

Resolução de Exame de Matemática – 12ª. classe

Ano: 2014/ 2ª Época



Conceitos básicos

1. **Lógica** é uma ciência que estuda argumentos válidos.

Proposição é uma afirmação que pode ser atribuída qualquer valor lógico sem nenhuma ambiguidade. Geralmente usa-se as letras minúsculas do alfabeto para indicar uma proposição.

Exemplo:

p: Maputo é cidade capital de Mocimboa (F)

q: 5 é um número primo (V)

Negação de uma proposição: é uma operação lógica que consiste em negar uma determinada proposição, tal que a negação de uma proposição verdadeira passa para falsa e falsa passa para verdadeira. O símbolo da negação é $\sim$.

Primeiras leis de De Morgan

- A dupla negação de uma proposição corresponde a afirmação

$$\sim \sim p = p$$

- A negação de uma conjunção corresponde a negações das disjunções.

$$\sim (p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$$

- A negação de uma disjunção corresponde a negações das conjunções.

$$\sim (p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$$

Quantificadores

Quantificadores são operações lógicas que transformam uma expressão proposicional (condição) em proposições lógicas. Na iniciação da lógica matemática estuda-se dois tipos de quantificadores, universal e existencial.

- Quantificador Universal**

É uma operação lógica que transforma uma expressão proposicional $p(x)$ em uma proposição $\forall x \in D_p : p(x)$, em que essa nova proposição é verdadeira se $p(x)$ é uma condição universal.

Assim, a expressão

Exame de Matemática – 12ª classe, Ano: 2014/ 2ª Época**Resoluções****1. Resposta:**

Vamos fazer a representação simbólica da seguinte proposição "**O dobro de qualquer número inteiro positivo é diferente de zero**"

Antes de representar simbolicamente a proposição destacada, veja que nela está presente um quantificador universal "qualquer", na lógica matemática o símbolo deste quantificador é $\forall$ e representemos o número inteiro por x , sendo assim teremos: $\forall_{x \in \mathbb{Z}^+} : 2x \neq 0$

2. Resposta:

De acordo com as propriedades das operações lógicas sobre proposições, a dupla negação corresponde a afirmação, daí temos $\sim \sim p = p$ e foi dito que p é verdadeiro (V), logo a opção A não é falso.

Vamos analisar opção B, de acordo com o problema, $\sim q = \sim F \Leftrightarrow V$, logo a opção B não representa a opção Falsa.

Sabe-se que, a conjunção é uma operação lógica que associa ou faz corresponder um par de proposições p e q a uma outra terceira proposição $p \wedge q$, em que essa última é verdadeira se ambas forem verdadeiras simultaneamente e falsa em todos outros casos. Portanto como foi dito que p é Verdadeiro (V) e q é falso (F), daí que a conjunção de p e q é falso, logo a proposição falsa é da alínea C.

3. Resposta:

Diz-se expressão algébrica racional inteira à toda expressão polinomial. Das alternativas apresentada, a que apresenta expressão algébrica racional inteira é $x + 4$

4. Resposta:

Vamos determinar o domínio de existência da expressão $\log_3(6 - 3x)$

Entende-se por domínio de existência à um conjunto onde o qual possui valores numéricos que dá sentido a determinada expressão algébrica.

A expressão dada é algébrica irracional, sendo logarítmica, visto que a variável aparece sob forma de logaritmando, neste caso temos que recorrer à condição do logaritmo para determinar o domínio de existência da expressão dada, assim:

Vamos representar este resultado no eixo real e depois representa-o sob notação de intervalo:

$$\log_3(6 - 3x) \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} : 6 - 3x > 0\} \Rightarrow 6 - 3x > 0 \Leftrightarrow -3x > -6 \Leftrightarrow x < \frac{-6}{-3} \Leftrightarrow x < 2$$

$$D = [-\infty; +2[$$

5. Resposta:

Pede-se para simplificar a expressão algébrica racional que se segue: $\frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^2 - 3x + 2}$

Em primeiro lugar vamos factorizar o numerador em factores lineares se possível, recorrendo ao método de Briot – Ruffin teremos:

$\Rightarrow x^3 - x^2 - 4x + 4$ O polinómio acima é completo e ordenado, assim fica no quadro proposto por Ruffin:

	1	-1	-4	4
1				
	1	0	-4	0

O resto é igual a zero isso significa que o polinómio é divisível por binómio $x-1$, e os coeficientes do $Q(x)$ estão na última linha

$$\Rightarrow x^3 - x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow (x^2 + 0x - 4)(x - 1) \Leftrightarrow (x^2 - 4)(x - 1) \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2)(x - 1)$$

Vamos factorizar o denominador:

$$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 1) \text{ Voltando na expressão dada teremos:}$$



$\forall x \in D_p : p(x)$ lê-se Todo (qualquer) x de domínio de p tal que $p(x)$.

Quantificador Existencial

É uma operação lógica que transforma uma expressão proposicional $p(x)$ em uma proposição $\exists x \in D_p : p(x)$, em que essa nova proposição é verdadeira se $p(x)$ é uma condição particular.

Assim, a expressão $\exists x \in D_p : p(x)$ lê-se Existe pelo menos um (algum) x de domínio de p tal que $p(x)$.

Álgebra

É uma parte da Matemática que estuda leis e princípios de operações e manipulações entre vários expressões.

• **Expressão algébrica** é uma adição algébrica que possui pelo menos uma incógnita na sua estrutura

• **Classificação das expressões algébricas.**

As expressões algébricas podem ser Racionais ou irracionais, as racionais podem ser inteiras ou fracionárias, as inteiras também chama-se polinomiais.

$$E.A \begin{cases} \text{Racional} \\ \text{Irracional} \end{cases} \begin{cases} \text{Inteira} \\ \text{Fracionaria} \end{cases}$$

Onde E.A quer dizer expressão algébrica.

Exemplos:

Expressão algébrica racional inteira o polinomial:

$$5x^2 - 3x + \frac{1}{2}$$

Expressão algébrica racional fracionária:

$$\frac{5x^2 - 3}{x - 1}, \frac{x}{x - 5}, \frac{x - x^2}{x}$$

Expressão algébrica racional fracionária

$$\frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^2 - 3x + 2} \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+2)(x-1)}{(x-1)(x-2)} \Leftrightarrow x + 2$$

6. Resposta:

Pede-se para determinar o conjunto solução da equação $\log_3(x) + \frac{1}{\log_3(x)} = 2$

A equação que pretendemos resolver é logarítmica, ela não é sempre definida em $\mathbb{R}$, razão pelo qual em primeiro lugar vamos determinar o campo de existência das soluções pela condição dos logaritmos, assim, o logaritmando deve ser positivo:

$$\log_3(x) + \frac{1}{\log_3(x)} = 2 \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge \log_3(x) \neq 0\} \Rightarrow x > 0 \wedge \log_3(x) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \wedge \log_3(x) \neq \log_3(1) \Rightarrow x > 0 \wedge x \neq 1 \Rightarrow D = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

Agora vamos resolver analiticamente a equação dada em $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$:

$$\log_3(x) + \frac{1}{\log_3(x)} = 2 \Leftrightarrow \log_3(x) \times \log_3(x) + 1 = 2 \log_3(x) \Leftrightarrow (\log_3(x))^2 - 2 \log_3(x) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_3(x) - 1)(\log_3(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \log_3(x) - 1 = 0 \vee \log_3(x) - 1 = 0 \Rightarrow \log_3(x) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 3^1 \Leftrightarrow x = 3 \wedge 3 \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \therefore S = \{3\}$$

7. Resposta:

Pede-se para determinar o conjunto solução da inequação $-x^2(x-2) \leq 0$

Vamos resolver essa inequação com auxílio da tabela de variação do sinal, assim:

$$-x^2 = 0 \wedge x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge x = 2$$

x	$]-\infty; 0[$	0	$]0; 2[$	2	$]2; +\infty[$
$-x^2$	+	0	—	-4	—
$x - 2$	—	-2	—	0	+
$-x^2(x - 2)$	—	0	+	0	—

A expressão $-x^2(x-2)$ é não positivo se e somente se

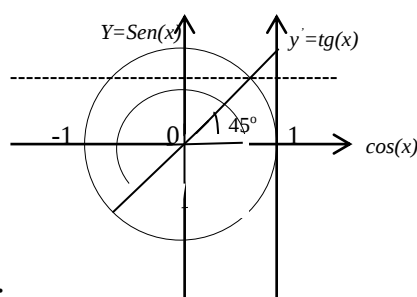
$$x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[, \text{ logo } -x^2(x-2) \leq 0 \text{ se}$$

$x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$, a parte pintada representa o conjunto solução da inequação.

8. Resposta:

Pede-se para determinar o conjunto solução da equação $\text{tg}(x) = 1$

A equação dada é trigonométrica, assim que não há restrições vamos resolver em conjunto de números reais, já sabemos que as funções trigonométricas são funções circulares e as suas equações possuem infinitas soluções em $\mathbb{R}$. Este facto pode ser visto facilmente num círculo trigonométrico como segue:



Sendo assim,

$$\text{tg}(x) = 1 \Leftrightarrow \text{tg}(x) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \pi k\right)$$

$$\vee \text{tg}(x) = \text{tg}\left(\frac{5\pi}{4} + \pi k\right) \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k \vee$$

$$\vee x = \frac{5\pi}{4} + \pi k \vee; \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

9. Resposta:

A expressão simplificada de $\frac{\text{tg}(x)+1}{\cos(x)+\text{sen}(x)}$ segue:



$$\sqrt{x}, \sqrt{\frac{x^3+2}{x-3}}, \sqrt[5]{\frac{x-x^2}{x}}$$

Domínio de existência

Entende-se por domínio de existência a um conjunto onde o qual possui valores numéricos que dá sentido a uma determinada expressão algébrica.

Equação: é uma igualdade entre duas expressões designatórias. As equações podem ser racionais ou irracionais. As equações racionais podem ser inteiras ou fracionárias, e por sua vez as equações racionais inteiras podem ser do primeiro grau, do segundo grau, do terceiro grau, ..., de n grau. Uma equação pode ser exponencial, logarítmica ou trigonométrica.

Módulo ou valor absoluto de um número real

Chama-se módulo ou valor absoluto de um número real x ao próprio número se este for não negativo ou ao seu simétrico se este for negativo.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Equação modular: é toda equação que por meio de princípios de equivalência é redutível a forma:

$$|x| = a$$

A solução da equação acima segue:

$$|x| = a \Leftrightarrow x = a \vee x = -a$$

Cálculo Combinatório e Probabilidades**Princípio Fundamental de Contagem**

Se um acontecimento aleatório A , pode ser realizado em $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ maneiras, então o acontecimento A pode ser realizado em N maneiras totais, tal que

$$N = n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_k$$

Factorial de um número natural

O factorial de um número natural n é dado por:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg}(x)+1}{\cos(x)+\operatorname{sen}(x)} &\Leftrightarrow \frac{\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}+1}{\cos(x)+\operatorname{sen}(x)} \Leftrightarrow \frac{\frac{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}{\cos(x)}}{\cos(x)+\operatorname{sen}(x)} \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}{\cos(x)} \times \frac{1}{\cos(x)+\operatorname{sen}(x)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)} \times \frac{1}{\cos(x)} \Leftrightarrow 1 \times \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\cos(x)} \end{aligned}$$

10. Resposta:

Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, é válida a propriedade de desigualdade triangular, assim,

$$|x+y| \leq |x|+|y|$$

11. Resposta:

A equação $|x-5|=2$ é modular, visto que a incógnita aparece dentro do módulo, ou seja pretendemos determinar abscissas cuja distância com o número 5 é igual a duas unidades, vamos aplicar a definição do módulo de número real, assim:

$$|x-5|=2 \Leftrightarrow x-5=2 \vee x-5=-2 \Leftrightarrow x=2+5 \vee x=-2+5 \Leftrightarrow x_1=7 \vee x_2=3$$

Vamos somar as raízes encontradas: $S = x_1 + x_2 \xRightarrow{x_1=7 \vee x_2=3} S = 7+3 \Leftrightarrow S = 10$

12. Resposta:

Vamos expandir a expressão $(x+y)^5$, assim:

$$(x+y)^5 = C_0^5 x^5 y^0 + C_1^5 x^4 y^1 + C_2^5 x^3 y^2 + C_3^5 x^2 y^3 + C_4^5 x^1 y^4 + C_5^5 x^0 y^5$$

$$\text{Repare que o quinto termo é } C_4^5 x^1 y^4 = \frac{5!}{(5-4)! \times 4!} xy^4 = \frac{5 \times 4!}{1! \times 4!} xy^4 = 5xy^4$$

13. Resposta:

Vamos determinar o conjunto solução da equação $\frac{(n-1)!}{(n+1)!-n!} = \frac{1}{81}$, em $\mathbb{N}$;

$$\begin{aligned} \frac{(n-1)!}{(n+1)!-n!} &= \frac{1}{81} \Leftrightarrow \frac{(n-1)!}{(n+1)n(n-1)!-n(n-1)!} = \frac{1}{81} \Leftrightarrow \frac{(n-1)!}{(n-1)![n(n+1)-n]} = \frac{1}{81} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n^2+n-n} = \frac{1}{81} \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} = \frac{1}{81} \Leftrightarrow 1 \times 81 = n^2 \times 1 \Leftrightarrow 81 = n^2 \Leftrightarrow n^2 = 81 \Leftrightarrow n = \pm \sqrt{81} \\ &\Leftrightarrow n = \pm 9 \Rightarrow n_1 = -9 \vee n_2 = +9; n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 9 \end{aligned}$$

14. Resposta:

O problema diz que existe cinco candidatos para serem escolhidos, mas o eleitor deve escolher apenas 3 pessoas dessas 5, sendo um presidente, um secretário e um tesoureiro, o presidente uma vez escolhido já não pode voltar a ser escolhido para ser secretário e tesoureiro, o secretário uma vez escolhido já não pode voltar a ser escolhido para ser tesoureiro. Para encontrar o número total de maneiras para essa escolha, existem duas saídas: por princípio fundamental da contagem ou por uso da fórmula de arranjos simples, assim:

i. *Princípio fundamental da contagem:*

Para escolher o presidente há 5 possibilidades $n_1 = 5$

Para escolher o secretário há 4 possibilidades $n_2 = 4$

Para escolher o tesoureiro há 3 possibilidades $n_3 = 3$

Portanto, o número total de maneiras diferentes para eleger estes três candidatos é dado por:

$$n = n_1 \times n_2 \times n_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

ii. *Por uso da fórmula de arranjos*

A ordem aqui interessa, então



$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$$

Permutação

A permutação de n elementos tomados p a p , é dado por:

$$P_n = n! \text{ ou}$$

$$P_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$$

Aranjos Simples

Aranjos simples de n elementos tomados p a p é dado por:

$$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!}, n > p$$

Combinação simples

Combinação simples de n elementos tomados p a p é dado por:

$$C_p^n = \frac{n!}{(n-p)! \times p!}, n > p$$

Binómio de Newton

Binómio de Newton é uma expressão que envolve combinação simples, essa expressão é usada para desenvolver os polinómios que aparecem sob forma de binómios potenciais

$$(x+y)^n = C_0^n x^n + \dots + C_n^n y^n$$

Definição clássica de Probabilidade

Se os acontecimentos elementares forem equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento A é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimento e o número de casos possíveis.

$$P(A) = \frac{n(C.F)}{n(C.P)}, n(C.F) \geq n(C.P)$$

Função real de variável natural
Uma Sucessão de números reais

(a_n) : é uma função f em que o domínio é o conjunto dos números naturais e as imagens são números reais

$$f: IN \rightarrow IR$$

$$n \rightarrow a_n$$

Sucessão Monótona

Uma sucessão (a_n) é **crecente** se cada termo é maior ou igual ao termo anterior, ou seja, se:

$$a_{n+1} \geq a_n, \forall n \in IN \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} \geq a_n, \forall n \in IN$$

$$n = 5; p = 3 \Rightarrow A_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

A eleição pode ser feita em 60 maneiras diferentes.

15. Resposta:

Este é um problema muito simples que envolve cálculo de probabilidades, de acordo com o enunciado temos:

$$n(S) = 30; n(A) = 15 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \Rightarrow P(A) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

A probabilidade de um indivíduo ser escolhido ao acaso e ter olhos castanhos é de 50%.

16. Resposta:

Uma sucessão u_n é infinitamente grande negativa, se se verificar a seguinte condição:

$$\lim(u_n) = -\infty \Leftrightarrow n \rightarrow \infty \Rightarrow u_n \rightarrow -\infty$$

A opção **B** tem a sucessão infinitamente grande negativa, veja:

$$\lim(13-n) = 13 - \infty = -\infty \Leftrightarrow n \rightarrow \infty \Rightarrow (13-n) \rightarrow -\infty$$

17. Resposta:

Pergunta se, qual é o centésimo quinto número ímpar? Essa pergunta equivale dizer qual é o número ímpar que está na posição 105?

Sabe-se que o conjunto de números ímpares é um conjunto ordenado, em que cada elemento pode ser obtido pela fórmula: $a_n = 2n-1$, neste caso para encontrar o centésimo quinto termo (105°) basta substituir o n por 105, assim,

$$a_n = 2n-1 \Rightarrow a_{105} = 2 \times 105 - 1 \Leftrightarrow a_{105} = 210 - 1 \Leftrightarrow a_{105} = 209, \text{ logo o}$$

centésimo quinto número ímpar é 209.

18. Resposta:

O problema diz que o termo médio de uma PA de 5 termos é igual a 11, assim

$$a_1; a_2; a_3 = 11; a_4; a_5, \text{ Repare que o termo médio dito é o termo de ordem 3.}$$

$$a_1 + a_5 = 2 \times 11 \wedge a_2 + a_4 = 2 \times 11; a_2; S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \Leftrightarrow S_5 = a_1 + a_5 + a_2 + a_4 + a_3$$

$$S_5 = 2 \times 11 + 11 + 2 \times 11 \Leftrightarrow S_5 = 22 + 11 + 22 \Leftrightarrow S_5 = 55$$

19. Resposta:

A razão de uma PG é igual a 0.3 ($q = 0.3 = \frac{3}{10}$) e o segundo termo é 0.9 (

$$a_2 = 0.9 = \frac{9}{10})$$

De uma maneira geral o termo de uma PG é dado por: $u_n = a_1 q^{n-1}$

$$u_2 = a_1 \left(\frac{3}{10} \right)^{2-1} \Leftrightarrow \frac{9}{10} = a_1 \times \frac{3}{10} \Leftrightarrow 9 = 3a_1 \Leftrightarrow 3a_1 = 9 \Leftrightarrow a_1 = \frac{9}{3} \Rightarrow a_1 = 3$$

$$\Rightarrow a_n = 3 \times \left(\frac{3}{10} \right)^{n-1} \Leftrightarrow a_n = 3(0.3)^{n-1}$$

20. Resposta:

Vamos determinar a soma de todos termos da sucessão $\left(1; \frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \dots \right)$

Seja $a_1 = 1; a_2 = \frac{1}{3}; a_3 = \frac{1}{9}; \dots \Rightarrow q = \frac{1}{9} \div \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \div 1 \Rightarrow q = \frac{1}{3}$, a soma de n termos de uma PG é dado por:



Uma sucessão (a_n) é **decrescente** se cada termo é menor ou igual ao termo anterior, ou seja, se:

$$a_{n+1} \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a_{n+1} \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma sucessão crescente ou decrescente diz-se monótona.

Sucessão limitada

Uma sucessão (a_n) é **limitada** se existirem dois números reais m e M tais que:

$$m \leq a_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$$

Progressão aritmética (PA)

Uma sucessão (a_n) é uma **progressão aritmética** (P.A) se existe um número real r , tal que

$$a_{n+1} - a_n = r, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ao número r chama-se diferença da progressão aritmética.

Termo geral de P.A:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

A soma de n termos consecutivo de uma progressão aritmética é dada por:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \times n$$

Progressão geométrica (PG)

Uma sucessão (a_n) é uma **progressão geométrica** (P.G) se existe um número real r , tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ao número r chama-se diferença da progressão geométrica.

Termo geral de P.G:

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

A soma de n termos consecutivo de uma progressão geométrica é dada por:

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$$

Limite de uma sucessão

Sucessão convergente

Diz-se que uma sucessão (a_n) converge para um número real L

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow S_n = 1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} \Leftrightarrow S_n = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow S_n = \left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \times \frac{3}{2} \Leftrightarrow S_n = (1-0) \times \frac{3}{2} \\ S_n = \frac{3}{2}$$

21. Resposta:

Uma correspondência de A para B diz-se função se cada elemento de A corresponde a um só elemento de B .

Este facto não ocorre na opção A, repare que o elemento 1 corresponde a 1 e 2 ao mesmo tempo, logo essa correspondência não é função.

22. Resposta:

A função $y = \frac{2x-1}{x+2}$ é homográfica, ela existe em $\mathbb{R}$, se e somente se o denominador for diferente de zero, assim,

$D_y = \{x \in \mathbb{R} : x+2 \neq 0\}; x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$, o número real -2, anula o

denominador, logo ele não faz parte do domínio da função, daí temos: $D_y = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

23. Resposta:

Uma função real de variável real diz-se bijectiva se ela for injectiva e sobrejectiva simultaneamente. Dentre essas quatro funções,

- A função exponencial é injectiva mas não é sobrejectiva;
- A função logarítmica em geral é injectiva e sobrejectiva, logo ela é bijectiva.
- A função seno não é injectiva e nem sobrejectiva;
- A função quadrática não é injectiva e nem sobrejectiva.

Logo a função $g(x) = \log_2(x)$, é bijectiva.

24. Resposta:

Seja $f(x) = tg\left(\frac{x}{4}\right)$, o seu período determina-se pela fórmula: $T = \frac{\pi}{|k|}$, se $k = \frac{1}{4}$

então teremos:

$$T = \frac{\pi}{|k|} \Rightarrow T = \frac{\pi}{\left|\frac{1}{4}\right|} = \frac{\pi}{\frac{1}{4}} = \pi \times 4 = 4\pi$$

25. Resposta:

O valor de $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + 5x + 6}$ segue com os seguintes cálculos

$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + 5x + 6}$, Para determinar o valor correspondente deste limite não é muito trabalhoso, basta apenas substituir a variável por a tendência, assim:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + 5x + 6} = \frac{(-2)^3 + 8}{(-2)^2 + 5 \times (-2) + 6} = \frac{-8 + 8}{4 - 10 + 6} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

Vamos redefinir o limite, assim: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{(x+2)(x+3)} =$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{(x+2)(x+3)} =$$



(escreve – se $\lim a_n = L$)

Se, por muito pequeno que seja o número positivo δ se existir uma ordem p a partir da qual se tem

$|a_n - L| < \delta$, isto é, $|a_n - L|$ torna-se tão pequena quando se queira.

Sucessão ininitamente grande positivo

Uma sucessão (a_n) diz –se ininitamente grande positivo se e só se, qualquer que seja o número positivo L , existe uma ordm a partir da qual todos termos de (a_n) são maiores que L , ou seja

$$a_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \forall L > 0,$$

$$\exists p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow a_n > L$$

Sucessão ininitamente grande negativo

Uma sucessão (a_n) diz –se ininitamente grande negativo se e só se, $(-a_n)$ é um ininitamente drande positivo e escreve – se

$$a_n \rightarrow -\infty \vee \lim a_n \equiv -\infty$$

Sucessão convergente

Quando o limite de uma sucessão (a_n) é um número real, então essa sucessão diz – se convergente e escreve – se

$$a_n \rightarrow b \vee \lim a_n \equiv b$$

Sucessão Divergente

Quando o limite de uma sucessão (a_n) não é um número real, então essa sucessão diz – se divergente e escreve – se

$$a_n \rightarrow \infty \vee \lim a_n \equiv \infty$$

$$\text{ou } a_n \rightarrow -\infty \vee \lim a_n \equiv -\infty$$

Função real de Variável real (f.r.v.r)

Uma função $f(x)$ diz – se real de variável real, se e somente se o domínio da função e o contradomínio da função são sub conjuntos de números reais.

Simbolicamente fica:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2 - 2x + 4)}{(x + 3)} = \frac{(-2)^2 - 2(-2) + 4}{-2 + 3} = \frac{4 + 4 + 4}{1} = 12$$

26. Resposta:

O valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\cos(x) - 1}$ seque com os seguintes cálculos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\cos(x) - 1} = \frac{0^2}{\cos(0) - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] \quad \text{Indeterminação, vamos levantar redefinindo o limite:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\cos(x) - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (\cos(x) + 1)}{(\cos(x) - 1)(\cos(x) + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (\cos(x) + 1)}{\cos^2(x) - 1^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (\cos(x) + 1)}{-(-\cos^2(x) + 1^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^2 (\cos(x) + 1)}{(1 - \cos^2(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^2 (\cos(x) + 1)}{\sin^2(x)} =$$

$$-1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \times x (\cos(x) + 1)}{\sin(x) \times \sin(x)} =$$

$$-1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x) + 1) = -(\cos(0) + 1) = -(1 + 1) = -2$$

27. Resposta:

Observando atentamente o gráfico, conclui se que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$

28. Resposta:

Consideremos a função real de variável real definida por troços ou ramos:

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 7; & \text{se } x \neq 2 \\ k - 1, & \text{se } x = 2 \end{cases} \quad \text{Para que a função } f(x) \text{ seja continua em } x=2 \text{ é}$$

necessário que se cumpra a seguinte condição:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2). \quad \text{Neste caso para}$$

$$f(x) = k - 1 \Rightarrow f(2) = k - 1, \text{ a condição } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \text{ equivale}$$

afirmar que existem o limite de $f(x)$ no ponto de abcissa $x=2$, então podemos escrever

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Rightarrow 4 \times 2 + 7 = 8 + 7 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 15 \Leftrightarrow k - 1 = 15 \Rightarrow k = 16$$

29. Resposta:

Vamos calcular a primeira derivada da função $y = \sqrt{x^2 - 1}$, essa é uma função irracional, a sua primeira derivada determina se pelos seguintes cálculos:

$$y = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow y' = \left(\sqrt{x^2 - 1} \right)' \Leftrightarrow y' = \frac{(x^2 - 1)'}{2\sqrt{x^2 - 1}} \Leftrightarrow y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} \Leftrightarrow y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

30. Resposta:

Vamos calcular a primeira derivada da função $f(x) = (2x^3 - 5x + 7)^4$, essa é uma função potência, a sua primeira derivada determina se pelos seguintes cálculos:

$$f(x) = (2x^3 - 5x + 7)^4 \Rightarrow f'(x) = \left[(2x^3 - 5x + 7)^4 \right]' \Leftrightarrow f'(x) = 4(2x^3 - 5x + 7)^3 (2x^3 - 5x + 7)'$$

$$f'(x) = 4(2x^3 - 5x + 7)^3 (6x - 5) \Leftrightarrow f'(x) = 4(6x - 5)(2x^3 - 5x + 7)$$

31. Resposta:

Consideremos: $f(x) = e^{2x+1}$ vamos determinar a segunda derivada da função dada e depois determinar a imagem de zero pela segunda derivada da função f , $f''(0)$, preste atenção nos cálculos que se seguem:



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow y \equiv f(x)$$

Uma correspondência de A para B diz-se função se a cada elemento de A corresponde a um só elemento de B. Aos elementos de A chamam-se objectos e os de B chamam-se imagens.

Uma função recebe o nome de homográfica se e somente se é redutível a forma canónica (padrão)

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \text{ com } a, b, c, d \in \mathbb{R} \wedge$$

$$-\frac{d}{c} \neq 0$$

Função injectiva

Uma função $f(x)$ diz-se injectiva, se objectos diferentes do domínio corresponderem sempre a imagens diferentes do contradomínio

Função sobrejectiva

Uma função $f(x)$ diz-se sobrejectiva, se o contradomínio da função coincide com o conjunto de chegada.

Função bijectiva

Uma função $f(x)$ diz-se bijectiva, se ela simultaneamente ser injectiva e sobrejectiva em todo seu domínio..

Exemplos de algumas funções injectivas em $\mathbb{R}$.

- Função linear (do primeiro grau): $f(x) = ax + b$
- Função cúbica: $f(x) = ax^3$
- Função exponencial
- Função logarítmica

Exemplos de algumas funções sobrejectivas em $\mathbb{R}$.

- Função linear (do primeiro grau): $f(x) = ax + b$
- Função cúbica: $f(x) = ax^3$
- Função logarítmica

Exemplos de algumas funções bijectivas em $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{2x+1} \Rightarrow f'(x) = (e^{2x+1})' \Leftrightarrow f'(x) = (2x+1)'e^{2x+1} \Leftrightarrow f'(x) = 2e^{2x+1} \\ \Rightarrow f''(x) &= (2e^{2x+1})' \Leftrightarrow f''(x) = 2(2x+1)'e^{2x+1} \Leftrightarrow f''(x) = 2 \times 2e^{2x+1} \Leftrightarrow f''(x) = 4e^{2x+1} \\ \text{se } x &= 0 \text{ então } f''(0) = 4 \times e^{2 \times 0 + 1} \Leftrightarrow f''(0) = 4 \times e^{0+1} \Leftrightarrow f''(0) = 4e^1 \Rightarrow f''(0) = 4e \end{aligned}$$

32. Resposta:

Consideremos: $f(x) = \sin(x) + 2x^2$ vamos determinar a segunda derivada da função dada, preste atenção nos cálculos que se seguem:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) + 2x^2 \Rightarrow f'(x) = (\sin(x) + 2x^2)' \Leftrightarrow f'(x) = \cos(x) + 2 \times 2x \Leftrightarrow f'(x) = \cos(x) + 4x \\ \Rightarrow f''(x) &= (\cos(x) + 4x)' \Leftrightarrow f''(x) = -\sin(x) + 4 \end{aligned}$$

33. Resposta:

Consideremos: $f(x) = x^3 - 3x$ vamos determinar o ponto de inflexão da função dada:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3x \Rightarrow f'(x) = (x^3 - 3x)' \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 \\ \Rightarrow f''(x) &= (3x^2 - 3)' \Leftrightarrow f''(x) = 6x \end{aligned}$$

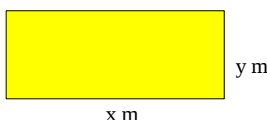
Vamos determinar as raízes da segunda derivada, igualando a zero a segunda derivada:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{0}{6} \Leftrightarrow x = 0$$

Vamos determinar a imagem de raiz da segunda derivada pela função f , assim, $f(0) = 0^3 - 3 \times 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$, o ponto de inflexão da função $f(x) = x^3 - 3x$ é $(0;0)$, logo o ponto de inflexão encontra-se no intervalo $] -1; 1[$

34. Resposta:

Este é um problema de maximização, para a sua resolução aplica-se o conhecimento de cálculo diferencial, “derivadas”, fica atento e acompanhe os cálculos!



$$P = 2(x + y) \Rightarrow 22m = 2(x + y) \Leftrightarrow 2(x + y) = 22 \Leftrightarrow$$

$$x + y = \frac{22}{2} \Leftrightarrow x + y = 11 \Rightarrow y = 11 - x$$

A área de um retângulo é dada pela fórmula $A = c \times l \Rightarrow A = x \times y \Leftrightarrow$

Vamos definir a área como função de x , assim,

$$A(x) = x(x - 11) \Leftrightarrow A(x) = x^2 - 11x$$

Vamos determinar a primeira derivada da função Área em ordem a x :

$$A'(x) = (x^2 - 11x)' \Leftrightarrow A'(x) = 2x - 11$$

Determinemos as raízes da primeira derivada:

$$2x - 11 = 0 \Leftrightarrow 2x = 11 \Leftrightarrow x = \frac{11}{2}$$

Já que o comprimento é x

$$x = \frac{11}{2}; x + y = 11 \Leftrightarrow y = 11 - x \Rightarrow y = 11 - \frac{11}{2} \Leftrightarrow y = \frac{22 - 11}{2} \Leftrightarrow y = \frac{11}{2} = 5.5$$

$$\Rightarrow c = 5.5 \wedge l = 5.5$$

O rectângulo deve ter forma de um quadrado.

35. Resposta:



- Função linear (do primeiro grau) : $f(x) = ax + b$
- Função cúbica : $f(x) = ax^3$
- Função logarítmica

Período de uma função trigonométrica.

Dada uma função trigonométrica da forma $f(x) = A \sin(ax+b) + B$, $g(x) = A \cos(ax+b) + B$, o período destas funções determina - se pela fórmula: $T = \frac{2\pi}{|A|}$

Dada uma função trigonométrica da forma $f(x) = A \tan(ax+b) + B$, $g(x) = A \cot(ax+b) + B$, o período destas funções determina - se pela fórmula: $T = \frac{\pi}{|A|}$

Limite de uma função real de variável real

Dada uma função $f(x)$ definida no domínio D_f , a , L são números reais. Diz - se, L é o limite da função $f(x)$ quando x tende para a (a não necessariamente pertence ao domínio de $f(x)$) sse:

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0 : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$

e escreve - se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Ao calcular um limite, temos que ter muito cuidado, visto que não é sempre podemos encontrar um resultado que é o número real facilmente como esperamos. No entanto, podemos depararmos com as seguintes situações:

$$\left[\frac{0}{0}\right], [\infty - \infty], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [\infty^0] \dots \text{estas}$$

situações não são números reais, são chamado de indeterminações.

Continuidade de uma função num ponto.

Uma função real de variável real é contínua num ponto de abscissa $x = a$ sse,

Considerando e observando com muita atenção o gráfico dado, a primeira derivada é negativa no intervalo de $] -1; 1[$. Se se traçarmos uma recta tangente em qualquer ponto de abscissa que esta neste intervalo, o ângulo formado entre essa recta e o sentido positivo do eixo das abscissas é maior que a amplitude de um ângulo recto.

• Somente para a Secção de Letras

36. Resposta:

Vamos determinar o resto da divisão entre $-x^3 + 7x^2 - 12x - 10$, por $x + 2$. Para isso vamos:

$-x^3 + 7x^2 - 12x - 10$	$x + 2$
$+ x^3 + 2x^2 + 0x + 0$	$-x^2 + 9x - 30$
$9x^2 - 12x - 10$	
$- 9x^2 - 18x + 0$	
$- 30x - 10$	
$+ 30x + 60$	
50	

O resto da divisão é igual a 50. O mesmo valor pode ser encontrado da pelo seguinte cálculos:

$$-x^3 + 7x^2 - 12x - 10, \text{ se } x = -2 \Rightarrow -(-2)^3 + 7 \times (-2)^2 - 12(-2) - 10 = \\ = -(-8) + 7 \times 4 + 24 - 10 = 8 + 28 + 24 - 10 = 60 - 10 = 50 \Rightarrow R(x) = 50$$

37. Resposta:

Considere a equação $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix} = 0$, vamos resolver em IR:

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & k & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (3k + 0 + 0) - (0 + 0 - 2k) = 0 \Leftrightarrow 5k = 0 \Rightarrow k = 0$$

38. Resposta:

Vamos simplificar a expressão $\overline{M \cap (\overline{N \cap M})}$, aplicando as propriedades de operações sobre conjuntos, assim:

$$\overline{M \cap (\overline{N \cap M})} \Leftrightarrow \overline{M} \cup \overline{(\overline{N \cap M})} \\ \Leftrightarrow \overline{M} \cup (N \cap M) \Leftrightarrow (\overline{M} \cup N) \cap (\overline{M} \cup M) \Leftrightarrow (\overline{M} \cup N) \cap U \Leftrightarrow \overline{M} \cup N$$

39. Resposta:

Observando atentamente a figura fica claro que o número de alunos que preferem pelo menos dois tipos de refrigerantes são 24, acompanhe os cálculos que se seguem:

$$40. n(F \cup C \cup S) = n(F \cap C) + n(F \cap S) + n(C \cap S) + n(F \cap C \cap S) = 8 + 1 + 6 + 9 = 24$$

Resposta: Vamos calcular o valor de $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{x+5}}{x-4}$, acompanhe os cálculos com muita atenção:



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Cálculo diferencial

- Definição da derivada de uma função**

Dada uma função $F(x)$ definida no domínio D_F , sendo a abscissa de um ponto P , tal que $a \in D_F$. A derivada da função $F(x)$ no ponto P é dada pela expressão:

$$F'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{a-h} \quad \text{ou}$$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{x-h} = f'(x)$$

A função $f(x)$ chama-se a primeira derivada.

Regras de derivação imediata**Função constante**

$$f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0$$

Função potência

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

Função polinomial**Função composta**

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \Rightarrow$$

$$f'(x) = (a_0 x^n)' + (a_1 x^{n-1})' + \dots + (a_n)'$$

Derivada da soma

$$f(x) = u \pm v \Rightarrow f'(x) = u' \pm v'$$

Função afim

$$f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) = a$$

Função produto

$$f(x) = u \times v \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$$

Função quociente

$$f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Função composta

$$f(x) = u^n \Rightarrow f'(x) = nu^{n-1}u'$$

Derivada da função exponencial**Função exponencial de base e**

$$f(x) = e^u \Rightarrow f'(x) = u'e^u$$

Função exponencial de base a

$$f(x) = a^u \Rightarrow f'(x) = u'a^u \ln(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{x+5}}{x-4} = \frac{3 - \sqrt{4+5}}{4-4} = \frac{3 - \sqrt{9}}{0} = \frac{3-3}{0} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

Este não é um número real, é uma indeterminação

Vamos levantar essa indeterminação redefinindo o limite:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{x+5}}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(3 - \sqrt{x+5})(3 + \sqrt{x+5})}{(x-4)(3 + \sqrt{x+5})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(3^2 - (\sqrt{x+5})^2)}{(x-4)(3 + \sqrt{x+5})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{9 - (x+5)}{(x-4)(3 + \sqrt{x+5})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{9 - x - 5}{(x-4)(3 + \sqrt{x+5})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4 - x}{(x-4)(3 + \sqrt{x+5})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{-1}{(3 + \sqrt{x+5})} = \frac{-1}{3 + \sqrt{4+5}} = \frac{-1}{3 + \sqrt{9}} = \frac{-1}{3+3} = -\frac{1}{6}$$

- Somente para a Secção de Ciências**

36. Resposta:

Consideremos o ponto $P(1;1)$ e a recta r , da equação $r: (k-2)x - 4y + 20 = 0$

Para que o ponto $P(1;1)$ pertença à recta r , necessário que a recta r incida o ponto P , assim:

$$(k-2)x - 4y + 20 = 0 \Rightarrow (k-2) \times 1 - 4 \times 1 + 20 = 0 \Leftrightarrow k - 2 - 4 + 20 = 0 \Leftrightarrow k - 6 + 20 = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow k + 14 = 0 \Rightarrow k = -14$$

37. Resposta:

Vamos determinar a função inversa da função $f(x) = \log_3(x) - 2$ vamos aplicar directamente a definição do logaritmo:

$$f(x) + 2 = \log_3(x) \Leftrightarrow x = 3^{f(x)+2} \Rightarrow f^{-1}(x) = 3^{x+2}$$

38. Resposta:

Seja $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_3(x+9)$ pede-se para determinar $(f \circ g)(0)$.

$$(f \circ g)(0) = 2^{\log_3(0+9)} \Leftrightarrow (f \circ g)(0) = 2^{\log_3(9)} \Leftrightarrow (f \circ g)(0) = 2^2 = 2 \times 2 = 4$$

39. Resposta:

A expressão equivalente do número complexo $\frac{3}{2+i}$;

$$\frac{3}{2+i} \Leftrightarrow \frac{3(2-i)}{(2+i)(2-i)} \Leftrightarrow \frac{6-3i}{2^2-i^2} \Leftrightarrow \frac{6-3i}{4-(-1)} \Leftrightarrow \frac{6-3i}{4+1} \Leftrightarrow \frac{6-3i}{5}$$

40. Resposta:

A que é igual $\int (e^x + 5\sin x) dx$? Ela chama-se integral indefinida em ordem à variável x e calcula-se da seguinte maneira:

$$\int (e^x + 5\sin x) dx = \int e^x dx + \int 5\sin x dx = e^x + c_1 + 5 \int \sin x dx = e^x + c_1 + 5(-\cos x) + c_2 =$$

$$\int (e^x + 5\sin x) dx = e^x + c_1 - 5\cos x + c_2 \Leftrightarrow e^x - 5\cos x + \underbrace{c_1 + c_2}_C =$$

$$= e^x - 5\cos x + C$$

FIM

