz de paso de la base canónica de $\mathbb{R}^4$ a la nueva base B' es :

$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y la forma de Jordan de A es la matriz $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 5. Obtener la matriz de Jordan de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y una matriz P tal que $AP = PJ$.

Solución. A partir de la ecuación característica de A se obtienen los autovalores de A :

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = (\lambda - 1)^4 (\lambda - 2) = 0$$

de donde los autovalores de *A* son $\lambda_1 = 1$ (multiplicidad algebraica=4) y $\lambda_2 = 2$ (simple).

A continuación se calculan los subespacios propios asociados a cada autovalor:

- Para $\underline{\lambda_1 = 1}$ se calcula $V_1(1) = \mathrm{Ker}(A - I)$ que es el subespacio vectorial definido por las ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_3 &= 0 \\ 2x_4 &= 0 \\ x_4 + \ x_5 &= 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$$

$$\Leftrightarrow V_1(1) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

A continuación se calcula $V_2(1) = \mathrm{Ker}(A - I)^2$:

$$(A-I)^2=\begin{pmatrix}0&0&4&6&0\\0&0&0&4&0\\0&0&0&2&2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$ de donde el sistema que resulta al operar es:

$$\left.\begin{aligned}3x_3+6x_4&=0\\x_4&=0\\x_5&=0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow V_2(1)=\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

Luego se calcula $V_3(1)=\mathrm{Ker}(A-I)^3$:

$$(A-I)^3=\begin{pmatrix}0&0&0&14&6\\0&0&0&4&4\\0&0&0&2&2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$ de donde las ecuaciones resultantes son $x_4=x_5=0$.

Luego, $V_3(1)=\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

Ahora se calcula $V_4(1)=\mathrm{Ker}(A-I)^4$:

$$(A-I)^4=\begin{pmatrix}0&0&0&14&14\\0&0&0&4&4\\0&0&0&2&2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$ de donde las ecuaciones son $x_4=-x_5$.

Entonces, $V_4(1)=\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$

Como $V_5(1)=V_4(1)$, ya que $(A-I)^5=(A-I)^4$, entonces $V_4(1)$ es el autoespacio máximo. Se toma :

$$\mathbf{u_4}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\in V_4(1)-V_3(1)\ , \qquad \mathbf{u_3}=(A-I)\mathbf{u_4}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\\0\\0\end{pmatrix}\ ,$$

$$\mathbf{u_2}=(A-I)\mathbf{u_3}=\begin{pmatrix}6\\4\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u_1}=(A-I)\mathbf{u_2}=\begin{pmatrix}8\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

➢ Para $\underline{\lambda_2=2}$ se calcula $V_1(2)=\mathrm{Ker}(A-2I)$ que es el subespacio vectorial definido por las ecuaciones:

$$\begin{pmatrix}-1&2&3&0&0\\0&-1&2&0&0\\0&0&-1&2&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{aligned}-x_1+2x_2+3x_3&=0\\-x_2+2x_3&=0\\-x_3+2x_4&=0\\x_5&=0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow V_1(2)=\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}14\\4\\2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

Por tanto,

$$J=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&2\end{pmatrix} \quad y \quad P=\begin{pmatrix}8&6&0&0&14\\0&4&0&0&4\\0&0&2&0&2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&-1&0\end{pmatrix}.$$

EJERCICIOS TEMA 6

Obtener la forma reducida de Jordan de las siguientes matrices, así como la relación entre A y J (es decir, a través de la matriz de paso P):

1.- $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ 2.- $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 4 & 0\\ -1 & 0 & 3 & 0\\ -1 & 0 & 4 & -1\end{pmatrix}$ 3.- $A=\begin{pmatrix}2 & -2 & -4 & 9\\ 0 & 0 & -4 & -10\\ 0 & 1 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

4.- $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 5.- $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

6.- Siendo f un endomorfismo de $\mathbb{R}^{10}$ con un solo autovalor λ, obtener la forma reducida de f y explicar cómo se puede construir la base en la cual el endomorfismo está así representado, a partir de los siguientes datos de las dimensiones de los núcleos de las sucesivas potencias de $(A-\lambda I)$:

a) $n_1=3, n_2=5, n_3=7, n_4=9$ y $n_5=10$

b) $n_1=3, n_2=6, n_3=9$ y $n_4=10$

c) $n_1=2, n_2=4, n_3=6, n_4=8$ y $n_5=10$

Considerar $n_i=\dim \mathrm{Ker}(A-\lambda I)^i$.

7.- Hallar, en función de α, la matriz más sencilla posible semejante a

$$A=\begin{pmatrix}4 & 6 & -2\\ -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & \alpha\end{pmatrix}$$

8.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$:

a) Discutir en función del parámetro k si la matriz A es diagonalizable.

b) Para el caso en que k=1 hallar la matriz más sencilla posible semejante a A, así como la matriz P de semejanza.

9.- Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^6$, .y su polinomio característico $p_A(x)=(\lambda-x)^6$. Averiguar la forma de Jordan, J, de f y explicar cómo debe buscarse la base en la que tiene dicha forma el endomorfismo, en los siguientes casos:

a) Si $\dim V_1(\lambda) = \dim \operatorname{Ker}(A-\lambda I) = 4$, $\dim V_2(\lambda) = \dim \operatorname{Ker}(A-\lambda I)^2 = 5$, y $\dim V_3(\lambda) = \dim \operatorname{Ker}(A-\lambda I)^3 = 6$.

b) Si $\dim V_1(\lambda) = \dim \operatorname{Ker}(A-\lambda I) = 4$ y $\dim V_2(\lambda) = \dim \operatorname{Ker}(A-\lambda I)^2 = 6$.

10.- Sea $J=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ la forma de Jordan de una matriz A.

a) Obtener los valores propios de A, indicando su multiplicidad algebraica y geométrica.

b) Obtener la dimensión de los subespacios $V_k(\lambda)$, siendo $V_k(\lambda) = \operatorname{Ker}(A-\lambda I)^k$.

11.- Sea f un endomorfismo cuya matriz asociada en una base B es A. Sea

$$J = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$ la matriz de Jordan asociada al mismo endomorfismo en

la base $B^* = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5, \mathbf{u}_6, \mathbf{u}_7\}$.

a) Calcular el valor del determinante de A ¿Es A regular?

b) ¿Es f un endomorfismo biyectivo? Razonar la respuesta.

c) Hallar los valores propios de A. Para cada uno de ellos, indicar:

i) multiplicidad algebraica

ii) multiplicidad geométrica y

iii) $\dim V_k(\lambda) = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I)^k$, $k = 1, 2 \ldots$

iv) ¿Cuántas matrices elementales o bloques elementales de Jordan forman la matriz J? ¿A qué valores propios corresponden?

d) La base B^* está compuesta por siete vectores. ¿Cuáles son vectores propios? ¿A qué valores propios están asociados?

SOLUCIONES EJERCICIOS TEMA 6

1. $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 9 & 0 \\ -2 & 1 & -10 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

5. $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6.a) $$J=\begin{pmatrix}\lambda&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&\lambda&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&\lambda&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&\lambda&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\lambda&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&\lambda&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\lambda&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda\end{pmatrix}$$

6.b) $$J=\begin{pmatrix}\lambda&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&\lambda&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&\lambda&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&\lambda&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\lambda&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\lambda&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&1\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda\end{pmatrix}$$

6.c) $$J=\begin{pmatrix}\lambda&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&\lambda&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&\lambda&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&\lambda&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\lambda&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&\lambda&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\lambda&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&1\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda\end{pmatrix}$$

7.- a) $\alpha\neq 1,2\Rightarrow D=\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ b) $\alpha=1\Rightarrow J=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ c) $\alpha=2\Rightarrow D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

8.-

a) $\begin{array}{l} k \neq 1,3 \Rightarrow \text{A diagonalizable} \\ k = 1 \Rightarrow \text{A no es diagonalizable} \\ k = 3 \Rightarrow \text{A no es diagonalizable} \end{array}$, b) $J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

9.- a) $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Base = $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4}, \mathbf{u_5}, \mathbf{u_6}\}$, donde: $\mathbf{u_2} = (A - \lambda I)\, \mathbf{u_3}$, $\mathbf{u_1} = (A - \lambda I)\, \mathbf{u_2}$ y $\mathbf{u_4}$, $\mathbf{u_5}$ y $\mathbf{u_6}$ son vectores propios linealmente independientes de $\mathbf{u_1}$.

b) $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Base = $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4}, \mathbf{u_5}, \mathbf{u_6}\}$, donde: $\mathbf{u_3} = (A - \lambda I)\, \mathbf{u_4}$, $\mathbf{u_1} = (A - \lambda I)\, \mathbf{u_2}$ y $\mathbf{u_5}$ y $\mathbf{u_6}$ son vectores propios linealmente independientes de $\mathbf{u_1}$ y $\mathbf{u_3}$.

10.- a) $\lambda_1 = 2$, $m_1 = 4$, $\mu_1 = 2$; $\lambda_2 = 5$, $m_2 = 3$, $\mu_2 = 1$.

b) dim $V_1(2)$= 2, dim $V_2(2)$= 3, dim $V_3(2)$= 4.

dim $V_1(5)$= 1, dim $V_2(5)$= 2, dim $V_3(5)$= 3.

11.-

a) $|A| = |J| = 5^5 6^2$. El valor del determinante no es cero, por lo tanto es regular.

b) f es un endomorfismo biyectivo, ya que la matriz asociada a ese endomorfismo es regular. Otra respuesta posible sería: como no hay ningún valor propio igual a cero, la aplicación será biyectiva.

c) i) $\begin{matrix}\lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = 6\end{matrix}$ ii) $\begin{matrix}m_1 = 5 \\ m_2 = 2\end{matrix}$ iii) $\begin{matrix}\mu_1 = \dim V(5) = 2 & \dim V_2(5) = 4 & \dim V_3(5) = 5 \\ \mu_2 = \dim V(6) = 1 & \dim V_2(6) = 2 & \end{matrix}$

iv) La matriz de Jordan está formada por 3 matrices elementales:

$J_3(5)$: matriz elemental de Jordan de orden tres asociada al valor propio 5.

$J_2(5)$: matriz elemental de Jordan de orden dos asociada al valor propio 5.

$J_2(6)$: matriz elemental de Jordan de orden tres asociada al valor propio 6.

d) Los vectores propios son los vectores de subespacios propios, es decir, de $V_1(\lambda)$. Por lo tanto, hay tres vectores propios: dos asociados al valor propio $\lambda_1 = 5$ y uno asociado a $\lambda_2 = 6$. Los vectores propios generan columnas con el valor propio en la diagonal principal y el resto ceros. Por lo tanto los vectores propios son:

$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_4$ asociados a $\lambda_1 = 5$ y $\mathbf{u}_6$ asociado a $\lambda_2 = 6$.

BIBLIOGRAFÍA

1. **ANTON, H.,** *"Introducción al Álgebra Lineal"*. Limusa, México.
2. **BURGOS, DE J.,** "*Álgebra Lineal"*. Mc Graw-Hill.
3. **BRAVO, E., GONZALEZ A. G. Y OTROS,** *"Exámenes resueltos de Álgebra Lineal y Matemáticas I, 1996-2000, Ingeniería Industrial e Ingeniería de Telecomunicación Escuela Superior de Ingenieros de Bilbao"*. Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco.
4. **BRAVO, E., GONZALEZ A. G. Y OTROS,** *"Exámenes resueltos de Álgebra Lineal y Matemáticas I, 2001-2005, Ingeniería Industrial e Ingeniería de Telecomunicación Escuela Superior de Ingenieros de Bilbao"*. Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco.
5. **FLAQUER, J.,** "*Curso de Álgebra Lineal"*. Eunsa.
6. **GROSSMAN, S. I.,** "*Álgebra Lineal"*. 2ª Ed. Grupo Editorial Iberoamericano, México.
7. **HERNÁNDEZ, E.,** *"Álgebra y Geometría"*. Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid.
8. **LANG, S.,** "*Álgebra Lineal"*. Fondo Educativo Interamericano, México.
9. **NOBLE, B. Y DANIEL, J. W. ,** "*Applied Linear Algebra"*. Prentice-Hall.
10. **ROJO, J.,** "*Álgebra Lineal"*. AC, Madrid.
11. **STRANG, G.,** "*Linear Algebra and its Applications"*. HBJ .