

TD

Fonctions usuelles

EXERCICE 1 ☒ ☐ ☐

Tracer le graphe des fonctions suivantes le plus précisément possible (à la main). Une étude de fonction n'est pas nécessaire.

$$\textcircled{1} \quad x \mapsto \sqrt{2x-5} + 3. \quad \textcircled{2} \quad x \mapsto \frac{3}{2x-1} - 2 \quad \textcircled{3} \quad x \mapsto \frac{x^2}{3} - 5$$

► Indication

► Correction

EXERCICE 2 ☒ ☐ ☐

Trouver les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes:

$$\begin{array}{ll} \textcircled{1} \quad x \mapsto e^{-\sqrt{x+2}} & \textcircled{4} \quad x \mapsto \frac{\sin x}{x} \\ \textcircled{2} \quad x \mapsto \frac{\sqrt{\ln(x)}}{\ln(x)} & \textcircled{5} \quad x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} \\ \textcircled{3} \quad x \mapsto \frac{x+x \ln(x)}{x \ln(x)-5} & \textcircled{6} \quad x \mapsto \cos(x^2) e^{-x} \\ & \textcircled{7} \quad x \mapsto \sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) \end{array}$$

► Indication

► Correction

EXERCICE 3 ☒ ☐ ☐

Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes et dire si elles sont prolongeables par continuité.

$$\begin{array}{ll} \textcircled{1} \quad x \mapsto \frac{x-|x|}{x}, & \textcircled{2} \quad x \mapsto \frac{1}{x-3} - \frac{4}{x^2-2x-3}, \\ \textcircled{3} \quad x \mapsto \frac{\sin(x)}{x} & \textcircled{4} \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1}, & \text{si } x \neq 1, \\ -8, & \text{si } x = 1, \end{cases} \end{array}$$

⑤ $x \mapsto \lfloor x \rfloor$,

⑥ $x \mapsto \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$,

⑦ $x \mapsto \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$,

⑧ $x \mapsto \frac{x^3 + 5x + 6}{x^3 + 1}$,

⑨ $x \mapsto \frac{\sin(nx)}{\sin x}$.

► Indication

► Correction

EXERCICE 4 ■ ■ □

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Dériver les fonctions suivantes sur leur domaine de dérivabilité que l'on précisera

① $x \mapsto |x^2 - 9|$

④ $g : x \mapsto \ln(\ln(\ln x))$,

② $x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

⑤ $h : x \mapsto \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax}$,

③ $x \mapsto \ln \left(\frac{a + b \tan x}{a - b \tan x} \right)$,

⑥ $x \mapsto \frac{\sin x}{(\cos x + 2)^4}$.

Finir ensuite l'étude de chaque fonction.

► Indication

► Correction

EXERCICE 5 ■ □ □

① Montrer que toute fonction polynomiale de degré impair s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

② Expliquer dans quels cas, une fonction polynomiale de degré pair ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ ou s'annule plusieurs fois sur $\mathbb{R}$. On pourra montrer que la fonction admet un minimum ou un maximum global sur $\mathbb{R}$.

► Indication

► Correction

EXERCICE 6 ■ ■ □

On définit f sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 1$ et si $x \neq 0$, $f(x) = x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.

Calculer la limite de f en ∞ , puis en 0. Etudier en tout point la continuité de f .

► Indication

► Correction

EXERCICE 7 ■ □ □

Déterminer les nombres a , b et c tels que les applications suivantes soient continues sur $\mathbb{R}$.

① $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + b, & \text{si } x < 2; \\ a, & \text{si } x = 2; \\ bx^2 + 2x + 5, & \text{si } x > 2. \end{cases}$

② $g(x) = \begin{cases} (ax)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ a \sin \left(\frac{\pi}{2} x \right) & \text{si } x > 1 \end{cases}$

③ $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ ae^{-x} + be^x + cx(e^x - e^{-x}) & \text{si } 0 < x < 1 \\ e^{2-x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

► Indication

► Correction

EXERCICE 8 ■ □ □

Sur quel domaine suffit-il d'étudier les fonctions $f : x \mapsto \cos(2x) - \sin(x)$ et $g : x \mapsto \sin \frac{x}{2} + \sin x$?

Etudier ces fonctions.

► Indication

► Correction

EXERCICE 9 ■ ■ ■

Soit $k \geq 0$. On dit qu'une fonction f de I dans $\mathbb{R}$ est **lipschitzienne** de rapport k (ou k -lipschitzienne) si

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

① Montrer qu'une fonction lipschitzienne est continue.

② Montrer que l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur I est stable par addition.

③ Montrer que la composée de deux fonctions lipschitziennes est lipschitzienne.

④ Montrer que si f est lipschitzienne sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$, elle l'est aussi sur $[a, c]$.

► Indication

► Correction

EXERCICE 10 ■ □ □

Calculer

① $\arcsin\left(\sin\left(\frac{18\pi}{5}\right)\right),$

En précisant l'intervalle de définition,

② $\arccos\left(\sin\left(\frac{18\pi}{5}\right)\right),$

⑦ $\cos(\arctan(x)),$

③ $\arcsin\left(\sin\left(\frac{15\pi}{7}\right)\right),$

⑧ $\sin(\arctan(x)),$

④ $\arcsin\left(\sin\left(\frac{10\pi}{3}\right)\right),$

⑨ $\tan(\arcsin(x)),$

⑤ $\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right),$

⑥ $\tan\left(\arctan\left(\frac{\pi}{2}\right)\right).$

⑩ $\tan(\arccos(x)).$

► Indication ► Correction

EXERCICE 11 ■ □ □Prouver que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $\arctan(x) + 2 \arctan(\sqrt{1+x^2} - x) = \frac{\pi}{2}$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 12 ■ □ □Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\arcsin(x) + \arcsin(\sqrt{1-x^2}) = \frac{\pi}{2}$. ► Indication ► CorrectionEXERCICE 13 ■ □ □Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\arcsin(\tan(x)) = x$ ► Indication ► CorrectionEXERCICE 14 ■ □ □Simplifier $\arctan(k+1) - \arctan k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis en déduire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \arctan \frac{1}{k^2 + k + 1}.$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 15 ■ ■ ■On appelle suite de Fibonacci la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$.

① Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n$ (identité de Cassini).

② En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\arctan \frac{1}{F_{2n}} = \arctan \frac{1}{F_{2n+1}} + \arctan \frac{1}{F_{2n+2}}$.

③ En déduire l'existence et la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \arctan \frac{1}{F_{2k+1}}$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 16 ■ ■ □Démontrer que $\forall x \in [0, +\infty[$, $\frac{x}{1+x^2} \leq \arctan(x) \leq x$. ► Indication ► CorrectionEXERCICE 17 ■ ■ □

① Montrer que $\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$.

② Montrer l'égalité $2 \arccos \frac{3}{4} = \arccos \frac{1}{8}$.

③ Calculer $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8}$.

④ Montrer que l'arc $\theta = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$ est un arc remarquable.
Cette formule est appelé la *formule de Machin* (John Machin 1706).

► Indication ► Correction

EXERCICE 18 ■ ■ □Montrer par récurrence que la fonction $f = \arctan$ est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f^{(n)}(x) = (n-1)! \cos^n(f(x)) \sin\left(n\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 19 ■ □ □

Simplifier

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 20 ■ ■ □

Établir que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\operatorname{sh} x \geq x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch} x \geq 1 + \frac{x^2}{2}$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 21 ■ □ □

Calculer $C_n = \sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(kx)$ et $S_n = \sum_{k=0}^n \operatorname{sh}(kx)$, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 22 ■ ■ □

Résoudre le système d'inconnues x et y dans $\mathbb{R}$ donné par $\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = a \operatorname{ch} \alpha \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = a \operatorname{sh} \alpha \end{cases}$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 23 ■ ■ □

① Simplifier $\arctan \operatorname{sh} x + \arccos \operatorname{th} x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

② Résoudre l'équation $\operatorname{th} x = \frac{5}{13}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

③ En déduire que $\arctan \frac{5}{12} + \arccos \frac{5}{13} = \frac{\pi}{2}$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 24 ■ ■ □

Résoudre les systèmes suivants :

$$\textcircled{1} \begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases} \quad \textcircled{2} \begin{cases} e^x e^{2y} = a \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 25 ■ ■ □

Soit $y \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. On pose $x = \ln \left(\tan \left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right)$.

Montrer que $\operatorname{th} \frac{x}{2} = \tan \frac{y}{2}$, $\operatorname{th} x = \sin y$ et $\operatorname{ch} x = \frac{1}{\cos y}$. ► Indication

► Correction

EXERCICE 26 ■ ■ □

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\arctan(\operatorname{sh} x)| = \arccos \left(\frac{1}{\operatorname{ch} x} \right).$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 27 ■ ■ □

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, calculer

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\operatorname{ch}(kx) \operatorname{ch}((k+1)x)}.$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 28 ■ ■ □

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, simplifier $P_n(x) = \prod_{k=1}^n \operatorname{ch} \left(\frac{x}{2^k} \right)$ en calculant $P_n(x) \operatorname{sh} \left(\frac{x}{2^n} \right)$.

► Indication ► Correction

Indications

INDICATION POUR L'EXERCICE 1

[↩ retour à l'EXERCICE 1](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 2

[↩ retour à l'EXERCICE 2](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 3

On doit regarder les points où la fonction n'est pas définie, et vérifier si elle a une limite finie à ces points.

Pour (5) et (6), il y a une infinité de points de changement de définition, à étudier.

[↩ retour à l'EXERCICE 3](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 4

[↩ retour à l'EXERCICE 4](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 5

On se rappelle du TVI, et qu'il faut l'utiliser sur une intervalle fermé !

[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 6

Attention, f a beaucoup de points de discontinuité à cause de la partie entière.

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 7

Les fonctions sont continues sur chaque morceau sur lesquels elles sont définies, comme composées de fonctions usuelles. Il suffit de regarder les limites aux points de jonctions de ces morceaux.

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 8

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 9

② **Stable par addition** : Somme de 2 fonctions lipschitzienne est lipschitzienne. En général, il suffit d'utiliser la définition.

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 10

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 11

Montrer une égalité est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est montrer, en passant tout à gauche, que la fonction obtenue est constante. On peut dériver pour montrer cela.

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 12

On peut appliquer $\sin$.

Attention $\sin a = \sin b$ n'implique pas que $a = b$.

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 13

On peut appliquer $\sin$.

Attention $\sin a = \sin b$ n'implique pas que $a = b$.

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 14

On applique $\tan$ ce qui nous donne une formule qui permet de faire apparaître une somme télescopique.

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 15

- ① Par récurrence
- ② Calculer $\tan \left(\arctan \frac{1}{F_{2n}} - \arctan \frac{1}{F_{2n+2}} \right)$.
- ③ On fait apparaître une somme télescopique.

[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 16

Etudier les fonctions en passant tout à gauche dans chaque inégalité, une après l'autre !

[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 17

[↩ retour à l'EXERCICE 17](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 18

Il suffit de dériver la fonction $x \mapsto (n-1)! \cos^n(f(x)) \sin \left(n \left(f(x) + \frac{\pi}{2} \right) \right)$ et retrouver l'égalité en $n+1$.

[↩ retour à l'EXERCICE 18](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 19

On étudie la fonction qui correspond à l'expression proposée.

[↩ retour à l'EXERCICE 19](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 20

On passe à gauche et on étudie les fonctions obtenues.

[↩ retour à l'EXERCICE 20](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 21

On remarque que $C_n + S_n = \sum_{k=0}^n e^{kx}$ et $C_n - S_n = \sum_{k=0}^n e^{-kx}$, deux sommes géométriques.

[↩ retour à l'EXERCICE 21](#)INDICATION POUR L'EXERCICE 22

Additionner et soustraire les deux équations.

[↩ retour à l'EXERCICE 22](#)INDICATION POUR L'EXERCICE 23[↩ retour à l'EXERCICE 23](#)INDICATION POUR L'EXERCICE 24

On utilise la définition de $x^y = \dots$.

Pour (2), obtenir un système somme/produit en x et $2y$ puis le résoudre.

[↩ retour à l'EXERCICE 24](#)INDICATION POUR L'EXERCICE 25[↩ retour à l'EXERCICE 25](#)INDICATION POUR L'EXERCICE 26

On dérive, où l'on peut, et on montre que les dérivées sont égales.

[↩ retour à l'EXERCICE 26](#)INDICATION POUR L'EXERCICE 27

Observer que $\operatorname{th}((n+1)x) - \operatorname{th}(nx) = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}(nx) \operatorname{ch}((n+1)x)}$

[↩ retour à l'EXERCICE 27](#)INDICATION POUR L'EXERCICE 28

Ressemble beaucoup à une somme déjà calculée avec $\cos$.

Montrer la formule $\operatorname{sh}(2a) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(a)$.

[↩ retour à l'EXERCICE 28](#)

Corrections

Correction de l'EXERCICE 1

↩ retour à l'EXERCICE 1

Correction de l'EXERCICE 2

① 0 ② 0 ③ 1 ④ 0 ⑤ 1 ⑥ 0 ⑦ 1/2

↩ retour à l'EXERCICE 2

Correction de l'EXERCICE 3

① Soit a un nombre réel.

①.a $a < 0$: Il existe $r > 0$ tel que $]a - r, a + r[\subset]-\infty, 0[$ et donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x) = 2 = f(a)$$

et f est continue au point a .

①.b $a > 0$: Il existe $r > 0$ tel que $]a - r, a + r[\subset]0, +\infty[$ et donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x) = 0 = f(a)$$

et f est continue au point a .

①.c $a = 0$: On étudie la limite de f en 0.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = 2 = f(0) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 0 \neq f(0).$$

On en déduit que f n'admet pas de limite en 0 donc f n'est pas continue en 0 (on dit que f est **est discontinu** au point 0). Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}^*$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

②

③

④ Soit a un nombre réel.

④.a Si $a \neq 1$, alors f est continue en a , c'est le produit d'applications continues :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3}{x - 1} = \frac{2a^4 - 6a^3 + a^2 + 3}{a - 1} = f(a).$$

④.b Si $a = 1$, 1 est une racine du polynôme $2X^4 - 6X^3 + X^2 + 3$, on peut donc mettre $(X - 1)$ en facteur :

$$2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3 = (x - 1)(2x^3 - 4x^2 - 3x - 3)$$

et donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} (2x^3 - 4x^2 - 3x - 3) = -8 = f(1).$$

On en déduit que f est continue au point 1.

f est donc continue en tout point de $\mathbb{R}$. f est continue sur $\mathbb{R}$.

⑤

⑥ f est définie sur $\mathbb{R}$, par définition de la partie entière. Soient n un entier et a un nombre réel dans $[n, n + 1[$.

⑥.a $a \in]n, n + 1[$: Dans ce cas, il existe un nombre réel $r > 0$ tel que

$$]a - r, a + r[\subset]n, n + 1[\quad \text{et} \quad (\forall x \in]a - r, a + r[), \quad f(x) = \sqrt{x - n}.$$

On en déduit que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \sqrt{x - n} = \sqrt{a - n} = f(a).$$

Pour tout entier n , f est continue en tout point a de $]n, n + 1[$.

⑥.b $a = n$: Dans ce cas, pour tout $x \in]a - 1, a + 1[=]n - 1, n + 1[$, on a

$$E(x) = n - 1 \quad \text{si} \quad x \in]n - 1, n[\quad \text{et} \quad E(x) = n \quad \text{si} \quad x \in]n, n + 1[.$$

Donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x < n}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x < n}} \sqrt{x - (n-1)} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x > n}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x > n}} \sqrt{x - n} = 0.$$

f n'admet pas de limite en $a = n$, f n'est pas continue en n . On peut remarquer que :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x > n}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x > n}} \sqrt{x - n} = 0 = f(n)$$

et donc f est continue à droite en n . On peut résumer :

- f est continue en tout point $a \notin \mathbb{Z}$: f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
- f est continue à droite en tout point de $\mathbb{Z}$.

⑦

⑧ f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par une application rationnelle. f est donc continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. D'autre part

8.a) -1 est une racine du polynôme $X^3 + 5X + 6$. Par division euclidienne on obtient

$$x^3 + 5x + 6 = (x + 1)(x^2 - x + 6).$$

8.b) De même : $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)$.

On en déduit que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x \neq -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x \neq -1}} \frac{x^2 - x + 6}{x^2 + x + 1} = 8.$$

On en déduit que l'on peut prolonger f par continuité sur $\mathbb{R}$ en définissant l'application $\tilde{f}$ par :

$$\tilde{f}(x) = f(x) \text{ si } x \neq -1 \quad \text{et} \quad \tilde{f}(-1) = 8.$$

$\tilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

↩ retour à l'EXERCICE 3

Correction de l'EXERCICE 4

- ① Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$, $f'(x) = \begin{cases} 2x, & |x| > 3, \\ -2x, & |x| < 3. \end{cases}$
 $f'_g(3) = -6$, $f'_d(3) = 6 \Rightarrow$ non dérivable en $x = \pm 3$.

- ② f n'est pas continue en 0, donc non dérivable en 0.
 Pour $x \neq 0$, $f'(x) = 1$.

- ③ $\tan x$ défini si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, Le logarithme défini si le quotient est positif, donc

$$(a + b \tan x)(a - b \tan x) > 0 \iff a^2 - b^2 \tan^2 x > 0 \Rightarrow |\tan x| < \frac{|a|}{|b|}.$$

Pour tout x dans l'ensemble de définition, $f'(x) = \frac{2ab \sec^2 x}{a^2 - b^2 \tan^2 x}$

- ④ Pour tout $x > e$, $g'(x) = \frac{1}{\ln(\ln x)} \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}$.

- ⑤ Il faut que $(a, b) \neq (0, 0)$.
 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = e^{ax} \cos(bx)$.

- ⑥ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{\cos x (\cos x + 2) + 4 \sin^2 x}{(\cos x + 2)^5}$.

↩ retour à l'EXERCICE 4

Correction de l'EXERCICE 5

- ① Les limites en $\pm\infty$ permettent de donner l'existence d'une image de f négative et d'une autre positive, disons en a et b respectivement.
 On applique le TVI sur l'intervalle entre les points a et b et on obtient le résultat.

- ② Supposons, sans perte de généralité, que le coefficient dominant du polynôme est positif.
 On montre par l'absurde, que la fonction doit avoir un minimum, sinon elle tendrait vers $+\infty$ en un point de $\mathbb{R}$, et ne serait pas continue.
 Si ce minimum est strictement positif, alors f n'a aucune racine, sinon, le TVI montre qu'elle a au moins 2 racines, en utilisant les intervalles fermés comme dans ①.

↩ retour à l'EXERCICE 5

Correction de l'EXERCICE 6

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$, car $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$, pour tout $x > 1$.

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = +\infty$, car $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = -1$, pour tout $x < -1$.

En 0^+ , $\frac{1}{x} + 1 \leq \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x}$, donc $1 + x \leq x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 1$.

D'après le théorème d'encadrement $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$. Même raisonnement en

0^- .

Pour $|x| > 1$, comme déjà expliqué pour les limites en $\pm\infty$, la fonction est continue car la partie entière est constante.

Étudions f sur $[-1, 1]$. Sur tout intervalle de la forme, $]1/n, 1/(n+1)[$, avec $n \in \mathbb{Z}^*$, la partie entière est encore constante, donc f est continue. Il reste à étudier les points de jonction. Or, pour tout $n > 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1/n^+} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \lim_{x \rightarrow 1/n^+} x(n-1) = \frac{n-1}{n} \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 1/n^-} xn = \lim_{x \rightarrow 1/n^-} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

Le même calcul pour $n < 1$, montre que f n'est pas continue aux points $1/n$, où $n \in \mathbb{Z}^*$.

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

Correction de l'EXERCICE 7

- ① Si a est un nombre réel différent de 2, alors f est continue en a : f étant définie par une application polynômiale. Pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$ il faut et il suffit que f soit continue au point $a = 2$. On a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (x+1)^2 = 9 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (x^2 + b) = 4 + b.$$

f est continue en 2 si et seulement si

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = 9 = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = 4 + b = f(2) = a.$$

On en déduit que $a = 9$ et $b = 5$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si $a = 9$ et $b = 5$.

- ② La fonction est clairement continue sur $]1; +\infty[$ et sur $] - \infty; 1[$. Pour que f soit continue, il faut et il suffit que f admette une limite à droite et à gauche en 1 et que ces limites coïncident. Mais on a

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a \sin(\pi/2) = a \quad \text{tandis que} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a^2$$

La fonction f est donc continue en 1 si et seulement si $a^2 = a$ c'est-à-dire si et seulement si $a = 1$ ou $a = 0$.

- ③ On fait la même chose, mais on doit étudier cette fois la continuité à droite et à gauche en 0 et en 1, la fonction g étant clairement continue sur $] - \infty; 0[$, sur $]0; 1[$ et sur $]1; +\infty[$. On a d'une part

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \alpha + \beta$$

D'autre part, on a

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \alpha e^{-1} + \beta e^1 + \gamma (e^1 - e^{-1}) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = e^1$$

La fonction g est continue si et seulement si le triplet (α, β, γ) vérifie le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ e^{-1}\alpha + e^1\beta + (e^1 - e^{-1})\gamma = e^1 \end{cases}$$

On résout ce système, par exemple en retirant $e^{-1}L_1$ à L_2 . On trouve le système équivalent :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ (e^1 - e^{-1})\beta + (e^1 - e^{-1})\gamma = e^1 - e^{-1} \end{cases}$$

On peut simplifier par $e^1 - e^{-1}$ dans la seconde équation et on trouve

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \beta + \gamma = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta = 1 - \gamma \\ \gamma = \gamma \end{cases}$$

L'ensemble des triplets pour lesquels la fonction g est continue est donc donné par $\{(0, 1, 0) + \gamma(1, -1, 1) \mid \gamma \in \mathbb{R}\}$.

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

Correction de l'EXERCICE 8

f est 2π périodique à cause du sinus, et ni paire ni impaire. Il suffit de l'étudier sur $[-\pi, \pi]$.

g est aussi 2π périodique à cause du sinus, . Il suffit de l'étudier sur $[-\pi, \pi]$.

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

Correction de l'EXERCICE 9

- ① Soit f une fonction k -lipschitzienne. On a, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq |f(x) - f(a)| \leq k|x - a| \xrightarrow{x \rightarrow a} 0,$$

donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$, d'après le théorème d'encadrement.

La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

- ② Soit f et g , deux fonctions lipschitziennes, de rapport respectifs k_f et k_g , sur I un intervalle de $\mathbb{R}$. On a, pour tout $x, y \in I$,

$$|(f+g)(x) - (f+g)(y)| \underset{\substack{\text{Inégalité} \\ \text{triangulaire}}}{\leq} |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leq (k_f + k_g)|x - y|.$$

Donc $f + g$ est lipschitzienne sur I .

- ③ Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$, deux fonctions lipschitziennes, de rapport respectifs k_f et k_g . On a, pour tout $x, y \in I$,

$$|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(y)| = |g(f(x)) - g(f(y))| \leq k_g |f(x) - f(y)| \leq k_f k_g |x - y|.$$

Donc $g \circ f$ est lipschitzienne sur I .

- ④ Soit $x, y \in [a, c]$. Notons k_1 et k_2 les deux rapport de lipschitziannité f sur $[a, b]$ et $[b, c]$, respectivement. On a

$$|f(x) - f(y)| \underset{\substack{\text{Inégalité} \\ \text{triangulaire}}}{\leq} |f(x) - f(b)| + |f(b) - f(y)|.$$

Ainsi une disjonction de cas sur la position de x et y dans les intervalles $[a, b]$ et $[b, c]$, donne le résultat directement, puisque b est dans les deux intervalles.

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

Correction de l'EXERCICE 10

- ① $\frac{18\pi}{5}$ n'est pas un élément de l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On écrit

$$\frac{18\pi}{5} = 4\pi - \frac{2\pi}{5}, \quad \sin\left(\frac{18\pi}{5}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right) \quad \text{et} \quad -\frac{2\pi}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Donc

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{18\pi}{5}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\right) = -\frac{2\pi}{5}.$$

- ② On a

$$(\forall x \in [-1, 1]), \quad \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$$

et on utilise le résultat du point précédent

$$\arccos\left(\sin\left(\frac{18\pi}{5}\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\sin\left(\frac{18\pi}{5}\right)\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{5} = \frac{9\pi}{10}.$$

- ③ $\frac{15\pi}{7}$ n'est pas un élément de l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On écrit

$$\frac{15\pi}{7} = 2\pi + \frac{\pi}{7}, \quad \sin\left(\frac{15\pi}{7}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{7} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Donc

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{15\pi}{7}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right) = \frac{\pi}{7}.$$

- ④ $\frac{10\pi}{3}$ n'est pas un élément de l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On écrit

$$\frac{10\pi}{3} = 3\pi + \frac{\pi}{3} = 2\pi + \pi + \frac{\pi}{3}, \quad \sin\left(\frac{10\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{et} \quad -\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Donc

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{10\pi}{3}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

- ⑤ On a

$$(\forall x \in [-1, 1]), \quad \sin(\arcsin(x)) = x.$$

Donc

$$\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{3}.$$

⑥ On a

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad \tan(\arctan(x)) = x.$$

Donc

$$\tan\left(\arctan\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}.$$

⑦ Pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\arctan(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. D'autre part on a la formule,

$$(\forall y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[), \quad \cos^2(y) = \frac{1}{1 + \tan^2(y)}.$$

Donc

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad \cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

D'autre part, comme $\arctan(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, alors $\cos(\arctan(x))$ est positif. d'où

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

⑧ Pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$\sin(\arctan(x)) = \tan(\arctan(x)) \times \cos(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

⑨ Cette expression n'est définie que si et seulement si $x \notin \{-1, 1\}$ car $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ et $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$. Soit $x \in]-1, 1[$.

$$\tan(\arcsin(x)) = \frac{\sin(\arcsin(x))}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

⑩ Cette expression n'est définie que si et seulement si $x \neq 0$ car $\arccos(x) \in [0, \pi]$ et $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$.

$$\tan(\arccos(x)) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right) = \frac{1}{\tan(\arcsin(x))} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}.$$

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)**Correction de l'EXERCICE 11**

On dérive la fonction qui a pour expression le membre de gauche, et on obtient 0. Il suffit alors à évaluer en 0, ce qui nous donne la valeur de cette fonction constante.

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)**Correction de l'EXERCICE 12**

Tout d'abord, l'équation n'a de sens que pour $x \in [-1, 1]$.

On rappelle que $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$, quand cela a un sens.

Pour tout $x \in [-1, 1]$, et par une formule de duplication,

$$\begin{aligned} \sin(\arcsin(x) + \arcsin(\sqrt{1 - x^2})) &= x \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}^2} + \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - x^2} \\ &= x|x| + 1 - x^2 \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1] , \\ 1 - x^2 & \text{si } x \in [-1, 0] . \end{cases} \end{aligned}$$

On a alors $\sin(\arcsin(x) + \arcsin(\sqrt{1 - x^2})) = \sin(\pi/2) = 1 \iff x \in [0, 1]$.

De plus, pour tout $x \in [0, 1]$, $\arcsin(x) + \arcsin(\sqrt{1 - x^2}) \in [-\pi, \pi]$, par définition de $\arcsin$.

Donc Pour tout $x \in [0, 1]$, $\arcsin(x) + \arcsin(\sqrt{1 - x^2}) = \frac{\pi}{2}$.

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)**Correction de l'EXERCICE 13**

Tout d'abord, l'équation a du sens, seulement si $x \in [-\pi/4, \pi/4]$.

On a, pour tout $x \in [-\pi/4, \pi/4]$,

$$\tan(x) = \sin(x) \iff \sin(x) = \sin(x) \cos(x) \quad \text{car } \cos(x) \geq 0$$

$$\iff \sin(x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = 1 .$$

L'équation $\tan(x) = \sin(x)$ sur $[-\pi/4, \pi/4]$ admet une unique solution 0.

On vérifie que 0 fonctionne bien dans l'équation de départ, ce qui est le cas (Synthèse).

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)**Correction de l'EXERCICE 14**

Il faut juste vérifier que l'égalité des tangentes obtenues reste vraie en passant à $\arctan$.

$$\sum_{k=0}^n \arctan \frac{1}{k^2 + k + 1} = \sum_{k=0}^n \arctan(k + 1) - \arctan k = \arctan(n + 1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} .$$

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)

Correction de l'EXERCICE 15

- ① Pas de difficulté particulière. Pour l'hérédité, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé.

$$\begin{aligned}
 F_{n+2}^2 - F_{n+1}F_{n+3} &= F_{n+2}^2 - F_{n+1}(F_{n+2} + F_{n+1}) \\
 &= F_{n+2}^2 - F_{n+1}F_{n+2} - F_{n+1}^2 \\
 &\stackrel{\text{HR}}{=} F_{n+2}^2 - F_{n+1}F_{n+2} + (-1)^{n+1} - F_nF_{n+2} \\
 &= F_{n+2}^2 - F_{n+2}(F_{n+1} + F_n) + (-1)^{n+1} \\
 &= (-1)^{n+1}.
 \end{aligned}$$

- ② On a, après calculs, $\tan\left(\arctan \frac{1}{F_{2n}} - \arctan \frac{1}{F_{2n+2}}\right) = \frac{F_{2n} - F_{2n+2}}{F_{2n}F_{2n+2} + 1}$.

$$\text{Donc, } \tan\left(\arctan \frac{1}{F_{2n}} - \arctan \frac{1}{F_{2n+2}}\right) = \tan \arctan \frac{1}{F_{2n+1}}$$

$$\iff F_{2n} + F_{2n+2} = \frac{F_{2n}F_{2n+2} + 1}{F_{2n+1}} \stackrel{\text{Cassini}}{=} \frac{F_{2n+1}^2}{F_{2n+1}} = F_{2n+1}, \text{ ce qui est vrai.}$$

En passant à arctan, on montre le résultat.

- ③ $\sum_{k=0}^n \arctan \frac{1}{F_{2k+1}} = \arctan \frac{1}{F_{2n+2}} - \arctan \frac{1}{F_2} + \arctan \frac{1}{F_1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$,
par télescopage. On aura montré auparavant que $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)

Correction de l'EXERCICE 16

On pose $f : x \mapsto \arctan(x) - \frac{x}{1+x^2}$ et $g : x \mapsto \arctan(x) - x$. Tout le monde est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \geq 0$$

$$\text{et } g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = -\frac{x^2}{1+x^2} \leq 0.$$

Or $f(0) = g(0) = 0$, ce qui montre les inégalités par monotonie des fonctions f et g .

[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)

Correction de l'EXERCICE 17

[↩ retour à l'EXERCICE 17](#)

Correction de l'EXERCICE 18

Pour l'initialisation, on utilise $\cos^2 = \frac{1}{1 + \tan^2}$.

Récurrence sans difficulté particulière, sauf la factorisation où l'on utilise $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, et le fait que $\cos(\arctan) = \arctan'$.

[↩ retour à l'EXERCICE 18](#)

Correction de l'EXERCICE 19

Soit $f : x \mapsto \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Alors $D_f = \mathbb{R}$.

On trouve, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (1+x^2)^{-1}$, et $f(0) = 0$, donc $f = \arctan$.

[↩ retour à l'EXERCICE 19](#)

Correction de l'EXERCICE 20

Il suffit d'étudier les fonctions $f : x \mapsto \operatorname{sh} x - x$ et $g : x \mapsto \operatorname{ch} x - 1 + \frac{x^2}{2}$.

[↩ retour à l'EXERCICE 20](#)

Correction de l'EXERCICE 21

On obtient

$$C_n = \frac{\operatorname{ch}(nx/2) \operatorname{sh}((n+1)x/2)}{\operatorname{sh}(x/2)}$$

$$S_n = \frac{\operatorname{sh}(nx/2) \operatorname{sh}((n+1)x/2)}{\operatorname{sh}(x/2)}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 21](#)

Correction de l'EXERCICE 22

En ajoutant et en soustrayant les deux équations on obtient $e^x + e^y = ae^\alpha$, $e^{-x} + e^{-y} = ae^{-\alpha}$. On pose $X = e^x$ et $Y = e^y$ et on résout en faisant apparaître un système coefficient racines.

Les solutions sont

$$\left(\alpha + \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \alpha + \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} \right) \text{ et } \left(\alpha + \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \alpha + \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} \right).$$

[↩ retour à l'EXERCICE 22](#)

Correction de l'EXERCICE 23

[↩ retour à l'EXERCICE 23](#)

Correction de l'EXERCICE 24

① $x = 1/2, y = \sqrt{2}/5$

②

[↩ retour à l'EXERCICE 24](#)

Correction de l'EXERCICE 25

[↩ retour à l'EXERCICE 25](#)

Correction de l'EXERCICE 26

On fait une disjonction de cas pour $x > 0$ et $x < 0$. Par exemple, pour $x > 0$, les deux dérivées son égales à ch^{-1} . On montre l'égalité en évaluant en 1, -1 et 0.

[↩ retour à l'EXERCICE 26](#)

Correction de l'EXERCICE 27

La somme devient télescopique et donne $S_n(x) = \frac{\operatorname{th}((n+1)x)}{\operatorname{sh}(x)}$.

[↩ retour à l'EXERCICE 27](#)

Correction de l'EXERCICE 28

Par récurrence, $P_n(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{2^n}$.

[↩ retour à l'EXERCICE 28](#)