Combinaciones y permutaciones

¿Qué diferencia hay?

Normalmente usamos la palabra "combinación" descuidadamente, sin pensar en si el **orden** de las cosas es importante. En otras palabras:

"Mi ensalada de frutas es una combinación de manzanas, uvas y bananas": no importa en qué orden pusimos las frutas, podría ser "bananas, uvas y manzanas" o "uvas, manzanas y bananas", es la misma ensalada.

"La combinación de la cerradura es 472": ahora **sí** importa el orden. "724" no funcionaría, ni "247". Tiene que ser exactamente **4-7-2**.

Así que en matemáticas usamos un lenguaje más *preciso*:

- Si el orden no importa, es una **combinación**.
- Si el orden **sí** importa es una **permutación**.

¡Así que lo de arriba se podría llamar "cerradura de permutación"!

Con otras palabras:

Una permutación es una combinación **ordenada**.

Para ayudarte a recordar, piensa en "**P**ermutación... **P**osición"

Permutaciones

Hay dos tipos de permutaciones:

- **Se permite repetir**: como la cerradura de arriba, podría ser "333".
- **Sin repetición**: por ejemplo los tres primeros en una carrera. No puedes quedar primero *y* segundo a la vez.

1. Permutaciones con repetición

Son las más fáciles de calcular. Si tienes ***n*** cosas para elegir y eliges ***r*** de ellas, las permutaciones posibles son:

$$\mathbf{n \times n \times \ldots \text{ (r veces)} = n^r}$$

(Porque hay **n** posibilidades para la primera elección, DESPUÉS hay **n** posibilidades para la segunda elección, y así.)

Por ejemplo en la cerradura de arriba, hay 10 números para elegir (0,1,...,9) y eliges 3 de ellos:

$$\mathbf{10 \times 10 \times \ldots \text{ (3 veces)} = 10^3 = 1000 \text{ permutaciones}}$$

Así que la fórmula es simplemente:

$\mathbf{n^r}$
donde ***n*** es el número de cosas que puedes elegir, y eliges ***r*** de ellas (Se puede repetir, el orden importa)

2. Permutaciones sin repetición

En este caso, se **reduce** el número de opciones en cada paso.

Por ejemplo, ¿cómo podrías ordenar 16 bolas de billar?

Después de elegir por ejemplo la "14" no puedes elegirla otra vez.

Así que tu primera elección tiene 16 posibilidades, y tu siguiente elección tiene 15 posibilidades, después 14, 13, etc. Y el total de permutaciones sería:

16 × 15 × 14 × 13 ... = 20,922,789,888,000

Pero a lo mejor no quieres elegirlas todas, sólo 3 de ellas, así que sería solamente:

16 × 15 × 14 = 3360

Es decir, hay 3,360 maneras diferentes de elegir 3 bolas de billar de entre 16.

¿Pero cómo lo escribimos matemáticamente? Respuesta: usamos la "función factorial"

La **función factorial** (símbolo: **!**) significa que se multiplican números descendentes. Ejemplos:

- 4! = 4 × 3 × 2 × 1 = 24
- 7! = 7 × 6 × 5 × 4 × 3 × 2 × 1 = 5040
- 1! = 1

Nota: en general se está de acuerdo en que **0! = 1**. Puede que parezca curioso que no multiplicar ningún número dé 1, pero ayuda a simplificar muchas ecuaciones.

Así que si quieres elegir **todas** las bolas de billar las permutaciones serían:

16! = 20,922,789,888,000

Pero si sólo quieres elegir 3, tienes que dejar de multiplicar después de 14. ¿Cómo lo escribimos? Hay un buen truco... dividimos entre 13!...

$$\frac{16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 \ldots}{13 \times 12 \ldots} = 16 \times 15 \times 14 = 3360$$

¿Lo ves? **16! / 13! = 16 × 15 × 14**

La fórmula se escribe:

$$\frac{n!}{(n-r)!}$$

donde ***n*** es el número de cosas que puedes elegir, y eliges ***r*** de ellas
(No se puede repetir, el orden importa)

Ejemplos:

Nuestro "ejemplo de elegir en orden 3 bolas de 16" sería:

$$\frac{16!}{(16-3)!} = \frac{16!}{13!} = \frac{20{,}922{,}789{,}888{,}000}{6{,}227{,}020{,}800} = 3360$$

¿De cuántas maneras se pueden dar primer y segundo premio entre 10 personas?

$$\frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10!}{8!} = \frac{3{,}628{,}800}{40{,}320} = 90$$

(que es lo mismo que: **10 × 9 = 90**)

Notación

En lugar de escribir toda la fórmula, la gente usa otras notaciones como:

$$P(n,r) = {}^{n}P_{r} = {}_{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Combinaciones

También hay dos tipos de combinaciones (recuerda que ahora el orden **no** importa):

- **Se puede repetir**: como monedas en tu bolsillo (5,5,5,10,10)
- **Sin repetición**: como números de lotería (2,14,15,27,30,33)

1. Combinaciones con repetición

En realidad son las más difíciles de explicar, así que las dejamos para luego.

2. Combinaciones sin repetición

Así funciona la lotería. Los números se eligen de uno en uno, y si tienes los números de la suerte (da igual el orden) ¡entonces has ganado!

La manera más fácil de explicarlo es:

- imaginemos que el orden sí importa (permutaciones),
- después lo cambiamos para que el orden **no** importe.

Volviendo a las bolas de billar, digamos que queremos saber qué 3 bolas se eligieron, no el orden.

Ya sabemos que 3 de 16 dan 3360 permutaciones.

Pero muchas de ellas son iguales para nosotros, porque no nos importa el orden.

Por ejemplo, digamos que se tomaron las bolas 1, 2 y 3. Las posibilidades son:

El orden importa	El orden no importa
1 2 3 1 3 2 2 1 3 2 3 1 3 1 2 3 2 1	1 2 3

Así que las permutaciones son 6 veces más posibilidades.

De hecho hay una manera fácil de saber de cuántas maneras "1 2 3" se pueden ordenar, y ya la sabemos. La respuesta es:

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

(Otro ejemplo: 4 cosas se pueden ordenar de **4! = 4 × 3 × 2 × 1 = 24** maneras distintas, ¡prueba tú mismo!)

Así que sólo tenemos que ajustar nuestra fórmula de permutaciones para **reducir** por las maneras de ordenar los objetos elegidos (porque no nos interesa ordenarlos):

$$\frac{n!}{(n-r)!} \times \frac{1}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Esta fórmula es tan importante que normalmente se la escribe con grandes paréntesis, así:

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

donde ***n*** es el número de cosas que puedes elegir, y eliges ***r*** de ellas
(No se puede repetir, el orden no importa)

Y se la llama "coeficiente binomial".

Notación

Además de los "grandes paréntesis", la gente también usa estas notaciones:

$$C(n,r) = {}^{n}C_r = {}_{n}C_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Ejemplo

Entonces, nuestro ejemplo de bolas de billar (ahora sin orden) es:

$$\frac{16!}{3!(16-3)!} = \frac{16!}{3!\times 13!} = \frac{20{,}922{,}789{,}888{,}000}{6\times 6{,}227{,}020{,}800} = 560$$

O lo puedes hacer así:

$$\frac{16\times 15\times 14}{3\times 2\times 1} = \frac{3360}{6} = 560$$

Así que recuerda, haz las permutaciones, después reduce entre "**r!**"

... o mejor todavía...

¡Recuerda la fórmula!

Es interesante darse cuenta de que la fórmula es bonita y **simétrica**:

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Con otras palabras, elegir 3 bolas de 16 da las mismas combinaciones que elegir 13 bolas de 16.

$$\frac{\mathbf{16!}}{\mathbf{3!(16-3)!}} = \frac{\mathbf{16!}}{\mathbf{13!(16-13)!}} = \frac{\mathbf{16!}}{\mathbf{3!\times 13!}} = \mathbf{560}$$

Triángulo de Pascal

Puedes usar el triángulo de Pascal para calcular valores. Baja a la fila "n" (la de arriba es n=0), y ve a la derecha "r" posiciones, ese valor es la respuesta. Aquí tienes un trozo de la fila 16:

```
      1    14    91    364  ...
   1    15    105   455   1365  ...
1    16   120   560   1820  4368  ...
```

1. Combinaciones con repetición

OK, ahora vamos con este...

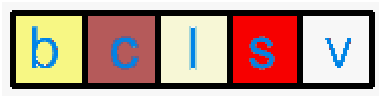
Digamos que tenemos cinco sabores de helado: **banana, chocolate, limón, fresa y vainilla**. Puedes tomar 3 paladas. ¿Cuántas variaciones hay?

Vamos a usar letras para los sabores: {b, c, l, f, v}. Algunos ejemplos son

- {c, c, c} (3 de chocolate)
- {b, l, v} (uno de banana, uno de limón y uno de vainilla)
- {b, v, v} (uno de banana, dos de vainilla)

(Y para dejarlo claro: hay **n=5** cosas para elegir, y eliges **r=3** de ellas.
El orden no importa, ¡y **sí** puedes repetir!)

Bien, no puedo decirte directamente cómo se calcula, pero te voy a enseñar una **técnica especial** para que lo averigües tú mismo.



Imagina que el helado está en contenedores, podrías decir "sáltate el primero, después 3 paladas, después sáltate los 3 contenedores siguientes" ¡y acabarás con 3 paladas de chocolate!

Entonces es como si ordenaras a un robot que te trajera helado, pero no cambia nada, tendrás lo que quieres.

Ahora puedes escribirlo como →○○○→→→ (la flecha es saltar, el círculo es tomar)

Entonces los tres ejemplos de arriba se pueden escribir así:

{c, c, c} (3 de chocolate): →○○○→→→

{b, l, v} (uno de banana, uno de limón y uno de vainilla): ○→→○→→○

{b, v, v} (uno de banana, dos de vainilla): ○→→→→○○

OK, entonces ya no nos tenemos que preocupar por diferentes sabores, ahora tenemos un problema ***más simple*** para resolver: "de cuántas maneras puedes ordenar flechas y círculos"

Fíjate en que siempre hay 3 círculos (3 paladas de helado) y 4 flechas (tenemos que movernos 4 veces para ir del contenedor 1º al 5º).

Así que (en general) hay ***r + (n-1)*** posiciones, y queremos que ***r*** de ellas tengan círculos.

Esto es como decir "tenemos ***r + (n-1)*** bolas de billar y queremos elegir ***r*** de ellas". Es decir, es como el problema de elegir bolas de billar, pero con números un poco distintos. Lo podrías escribir así:

$$\binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

donde ***n*** es el número de cosas que puedes elegir, y eliges ***r*** de ellas

(Se puede repetir, el orden no importa)

Es interesante pensar que podríamos habernos fijado en flechas en vez de círculos, y entonces habríamos dicho "tenemos ***r* + (*n*-1)** posiciones y queremos que **(*n*-1)** tengan flechas", y la respuesta sería la misma...

$$\binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

¿Qué pasa con nuestro ejemplo, cuál es la respuesta?

$$\frac{\mathbf{(5+3-1)!}}{\mathbf{3!(5-1)!}} = \frac{\mathbf{7!}}{\mathbf{3!\times 4!}} = \frac{\mathbf{5040}}{\mathbf{6\times 24}} \mathbf{= 35}$$

En conclusión

¡Uau, es un montón de cosas que absorber, quizás tendrías que leerlo otra vez para entenderlo todo bien!

Pero saber *cómo* funcionan estas fórmulas es sólo la mitad del trabajo. Averiguar cómo se interpreta una situación real puede ser bastante complicado.

Por lo menos ahora sabes cómo se calculan las 4 variantes de "el orden sí/no importa" y "sí/no se puede repetir".