

Apuntes: Mecánica de vuelo II.

Apuntes: Mecánica de vuelo II.

Alejandro Roger Ull

Ingeniería Aeronáutica

Primera edición – 14 de febrero de 2012

Acerca de estos apuntes

Estos apuntes se han realizado para cubrir el temario de la asignatura “Mecánica de vuelo II”, que se imparte en el quinto curso de Ingeniería Aeronáutica, en intensificación en Aeronaves, en la Escola Tècnica Superior d’Enginyeries Industrial i Aeronàutica de Terrassa, de la Universitat Politècnica de Catalunya (ETSEIAT – UPC).

Licencia

Esta obra está bajo una licencia Attribution-ShareAlike 3.0 Unported (CC BY-SA 3.0) de Creative Commons. Para ver una copia de esta licencia, visite:

http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.es_ES

En líneas generales:

Es libre de:

- Compartir – Copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra.
- Transformar la obra y crear obras derivadas.
- Hacer un uso comercial de esta obra.

Bajo las condiciones siguientes:

- **Reconocimiento** — Debe reconocer al autor de la obra original (pero no de una manera que sugiera que tiene su apoyo o apoya el uso que hace de su obra).
- **Compartir bajo la Misma Licencia** — Si altera o transforma esta obra, o genera una obra derivada, sólo puede distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.



0 Contenidos

0 Contenidos

1 Introducción

1.1	Sistemas de referencia.....	7
1.2	Ángulos de Euler	8
1.3	Control aerodinámico de la aeronave	10
1.4	Control por empuje de la aeronave.....	10

2 Ecuaciones del movimiento

2.1	Ejes y notación	12
2.2	Ecuaciones cinemáticas de traslación.....	13
2.3	Ecuaciones cinemáticas de rotación.....	13
2.4	Ecuaciones dinámicas	14
2.5	Modelo matemático	15
2.6	Modelo linealizado	15
2.7	Linealización de las ecuaciones	16
2.8	Linealización de las acciones aerodinámicas	18

3 Sistema adimensional

3.1	Variables adimensionales	20
3.2	Derivadas de estabilidad adimensionales.....	20
3.3	Derivadas de control.....	23
3.4	Sistema de ecuaciones linealizado adimensional	24

4 Derivadas de estabilidad

4.1	Movimiento longitudinal	25
4.2	Derivadas de estabilidad longitudinales.....	27
4.3	Derivadas de estabilidad laterales.....	31

5 Estabilidad del movimiento no controlado

5.1	Modos longitudinales	35
5.2	Modos longitudinales – Ejemplo numérico	36
5.3	Modos longitudinales – Aproximación	36
5.4	Modos laterales	38
5.5	Modos laterales – Ejemplo numérico.....	39
5.6	Modos laterales – Aproximación	40
5.7	Resolución general.....	42

6 Respuesta en lazo abierto

6.1	Introducción.....	44
6.2	Movimiento longitudinal	44
6.3	Movimiento lateral	44
6.4	Transformada de Laplace.....	45
6.5	Funciones de transferencia.....	47
6.6	Respuesta a la función escalón.....	47
6.7	Respuesta a la función impulso	47
6.8	Respuesta a una función sinusoidal.....	48
6.9	Respuesta a una función arbitraria.....	48

7 Respuesta en lazo cerrado

7.1	Introducción.....	50
7.2	Estabilidad de sistemas en lazo cerrado.....	51

1 Introducción

1.1 Sistemas de referencia

Los sistemas de referencia consisten en un origen O de la que parten los tres ejes x, y, z . Todas las actuaciones de las aeronaves están siempre referidas a un sistema de referencia concreto. Algunos sistemas de referencia son mejores para representar ciertas actuaciones, mientras que para otros casos es mejor emplear un sistema diferente. Por lo general los sistemas de referencia que se emplean son los siguientes:

- Ejes tierra (E).

Es la referencia inercial a la que se refiere el movimiento global de la aeronave. La tierra se supone plana y no se consideran los gradientes gravitatorios. El origen O_E es un punto de la superficie terrestre. El eje z_E apunta hacia abajo, hacia el centro de la tierra. El eje x_E apunta en una dirección determinada (por ejemplo, hacia el Este). Finalmente, el eje y_E forma una base positiva con x_E, z_E .

- Ejes de horizonte local (H).

Los ejes de horizonte local x_H, y_H, z_H son paralelos a los ejes tierra x_E, y_E, z_E . Su origen O_H coincide con un punto fijo respecto a la aeronave, normalmente el centro de gravedad CG .

- Ejes viento (W).

El origen O_W se sitúa de nuevo en el centro de gravedad CG . El eje x_W está alineado en la dirección de la velocidad aerodinámica. El eje z_W está contenido en el plano de simetría de la aeronave, y es perpendicular a x_W . El eje y_W forma una base positiva con x_W, z_W .

En estos ejes se definen los ángulos de balance μ , cabeceo γ y guiñada χ de la velocidad.

- ♣ El ángulo de balance de la velocidad μ es el ángulo formado por y_W con la intersección del plano y_W, z_W con el plano horizontal x_H, y_H .
- ♣ El ángulo de cabeceo de la velocidad γ es el ángulo formado por x_W con su proyección en el plano horizontal x_H, y_H .
- ♣ El ángulo de guiñada de la velocidad χ es el ángulo formado por la proyección de x_W en el plano horizontal x_H, y_H con x_H .

- Ejes cuerpo (B).

El origen O_B se sitúa de nuevo en el centro de gravedad CG . El eje x_B está contenido en el plano de simetría de la aeronave, apuntando hacia adelante en una dirección fija respecto a la misma aeronave. El eje z_B está contenido en el plano de simetría de la aeronave, apuntando hacia abajo en una dirección fija respecto a la misma aeronave. Finalmente, el eje y_B forma una base positiva con el plano de simetría x_B, z_B .

En estos ejes se definen los momentos de balance L , cabeceo M y guiñada N , y también los ángulos de balance ϕ , cabeceo θ y guiñada ψ de la aeronave.

- ♣ El ángulo de balance de la aeronave ϕ es el ángulo formado por y_B con la intersección del plano y_B, z_B con el plano horizontal x_H, y_H .
 - ♣ El ángulo de cabeceo de la aeronave θ es el ángulo formado por x_B con su proyección en el plano horizontal x_H, y_H .
 - ♣ El ángulo de guiñada de la aeronave ψ es el ángulo formado por la proyección de x_B en el plano horizontal x_H, y_H con x_H .
- Ejes de estabilidad (S).

Son un caso particular de los ejes cuerpo en que el eje x_S es la proyección de la velocidad en el plano de simetría de la aeronave para una condición de vuelo de referencia dada. Se utilizan en problemas de pequeñas perturbaciones.

1.2 Ángulos de Euler

Considérese un vector \vec{a}_S expresado en el sistema de referencia S . Para obtener sus componentes \vec{a}_T en otro sistema de referencia T basta con realizar tres giros.

El primero consiste en girar el sistema de referencia S un ángulo θ_3 alrededor de su eje z_S , con lo que se obtiene el sistema de referencia intermedio 3. Las componentes del vector \vec{a} expresadas en este sistema quedan entonces:

$$\vec{a}_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & \sin \theta_3 & 0 \\ -\sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{a}_S \Rightarrow \vec{a}_3 = [L]_{3S} \cdot \vec{a}_S \quad (1.1)$$

El segundo consiste en girar el sistema de referencia 3 un ángulo θ_2 alrededor de su eje y_3 , con lo que se obtiene el sistema de referencia intermedio 2. Las componentes del vector \vec{a} expresadas en este sistema quedan entonces:

$$\vec{a}_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & 0 & -\sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \vec{a}_3 \Rightarrow \vec{a}_2 = [L]_{23} \cdot \vec{a}_3 \quad (1.2)$$

Finalmente se gira el sistema de referencia intermedio 2 alrededor de su eje x_2 , con lo que se obtiene el sistema de referencia deseado T . Las componentes del vector \vec{a} expresadas en este sistema quedan finalmente:

$$\vec{a}_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ 0 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \vec{a}_2 \Rightarrow \vec{a}_T = [L]_{T2} \cdot \vec{a}_2 \quad (1.3)$$

Las matrices de cambio de base son ortogonales, por lo que sus inversas son idénticas a sus traspuestas, lo que facilita realizar el cambio de base contrario. Las ecuaciones (1.1), (1.2) y (1.3) se pueden combinar obteniendo entonces la matriz de rotación $[L]_{TS}$:

$$\vec{a}_T = [L]_{T2} \cdot [L]_{23} \cdot [L]_{3S} \cdot \vec{a}_S \Rightarrow \vec{a}_T = [L]_{TS} \cdot \vec{a}_S \quad (1.4)$$

$$[L]_{TS} = [L]_{T2} \cdot [L]_{23} \cdot [L]_{3S}$$

Finalmente

$$[L]_{TS} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 \cos \theta_3 & \cos \theta_2 \sin \theta_3 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 - \cos \theta_1 \sin \theta_3 & \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 + \cos \theta_1 \cos \theta_3 & \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 + \sin \theta_1 \sin \theta_3 & \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 - \sin \theta_1 \cos \theta_3 & \cos \theta_1 \cos \theta_2 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Este giro es el que se ilustra en la Figura 1.1.

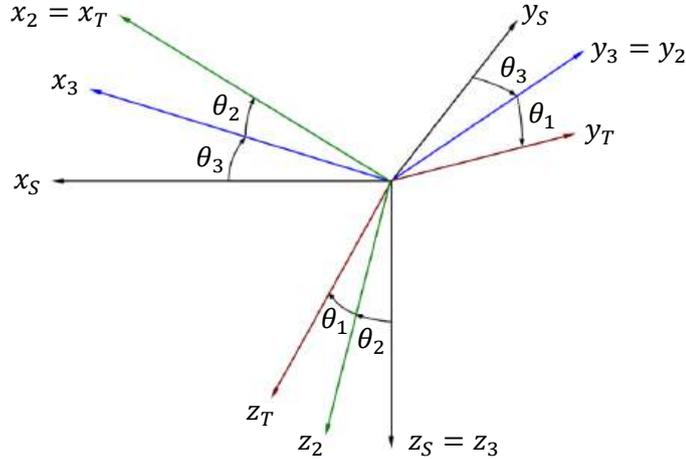


Figura 1.1: Ángulos de Euler y cambio de sistema de referencia.

A los ángulos θ_1 , θ_2 y θ_3 se les denomina ángulos de Euler. Para realizar el cambio de base del sistema de ejes tierra al sistema de ejes viento estos ángulos son respectivamente el ángulo de balance μ , el ángulo de cabeceo γ y el ángulo de guiñada χ de la velocidad que se definieron en el apartado 1.1.

Por lo tanto, para cambiar de ejes tierra a ejes viento la matriz de rotación $[L]_{WE}$ y su inversa, para cambiar de ejes viento a ejes tierra $[L]_{EW}$, son respectivamente:

$$[L]_{WE} = \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \chi & \cos \gamma \sin \chi & -\sin \gamma \\ \sin \mu \sin \gamma \cos \chi - \cos \mu \sin \chi & \sin \mu \sin \gamma \sin \chi + \cos \mu \cos \chi & \sin \mu \cos \gamma \\ \cos \mu \sin \gamma \cos \chi + \sin \mu \sin \chi & \cos \mu \sin \gamma \sin \chi - \sin \mu \cos \chi & \cos \mu \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

$$[L]_{EW} = \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \chi & \sin \mu \sin \gamma \cos \chi - \cos \mu \sin \chi & \cos \mu \sin \gamma \cos \chi + \sin \mu \sin \chi \\ \cos \gamma \sin \chi & \sin \mu \sin \gamma \sin \chi + \cos \mu \cos \chi & \cos \mu \sin \gamma \sin \chi - \sin \mu \cos \chi \\ -\sin \gamma & \sin \mu \cos \gamma & \cos \mu \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Del mismo modo, para realizar el cambio de base del sistema de ejes tierra al sistema de ejes cuerpo los ángulos de Euler θ_1 , θ_2 y θ_3 son respectivamente el ángulo de balance ϕ , el ángulo de cabeceo θ y el ángulo de guiñada ψ de la aeronave que se definieron en el apartado 1.1.

Por lo tanto, para cambiar de ejes tierra a ejes cuerpo la matriz de rotación $[L]_{BE}$, y su inversa para cambiar de ejes cuerpo a ejes tierra $[L]_{EB}$, son respectivamente:

$$[L]_{BE} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

$$[L]_{EB} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \\ -\sin \theta & \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

1.3 Control aerodinámico de la aeronave

El control aerodinámico consiste en producir pequeñas perturbaciones aerodinámicas controladas. Al accionar los mandos se desestabiliza la aeronave y se hace cambiar su actitud. Al cambio de actitud le sigue un cambio de las fuerzas aerodinámicas y de la trayectoria.

El control aerodinámico se ejerce principalmente mediante tres superficies de control.

- Los alerones (*aileron*s) controlan el balance ϕ . Una deflexión de los alerones δ_a positiva (el de la izquierda δ_{al} hacia arriba, el de la derecha δ_{ar} hacia abajo) genera un momento de balance L negativo (la semi-ala izquierda baja, la semi-ala derecha sube). La deflexión de alerones no suele ser completamente asimétrica para reducir el efecto de la guiñada adversa. Por ello se considera $\delta_a = (\delta_{al} + \delta_{ar})/2$.
- El timón de profundidad (*elevator*), controla el cabeceo θ . Una deflexión positiva del timón de profundidad (hacia abajo) supone un momento de cabeceo M negativo (morro hacia abajo).
- El timón de dirección (*rudder*) controla la guiñada ψ . Una deflexión del timón de dirección δ_r positiva (hacia la izquierda) supone un momento de guiñada N negativo (morro hacia la izquierda).

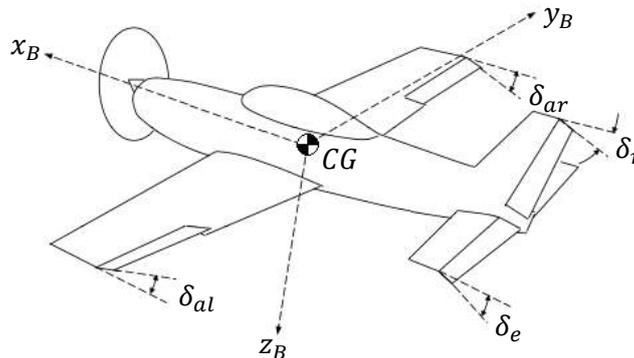


Figura 1.2: Deflexiones positivas de las superficies de control.

1.4 Control por empuje de la aeronave

El control por empuje consiste en producir pequeñas perturbaciones de empuje controladas. Al accionar los mandos se modifican las fuerzas longitudinales, para modificar o mantener una velocidad o altitud determinadas.

La mayoría de las aeronaves dispone de motores que dan empuje en una dirección fija. Para este tipo de aeronaves el único parámetro a considerar es el parámetro de empuje δ_p . Algunas pocas aeronaves (principalmente militares) ofrecen además control vectorial del empuje. Esto se consigue mediante toberas que permiten deflectar los gases de escape. En estos casos hay que considerar dos parámetros adicionales para obtener la dirección \vec{u}_p del empuje, con $|\vec{u}_p| = 1$.

Los tipos de propulsores se dividen principalmente en los siguientes.

- Motor a reacción (*air-breathing engine*).
 - ♣ Turboreactor o turbojet – Diseños anteriores y vuelo supersónico.
 - ♣ Turbofan – Se divide según la relación de derivación (*bypass ratio*).
 - ◆ Baja relación de derivación – Diseños anteriores y superioridad aérea.
 - ◆ Alta relación de derivación – Aviación subsónica alta.
- Motor de hélice.
 - ♣ Turbopropulsor – Aviación subsónica baja.
 - ♣ Motor alternativo – Aeronaves pequeñas y lentas.

Otros tipos de propulsión alternativa son el *ramjet*, el *scramjet*, el motor cohete y el motor eléctrico propulsado por hélice.

2 Ecuaciones del movimiento

2.1 Ejes y notación

El sistema de referencia que se utilizará (a menos que se indique lo contrario) es el de ejes cuerpo B . La velocidad aerodinámica (con respecto al aire) \vec{V} , la velocidad con respecto a tierra \vec{V}_E , y la velocidad del viento \vec{V}_w , expresadas en este sistema, son:

$$\vec{V} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad \vec{V}_E = \begin{Bmatrix} u_E \\ v_E \\ w_E \end{Bmatrix} \quad \vec{V}_w = \begin{Bmatrix} u_w \\ v_w \\ w_w \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

La relación entre ellas viene dada por la ecuación (2.2).

$$\vec{V}_E = \vec{V} + \vec{V}_w \quad (2.2)$$

La aeronave, y por lo tanto el sistema de ejes cuerpo, tendrá por lo general una velocidad angular $\vec{\omega}$ que se expresa en este sistema como:

$$\vec{\omega} = \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

Cualquier derivada temporal de un vector \vec{b} expresado en el sistema de referencia de ejes cuerpo deberá entonces realizarse teniendo en cuenta que se trata de una base móvil.

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \left. \frac{d\vec{b}}{dt} \right|_B + \vec{\omega} \times \vec{b} = \begin{Bmatrix} \dot{b}_x \\ \dot{b}_y \\ \dot{b}_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

Las fuerzas (sin tener en cuenta el peso) y los momentos respecto al centro de gravedad, expresados en ejes cuerpo, son:

$$\vec{F} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \quad \vec{M}_{CG} = \begin{Bmatrix} L \\ M \\ N \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

El tensor de inercia \bar{I}_B se simplifica en parte debido a que se considera que la aeronave es simétrica en el plano x_B, z_B . Esto hace que los productos de inercia I_{xy} e I_{yz} sean nulos.

$$\bar{I}_B = \begin{bmatrix} I_x & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_y & 0 \\ -I_{xz} & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Al momento angular respecto al centro de gravedad \vec{h}_{CG} se le debe sumar el momento de masas giratorias de la aeronave \vec{h}_B^* , tales como hélices, compresores o turbinas.

$$\vec{h}_{CG} = \bar{I}_B \cdot \vec{\omega} + \vec{h}_B^* \quad (2.7)$$

2.2 Ecuaciones cinemáticas de traslación

Considérese la posición de la aeronave (en concreto, de su centro de gravedad CG) con respecto al sistema de referencia de tierra E expresada en este mismo sistema, \vec{r}_E :

$$\vec{r}_E = \begin{pmatrix} x_E \\ y_E \\ z_E \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

La derivada temporal de \vec{r}_E en ejes tierra (no es necesario considerar base móvil) es:

$$\frac{d\vec{r}_E}{dt} = \vec{V}_{EE} = \begin{pmatrix} \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \\ \dot{z}_E \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

El doble subíndice indica que \vec{V}_{EE} es la velocidad respecto a tierra expresada en ejes tierra. Esta velocidad también se puede obtener transformando la velocidad respecto a tierra expresada en ejes cuerpo \vec{V}_E mediante la matriz de transformación $[L]_{EB}$ obtenida en la ecuación (1.9).

$$\vec{V}_{EE} = [L]_{EB} \cdot \vec{V}_E \quad (2.10)$$

En forma vectorial:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \\ \dot{z}_E \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \\ -\sin \theta & \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_E \\ v_E \\ w_E \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Donde la velocidad respecto a tierra \vec{V}_E es la combinación de la velocidad aerodinámica \vec{V} (desconocida a priori) y la velocidad del viento \vec{V}_w :

$$\begin{pmatrix} u_E \\ v_E \\ w_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_w \\ v_w \\ w_w \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

La velocidad del viento suele ser conocida expresada en ejes tierra, \vec{V}_{wE} . Por esto, otra forma de escribir la ecuación (2.10) podría ser:

$$\vec{V}_{EE} = [L]_{EB} \cdot \vec{V} + \vec{V}_{wE} \quad (2.13)$$

2.3 Ecuaciones cinemáticas de rotación

El procedimiento para relacionar las derivadas temporales de los ángulos de Euler ϕ , θ y ψ con las componentes de la velocidad angular ω es algo más complejo. El motivo es que los giros de Euler se han realizado cada uno en una base diferente.

Si se realizan los tres giros que se vieron en el apartado 1.2 para pasar de la base E a la base B , el primer giro es ψ en torno al eje z_E , el segundo es θ en torno al eje y_3 y el tercero es ϕ en torno al eje x_2 . Estos giros pueden escribirse como vectores en las diferentes bases en que se realizan:

$$\vec{\psi}_E = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{Bmatrix} \quad \vec{\theta}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \theta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \vec{\phi}_2 = \begin{Bmatrix} \phi \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

Las derivadas temporales de los ángulos de Euler se escriben entonces fácilmente en estas mismas bases:

$$\dot{\vec{\psi}}_E = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \quad \dot{\vec{\theta}}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \dot{\vec{\phi}}_2 = \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

Para expresar estas variaciones en la base B es necesario aplicar los giros correspondientes:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\psi}}_B &= [L]_{B2} \cdot [L]_{23} \cdot [L]_{3E} \cdot \dot{\vec{\psi}}_E \\ \dot{\vec{\theta}}_B &= [L]_{B2} \cdot [L]_{23} \cdot \dot{\vec{\theta}}_3 \\ \dot{\vec{\phi}}_B &= [L]_{B2} \cdot \dot{\vec{\phi}}_2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Resultando en:

$$\dot{\vec{\psi}}_B = \begin{Bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi \end{Bmatrix} \dot{\psi} \quad \dot{\vec{\theta}}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ \cos \phi \\ -\sin \phi \end{Bmatrix} \dot{\theta} \quad \dot{\vec{\phi}}_B = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \dot{\phi} \quad (2.17)$$

Finalmente puede escribirse $\vec{\omega} = \dot{\vec{\phi}}_B + \dot{\vec{\theta}}_B + \dot{\vec{\psi}}_B$, es decir:

$$\begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \cos \theta \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

La ecuación (2.18) puede invertirse, con lo que se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

2.4 Ecuaciones dinámicas

Las ecuaciones de conservación del momento lineal y de conservación del momento angular respecto al centro de gravedad se pueden escribir:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} \quad \Sigma \vec{M}_{CG} = \frac{d\vec{h}_{CG}}{dt} \quad (2.20)$$

Desarrollando estas ecuaciones, aplicando la formulación de derivada en base móvil de la ecuación (2.4), y realizando las sustituciones pertinentes, se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} X - mg \sin \theta &= m(\dot{u}_E + qw_E - rv_E) \\ Y + mg \cos \theta \sin \phi &= m(\dot{v}_E + ru_E - pw_E) \\ Z + mg \cos \theta \cos \phi &= m(\dot{w}_E + pv_E - qu_E) \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

$$\left. \begin{aligned} L &= I_x \dot{p} - I_{xz} \dot{r} + qr(I_z - I_y) - I_{xz} \cdot pq + qh_z^* - rh_y^* \\ M &= I_y \dot{q} + rp(I_x - I_z) - I_{xz}(p^2 - r^2) + rh_x^* - ph_z^* \\ N &= I_z \dot{r} - I_{xz} \dot{p} + pq(I_y - I_x) + I_{xz} \cdot qr + ph_y^* - qh_x^* \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

2.5 Modelo matemático

El modelo matemático de la aeronave se puede expresar entonces como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{f}(\vec{X}, t) \quad (2.23)$$

Donde \vec{X} es el vector de estado. Es un vector columna cuyas 15 componentes son:

$$\vec{X}^T = \{x_E, y_E, z_E, u, v, w, u_E, v_E, w_E, p, q, r, \psi, \theta, \phi\} \quad (2.24)$$

Y \vec{f} es un vector formado por las 15 ecuaciones descritas anteriormente ordenadas adecuadamente (las ecuaciones (2.11), (2.12), (2.18) ó (2.19), (2.21) y (2.22)), y cuya dependencia explícita del tiempo es a través de los controles de la aeronave y la velocidad del viento, asumiendo que sean funciones del tiempo conocidas.

2.6 Modelo linealizado

El vuelo de una aeronave evoluciona de forma bastante suave durante buena parte del mismo. Esto permite analizar su cinemática y su dinámica en términos de variaciones con respecto a una condición de vuelo estacionario de referencia.

Por lo general, las variables se consideran funciones desconocidas del tiempo. Una variable cualquiera x , o bien una función $f(x)$ que dependa de ella, se pueden escribir de la forma

$$x = x_0 + \Delta x \quad f(x) = f(x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0} \cdot \Delta x \quad (2.25)$$

Donde el subíndice 0 hace referencia al estado estacionario y Δx es la perturbación, que se considera pequeña (de primer orden). Al trabajar con un modelo linealizado, todos los términos de segundo orden o superior se despreciarán.

Se asumen las siguientes hipótesis para definir la condición de vuelo de referencia:

1. Aceleración \vec{V} nula (puesto que es estacionaria).
2. Simétrica, (resbalamiento β nulo).
3. Rectilínea, (velocidad angular $\vec{\omega}$ nula).
4. Alas niveladas (balance ϕ nulo).

Las ecuaciones que definen el movimiento de traslación estacionario quedan entonces:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_E &= u_{0E} \cos \theta_0 \cos \psi_0 \\ \dot{y}_E &= u_{0E} \cos \theta_0 \sin \psi_0 \\ \dot{z}_E &= -u_{0E} \sin \theta_0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} u_{0E} &= u_0 + u_{w0} \\ v_{0E} &= v_0 + v_{w0} \\ w_{0E} &= w_0 + w_{w0} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Y la conservación del momento lineal queda en:

$$\left. \begin{aligned} X_0 - mg \sin \theta_0 &= 0 \\ Y_0 &= 0 \\ Z_0 + mg \cos \theta_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

Las ecuaciones referentes al movimiento de rotación estacionario, y la conservación del momento angular resultan en identidades automáticamente.

2.7 Linealización de las ecuaciones

Se toma como ejemplo la primera ecuación de la conservación del momento lineal, pero el proceso de linealización se extiende de forma idéntica al resto de ecuaciones del sistema.

$$X - mg \sin \theta = m(\dot{u}_E + qw_E - rv_E) \quad (2.28)$$

El proceso de linealización consiste en expandir cada variable según la ecuación (2.25):

$$\begin{aligned} X &= X_0 + \Delta X \\ \sin \theta &= \sin \theta_0 + \cos \theta_0 \cdot \Delta \theta \\ \dot{u}_E &= \dot{u}_{E0} + \Delta \dot{u}_E = 0 + \Delta \dot{u}_E \\ qw_E &= (q_0 + \Delta q)(w_{E0} + \Delta w_E) = \Delta q \Delta w_E \approx 0 \\ rv_E &= (r_0 + \Delta r)(v_{E0} + \Delta v_E) = \Delta r \Delta v_E \approx 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Como ya se indicó, se omiten los términos de segundo orden. Sustituyendo en la ecuación (2.28) se obtiene:

$$(X_0 + \Delta X) - mg(\sin \theta_0 + \cos \theta_0 \cdot \Delta \theta) = m \cdot \Delta \dot{u}_E \quad (2.30)$$

A esta ecuación se le puede restar la primera expresión de la ecuación (2.27) para la condición estacionaria, quedando:

$$\Delta X - mg \cdot \cos \theta_0 \cdot \Delta \theta = m \cdot \Delta \dot{u}_E \quad (2.31)$$

Procediendo de forma idéntica con las demás ecuaciones cinemáticas y dinámicas se obtiene el sistema linealizado. Para las variables cuyo valor de referencia sea nulo se omite el prefijo Δ de la perturbación.

Ecuaciones cinemáticas de traslación:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{x}_E &= -u_{E0} \sin \theta_0 \cdot \Delta \theta + \cos \theta_0 \cdot \Delta u_E + w_E \sin \theta_0 \\ \Delta \dot{y}_E &= u_{E0} \cos \theta_0 \cdot \Delta \psi + v_E \\ \Delta \dot{z}_E &= -u_{E0} \cos \theta_0 \cdot \Delta \theta - \sin \theta_0 \cdot \Delta u_E + w_E \cos \theta_0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \Delta u_E &= \Delta u + \Delta u_w \\ \Delta v_E &= \Delta v + \Delta v_w \\ \Delta w_E &= \Delta w + \Delta w_w \end{aligned} \quad (2.32)$$

Ecuaciones cinemáticas de rotación:

$$\left. \begin{aligned} p &= \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta_0 \\ q &= \Delta \dot{\theta} \\ r &= \dot{\psi} \cos \theta_0 \end{aligned} \right\} \text{ o bien } \left. \begin{aligned} \dot{\phi} &= p + r \tan \theta_0 \\ \Delta \dot{\theta} &= q \\ \dot{\psi} &= r / \cos \theta_0 \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

Ecuaciones de conservación del momento lineal:

$$\left. \begin{aligned} \Delta X - mg \cdot \cos \theta_0 \cdot \Delta \theta &= m \Delta \dot{u}_E \\ \Delta Y + mg \cdot \cos \theta_0 \cdot \phi &= m(\dot{v}_E + u_{E0} r) \\ \Delta Z - mg \cdot \sin \theta_0 \cdot \Delta \theta &= m(\dot{w}_E - u_{E0} q) \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

Ecuaciones de conservación del momento angular:

$$\left. \begin{aligned} \Delta L &= I_x \dot{p} - I_{xz} \dot{r} + q h_z^* - r h_y^* \\ \Delta M &= I_y \dot{q} + r h_x^* - p h_z^* \\ \Delta N &= I_z \dot{r} - I_{xz} \dot{p} + p h_y^* - q h_x^* \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

Las ecuaciones (2.32), (2.33), (2.34) y (2.35) se pueden simplificar si se asumen dos hipótesis adicionales:

5. Velocidad del viento \vec{V}_w nula.
6. Momento angular de masas giratorias en la aeronave \vec{h}^* nulo.

Las ecuaciones cinemáticas de traslación quedan:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{x}_E &= -u_0 \sin \theta_0 \cdot \Delta \theta + \cos \theta_0 \cdot \Delta u + w \sin \theta_0 \\ \Delta \dot{y}_E &= u_0 \cos \theta_0 \cdot \psi + v \\ \Delta \dot{z}_E &= -u_0 \cos \theta_0 \cdot \Delta \theta - \sin \theta_0 \cdot \Delta u + w \cos \theta_0 \end{aligned} \right\} \quad (2.36)$$

Las ecuaciones cinemáticas de rotación no se ven modificadas:

$$\left. \begin{aligned} p &= \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta_0 \\ q &= \Delta \dot{\theta} \\ r &= \dot{\psi} \cos \theta_0 \end{aligned} \right\} \text{ o bien } \left. \begin{aligned} \dot{\phi} &= p + r \tan \theta_0 \\ \Delta \dot{\theta} &= q \\ \dot{\psi} &= r / \cos \theta_0 \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

Las ecuaciones dinámicas de conservación del momento lineal (2.38) y angular (2.39) quedan:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{u} &= \frac{\Delta X}{m} - g \cos \theta_0 \cdot \Delta \theta \\ \dot{v} &= \frac{\Delta Y}{m} + g \cos \theta_0 \cdot \phi - u_0 r \\ \dot{w} &= \frac{\Delta Z}{m} + g \sin \theta_0 \cdot \Delta \theta + u_0 q \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{p} &= \frac{I_z \Delta L + I_{xz} \Delta N}{I_x I_z - I_{xz}^2} \\ \dot{q} &= \Delta M / I_y \\ \dot{r} &= \frac{I_x \Delta N + I_{xz} \Delta L}{I_x I_z - I_{xz}^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

Bajo estas consideraciones, el sistema linealizado de ecuaciones se puede escribir:

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = [A]\vec{X} + [B]\vec{\delta} \quad (2.40)$$

Donde \vec{X} es el vector de estado, que ahora es un vector columna de 12 componentes:

$$\vec{X}^T = \{\Delta x_E, \Delta y_E, \Delta z_E, \Delta u, v, w, p, q, r, \psi, \theta, \phi\} \quad (2.41)$$

Y $\vec{\delta}$ es el vector de control, definido por los 4 parámetros de control:

$$\vec{\delta}^T = \{\delta_e, \delta_a, \delta_r, \delta_p\} \quad (2.42)$$

2.8 Linealización de las acciones aerodinámicas

De forma general, una carga aerodinámica cualquiera se puede escribir como:

$$L = L_0 + \Delta L \quad (2.43)$$

Asumiendo un comportamiento lineal, la perturbación ΔL dependerá de las variables de estado y sus derivadas temporales de la forma:

$$\Delta L = \left. \frac{\partial L}{\partial u} \right|_0 \Delta u + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right|_0 \Delta \dot{u} + \left. \frac{\partial L}{\partial \ddot{u}} \right|_0 \Delta \ddot{u} + \dots + \left. \frac{\partial L}{\partial w} \right|_0 \Delta w + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{w}} \right|_0 \Delta \dot{w} + \dots \quad (2.44)$$

Los términos $\partial L / \partial u|_0$, $\partial L / \partial \dot{u}|_0$, etc., son las llamadas derivadas de estabilidad. Para abreviar, las derivadas de estabilidad se escribirán como:

$$\left. \frac{\partial X}{\partial u} \right|_0 = X_u \quad (2.45)$$

Debido a la simetría del movimiento de referencia, es sencillo comprobar que las derivadas de estabilidad de fuerzas y momentos asimétricos con respecto a las variables del movimiento simétricas sean nulas. Por ejemplo $Y_u = 0$.

En el lado opuesto, no está tan claro que las derivadas de estabilidad de fuerzas y momentos simétricos con respecto a las variables del movimiento asimétricas sean nulas también. Sin embargo, en lo que al curso respecta y para simplificar, se asumirá así. Por ejemplo $X_v = 0$.

Se asumirán también las siguientes hipótesis:

1. Las derivadas con respecto al ratio de cambio de las variables de movimiento se considerarán nulas, salvo $Z_{\dot{w}}$ y $M_{\dot{w}}$.
2. La derivada X_q también se considerará nula.
3. La densidad de la atmósfera se asume constante en el rango de altitudes considerado.

Entonces las fuerzas se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} \Delta X &= X_u \Delta u + X_w w + \Delta X_c & \Delta L &= L_v v + L_p p + L_r r + \Delta L_c \\ \Delta Y &= Y_v v + Y_p p + Y_r r + \Delta Y_c & \Delta M &= M_u \Delta u + M_w w + M_{\dot{w}} \dot{w} + M_q q + \Delta M_c \\ \Delta Z &= Z_u \Delta u + Z_w w + Z_{\dot{w}} \dot{w} + Z_q q + \Delta Z_c & \Delta N &= N_v v + N_p p + N_r r + \Delta N_c \end{aligned} \quad (2.46)$$

El subíndice c hace referencia a las variables de control, por ejemplo:

$$\Delta X_c = X_{\delta_e} \delta_e + X_{\delta_a} \delta_a + X_{\delta_p} \delta_p \quad (2.47)$$

Sustituyendo en el sistema linealizado se llega a la conclusión de que el movimiento de la aeronave se puede separar en simétrico o longitudinal, y asimétrico o lateral.

Sistema longitudinal (2.48)

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta \dot{u}}{m} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \Delta \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_u}{m} & \frac{X_w}{m} & 0 & 0 \\ \frac{Z_u}{m-Z_{\dot{w}}} & \frac{Z_w}{m-Z_{\dot{w}}} & \frac{Z_q + mu_0}{m-Z_{\dot{w}}} & 0 \\ \frac{1}{I_y} \left[M_u + \frac{M_w Z_u}{m-Z_{\dot{w}}} \right] & \frac{1}{I_y} \left[M_w + \frac{M_w Z_w}{m-Z_{\dot{w}}} \right] & \frac{1}{I_y} \left[M_q + \frac{M_w (Z_q + mu_0)}{m-Z_{\dot{w}}} \right] & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta u \\ w \\ q \\ \Delta \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\Delta X_c}{m} \\ \frac{\Delta Z_c}{m-Z_{\dot{w}}} \\ \frac{\Delta M_c}{I_y} + \frac{M_w \Delta Z_c}{I_y m-Z_{\dot{w}}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta \dot{z}_E = -\Delta u \sin \theta_0 + w \cos \theta_0 - u_0 \Delta \theta \cos \theta_0$$

$$\Delta \dot{x}_E = \Delta u \cos \theta_0 + w \sin \theta_0 - u_0 \Delta \theta \sin \theta_0$$

Sistema lateral (2.49)

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Y_v}{m} & \frac{Y_p}{m} & \frac{Y_r - u_0}{m} & g \cos \theta_0 \\ \frac{L_v}{I_x} + I_{xz} N_v & \frac{L_p}{I_x} + I_{xz} N_p & \frac{L_r}{I_x} + I_{xz} N_r & 0 \\ \frac{N_v}{I_z} + I_{xz} L_v & \frac{N_p}{I_z} + I_{xz} L_p & \frac{N_r}{I_z} + I_{xz} L_r & 0 \\ 0 & 1 & \tan \theta_0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v \\ p \\ r \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\Delta Y_c}{m} \\ \frac{\Delta L_c}{I_x} + I_{xz} \Delta N_c \\ \frac{\Delta N_c}{I_z} + I_{xz} \Delta L_c \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta \dot{y}_E = -u_0 \psi \cos \theta_0 + v$$

$$\psi = \frac{r}{\cos \theta_0}$$

$$(2.48)$$

$$(2.49)$$

3 Sistema adimensional

3.1 Variables adimensionales

La adimensionalización consiste en agrupar ciertas cantidades de forma que las dimensiones del grupo sean nulas. Esto permite realizar estudios más generales y con menos parámetros que si se trabaja con las variables originales.

En este curso se emplearán los siguientes grupos adimensionales:

Cantidad Dimensional	Divisor (Caso General)	Divisor (Caso Perturbación)	Grupo Adimensional
X, Y, Z, mg	$1/2 \cdot \rho V^2 S$	$1/2 \cdot \rho V^2 S$	c_x, c_y, c_z, c_w
M	$1/2 \cdot \rho V^2 S \bar{c}$	$1/2 \cdot \rho V^2 S \bar{c}$	c_m
L, N	$1/2 \cdot \rho V^2 S b$	$1/2 \cdot \rho V^2 S b$	c_l, c_n
u, v, w	V	u_0	$\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$
$\dot{\alpha}, q$	$2V/\bar{c}$	$2u_0/\bar{c}$	$\hat{\alpha}, \hat{q}$
$\dot{\beta}, p, r$	$2V/b$	$2u_0/b$	$\hat{\beta}, \hat{p}, \hat{r}$
m	$\rho S \cdot \bar{c}/2$	$\rho S \cdot \bar{c}/2$	μ
I_y	$\rho S \cdot (\bar{c}/2)^3$	$\rho S \cdot (\bar{c}/2)^3$	\hat{I}_y
I_x, I_z, I_{xz}	$\rho S \cdot (b/2)^3$	$\rho S \cdot (b/2)^3$	$\hat{I}_x, \hat{I}_z, \hat{I}_{xz}$

Tabla 3.1: Adimensionalización de variables.

3.2 Derivadas de estabilidad adimensionales

Las derivadas de estabilidad adimensionales también se escribirán de forma abreviada, siguiendo el convenio establecido para las derivadas de estabilidad dimensionales que se adoptó en la ecuación (2.45), es decir:

$$\left. \frac{\partial c_x}{\partial \hat{u}} \right|_0 = c_{xu} \quad (3.1)$$

Las derivadas de estabilidad de interés se separan también según si pertenecen al movimiento longitudinal o lateral:

	Derivadas longitudinales			Derivadas laterales			
	X	Z	M	Y	L	N	
\hat{u}	c_{xu}	c_{zu}	c_{mu}	c_{yp}	c_{lp}	c_{np}	\hat{p}
\hat{q}	c_{xq}	c_{zq}	c_{mq}	c_{yr}	c_{lr}	c_{nr}	\hat{r}
α	$c_{x\alpha}$	$c_{z\alpha}$	$c_{m\alpha}$	$c_{y\beta}$	$c_{l\beta}$	$c_{n\beta}$	β
$\hat{\alpha}$	$c_{x\hat{\alpha}}$	$c_{z\hat{\alpha}}$	$c_{m\hat{\alpha}}$	$c_{y\hat{\beta}}$	$c_{l\hat{\beta}}$	$c_{n\hat{\beta}}$	$\hat{\beta}$

Tabla 3.2: Derivadas de estabilidad adimensionales.

Las derivadas dimensionales se pueden obtener a partir de las adimensionales. Se ilustra el procedimiento encontrando las derivadas de Z . Las demás derivadas se pueden obtener de forma muy similar. El punto de partida es la definición de c_z .

$$Z = \frac{1}{2} \rho V^2 S c_z \quad (3.2)$$

- Obtención de Z_u :

La derivada Z_u se puede encontrar aplicando la regla de derivación del producto:

$$Z_u = \frac{1}{2} \rho S \cdot \left[\frac{\partial V^2}{\partial u} c_z + V^2 \frac{\partial c_z}{\partial u} \right]_0 \quad (3.3)$$

Para la velocidad debe tenerse en cuenta que:

$$V^2 = u^2 + v^2 + w^2 \Rightarrow \begin{cases} V_0^2 = u_0^2 \\ \left[\frac{\partial V^2}{\partial u} \right]_0 = 2u_0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Y para el coeficiente c_z :

$$\left[\frac{\partial c_z}{\partial u} \right]_0 = \frac{\partial c_z}{\partial \hat{u}} \frac{\partial \hat{u}}{\partial u} \Big|_0 = c_{zu} \cdot \frac{1}{u_0} \quad (3.5)$$

Sustituyendo los resultados de (3.4) y (3.5) en la ecuación (3.3) se obtiene:

$$Z_u = \frac{1}{2} \rho S (2u_0 c_{z0} + u_0 c_{zu}) \quad (3.6)$$

De la condición de vuelo de referencia se conoce:

$$Z_0 = -mg \cos \theta_0 \Rightarrow c_{z0} = -c_{w0} \cos \theta_0 \quad (3.7)$$

Finalmente:

$$Z_u = -\rho S u_0 c_{w0} \cos \theta_0 + \frac{1}{2} \rho S u_0 c_{zu} \quad (3.8)$$

- Obtención de Z_w :

En este caso es necesario encontrar Z_w :

$$Z_w = \frac{1}{2} \rho S \cdot \left[\frac{\partial V^2}{\partial w} c_z + V^2 \frac{\partial c_z}{\partial w} \right]_0 = \frac{1}{2} \rho S u_0^2 \cdot \left[\frac{\partial c_z}{\partial w} \right]_0 \quad (3.9)$$

Definiendo la perturbación en ángulo de ataque α (que ya es adimensional) como:

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{w}{u} = \frac{w}{u_0 + \Delta u} \approx \frac{w}{u_0} \quad (3.10)$$

Entonces se puede encontrar que:

$$\left. \frac{\partial c_z}{\partial w} \right|_0 = \left. \frac{\partial c_z}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial w} \right|_0 = c_{z\alpha} \cdot \frac{1}{u_0} \quad (3.11)$$

Y por lo tanto, sustituyendo en la ecuación (3.9) se obtiene:

$$Z_w = \frac{1}{2} \rho S u_0 c_{z\alpha} \quad (3.12)$$

- Obtención de Z_q :

Teniendo en cuenta que:

$$\hat{q} = \frac{q\bar{c}}{2u_0} \Rightarrow \left. \frac{\partial c_z}{\partial q} \right|_0 = \left. \frac{\partial c_z}{\partial \hat{q}} \frac{\partial \hat{q}}{\partial q} \right|_0 = c_{z\hat{q}} \cdot \frac{\bar{c}}{2u_0} \quad (3.13)$$

Es fácil encontrar Z_q :

$$Z_q = \frac{1}{2} \rho S \cdot \left| \frac{\partial V^2}{\partial q} c_z + V^2 \frac{\partial c_z}{\partial q} \right|_0 = \frac{1}{2} \rho S u_0^2 \cdot \left. \frac{\partial c_z}{\partial q} \right|_0 = \frac{1}{4} \rho S \bar{c} u_0 c_{zq} \quad (3.14)$$

- Obtención de $Z_{\dot{w}}$:

Teniendo en cuenta que:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{w} \approx \dot{\alpha} u_0 \\ \hat{\alpha} = \frac{\dot{\alpha} \bar{c}}{2u_0} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \frac{\partial c_z}{\partial \dot{w}} \right|_0 = \left. \frac{\partial c_z}{\partial \hat{\alpha}} \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial \dot{\alpha}} \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \dot{w}} \right|_0 = c_{z\hat{\alpha}} \cdot \frac{\bar{c}}{2u_0} \cdot \frac{1}{u_0} \quad (3.15)$$

Es fácil encontrar $Z_{\dot{w}}$:

$$Z_{\dot{w}} = \frac{1}{2} \rho S \cdot \left| \frac{\partial V^2}{\partial \dot{w}} c_z + V^2 \frac{\partial c_z}{\partial \dot{w}} \right|_0 = \frac{1}{2} \rho S u_0^2 \cdot \left. \frac{\partial c_z}{\partial \dot{w}} \right|_0 = \frac{1}{4} \rho S \bar{c} c_{z\dot{\alpha}} \quad (3.16)$$

Realizando este procedimiento con todas las demás derivadas de estabilidad longitudinales se obtienen las relaciones siguientes:

	X	Z	M
u	$\rho S u_0 c_{w0} \sin \theta_0 + \frac{1}{2} \rho S u_0 c_{xu}$	$-\rho S u_0 c_{w0} \cos \theta_0 + \frac{1}{2} \rho S u_0 c_{zu}$	$\frac{1}{2} \rho S \bar{c} u_0 c_{mu}$
w	$\frac{1}{2} \rho S u_0 c_{x\alpha}$	$\frac{1}{2} \rho S u_0 c_{z\alpha}$	$\frac{1}{2} \rho S \bar{c} u_0 c_{m\alpha}$
q	$\frac{1}{4} \rho S \bar{c} u_0 c_{xq}$	$\frac{1}{4} \rho S \bar{c} u_0 c_{zq}$	$\frac{1}{4} \rho S \bar{c}^2 u_0 c_{mq}$
\dot{w}	$\frac{1}{4} \rho S \bar{c} c_{x\dot{\alpha}}$	$\frac{1}{4} \rho S \bar{c} c_{z\dot{\alpha}}$	$\frac{1}{4} \rho S \bar{c}^2 c_{m\dot{\alpha}}$

Tabla 3.3: Derivadas de estabilidad longitudinales.

Y de forma similar se pueden obtener las relaciones para las derivadas laterales:

	Y	L	N
v	$\frac{1}{2}\rho S u_0 c_{y\beta}$	$\frac{1}{2}\rho S b u_0 c_{l\beta}$	$\frac{1}{2}\rho S b u_0 c_{n\beta}$
p	$\frac{1}{4}\rho S b u_0 c_{yp}$	$\frac{1}{4}\rho S b^2 u_0 c_{lp}$	$\frac{1}{4}\rho S b^2 u_0 c_{np}$
r	$\frac{1}{4}\rho S b u_0 c_{yr}$	$\frac{1}{4}\rho S b^2 u_0 c_{lr}$	$\frac{1}{4}\rho S b^2 u_0 c_{nr}$

Tabla 3.4: Derivadas de estabilidad laterales.

3.3 Derivadas de control

La dependencia de las fuerzas y momentos con los parámetros de control como la que se muestra en la ecuación (2.47) puede escribirse también en función de parámetros y derivadas de control adimensionales. Nótese que los parámetros que representan una deflexión, es decir, un ángulo, no se adimensionalizan, ya que un ángulo carece de dimensiones.

- Derivadas de control longitudinales:

$$\begin{aligned}\Delta X_c &= X_{\delta p} \delta_p = \frac{1}{2} \rho u_0^2 S c_{x\delta p} \delta_p \\ \Delta Z_c &= Z_{\delta e} \delta_e = \frac{1}{2} \rho u_0^2 S c_{z\delta e} \delta_e \\ \Delta M_c &= M_{\delta e} \delta_e + M_{\dot{\delta e}} \dot{\delta}_e + M_{\delta p} \delta_p = \frac{1}{2} \rho u_0^2 S \bar{c} \left(c_{m\delta e} \delta_e + c_{m\dot{\delta e}} \hat{\delta}_e + c_{m\delta p} \delta_p \right)\end{aligned}\quad (3.17)$$

Donde $\dot{\delta}_e$ es el único parámetro que es necesario adimensionalizar:

$$\hat{\delta}_e = \dot{\delta}_e \frac{\bar{c}}{2u_0} \quad (3.18)$$

Nótese que en el caso de que el empuje esté alineado con el centro de gravedad, entonces $M_{\delta p} = c_{m\delta p} = 0$. También cabe resaltar que sólo es necesario contar con la velocidad de deflexión del timón de profundidad $\dot{\delta}_e$ en el momento de cabeceo M , mientras que la velocidad de cambio en el empuje $\dot{\delta}_p$ es completamente despreciable.

- Derivadas de control laterales:

$$\begin{aligned}\Delta Y_c &= Y_{\delta r} \delta_r = \frac{1}{2} \rho u_0^2 S c_{y\delta r} \delta_r \\ \Delta L_c &= L_{\delta a} \delta_a + L_{\dot{\delta a}} \dot{\delta}_a + L_{\delta r} \delta_r = \frac{1}{2} \rho u_0^2 S b \left(c_{l\delta a} \delta_a + c_{l\dot{\delta a}} \hat{\delta}_a + c_{l\delta r} \delta_r \right) \\ \Delta N_c &= N_{\delta a} \delta_a + N_{\delta r} \delta_r + N_{\dot{\delta r}} \dot{\delta}_r = \frac{1}{2} \rho u_0^2 S b \left(c_{n\delta a} \delta_a + c_{n\delta r} \delta_r + c_{n\dot{\delta r}} \hat{\delta}_r \right)\end{aligned}\quad (3.19)$$

Donde $\dot{\delta}_a$ y $\dot{\delta}_r$ se adimensionalizan como:

$$\hat{\delta}_a = \dot{\delta}_a \frac{b}{2u_0} \quad \hat{\delta}_r = \dot{\delta}_r \frac{b}{2u_0} \quad (3.20)$$

3.4 Sistema de ecuaciones linealizado adimensional

Recuérdese el sistema linealizado de ecuaciones diferenciales que se obtuvo en el apartado 2.8, representado por las ecuaciones (2.48) y (2.49). Si se introducen en el sistema las expresiones para las derivadas de estabilidad dimensionales, en términos de las adimensionales (Tabla 3.3 y Tabla 3.4), y también se introducen las expresiones para las derivadas de control (ecuaciones (3.17) y (3.19)), se obtiene un sistema adimensional.

En el caso del movimiento longitudinal el sistema linealizado adimensional queda:

$$\begin{aligned}
 (2\mu_s D_s - 2c_{L0} \tan \theta_0 - c_{xu}) \Delta \hat{u} - c_{x\alpha} \cdot \alpha + c_{L0} \cdot \Delta \theta &= c_{x\delta p} \delta_p \\
 (2c_{L0} - c_{zu}) \Delta \hat{u} + [(2\mu_s - c_{z\dot{\alpha}}) D_s - c_{z\alpha}] \alpha - [(2\mu_s + c_{zq}) D_s - c_{L0} \tan \theta_0] \Delta \theta &= c_{z\delta e} \delta_e \\
 -c_{mu} \cdot \Delta \hat{u} - (c_{m\dot{\alpha}} D_s + c_{m\alpha}) \alpha + (\hat{I}_y D_s - c_{mq}) \hat{q} &= (c_{m\delta e} D_s + c_{m\delta e}) \delta_e + c_{m\delta p} \delta_p \\
 D_s \cdot \Delta \theta &= \hat{q}
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Donde μ_s es la masa adimensional, D_s es el operador de derivada temporal adimensional, y los parámetros de control son funciones del tiempo adimensional \hat{t}_s , para el caso del movimiento longitudinal, o simétrico, s .

$$\mu_s = \frac{2m}{\rho S \bar{c}} \quad D_s = \frac{\bar{c}}{2u_0} \frac{d}{dt} \quad \hat{t}_s = \frac{2u_0}{\bar{c}} t \tag{3.22}$$

En el caso del movimiento lateral el sistema linealizado adimensional queda:

$$\begin{aligned}
 (2\mu_a D_a - c_{y\beta}) \beta - c_{yp} \cdot \hat{p} + (2\mu_a - c_{yr}) \hat{r} - c_{y0} \cdot \phi &= c_{y\delta r} \delta_r \\
 -c_{l\beta} \cdot \beta + (\hat{I}_x D_a - c_{lp}) \hat{p} - (\hat{I}_{xz} D_a + c_{lr}) \hat{r} &= (c_{l\delta a} D_a + c_{l\delta a}) \delta_a + c_{l\delta r} \delta_r \\
 -c_{n\beta} \cdot \beta - (\hat{I}_{xz} D_a + c_{np}) \hat{p} + (\hat{I}_z D_a - c_{nr}) \hat{r} &= c_{n\delta a} \delta_a + (c_{n\delta r} D_a + c_{n\delta r}) \delta_r \\
 D_a \phi &= \hat{p} + \hat{r} \tan \theta_0 \\
 D_a \psi &= \hat{r} / \cos \theta_0
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Donde μ_a es la masa adimensional, D_a es el operador de derivada temporal adimensional, y los parámetros de control son funciones del tiempo adimensional \hat{t}_a , para el caso del movimiento lateral, o asimétrico, a .

$$\mu_a = \frac{2m}{\rho S b} \quad D_a = \frac{b}{2u_0} \frac{d}{dt} \quad \hat{t}_a = \frac{2u_0}{b} t \tag{3.24}$$

4 Derivadas de estabilidad

4.1 Movimiento longitudinal

Para realizar el estudio de las derivadas de estabilidad se utilizará el sistema de ejes de estabilidad S . Recordando del apartado 1.1, se trata de un caso especial de los ejes cuerpo, en que el eje x_S apunta en la dirección de la proyección de la velocidad en el plano de simetría de la aeronave para la condición de vuelo estacionario de referencia.

Las fuerzas que actúan sobre la aeronave se descomponen, como es habitual, en sustentación L (perpendicular a la velocidad V), resistencia aerodinámica D (paralela a la velocidad V), empuje T y peso W , tal y como se muestra en la Figura 4.1.

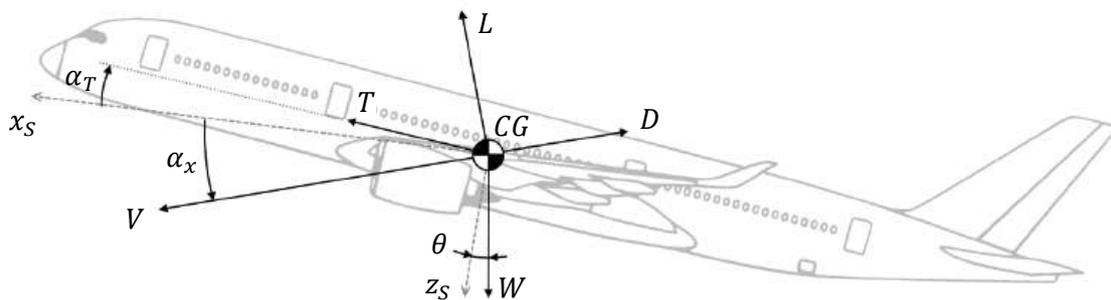


Figura 4.1: Descomposición de fuerzas.

En estos ejes la descomposición de fuerzas resulta en:

$$\begin{aligned} X &= T \cos \alpha_T - D \cos \alpha_x + L \sin \alpha_x \\ Z &= -T \sin \alpha_T - L \cos \alpha_x - D \sin \alpha_x \end{aligned} \quad (4.1)$$

Dividiendo estas ecuaciones por el término $\rho V^2 S/2$, y asumiendo ángulos α_T y α_x pequeños, se obtiene su forma adimensional:

$$\begin{aligned} c_x &= c_T - c_D + c_L \alpha_x \\ c_z &= -c_T \alpha_T - c_L - c_D \alpha_x \end{aligned} \quad (4.2)$$

El ángulo de empuje α_T no se ve afectado por la perturbación, y si se considera muy pequeño entonces el término $c_T \alpha_T$ se puede despreciar. Para calcular el momento de cabeceo M es necesario contar con los puntos de aplicación de las fuerzas. La Figura 4.2 representa las cuerdas medias del ala y la cola, y sus centros aerodinámicos AC .

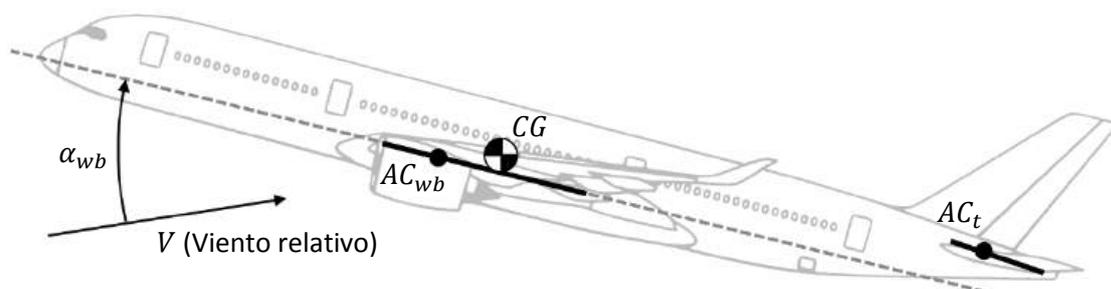


Figura 4.2: Aerodinámica longitudinal simplificada.

La distancia entre diferentes elementos de interés en la Figura 4.2 se detallan en la Figura 4.3.

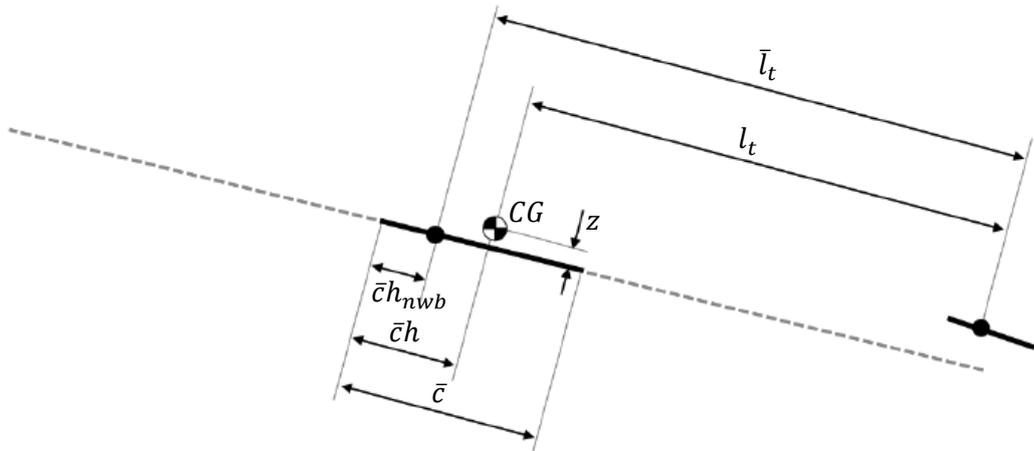


Figura 4.3: Distancia entre elementos de la aeronave.

Hay que tener en cuenta que la velocidad que percibe la cola se ve afectada en su dirección debido a la estela del ala un ángulo ε , como muestra la Figura 4.4.

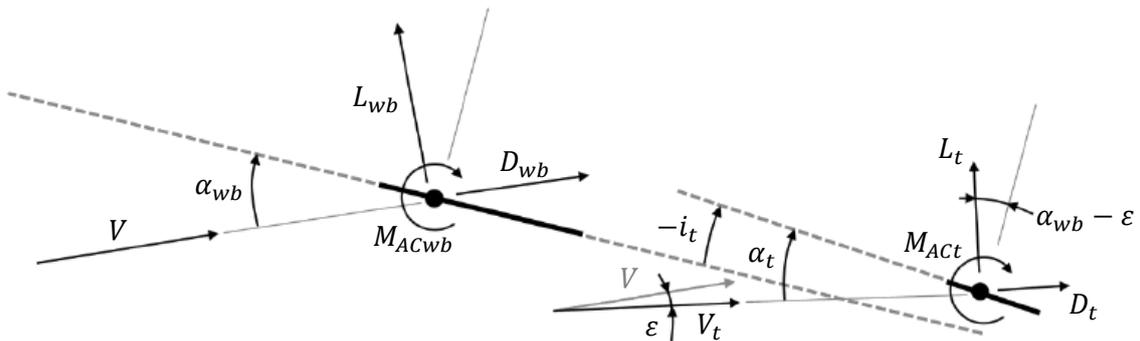


Figura 4.4: Contribución al momento de cabeceo.

De la Figura 4.4 se pueden obtener las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
 c_{Lwb} &= a_{wb} \cdot \alpha_{wb} & c_{Lt} &= a_t \cdot \alpha_t \\
 c_{mwb} &= c_{mACwb} + c_{Lwb}(h - h_{nwb}) \\
 c_L &= c_{Lwb} + \eta_t \frac{S_t}{S} c_{Lt} & ; \quad \eta_t &= \frac{\rho V_t^2}{\rho V^2} \approx 1 \\
 \alpha_t &= \alpha_{wb} - \varepsilon - i_t
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

El momento de cabeceo adimensional se puede escribir entonces como:

$$c_m = \frac{M}{\frac{1}{2} \rho V^2 S \bar{c}} = c_{mACwb} + c_L(h - h_{nwb}) - \bar{V}_H c_{Lt} + c_{mT}
 \tag{4.4}$$

Donde se ha tenido en cuenta el momento propulsivo c_{mT} , y \bar{V}_H es el coeficiente de volumen del estabilizador horizontal (adimensional) que se aplica por el hecho de que c_{Lt} se adimensionaliza con S_t y no con S , y que incluye el brazo de palanca adimensional \bar{l}_t/\bar{c} :

$$\bar{V}_H = \frac{\bar{l}_t S_t}{\bar{c} S} \quad \text{o bien} \quad V_H = \frac{l_t S_t}{\bar{c} S} = \bar{V}_H - \frac{S_t}{S} (h - h_{nwb}) \quad (4.5)$$

4.2 Derivadas de estabilidad longitudinales

- Derivadas respecto a α :

Para c_x , derivando la ecuación (4.2) respecto a α , utilizando la regla del producto con el último término, se obtiene:

$$\frac{\partial c_x}{\partial \alpha} = \frac{\partial c_T}{\partial \alpha} - \frac{\partial c_D}{\partial \alpha} + \frac{\partial c_L}{\partial \alpha} \alpha_x + c_L \frac{\partial \alpha_x}{\partial \alpha} \quad (4.6)$$

Teniendo en cuenta que $\partial \alpha_x / \partial \alpha = 1$ entonces se obtiene:

$$\frac{\partial c_x}{\partial \alpha} = \frac{\partial c_T}{\partial \alpha} - \frac{\partial c_D}{\partial \alpha} + \frac{\partial c_L}{\partial \alpha} \alpha_x + c_L \quad (4.7)$$

Particularizando para la condición de referencia:

$$\left. \frac{\partial c_x}{\partial \alpha} \right|_0 = c_{x\alpha} = c_{L0} - \left. \frac{\partial c_D}{\partial \alpha} \right|_0 \quad (4.8)$$

Procediendo de la misma manera para c_z se obtiene:

$$\left. \frac{\partial c_z}{\partial \alpha} \right|_0 = c_{z\alpha} = -c_{L\alpha} - c_{D0} \quad (4.9)$$

En el caso del momento de cabeceo $c_{m\alpha}$:

$$\left. \frac{\partial c_m}{\partial \alpha} \right|_0 = c_{m\alpha} = \frac{\partial c_{mACwb}}{\partial \alpha} + c_{L\alpha} (h - h_{nwb}) - \bar{V}_H \frac{\partial c_{Lt}}{\partial \alpha} + \frac{c_{mT}}{\partial \alpha} \quad (4.10)$$

Esta expresión se puede reescribir como:

$$c_{m\alpha} = c_{L\alpha} (h - h_n) \quad (4.11)$$

Donde h_n es el punto neutro de la aeronave:

$$h_n = h_{nwb} - \frac{1}{c_{L\alpha}} \left(\frac{\partial c_{mACwb}}{\partial \alpha} - \bar{V}_H \frac{\partial c_{Lt}}{\partial \alpha} + \frac{c_{mT}}{\partial \alpha} \right) \quad (4.12)$$

La variación del momento de cabeceo con el ángulo de ataque es el principal indicador de la estabilidad estática longitudinal. Si $c_{m\alpha} < 0$ la aeronave tenderá a volver α original, y será estáticamente estable. Si $c_{m\alpha} = 0$ entonces será neutra y si $c_{m\alpha} > 0$ la aeronave será inestable ante perturbaciones del ángulo de ataque.

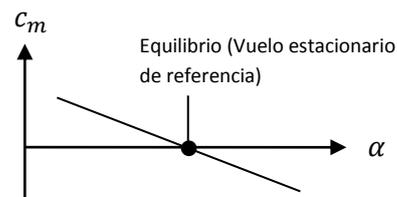


Figura 4.5: Variación del momento de cabeceo con el ángulo de ataque (estable).

- Derivadas respecto a u :

Hay tres posibles contribuciones diferentes asociadas a la velocidad:

- ♣ El número de Mach Ma .
- ♣ La presión dinámica Q .
- ♣ El momento del flujo de aire, efecto propulsivo en aviones de hélice.

La expresión adimensional es entonces:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{u}} = \frac{\partial Ma}{\partial \hat{u}} \frac{\partial}{\partial Ma} + \frac{\partial Q}{\partial \hat{u}} \frac{\partial}{\partial Q} + \frac{\partial c_T}{\partial \hat{u}} \frac{\partial}{\partial c_T} \quad (4.13)$$

Respecto a la presión dinámica se tiene que:

$$Q = \frac{1}{2} \rho V^2 \quad V^2 = u^2 + w^2 + z^2 \quad \hat{u} = \frac{u}{u_0} \quad (4.14)$$

Entonces es fácil ver que:

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial \hat{u}} \right|_0 = \left. \frac{\partial Q}{\partial V^2} \cdot \frac{\partial V^2}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \hat{u}} \right|_0 = \frac{1}{2} \rho \cdot 2u_0 \cdot u_0 = \rho u_0^2 \quad (4.15)$$

Las derivadas respecto a u son entonces:

$$c_{xu} = Ma_0 \left. \frac{\partial c_T}{\partial Ma} - \frac{\partial c_D}{\partial Ma} \right|_0 - \rho u_0^2 \left. \frac{\partial c_D}{\partial Q} \right|_0 + c_{ru} \left. \left(1 - \frac{\partial c_D}{\partial c_T} \right) \right|_0 \quad (4.16)$$

$$c_{zu} = -Ma_0 \left. \frac{\partial c_L}{\partial Ma} \right|_0 - \rho u_0^2 \left. \frac{\partial c_L}{\partial Q} \right|_0 - c_{ru} \left. \frac{\partial c_L}{\partial c_T} \right|_0 \quad (4.17)$$

$$c_{mu} = -Ma_0 \left. \frac{\partial c_m}{\partial Ma} \right|_0 + \rho u_0^2 \left. \frac{\partial c_m}{\partial Q} \right|_0 + c_{ru} \left. \frac{\partial c_m}{\partial c_T} \right|_0 \quad (4.18)$$

- Derivadas respecto a q :

En el caso de la velocidad angular de cabeceo q se separan las contribuciones de la cola y las del conjunto ala-fuselaje.

Para la contribución de la cola se debe tener en cuenta que el aumento de ángulo de ataque que percibe, debido a la velocidad angular, produce un incremento en la sustentación y el momento de cabeceo. De la Figura 4.6 se deduce que:

$$\begin{aligned} \Delta c_{Lt} &= a_t \Delta \alpha_t = a_t \frac{q l_t}{u_0} \\ \Delta c_L &= \frac{S_t}{S} \Delta c_{Lt} = \frac{S_t}{S} a_t \frac{q l_t}{u_0} \\ \Delta c_m &= -V_H \Delta c_{Lt} = -a_t V_H \frac{q l_t}{u_0} \end{aligned} \quad (4.19)$$

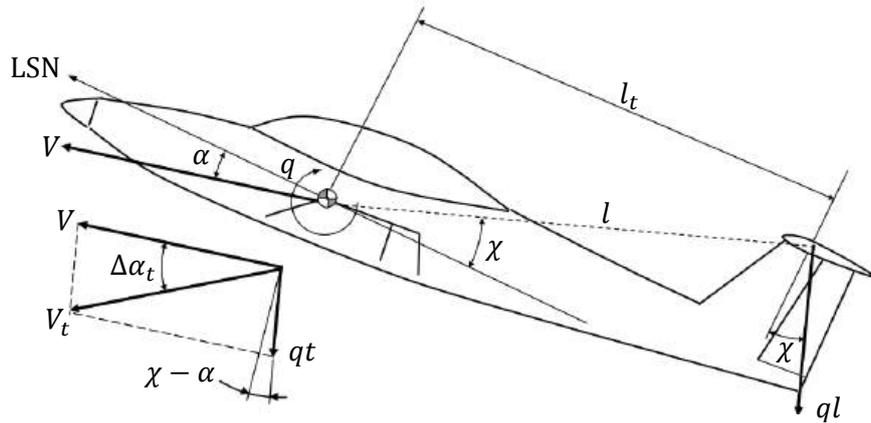


Figura 4.6: Contribución de la cola.

Para derivar c_z :

$$\frac{\partial(\Delta c_L)}{\partial q} = a_t \frac{S_t l_t}{S u_0} \Rightarrow (c_{zq})_t = -2a_t V_H \quad (4.20)$$

Para derivar c_m :

$$\frac{\partial(\Delta c_m)}{\partial q} = -a_t V_H \frac{l_t}{u_0} \Rightarrow (c_{mq})_t = -2a_t V_H \frac{l_t}{\bar{c}} \quad (4.21)$$

Para la contribución del ala se debe considerar que la velocidad de rotación produce una velocidad vertical variable a lo largo de la cuerda del ala, como muestra en la Figura 4.7.

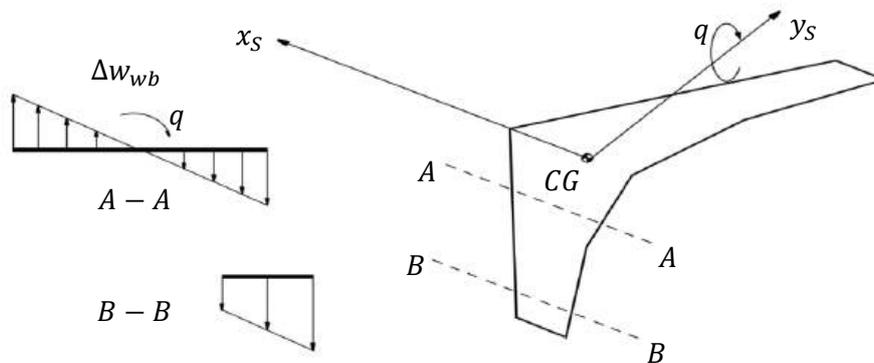


Figura 4.7: Efecto del cabeceo en la velocidad vertical de la cuerda del ala.

Si se considera h_0 como la posición del centro de gravedad CG que hace que c_{zq} sea nulo, entonces la variación del ángulo de ataque en ese punto debido a la rotación será:

$$\Delta w_h = q\bar{c}(h - h_0) = q\bar{c}\Delta h \Rightarrow \alpha = -\frac{q\bar{c}\Delta h}{u_0} = -2\hat{q}\Delta h \quad (4.22)$$

Y por lo tanto el incremento en la sustentación es de:

$$\Delta c_L = c_{L\alpha} \alpha = -2c_{L\alpha} \hat{q} \Delta h \quad (4.23)$$

Finalmente se puede obtener la contribución del conjunto ala-fuselaje a la derivada c_{zq} :

$$(c_{zq})_{wb} = -c_{Lq} = 2c_{L\alpha}\Delta h \quad (4.24)$$

El momento de cabeceo se puede escribir como:

$$(c_m)_{wb} = c_{mACwb} + c_L(h - h_{nwb}) \quad (4.25)$$

De manera que:

$$(c_{mq})_{wb} = \frac{\partial c_{mACwb}}{\partial \hat{q}} - 2c_{L\alpha}(h - h_0)(h - h_{nwb}) \quad (4.26)$$

Esta expresión puede reescribirse en términos de su valor máximo (menos negativo) \bar{c}_{mq} y la posición correspondiente del centro de gravedad \bar{h} .

$$(c_{mq})_{wb} = \bar{c}_{mq} - 2c_{L\alpha}(h - \bar{h})^2 \quad (4.27)$$

- Derivadas respecto a $\dot{\alpha}$:

Ante un cambio en el ángulo de ataque la distribución de presión no se adapta instantáneamente a la nueva distribución de equilibrio. Por el contrario, hay que tener en cuenta la aerodinámica transitoria, algo que se deja para la asignatura "Aeroelasticidad y vibraciones" y que no se ve en este curso.

Por otro lado, sí que se puede considerar el retraso que se produce entre que se modifica la estela, y ésta llega a la cola. Este retraso es de valor $\Delta t = l_t/u_0$. La variación de la deflexión de estela se puede escribir como:

$$\Delta \varepsilon = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \Delta t = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \frac{l_t}{u_0} = -\Delta \alpha_t \quad (4.28)$$

Para c_z se tiene:

$$\Delta c_{Lt} = a_t \Delta \alpha_t = a_t \dot{\alpha} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \frac{l_t}{u_0} \Rightarrow \Delta c_L = \frac{S_t}{S} \Delta c_{Lt} \quad (4.29)$$

Finalmente:

$$c_{z\dot{\alpha}} = \frac{\partial c_z}{\partial \hat{\alpha}} = -\frac{\partial c_L}{\partial \hat{\alpha}} = -\frac{\partial c_L}{\partial \alpha} \cdot \frac{2u_0}{\bar{c}} = -2a_t V_H \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \quad (4.30)$$

Para c_m se tiene:

$$\Delta c_{mt} = -V_H \cdot \Delta c_{Lt} = -V_H a_t \dot{\alpha} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \frac{l_t}{u_0} \quad (4.31)$$

Finalmente:

$$c_{m\dot{\alpha}} = \frac{\partial c_m}{\partial \hat{\alpha}} = -\frac{\partial c_m}{\partial \alpha} \cdot \frac{2u_0}{\bar{c}} = -2a_t V_H \frac{l_t}{\bar{c}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \quad (4.32)$$

4.3 Derivadas de estabilidad laterales

Las acciones aerodinámicas del movimiento lateral son la fuerza lateral Y y los momentos de guiñada N y balance L , definidas como:

$$Y = \frac{1}{2} \rho u_0^2 S c_y \quad N = \frac{1}{2} \rho u_0^2 S b c_n \quad L = \frac{1}{2} \rho u_0^2 S b c_l \quad (4.33)$$

En la condición de vuelo estacionario de referencia c_y , c_l y c_n son nulos. Estos coeficientes son función del ángulo de resbalamiento β , definido por:

$$\sin \beta = \frac{v}{V} = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} \Rightarrow \beta \approx \frac{v}{u_0} \quad (4.34)$$

- Derivadas respecto a β :

La contribución principal a $c_{y\beta}$ viene del estabilizador vertical (en inglés, *fin*). Considerándolo como un perfil simétrico, el ángulo de ataque que ve el estabilizador vertical es $\beta - \sigma$, donde σ es la deflexión de estela lateral, y es difícil de estimar. Se obtiene por lo tanto:

$$(c_y)_f = -a_f(\beta - \sigma) \frac{S_f}{S} \Rightarrow c_{y\beta} = -a_f \left(1 - \frac{\partial \sigma}{\partial \beta}\right) \frac{S_f}{S} \quad (4.35)$$

Donde a_f es la pendiente del coeficiente de sustentación del estabilizador vertical.

En cuanto a la derivada $c_{l\beta}$, una aeronave será lateralmente estáticamente estable si esta derivada es negativa. Los cuatro factores principales que contribuyen a la estabilidad lateral, que se ilustran en la Figura 4.8, son los siguientes:

1. Ángulo de diedro del ala positivo:

El ángulo de diedro modifica el ángulo de ataque que ve cada semi-ala debido al resbalamiento de forma asimétrica. Cuando es positivo (la punta del ala apunta hacia arriba) el momento de cabeceo que se genera por la diferencia de sustentación de cada ala es negativo.

2. Flecha del ala positiva:

La flecha positiva (con las puntas apuntando hacia atrás) hace que, ante un resbalamiento positivo la magnitud de la velocidad perpendicular a cada semi-ala sea mayor en la derecha que en la izquierda, lo que de nuevo genera un momento de balance negativo.

3. Estabilizador vertical:

El estabilizador vertical se comporta como un perfil simétrico. El ángulo de resbalamiento positivo genera una "sustentación" (fuerza lateral) hacia la izquierda. Dado que el centro de presiones del estabilizador vertical está por encima del centro de gravedad, el momento de balance que genera es negativo.

4. Posición del ala elevada:

El flujo de aire que circula sobre el fuselaje modifica el ángulo de ataque que ve cada semi-ala.

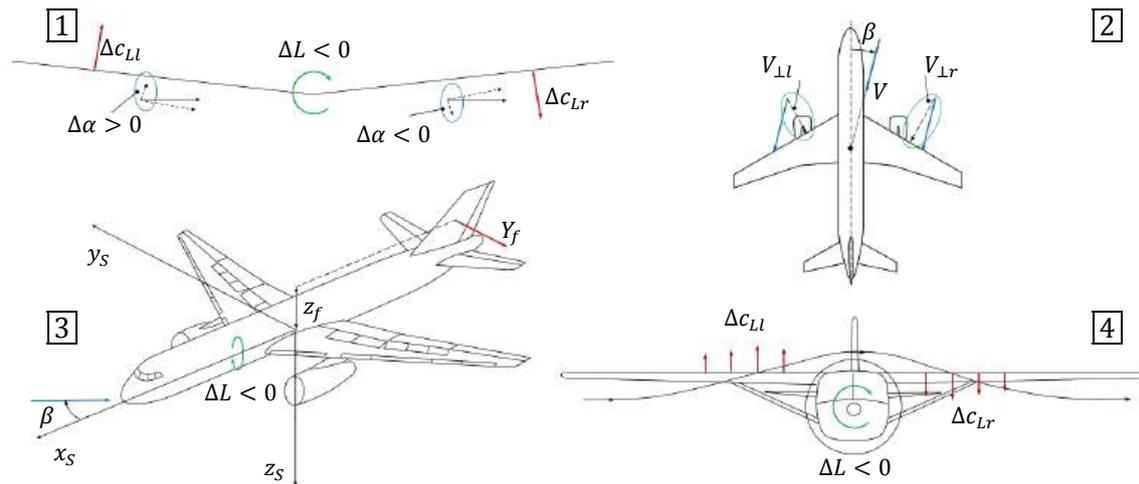


Figura 4.8: Factores principales que contribuyen a la estabilidad lateral.

Por último, la derivada $c_{n\beta}$ representa la estabilidad direccional (es la derivada de la veleta). Una aeronave es direccionalmente estable si esta derivada es positiva. El principal factor que favorece esta situación es el estabilizador vertical. En la Figura 4.8 puede comprobarse cómo la fuerza Y_f sobre el estabilizador vertical tiende a alinear la aeronave con la corriente. La flecha del ala positiva (hacia atrás) también mejora la estabilidad direccional, pues aumenta la resistencia de la semi-ala con mayor velocidad perpendicular a sí misma.

- Derivadas respecto a p :

La derivada c_{yp} cuantifica la contribución de la velocidad de balance a la fuerza lateral, y habitualmente se puede despreciar. En caso contrario deberá tenerse en cuenta la modificación del ángulo de ataque del estabilizador vertical debido a la velocidad de balance y a la variación de la deflexión lateral de estela con la velocidad de balance:

$$\Delta\alpha_f = -\frac{pz_f}{u_0} + p \frac{\partial\sigma}{\partial p} = -\hat{p} \left(2 \frac{z_f}{b} - \frac{\partial\sigma}{\partial\hat{p}} \right) \quad (4.36)$$

Entonces se tiene:

$$\Delta c_y = \Delta c_{yf} \frac{S_f}{S} = a_f \Delta\alpha_f \frac{S_f}{S} \Rightarrow c_{yp} = -a_f \frac{S_f}{S} \left(2 \frac{z_f}{b} - \frac{\partial\sigma}{\partial\hat{p}} \right) \quad (4.37)$$

La derivada c_{np} representa el efecto cruzado de la velocidad angular de balance en el momento de guiñada. Sólo el estabilizador vertical y el ala contribuyen a esta derivada. El efecto de la cola se encuentra considerando el momento de la fuerza lateral Y_f :

$$\Delta c_{nf} = -\Delta c_{yf} \cdot \frac{S_f l_f}{S b} \Rightarrow (c_{np})_f = a_f \frac{S_f l_f}{S b} \left(2 \frac{z_f}{b} - \frac{\partial\sigma}{\partial\hat{p}} \right) \quad (4.38)$$

En el ala se producen dos efectos diferentes y con resultados contrarios. Por un lado, una velocidad de balance positiva (con la semi-ala derecha bajando y la izquierda subiendo) induce un aumento del ángulo de ataque en la semi-ala derecha, y una disminución en la izquierda.

La sustentación, y por lo tanto la resistencia inducida, se ven afectadas de la misma manera. El cambio en la resistencia origina un momento de guiñada positivo (estabilizador).

Pero por otro lado, para vuelo subsónico (o si el flujo en el borde de ataque es subsónico), la succión del borde de ataque se hace mayor en la semi-ala derecha. Esto origina una inclinación de la sustentación hacia adelante, y hacia atrás en la semi-ala izquierda. Por lo tanto se produce un momento de guiñada negativo.

Ambos efectos se ilustran en la Figura 4.9.

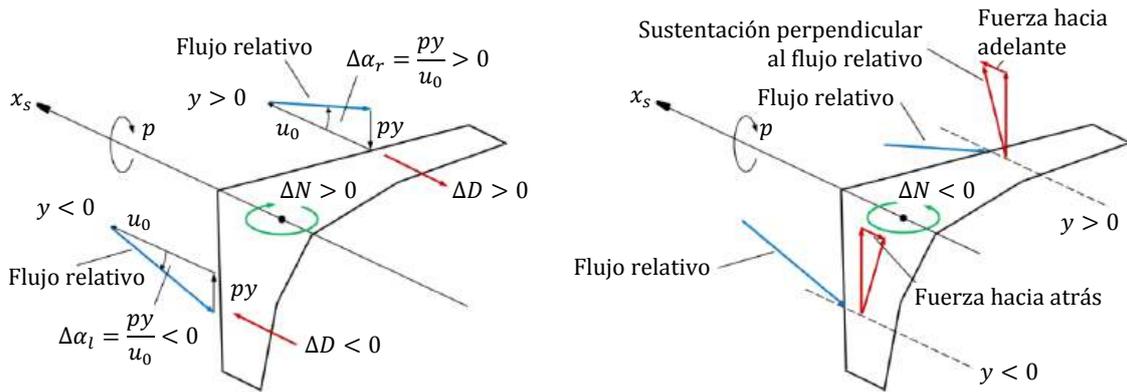


Figura 4.9: Contribución del ala a la derivada c_{np} .

Finalmente la derivada c_{lp} es la llamada derivada de amortiguación del balance. Sólo el ala contribuye significativamente a esta derivada de la misma forma que ocurre con c_{np} : la variación de ángulo de ataque debido a la velocidad de balance produce una variación de la sustentación. Ésta tiende a contrarrestar la velocidad de balance, y por tanto c_{lp} es negativo.

- Derivadas respecto a r :

Las derivadas c_{yr} y c_{nr} presentan principalmente una contribución del estabilizador vertical. La velocidad angular de guiñada r induce un ángulo de ataque en el estabilizador $\Delta\alpha_f$ que se corrige también por la asimetría de la deflexión de estela lateral:

$$\Delta\alpha_f = \frac{rl_f}{u_0} + r \frac{\partial\sigma}{\partial r} = \hat{r} \left(2 \frac{l_f}{b} + \frac{\partial\sigma}{\partial\hat{r}} \right) \quad (4.39)$$

La variación de fuerza lateral en el estabilizador vertical, y el momento que ésta produce en torno al eje z_s , son:

$$(\Delta c_y)_f = a_F \hat{r} \frac{S_f}{S} \left(2 \frac{l_f}{b} + \frac{\partial\sigma}{\partial\hat{r}} \right) \quad (\Delta c_n)_f = \frac{l_f}{b} (\Delta c_y)_f \quad (4.40)$$

Y por lo tanto las derivadas correspondientes son:

$$\Delta c_{yr} = a_F \frac{S_f}{S} \left(2 \frac{l_f}{b} + \frac{\partial\sigma}{\partial\hat{r}} \right) > 0 \quad \Delta c_{nr} = -a_F V_V \left(2 \frac{l_f}{b} + \frac{\partial\sigma}{\partial\hat{r}} \right) < 0 \quad (4.41)$$

Donde V_V es el coeficiente de volumen del estabilizador vertical:

$$V_V = \frac{l_f S_f}{b S} \quad (4.42)$$

Finalmente c_{lr} representa el efecto cruzado de la velocidad angular de guiñada en el momento de balance. Una velocidad de guiñada positiva produce un aumento de la velocidad vista por la semi-ala izquierda, y una disminución vista por la semi-ala derecha.

$$\Delta u = -yr \quad (4.43)$$

La sustentación varía de la misma forma, por lo que se produce un momento de balance positivo, como se muestra en la Figura 4.10.

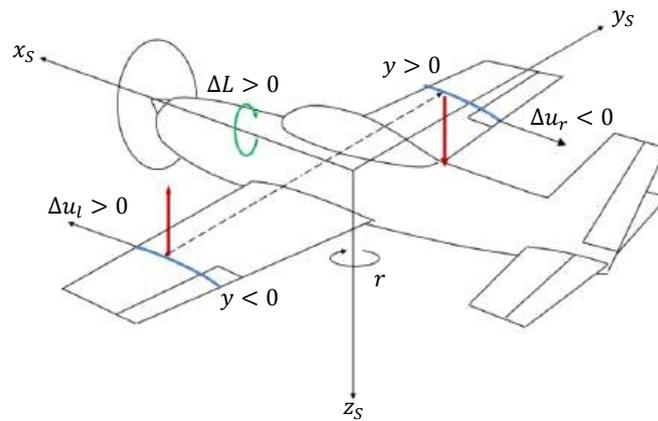


Figura 4.10: Contribución del ala a la derivada c_{lr} .

5 Estabilidad del movimiento no controlado

5.1 Modos longitudinales

Considerando el sistema linealizado adimensional para el movimiento longitudinal de la ecuación (3.21), si se anulan los parámetros de control (los términos de la derecha), el sistema describe el movimiento libre de la aeronave. Se puede escribir de forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} 2\mu_s D_s - 2c_{L0} \tan \theta_0 - c_{xu} & -c_{x\alpha} & c_{L0} & 0 \\ 2c_{L0} - c_{zu} & (2\mu_s - c_{z\dot{\alpha}})D_s - c_{z\alpha} & -[(2\mu_s + c_{zq})D_s - c_{L0} \tan \theta_0] & 0 \\ -c_{mu} & -(c_{m\dot{\alpha}}D_s + c_{m\alpha}) & 0 & \hat{I}_y D_s - c_{mq} \\ 0 & 0 & D_s & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \hat{u} \\ \alpha \\ \Delta \hat{\theta} \\ \hat{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

Se considerarán soluciones de tipo exponencial, es decir:

$$\begin{aligned} \Delta \hat{u} &= \Delta \tilde{u} \cdot e^{\lambda \hat{t}_s} & \alpha &= \tilde{\alpha} \cdot e^{\lambda \hat{t}_s} \\ \Delta \hat{\theta} &= \Delta \tilde{\theta} \cdot e^{\lambda \hat{t}_s} & \hat{q} &= \tilde{q} \cdot e^{\lambda \hat{t}_s} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Donde se ha denotado la amplitud de la solución de cada variable por una tilde (\sim). Los autovalores λ se obtienen de la ecuación característica del sistema, de la forma:

$$\lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (5.3)$$

En general los autovalores λ serán complejos, igual que los coeficientes $\Delta \tilde{u}$, $\Delta \tilde{\theta}$, $\tilde{\alpha}$ y \tilde{q} . Sin embargo, dado que los coeficientes a_3 , a_2 , a_1 y a_0 de la ecuación característica son reales, si una raíz de la ecuación es compleja, su conjugado también será raíz de la ecuación. Por lo tanto los autovalores se pueden escribir de la forma:

$$\lambda = n \pm i\omega \quad (5.4)$$

Los autovectores asociados a raíces conjugadas serán también conjugados. En función del signo de n , el comportamiento dinámico será estable, si $n < 0$, o inestable, si $n > 0$.

Por lo general interesa analizar los siguientes parámetros:

- Periodo $T = 2\pi/\omega$.
- Tiempo en el que se la amplitud se hace el doble (inestable) o la mitad (estable) t_2 .
- Ciclos en que la amplitud se hace el doble (inestable) o la mitad (estable) N_2 .
- Incremento o decremento logarítmico, la relación entre picos sucesivos δ .

Se definen la frecuencia circular no amortiguada ω_n y la relación de amortiguación ξ como:

$$\omega_n = \sqrt{\omega^2 + n^2} \quad \xi = -\frac{n}{\omega_n} \quad (5.5)$$

Entonces los parámetros anteriores se pueden escribir en función de estos dos.

Para el tiempo doble o el tiempo mitad, según si el modo es inestable o estable:

$$t_2 = \frac{\ln 2}{|n|} \approx \frac{0.693}{|\xi| \omega_n} \quad (5.6)$$

Para los ciclos doble o los ciclos mitad, según si el modo es inestable o estable:

$$N_2 = \frac{t_2}{T} = t_2 \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\ln 2}{2\pi} \cdot \frac{\omega}{|n|} \approx 0.11 \cdot \frac{\omega}{|n|} = 0.11 \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{|\xi|} \quad (5.7)$$

Y para el incremento o decremento logarítmico se tiene:

$$\delta = \ln \left(\frac{e^{n\hat{t}_s}}{e^{n(\hat{t}_s+T)}} \right) = -nT = 2\pi \cdot \frac{|\xi|}{\sqrt{1-\xi^2}} \approx -\frac{0.693}{N_2} \quad (5.8)$$

Habitualmente, para aviones convencionales, aparecen en el modo longitudinal dos pares de raíces conjugadas, que se corresponden con dos modos de oscilación: el modo de corto periodo y el modo fugoide.

5.2 Modos longitudinales – Ejemplo numérico

El modo de corto periodo se caracteriza por tener una velocidad casi constante y una variación del ángulo de ataque y del ángulo de cabeceo considerable. El autovector tendrá por tanto unas componentes con orden de magnitud aproximadamente como el que sigue:

	Amplitud	Fase
$\Delta\theta$	1	0°
$\Delta\hat{u}$	0.029	76°
α	1.081	28.3°
\hat{q}	0.017	117°

Tabla 5.1: Autovector del modo de corto periodo.

El modo fugoide se caracteriza por mantener constante el ángulo de ataque, mientras que la velocidad y el ángulo de cabeceo varían de forma considerable. El autovector tendrá por tanto unas componentes con orden de magnitud aproximadamente como el que sigue:

	Amplitud	Fase
$\Delta\theta$	1	0°
$\Delta\hat{u}$	0.623	117°
α	0.036	76°
\hat{q}	0.0012	117°

Tabla 5.2: Autovector del modo fugoide.

5.3 Modos longitudinales – Aproximación

Los modos se aproximan forzando los resultados anteriores en el sistema de ecuaciones (5.1).

- Modo de corto periodo:

Para este modo se toma como referencia el vuelo horizontal (es decir, $\theta_0 = 0$) y se impone $\Delta\hat{u} = 0$ directamente. La ecuación en X (la fila 1) se elimina al considerar el equilibrio longitudinal de fuerzas (movimiento no acelerado).

De la fila 4 se deduce $D_s \Delta \theta = \hat{q}$, que se puede reemplazar en la segunda fila, obteniendo finalmente el sistema reducido:

$$\begin{bmatrix} (2\mu_s - c_{z\dot{\alpha}})D_s - c_{z\alpha} & -(2\mu_s + c_{zq}) \\ -(c_{m\dot{\alpha}}D_s + c_{m\alpha}) & \hat{I}_y D_s - c_{mq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \hat{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.9)$$

Sustituyendo las soluciones de tipo exponencial (ecuación (5.2)) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} (2\mu_s - c_{z\dot{\alpha}})D_s - c_{z\alpha} & -(2\mu_s + c_{zq}) \\ -(c_{m\dot{\alpha}}D_s + c_{m\alpha}) & \hat{I}_y D_s - c_{mq} \end{bmatrix} \cdot e^{\lambda \hat{t}_s} \begin{Bmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

Aplicando los operadores de derivación D_s se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} (2\mu_s - c_{z\dot{\alpha}})\lambda - c_{z\alpha} & -(2\mu_s + c_{zq}) \\ -(c_{m\dot{\alpha}}\lambda + c_{m\alpha}) & \hat{I}_y \lambda - c_{mq} \end{bmatrix} \cdot e^{\lambda \hat{t}_s} \begin{Bmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.11)$$

La ecuación característica del sistema, que se obtiene igualando el determinante de la matriz a cero, es entonces un polinomio de segundo grado:

$$\hat{I}_y (2\mu_s - c_{z\dot{\alpha}})\lambda^2 - [c_{mq}(2\mu_s - c_{z\dot{\alpha}}) + \hat{I}_y c_{z\alpha} + c_{m\dot{\alpha}}(2\mu_s + c_{zq})]\lambda + [c_{z\alpha}c_{mq} - c_{m\alpha}(2\mu_s + c_{zq})] = 0 \quad (5.12)$$

Esta ecuación se puede escribir de la siguiente forma:

$$\lambda^2 + (2\xi\omega_n)\lambda + \omega_n^2 = 0 \quad (5.13)$$

Donde:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{c_{z\alpha}c_{mq} - c_{m\alpha}(2\mu_s + c_{zq})}{\hat{I}_y(2\mu_s - c_{z\dot{\alpha}})}} \quad (5.14)$$

$$\xi = -\frac{c_{mq}(2\mu_s - c_{z\dot{\alpha}}) + \hat{I}_y c_{z\alpha} + c_{m\dot{\alpha}}(2\mu_s + c_{zq})}{2\sqrt{\hat{I}_y[2\mu_s - c_{z\dot{\alpha}}] \cdot [c_{z\alpha}c_{mq} - c_{m\alpha}(2\mu_s + c_{zq})]}}$$

Si además se considera que $c_{z\dot{\alpha}} \ll 2\mu_s$ y también $c_{zq} \ll 2\mu_s$ entonces:

$$\omega_n \approx \sqrt{\frac{c_{z\alpha}c_{mq} - 2\mu_s c_{m\alpha}}{2\mu_s \hat{I}_y}} \quad (5.15)$$

$$\xi \approx -\frac{2\mu_s(c_{mq} + c_{m\dot{\alpha}}) + \hat{I}_y c_{z\alpha}}{2\sqrt{2\mu_s \hat{I}_y \cdot [c_{z\alpha}c_{mq} - 2\mu_s c_{m\alpha}]}}$$

- Modo fugoide:

Para el modo fugoide se impone directamente α y \hat{q} nulos. En la práctica esto quiere decir que el momento de cabeceo M tiene una variación muy gradual en el tiempo. De nuevo se toma como trayectoria de referencia el vuelo horizontal con $\theta_0 = 0$.

Se descartan la ecuación del momento de cabeceo M (tercera fila) y la de la velocidad angular de cabeceo \hat{q} (cuarta fila). Utilizando sólo la primera y la segunda fila se obtiene el sistema reducido:

$$\begin{bmatrix} 2\mu_s D_s - c_{xu} & c_{L0} \\ 2c_{L0} - c_{zu} & -(2\mu_s + c_{zq})D_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\hat{u} \\ \Delta\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.16)$$

La ecuación característica se obtiene de la misma forma que para el modo de corto periodo:

$$2\mu_s(2\mu_s + c_{zq})\lambda^2 - c_{xu}(2\mu_s + c_{zq})\lambda + c_{L0}(2c_{L0} - c_{zu}) = 0 \quad (5.17)$$

Esta ecuación se puede escribir de la siguiente forma:

$$\lambda^2 + (2\xi\omega_n)\lambda + \omega_n^2 = 0 \quad (5.18)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{\frac{c_{L0}(2c_{L0} - c_{zu})}{2\mu_s(2\mu_s + c_{zq})}} \approx \frac{\sqrt{c_{L0}(2c_{L0} - c_{zu})}}{2\mu_s} \\ \xi &= -\frac{c_{xu}}{4\mu_s} \sqrt{\frac{2\mu_s(2\mu_s + c_{zq})}{c_{L0}(2c_{L0} - c_{zu})}} \approx \frac{c_{xu}}{2\sqrt{c_{L0}(2c_{L0} - c_{zu})}} \end{aligned} \quad (5.19)$$

En el caso particular de que el empuje no varíe con la velocidad y no haya efectos de compresibilidad, puede deducirse que $c_{xu} = -2c_{D0}$ y $c_{zu} = 0$, y por lo tanto:

$$\omega_n \approx \frac{c_{L0}}{\mu_s\sqrt{2}} \quad \xi \approx -\frac{1}{2} \frac{c_{D0}}{c_{L0}} \quad (5.20)$$

5.4 Modos laterales

De nuevo, considerando el sistema linealizado adimensional para el movimiento lateral de la ecuación (3.23), salvo la quinta ecuación, si se anulan los parámetros de control (los términos de la derecha), el sistema describe el movimiento libre de la aeronave. En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 2\mu_a D_a - c_{y\beta} & -c_{yp} & 2\mu_a - c_{yr} & -c_{L0} \\ -c_{l\beta} & \hat{I}_x D_a - c_{lp} & -(\hat{I}_{xz} D_a + c_{lr}) & 0 \\ -c_{n\beta} & -(\hat{I}_{xz} D_a + c_{np}) & \hat{I}_z D_a - c_{nr} & 0 \\ 0 & 1 & \tan\theta_0 & -D_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta \\ \hat{p} \\ \hat{r} \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.21)$$

Se consideran soluciones de tipo exponencial, es decir:

$$\begin{aligned} \beta &= \tilde{\beta} \cdot e^{\lambda t_a} & \hat{p} &= \tilde{p} \cdot e^{\lambda t_a} \\ \hat{r} &= \tilde{r} \cdot e^{\lambda t_a} & \phi &= \tilde{\phi} \cdot e^{\lambda t_a} \end{aligned} \quad (5.22)$$

De nuevo la ecuación característica del sistema será un polinomio de cuarto orden:

$$\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (5.23)$$

Habitualmente para un avión convencional se encuentran dos raíces reales negativas (estables) y un par de raíces complejas conjugadas, que se corresponden con tres modos de oscilación: las raíces reales representan el modo espiral y el de convergencia en balance, y el par de raíces complejas representa el modo de oscilación lateral, también llamado balanceo holandés.

5.5 Modos laterales – Ejemplo numérico

Para un avión convencional de transporte de pasajeros (B747-100) el polinomio característico presenta los siguientes valores típicos:

$$\begin{aligned} a_0 &= 9.36733 \cdot 10^{-7} & a_1 &= 1.03288 \cdot 10^{-3} \\ a_2 &= 1.49776 \cdot 10^{-2} & a_3 &= 8.040425 \cdot 10^{-2} \end{aligned} \quad (5.24)$$

Las raíces del polinomio son:

$$\begin{aligned} \text{Modo espiral:} & \quad \lambda_1 = -9.19103 \cdot 10^{-4} \\ \text{Convergencia en balance:} & \quad \lambda_2 = -7.11989 \cdot 10^{-2} \\ \text{Balanceo holandés:} & \quad \lambda_3, \lambda_4 = -4.1435 \cdot 10^{-3} \pm i \cdot 1.1972 \cdot 10^{-1} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Los tres modos tendrían entonces los siguientes valores numéricos:

- Modo espiral:

El modo espiral se caracteriza principalmente por tener β , \hat{p} y \hat{r} pequeños, por lo que las fuerzas aerodinámicas serán pequeñas. Se puede considerar un modo débil con un tiempo característico largo (baja frecuencia).

	Amplitud	Fase
β	0.001188	180°
ϕ	0.176319	180°
ψ	1	0°
\hat{p}	0.000162	0°
\hat{r}	0.000919	180°
\hat{y}_E	1086.72	180°

Tabla 5.3: Autovector del modo espiral.

El desplazamiento lateral adimensional se ha obtenido de:

$$\hat{y}_E = \frac{\psi + \beta}{\lambda_1} \quad (5.26)$$

El desplazamiento dimensional para un ángulo ψ dado se obtendría, en el caso del B747-100, con $b \approx 60 \text{ m}$, y considerando $\psi = 20^\circ \approx 0.35 \text{ rad}$, como:

$$y_E = \frac{b}{2} \cdot \psi \cdot \hat{y}_E = \frac{60}{2} \cdot 0.35 \cdot 1086.72 = 11410.56 \text{ m} \quad (5.27)$$

- Convergencia en balance:

Este modo es una rotación pura alrededor del eje x . Cabe destacar que \hat{p} es la principal magnitud aerodinámica. Por ello la contribución de la derivada c_{lp} resulta fundamental, mientras que las derivadas respecto a \hat{r} resultan despreciable en comparación.

	Amplitud	Fase
β	0.019789	180°
ϕ	1	0°
ψ	0.055953	180°
\hat{p}	0.071200	180°
\hat{r}	0.003984	0°
\hat{y}_E	1.063815	0°

Tabla 5.4: Autovector de la convergencia en balance.

- Balanceo holandés:

Puede verse que los ángulos β , ϕ y ψ son del mismo orden de magnitud, y que \hat{r} es un orden inferior. Además β y ψ son prácticamente iguales y opuestos. Por tanto la velocidad lateral absoluta \dot{y}_E (en ejes tierra) es muy pequeña y la aeronave sigue una trayectoria casi rectilínea.

	Amplitud	Fase
β	0.327081	-28.1°
ϕ	1	0°
ψ	0.306955	155.7°
\hat{p}	0.119788	92.0°
\hat{r}	0.036770	-112.3°
\hat{y}_E	0.242012	-164.2°

Tabla 5.5: Autovector del balanceo holandés.

Para una oscilación lateral de $\phi = 20^\circ \approx 0.35$ rad, la amplitud del desplazamiento lateral es:

$$y_E = \frac{b}{2} \cdot \phi \cdot \hat{y}_E = \frac{60}{2} \cdot 0.35 \cdot 0.242012 = 2.54 \text{ m} \quad (5.28)$$

5.6 Modos laterales – Aproximación

- Modo espiral:

De los valores típicos en un avión convencional para los coeficientes de la ecuación característica se encuentra que el término a_0 es mucho menor que los demás. Esto permite pensar que la primera raíz λ_1 será también pequeña (si se tuviera $a_0 = 0$ entonces $\lambda_1 = 0$). Despreciando las potencias de orden superior λ^2 , λ^3 y λ^4 se obtiene:

$$\lambda_1 \approx -\frac{a_0}{a_1} = -9.06914 \cdot 10^{-4} \quad (5.29)$$

- Convergencia en balance y balanceo holandés:

Se puede buscar la solución de una forma similar al caso longitudinal. Una primera hipótesis sería considerar que la convergencia en balance y el balanceo holandés son modos que implican una separación pequeña de la trayectoria rectilínea.

Suponiendo directamente que la trayectoria del centro de gravedad CG es rectilínea se obtiene, por un lado, que:

$$\psi = -\beta \quad (5.30)$$

Por otro lado, la fuerza lateral debe ser nula, por lo que se puede dejar de lado esa ecuación, primera fila del sistema (5.21).

Si se supone también que el vuelo es horizontal, es decir $\theta_0 = 0$, entonces combinando la quinta ecuación del sistema (3.23) con la ecuación (5.30) se tiene:

$$D_a \psi = \hat{r} = -D_a \beta \quad (5.31)$$

Entonces finalmente el sistema reducido queda:

$$\begin{bmatrix} \hat{I}_{xz} D_a^2 + c_{lr} D_a - c_{l\beta} & \hat{I}_x D_a - c_{lp} \\ \hat{I}_z D_a^2 - c_{nr} D_a + c_{n\beta} & \hat{I}_{xz} D_a + c_{np} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta \\ \hat{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.32)$$

La ecuación característica es un polinomio de tercer grado. Haciendo la suposición adicional de que el producto de inercia \hat{I}_{xz} es pequeño, esta ecuación será:

$$\hat{I}_x \hat{I}_z \lambda^3 - (\hat{I}_x c_{nr} + \hat{I}_z c_{lp}) \lambda^2 + (-c_{lr} c_{np} + \hat{I}_x c_{n\beta} + c_{lp} c_{nr}) \lambda + (c_{l\beta} c_{np} - c_{lp} c_{n\beta}) = 0 \quad (5.33)$$

Esta ecuación puede describirse como:

$$\frac{\hat{I}_x \hat{I}_z \lambda^3 - (\hat{I}_x c_{nr} + \hat{I}_z c_{lp}) \lambda^2 + (-c_{lr} c_{np} + c_{lp} c_{nr}) \lambda + c_{l\beta} c_{np}}{\hat{I}_x \lambda - c_{lp}} + c_{n\beta} = 0 \quad (5.34)$$

Considérese la variación de $c_{n\beta}$ desde 0 hasta ∞ . Cuando $c_{n\beta} = 0$ se tienen tres raíces, los ceros del numerador. Dos de esas raíces λ_1 y λ_2 serán complejas conjugadas. Por otro lado, si $c_{n\beta} \rightarrow \infty$ entonces las dos raíces complejas tienden a $\pm i\infty$, y la tercera es el cero del denominador, asociada a la convergencia en balance:

$$\lambda_3 = \frac{c_{lp}}{\hat{I}_x} \quad (5.35)$$

Donde hay que recordar que $c_{lp} < 0$. Esta raíz también se puede obtener de la primera ecuación del sistema (5.32), escribiendo la relación entre β y \hat{p} como:

$$\frac{\beta}{\hat{p}} = -\frac{\hat{I}_x \lambda - c_{lp}}{\hat{I}_{xz} \lambda^2 + c_{lr} \lambda - c_{l\beta}} \quad (5.36)$$

Suponiendo que el ángulo de deslizamiento β es pequeño se obtiene de nuevo el resultado (5.35). Una aproximación para obtener las raíces complejas conjugadas consiste en suprimir la velocidad de balance \hat{p} . Esto da lugar a una oscilación plana en guiñada y deslizamiento. Entonces, considerando la segunda ecuación del sistema (5.32) se tiene:

$$\hat{I}_z \lambda^2 - c_{nr} \lambda + c_{n\beta} = 0 \quad (5.37)$$

5.7 Resolución general

Resolviendo cualquiera de los dos sistemas completos, ya sea el longitudinal (5.1) o el lateral (5.21), se obtienen 4 autovalores λ_i con sus correspondientes autovectores \vec{v}_i . Los autovalores y los autovectores forman pares complejos conjugados.

Normalmente se normalizan los autovectores de forma que el módulo de una de sus componentes (por ejemplo $\Delta \tilde{u}$ en el caso longitudinal) sea 1.

La solución de cada variable será una combinación lineal de cada una de las soluciones obtenidas:

$$\Delta x_j = \sum_{i=1}^4 k_i v_{ij} \cdot e^{\lambda_i \hat{t}} \quad (5.38)$$

Donde cada amplitud k_i representa el peso del autovalor λ_i en la solución. Si se considera el instante inicial las exponenciales son 1, por lo tanto, para las condiciones iniciales:

$$\Delta x_j(\hat{t} = 0) = \Delta x_{0j} = \sum_{i=1}^4 k_i v_{ij} \quad (5.39)$$

Entonces se puede escribir el sistema:

$$[v] \cdot \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta x_{01} \\ \Delta x_{02} \\ \Delta x_{03} \\ \Delta x_{04} \end{Bmatrix} \quad (5.40)$$

Donde $[v]$ es la matriz formada por los autovectores en columna. Este sistema se puede resolver invirtiendo la matriz $[v]$ para obtener los valores de las amplitudes k_i aplicando las condiciones iniciales. Estas amplitudes k_i forman también pares de valores complejos conjugados.

A partir de las amplitudes se puede obtener el valor de cada coeficiente $\Delta \tilde{x}_{ij} = k_i v_{ij}$ de la solución de Δx_j . Desarrollando los valores complejos de estos coeficientes en forma polar se obtiene:

$$\begin{aligned}
\Delta x_j &= \sum_{i=1}^4 \Delta \tilde{x}_{ij} \cdot e^{\lambda_i \hat{t}} = \\
&= \sum_{i=1}^4 |\Delta \tilde{x}_{ij}| \cdot e^{i \cdot \varphi_{ij}} \cdot e^{(n_i + i \cdot \omega_i) \hat{t}} = \\
&= \sum_{i=1}^4 |\Delta \tilde{x}_{ij}| \cdot e^{n_i \hat{t}} \cdot e^{i(\omega_i \hat{t} + \varphi_{ij})} = \\
&= \sum_{i=1}^4 |\Delta \tilde{x}_{ij}| \cdot e^{n_i \hat{t}} \cdot (\cos(\omega_i \hat{t} + \varphi_{ij}) + i \cdot \sin(\omega_i \hat{t} + \varphi_{ij})) \quad (5.41)
\end{aligned}$$

Tanto los autovalores λ_i como los coeficientes $\Delta \tilde{x}_{ij}$ correspondientes forman pares de números complejos conjugados. Esto hace que haya pares de senos y cosenos con el signo opuesto en el argumento.

Dado que $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ se duplican los términos con $\cos(\omega_i \hat{t} + \varphi_{ij})$. Por otro lado, como $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ se eliminan los términos con $\sin(\omega_i \hat{t} + \varphi_{ij})$. Entonces se puede escribir:

$$\Delta x_j = 2 \cdot |\Delta \tilde{x}_{1j}| \cdot e^{n_1 \hat{t}} \cdot \cos(\omega_1 \hat{t} + \varphi_{1j}) + 2 \cdot |\Delta \tilde{x}_{3j}| \cdot e^{n_3 \hat{t}} \cdot \cos(\omega_3 \hat{t} + \varphi_{3j}) \quad (5.42)$$

6 Respuesta en lazo abierto

6.1 Introducción

Tanto para el movimiento longitudinal como para el lateral, los sistemas de ecuaciones linealizados (3.21) y (3.23) se pueden escribir en forma genérica matricial como:

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{B} \mathbf{c} \quad (6.1)$$

Donde \mathbf{A} es un operador matricial que actúa sobre el vector de variables de estado $\mathbf{x}(t)$, y \mathbf{B} es otro operador matricial que actúa sobre el vector de parámetros de control $\mathbf{c}(t)$. Por lo general $\mathbf{X}(t)$ y $\delta(t)$ son funciones del tiempo, pero no los operadores matriciales \mathbf{A} y \mathbf{B} .

La respuesta a los controles en lazo abierto consiste en determinar el vector de estado $\mathbf{x}(t)$ a partir de una entrada $\mathbf{c}(t)$ conocida y arbitraria (problema directo). También puede resultar interesante obtener la entrada necesaria $\mathbf{c}(t)$ para tener una respuesta $\mathbf{x}(t)$ deseada (problema inverso).

6.2 Movimiento longitudinal

Las matrices del sistema (6.1) para el caso longitudinal son:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2\mu_s D_s - 2c_{L0} \tan \theta_0 - c_{xu} & -c_{x\alpha} & c_{L0} & 0 \\ 2c_{L0} - c_{zu} & (2\mu_s - c_{z\dot{\alpha}})D_s - c_{z\alpha} & -[(2\mu_s + c_{zq})D_s - c_{L0} \tan \theta_0] & 0 \\ -c_{mu} & -(c_{m\dot{\alpha}}D_s + c_{m\alpha}) & 0 & \hat{I}_y D_s - c_{mq} \\ 0 & 0 & D_s & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \Delta \hat{u} \\ \alpha \\ \Delta \theta \\ \hat{q} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & c_{x\delta p} \\ c_{z\delta e} & 0 \\ c_{m\delta e} D_s + c_{m\delta e} & c_{m\delta p} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}(t) = \begin{bmatrix} \delta_e \\ \delta_p \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

6.3 Movimiento lateral

Las matrices del sistema (6.1) para el caso lateral son:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2\mu_a D_a - c_{y\beta} & -c_{yp} & 2\mu_a - c_{yr} & -c_{L0} \\ -c_{l\beta} & \hat{I}_x D_a - c_{lp} & -(\hat{I}_{xz} D_a + c_{lr}) & 0 \\ -c_{n\beta} & -(\hat{I}_{xz} D_a + c_{np}) & \hat{I}_z D_a - c_{nr} & 0 \\ 0 & 1 & \tan \theta_0 & -D_a \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \beta \\ \hat{p} \\ \hat{r} \\ \phi \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & c_{y\delta r} \\ c_{l\delta a} D_a + c_{l\delta a} & c_{l\delta r} \\ c_{n\delta a} & c_{n\delta r} D_a + c_{n\delta r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}(t) = \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

6.4 Transformada de Laplace

Los problemas lineales, como el de pequeñas perturbaciones, se pueden tratar mediante las transformadas de Laplace. Para una función del tiempo arbitraria $f(t)$ con $f(0) = 0$ la transformada de Laplace $\mathcal{L}(f(t)) = \bar{f}(s)$ se define como:

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt \quad (6.4)$$

Una de sus propiedades es que la transformada de la derivada temporal $\dot{f}(t)$ es:

$$\bar{\dot{f}}(s) = \int_0^{\infty} \dot{f}(t) \cdot e^{-st} dt = s\bar{f}(s) - f(0) = s\bar{f}(s) \quad (6.5)$$

Además los teoremas del valor inicial y el valor final establecen que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\bar{f}(s) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\bar{f}(s) \quad (6.6)$$

La Tabla 6.1 muestra las transformadas de Laplace más frecuentes:

$f(t)$	$\bar{f}(s)$	$f(t)$	$\bar{f}(s)$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s - a}$	$t \sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$
$t \cdot e^{at}$	$\frac{1}{(s - a)^2}$	$t \cos(at)$	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$
$t^n \cdot e^{at}$	$\frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$	$e^{at} \cdot \sin(bt)$	$\frac{b}{(s - a)^2 + b^2}$
$a \cdot f(t)$	$a \cdot \bar{f}(s)$	$e^{at} \cdot \cos(bt)$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 + b^2}$
$t^n \cdot f(t)$	$(-1)^n \cdot \frac{d^n}{ds^n} \bar{f}(s)$	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$e^{at} \cdot f(t)$	$\bar{f}(s - a)$	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
$\delta(t)$	1		
$\delta(t - T)$	e^{-sT}	$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
$1(t)$	$\frac{1}{s}$		
$1(t - T)$	$\frac{e^{-sT}}{s}$	$\frac{df(t)}{dt}$	$s\bar{f}(s) - f(0)$
$f(t - T) \cdot 1(t - T)$	$e^{-sT} \cdot \mathcal{L}(f(t))$	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{\bar{f}(s)}{s}$

Tabla 6.1: Transformadas de Laplace.

En la práctica la transformada inversa se obtiene mediante el uso de la Tabla 6.1. En algunos casos es conveniente aplicar el método de las fracciones parciales. Con este método se consigue descomponer una función transformada $\bar{x}(s)$ en elementos sencillos como los de la Tabla 6.1, de forma que se pueda obtener entonces la función $x(t)$ directamente. Por ejemplo, si se considera la siguiente respuesta:

$$\bar{x}(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (6.7)$$

La respuesta se puede escribir a partir de las raíces del denominador λ_1 y λ_2 como:

$$\bar{x}(s) = \frac{1}{s(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)} \quad (6.8)$$

A su vez esta expresión se puede descomponer en fracciones parciales:

$$\bar{x}(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s - \lambda_1} + \frac{C}{s - \lambda_2} \quad (6.9)$$

Para obtener los valores de A , B y C basta con desarrollar la ecuación (6.9) en términos de s :

$$\begin{aligned} \bar{x}(s) &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s - \lambda_1} + \frac{C}{s - \lambda_2} = \\ &= \frac{A \cdot (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) + B \cdot s(s - \lambda_2) + C \cdot s(s - \lambda_1)}{s(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)} = \\ &= \frac{A \cdot (s^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1\lambda_2) + B \cdot (s^2 - \lambda_2s) + C \cdot (s^2 - \lambda_1s)}{s(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)} = \\ &= \frac{s^2(A + B + C) + s(A(\lambda_1 + \lambda_2) + B\lambda_2 + C\lambda_1) + (A\lambda_1\lambda_2)}{s(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Entonces, igualando con la ecuación (6.8) para cada grado de s que haya en el numerador:

$$\left. \begin{aligned} A + B + C &= 0 \\ A(\lambda_1 + \lambda_2) + B\lambda_2 + C\lambda_1 &= 0 \\ A\lambda_1\lambda_2 &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} A &= \frac{1}{\lambda_1\lambda_2} \\ B &= \frac{1}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)} \\ C &= \frac{1}{\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Y ahora obtener la transformada inversa se puede hacer inmediatamente usando la Tabla 6.1.

Si una raíz aparece más de una vez, sus potencias deberán utilizarse en el desarrollo. Si un polinomio no se puede descomponer en raíces reales, en el numerador debe aparecer un polinomio de un grado menos que en el denominador.

$$\bar{x}(s) = \frac{s^2 + 1}{(s - 1)(s - 1)(s^2 + s + 1)} = \frac{A}{s - 1} + \frac{B}{(s - 1)^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + s + 1} \quad (6.12)$$

Otra opción es trabajar con números complejos y hacer el desarrollo normalmente.

6.5 Funciones de transferencia

De forma esquemática la respuesta en lazo abierto se representa como en la Figura 6.1:



Figura 6.1: Sistema en lazo abierto.

Donde la relación entre $\bar{x}(s)$ y $\bar{c}(s)$ es a través de la función de transferencia $\mathbf{G}(s)$ como:

$$\bar{x}(s) = \mathbf{G}(s) \bar{c}(s) \quad (6.13)$$

Las transformadas de \mathbf{A} y \mathbf{B} se obtienen reemplazando los operadores de derivación D_s o D_a por la variable s , como resultado de la ecuación (6.5). La función de transferencia se puede obtener entonces como:

$$\mathbf{G}(s) = \bar{\mathbf{A}}^{-1}(s) \bar{\mathbf{B}}(s) \quad (6.14)$$

Una vez se obtiene la respuesta $\bar{x}(s)$ en el dominio de la variable compleja s se puede aplicar la transformada inversa de Laplace para obtener la respuesta en el dominio temporal $\mathbf{x}(t)$.

6.6 Respuesta a la función escalón

La función de escalón unitario se define como:

$$1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \quad (6.15)$$

La transformada de Laplace de esta función es:

$$\bar{1}(s) = \frac{1}{s} \quad (6.16)$$

Ante una entrada escalón del timón de profundidad (la primera componente del vector de control longitudinal) la respuesta dinámica del sistema, llamada respuesta escalón, o admitancia indicial \mathbf{a} , viene dada por:

$$\bar{\mathbf{a}}(s) = \mathbf{G}_1(s) \frac{1}{s} \quad (6.17)$$

Donde el vector $\mathbf{G}_1(s)$ hace referencia a la primera columna de la función de transferencia $\mathbf{G}(s)$. Aplicando la transformada inversa de Laplace se obtendría la respuesta temporal $\mathbf{a}(t)$.

6.7 Respuesta a la función impulso

La función impulso $\delta(t)$ se define como:

$$f_i(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & t < 0, \quad t > \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_i(t) \quad (6.18)$$

La transformada de Laplace de esta función es:

$$\bar{\delta}(s) = 1 \quad (6.19)$$

La llamada respuesta impulsiva $\bar{\mathbf{h}}(s)$ coincide entonces con la primera columna de la función de transferencia $\mathbf{G}_1(s)$ si se considera una entrada del timón de profundidad:

$$\bar{\mathbf{h}}(s) = \mathbf{G}_1(s) \cdot 1 \quad (6.20)$$

Por otro lado, resulta evidente que la función impulso es la derivada de la función escalón:

$$\dot{f}_s(t) = \delta(t) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\mathbf{h}}(s) = s \cdot \bar{\mathbf{a}}(s) \quad (6.21)$$

6.8 Respuesta a una función sinusoidal

Una función sinusoidal tiene la forma:

$$f(t) = A \cos \omega t = A \cdot \text{Re}(e^{i\omega t}) \quad (6.22)$$

En este caso es necesario considerar que la entrada ha estado actuando el tiempo suficiente como para que los efectos transitorios hayan desaparecido y quede únicamente la respuesta estacionaria sinusoidal. Por ello no tiene sentido hablar en este caso de transformadas de Laplace, sino que se fuerza que la solución sea del tipo:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 e^{i\omega t} \quad (6.23)$$

Introduciendo esta solución en el sistema (6.1) para una entrada sinusoidal de amplitud unitaria en el timón de profundidad, se obtiene:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{G}_1(i\omega) \quad (6.24)$$

6.9 Respuesta a una función arbitraria

Una función arbitraria $f(t)$ puede discretizarse como una sucesión de entradas rectangulares de altura $f(t_i)$ como se ve en la Figura 6.2.

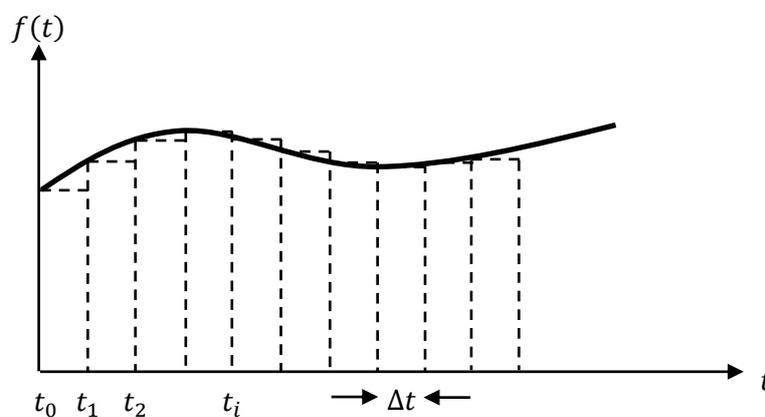


Figura 6.2: Discretización de una entrada arbitraria.

Estas entradas rectangulares, en el límite cuando Δt tiende a 0, se pueden escribir a partir de la función impulso:

$$f(t) = f(t_i) \cdot \delta(t - t_i) \cdot dt \quad (6.25)$$

La respuesta en un instante t será entonces la suma integral de las respuestas de cada uno de estos impulsos entre 0 y t , es decir:

$$x(t) = \int_0^t h(t - \tau) \cdot f(\tau) d\tau = \int_0^t h(\tau) \cdot f(t - \tau) d\tau \quad (6.26)$$

Esta es la llamada integral de convolución. A partir de la respuesta impulsiva se puede obtener la respuesta a una entrada cualquiera mediante la integral de convolución anterior. Se puede obtener esta misma expresión trabajando con entradas de tipo escalón.

7 Respuesta en lazo cerrado

7.1 Introducción

En comparación con el sistema en lazo abierto esquematizado en la Figura 6.1, en el que la relación entre la entrada y la salida tiene una única dirección, para un sistema en lazo cerrado como el de la Figura 7.1, se utiliza información de la salida para modificar la entrada.

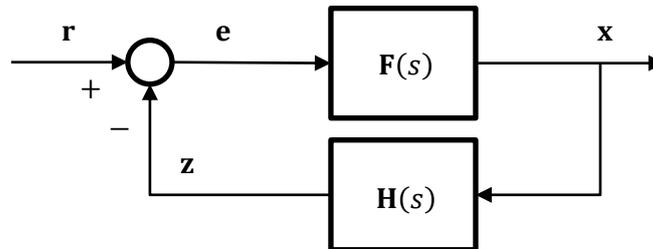


Figura 7.1: Sistema en lazo cerrado.

Típicamente, para un sistema de control de vuelo lineal y estacionario, el diagrama de bloques es como el que se muestra en la Figura 7.2:

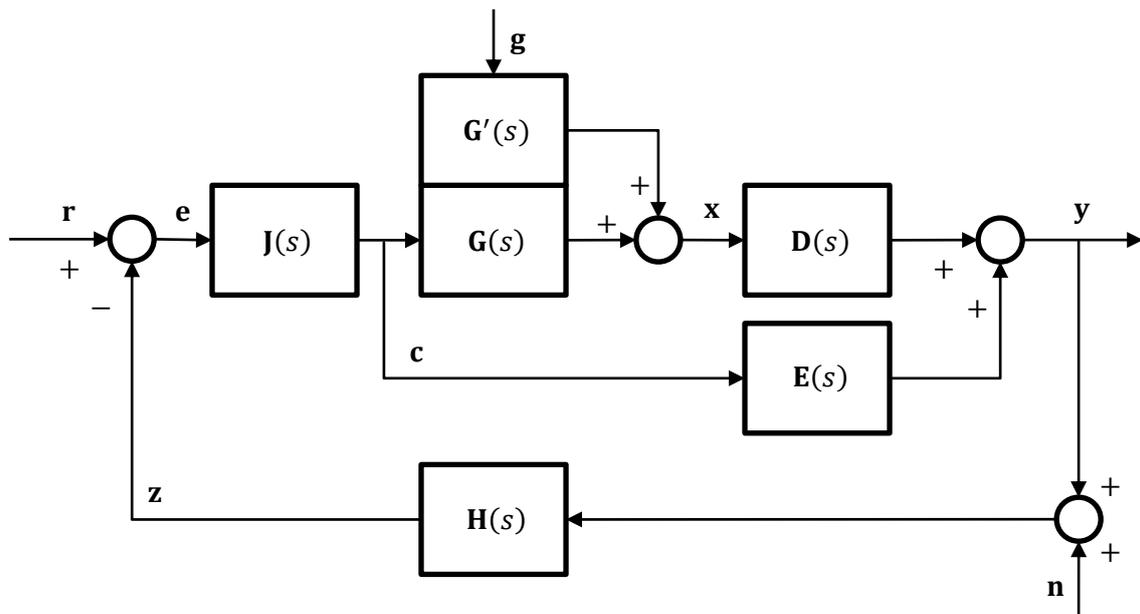


Figura 7.2: Diagrama de bloques de un sistema de control de vuelo.

r	Referencia o entrada	$p \times 1$	H	Realimentación	$p \times q$
z	Realimentación	$p \times 1$	J	Error	$m \times p$
e	Error o actuación	$p \times 1$	G	Aerodinámica	$n \times m$
c	Control	$m \times 1$	G'	Ráfagas	$n \times l$
g	Ráfagas	$l \times 1$	D	Salida	$q \times n$
x	Estado	$n \times 1$	E	Salida	$q \times m$
y	Salida	$q \times 1$			
n	Ruido de sensor	$q \times 1$			

Tabla 7.1: Vectores y matrices de transferencia.

El sistema linealizado, formado por las ecuaciones (2.48) y (2.49), se puede escribir en el dominio temporal de forma matricial como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bc} + \mathbf{Tg} \quad (7.1)$$

Donde el término \mathbf{Ax} representa la dinámica de la aeronave, el término \mathbf{Bc} representa las acciones de control y el término \mathbf{Tg} representa los efectos de la atmósfera no estacionaria.

Aplicando la transformada de Laplace, representada por una barra, se puede escribir:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{G}(s)\bar{\mathbf{c}} + \mathbf{G}'(s)\bar{\mathbf{g}} \quad (7.2)$$

Donde:

$$\mathbf{G}(s) = (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1} \bar{\mathbf{B}} \quad \mathbf{G}'(s) = (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1} \bar{\mathbf{T}} \quad (7.3)$$

Desarrollando desde la salida $\bar{\mathbf{y}}$ hacia atrás el sistema de la Figura 7.2 se encuentra:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{y}} &= \mathbf{D}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{E}\bar{\mathbf{c}} = \\ &= \mathbf{D}(\mathbf{G}\bar{\mathbf{c}} + \mathbf{G}'\bar{\mathbf{g}}) + \mathbf{E}\bar{\mathbf{c}} = \\ &= \mathbf{DG}'\bar{\mathbf{g}} + (\mathbf{DG} + \mathbf{E})\bar{\mathbf{c}} = \\ &= \mathbf{DG}'\bar{\mathbf{g}} + (\mathbf{DG} + \mathbf{E})\mathbf{J}\bar{\mathbf{e}} = \\ &= \mathbf{DG}'\bar{\mathbf{g}} + (\mathbf{DG} + \mathbf{E})\mathbf{J}(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{z}}) = \\ &= \mathbf{DG}'\bar{\mathbf{g}} + (\mathbf{DG} + \mathbf{E})\mathbf{J}\bar{\mathbf{r}} - (\mathbf{DG} + \mathbf{E})\mathbf{J}\bar{\mathbf{z}} = \\ &= \mathbf{DG}'\bar{\mathbf{g}} + (\mathbf{DG} + \mathbf{E})\mathbf{J}\bar{\mathbf{r}} - (\mathbf{DG} + \mathbf{E})\mathbf{JH}(\bar{\mathbf{n}} + \bar{\mathbf{y}}) \end{aligned} \quad (7.4)$$

Despejando la salida $\bar{\mathbf{y}}$:

$$(\mathbf{I} + (\mathbf{DG} + \mathbf{E})\mathbf{JH})\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{DG}'\bar{\mathbf{g}} + (\mathbf{DG} + \mathbf{E})\mathbf{J}\bar{\mathbf{r}} - (\mathbf{DG} + \mathbf{E})\mathbf{JH}\bar{\mathbf{n}} \quad (7.5)$$

A partir de esta ecuación se encuentran las funciones de transferencia de $\bar{\mathbf{r}}$, $\bar{\mathbf{n}}$ y $\bar{\mathbf{g}}$ a la salida $\bar{\mathbf{y}}$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{y}} &= \mathbf{G}_{yg}\bar{\mathbf{g}} + \mathbf{G}_{yr}\bar{\mathbf{r}} + \mathbf{G}_{yn}\bar{\mathbf{n}} \\ \mathbf{G}_{yg} &= (\mathbf{I} + \mathbf{FH})^{-1}\mathbf{DG}' \\ \mathbf{G}_{yr} &= (\mathbf{I} + \mathbf{FH})^{-1}\mathbf{F} \\ \mathbf{G}_{yn} &= -(\mathbf{I} + \mathbf{FH})^{-1}\mathbf{FH} \\ \mathbf{F} &= (\mathbf{DG} + \mathbf{E})\mathbf{J} \end{aligned} \quad (7.6)$$

7.2 Estabilidad de sistemas en lazo cerrado

Considérese de nuevo un sistema de lazo cerrado sencillo como el de la Figura 7.1, en el que se considerará que todas las variables y funciones de transferencia son escalares. La función de transferencia de la entrada r a la salida y es:

$$G_{yr} = \frac{F}{1 + FH} \quad (7.7)$$

A la función FH se le denomina ganancia en lazo abierto. Si para alguna $s = i\omega$ esta función vale -1 , o en forma polar $1\angle -180^\circ$, se tiene $G_{yr} = \infty$, por lo que la salida puede oscilar libremente sin ninguna entrada.

En base a esto se establece el criterio de estabilidad de Nyquist. Si la ganancia en lazo abierto es menor que 1 para una fase de -180° , o bien la fase es menor (menos negativa) que -180° cuando la ganancia en lazo abierto es 1, el sistema será estable.

A partir de este criterio se definen también el margen de ganancia GM y el margen de fase PM. El primero es la diferencia entre $1 \angle -180^\circ$ y la ganancia en lazo abierto para una fase de -180° . El segundo es la diferencia entre los -180° y la fase para la que la ganancia es 1. En el diagrama de Nichols quedan muy bien representados estos parámetros.

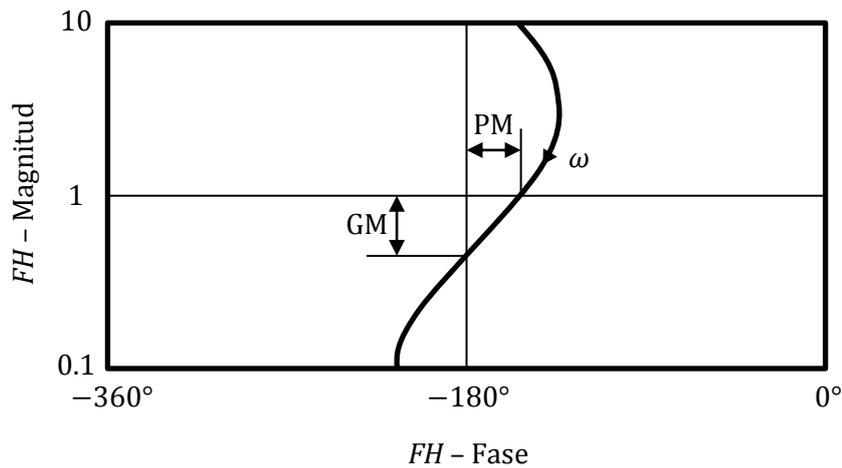


Figura 7.3: Diagrama de Nichols.

Estos parámetros de estabilidad se pueden ajustar mediante el uso de un controlador $J(s)$ como muestra la Figura 7.4:

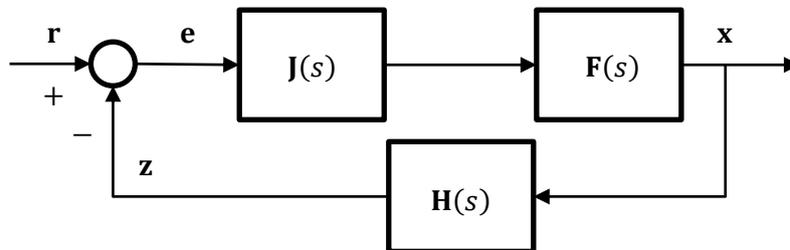


Figura 7.4: Sistema en lazo cerrado con controlador.

Donde la función del controlador normalmente puede incluir un término integral k_1 , un término proporcional k_2 y un término derivativo k_3 :

$$J(s) = \frac{k_1}{s} + k_2 + k_3 s \quad (7.8)$$

El término integral elimina el error estacionario mientras que el derivativo se anticipa al valor futuro del error y reduce las oscilaciones. El término proporcional permite ajustar la ganancia en lazo abierto. La función de transferencia G_{yr} y la ganancia en lazo abierto quedan ahora:

$$G_{yr} = \frac{FJ}{1 + FJH} \quad (7.9)$$