

Matemática Ensino Médio

Anotações de aula

Introdução a Teoria dos Conjuntos

Prof. José Carlos Ferreira da Silva

2018

Apresentação

Este trabalho são apenas anotações manuais de aula de Números Reais: potenciação e radiciação para o Ensino Médio que têm como objetivo facilitar o aprendizado dos nossos alunos e em especial para aqueles que precisem de faltar às aulas.

É resultado de uma pesquisa que visa tornar a Matemática mais simples, priorizando o entendimento dos assuntos de maneira clara e a resolução de exercícios numa escala de dificuldades crescentes.

Bons estudos para todos.

Prof. José Carlos.

1 – Conceito

Conjunto

Admitiremos que um conjunto seja uma coleção de objetos chamados elementos e que cada elemento é um dos componentes do conjunto.

Os objetos de um conjunto podem ser números, pessoas, letras etc.

2 - Representação de um conjunto

É usual dar nomes aos conjuntos usando letras maiúsculas (A, B, C, D etc.) e representar os elementos por letras minúsculas (a, b, c, d etc.).

Destacamos a seguir as três formas fundamentais de representação de um conjunto.

► Representação tabular

A **representação tabular** de um conjunto é aquela em que os elementos são apresentados entre chaves e separados por vírgula ou por ponto e vírgula.

Exemplos

$$a) A = \{a, e, i, o, u\}$$

$$b) B = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$c) C = \{3,2; 4,5; 8,9\}$$

► Representação por um diagrama de Venn

A representação de um conjunto por um **diagrama de Venn** é aquela em que os elementos são simbolizados por pontos interiores a uma região plana, delimitada por uma linha fechada que não se entrelaça.

Exemplos



► Representação por uma propriedade

A representação de um conjunto A por meio de uma **propriedade** é aquela em que os elementos são descritos por uma propriedade que os determina. Representa-se o conjunto A por:

$$A = \{x \mid x \text{ tem a propriedade } p\}$$

(lê-se: “ A é o conjunto de **todos** os elementos x , tal que x tem a propriedade p ”)

- Conjunto dos estados da região Sul do Brasil: $S = \{\text{Paraná, Santa Catarina, Rio Grande do Sul}\}$.
- Conjunto das notas musicais: $M = \{\text{dó, ré, mi, fá, sol, lá, si}\}$.
- Conjunto dos números pares maiores que 0 e menores que 10: $A = \{2, 4, 6, 8\}$.
- Conjunto dos números primos menores que 300: $B = \{2, 3, 5, 7, \dots, 283, 293\}$.

3 - Conjunto finito e conjunto infinito

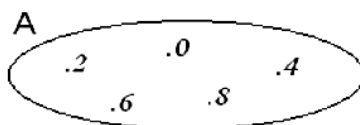
Um conjunto é finito se for vazio ou se contando seus elementos, um a um, chega-se ao fim da contagem.

Exemplos a) $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ b) $B = \{x \mid x \text{ é pessoa brasileira}\}$ c) $C = \emptyset$

Conjunto infinito é todo conjunto que não é finito.

Exemplos

- a) Um importante conjunto infinito que vamos usar como referência adiante é o conjunto dos números naturais: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
- b) Outro importante conjunto infinito que também será usado frequentemente como referência é o conjunto dos números inteiros: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

4 - Relação de Pertinência

Considere o conjunto A ao lado.

A relação de pertinência indica se um determinado elemento pertence ou não a um determinado conjunto.

Simbologia: Considerando $A = \{0; 2; 4; 6; 8\}$, Assim:

SIMBOLOGIA	TRADUÇÃO
$2 \in A$	O elemento 2 pertence ao conjunto A.
$3 \notin A$	O elemento 3 não pertence ao conjunto A.

Quando fazemos uso da relação de pertinência, estamos, necessariamente, relacionando um elemento a um conjunto, nesta ordem.

“elemento” $\in$ “conjunto” ou “elemento” $\notin$ “conjunto”

5 - Relação de Inclusão

A relação de inclusão indica se um determinado conjunto está contido ou não em um outro conjunto.

Se todos os elementos de um conjunto pertencem a outro, então o primeiro conjunto está contido no segundo. Basta um único elemento do primeiro conjunto não pertencer ao segundo para que o primeiro conjunto não esteja contido no segundo.

Simbologia:

SIMBOLOGIA	TRADUÇÃO
$A \subset B$	O conjunto A está contido no conjunto B.
$D \not\subset E$	O conjunto D não está contido no conjunto E.
$B \supset A$	O conjunto B contém o conjunto A.
$E \not\supset D$	O conjunto E não contém o conjunto D.

6 - Subconjunto

Consideremos o conjunto B formado por todas as pessoas brasileiras. Com os elementos de B podemos formar o conjunto H, de todos os homens brasileiros, e o conjunto M, de todas as mulheres brasileiras. Dizemos que os conjuntos H e M são **subconjuntos** de B. Se um conjunto T de pessoas possui como elemento pelo menos uma pessoa que não seja brasileira, dizemos que T **não é subconjunto** de B. Indicamos esses fatos por:

$H \subset B$ (lê-se: “H está contido em B”); $M \subset B$ (lê-se: “M está contido em B”); $T \not\subset B$ (lê-se: “T não está contido em B”)

Dizer que um conjunto B é subconjunto de um conjunto A equivale a dizer que, se x é elemento de B, então x é elemento de A.

Exemplos: a) $\{2, 5, 3\} \subset \{2, 5, 3, 8, 9\}$ b) $\{2, 5, 3\} \subset \{2, 5, 3\}$ c) $\{2, 5, 3\} \not\subset \{2, 5, 7, 9\}$

7 - Conjunto Vazio

O Conjunto vazio é o conjunto que não possui elementos. Para representarmos o conjunto vazio usaremos os símbolos: $\{ \}$ ou $\emptyset$.

Atenção: Quando os símbolos $\{ \}$ ou $\emptyset$, aparecerem listados ou visíveis, dentro de um conjunto, o conjunto vazio deverá ser tratado como elemento desse conjunto especificado.

Ex.: Seja o conjunto $A = \{\emptyset; 1; 2; 3\}$, é correto afirmar para o conjunto A listado, que $\emptyset \in A$, pois $\emptyset$ é um elemento do conjunto A.

Também sempre será verdade que:

- i) $\emptyset \subset A$ para qualquer que seja o conjunto A . ii) $A \subset A$ para qualquer que seja o conjunto A .

8 - Conjunto Unitário : É o conjunto que possui apenas um elemento.

9 - Conjunto das Partes

O Conjunto das partes de um conjunto A , denotado por $P(A)$, é o conjunto formado por todos os subconjuntos do conjunto A . Assim o conjunto das partes é o conjunto dos subconjuntos.

Atenção: Lembre-se que dentre os subconjuntos de um dado conjunto, estão o conjunto vazio e o próprio conjunto.

9.1- Número de elementos do conjunto das partes

Para indicarmos o número de elementos de um conjunto A , usaremos a notação $n(A)$. E o número de elementos do conjunto das partes será indicado por $n[P(A)]$.

Daí :

$n[P(A)] = 2^{n(A)}$ Assim, um conjunto com 4 elementos, terá 2^4 elementos o seu conjunto das partes, ou seja, o conjunto A terá no total 16 subconjuntos.

Ex.: Seja $X = \{a, e, i\}$, encontre $P(A)$

10 - Igualdade e desigualdade de conjuntos

Dizemos que dois conjuntos A e B são iguais quando todos os elementos pertencentes a A também pertencem a B e todos os elementos pertencentes a B também pertencem a A .

11- Conjunto universo

O conjunto de todos os elementos considerados em determinada situação é chamado de **conjunto universo**. Esse é o conjunto mais amplo acerca do assunto tratado e, em geral, é indicado por U .

Vamos considerar a seguinte questão:

- Qual é a solução da equação $3x + 27 = 0$?

Se considerarmos U o conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$), a equação não tem solução.

Porém, se considerarmos U o conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$), a equação tem solução, que nesse caso é $x = -9$.

12 - Operações entre conjuntos

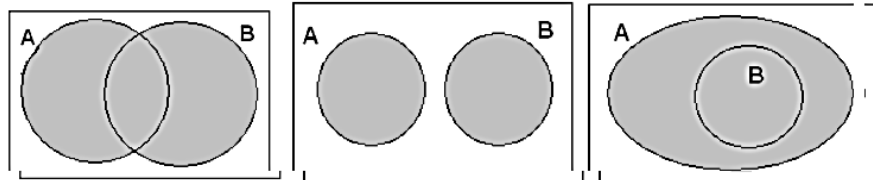
12.1- União de Conjuntos: A união de dois conjuntos A e B , é o conjunto de todos os elementos que pertencem a A ou B . Indicaremos a união pelo símbolo $\cup$. Matematicamente:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

isto é:

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow \begin{cases} \text{seja } x \in A \text{ e } x \notin B \\ \text{seja } x \notin A \text{ e } x \in B \\ \text{seja } x \in A \text{ e } x \in B \end{cases}$$

Nos diagramas abaixo $A \cup B$, é a região hachurada:



A **união** de dois conjuntos, A e B , que indicaremos por $A \cup B$, é o conjunto cujos elementos são todos aqueles que pertencem a A ou a B .

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Exemplos

- a) Sendo $A = \{7, 8, 9\}$ e $B = \{10, 11\}$, temos: $A \cup B = \{7, 8, 9, 10, 11\}$
 b) Sendo $C = \{7, 8, 9, 10\}$ e $D = \{9, 10, 11, 12, 13\}$, temos: $C \cup D = \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$
 c) Sendo $E = \{4, 5, 6\}$ e $F = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, temos: $E \cup F = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Propriedades da união de conjuntos

Sendo A , B e C conjuntos quaisquer, temos:

P1. Se B é subconjunto de A , então $A \cup B = A$; e, se $A \cup B = A$, então B é subconjunto de A .

Ou seja: $B \subset A \Leftrightarrow A \cup B = A$

P2. $A \cup B = B \cup A$

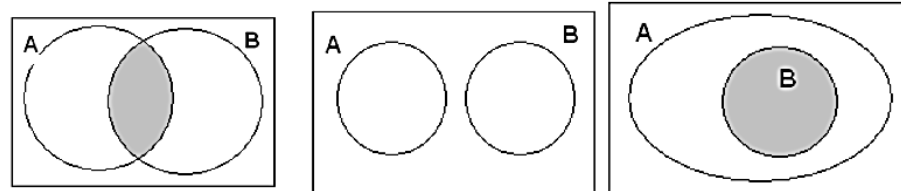
P3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

12.2 - Intersecção de conjuntos

A intersecção de dois conjuntos A e B , é o conjunto formado pelos elementos comuns a A e B . Indicaremos a intersecção pelo símbolo $\cap$. Matematicamente:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Nos diagramas abaixo $A \cap B$, é região hachurada:



Quando a intersecção de dois conjuntos é o conjunto vazio, eles são chamados de conjuntos disjuntos.

Exemplos

- a) Sendo $A = \{5, 6, 7, 8\}$ e $B = \{7, 8, 9, 10\}$, temos: $A \cap B = \{7, 8\}$
 b) Sendo $C = \{3, 4, 5\}$ e $D = \{8, 9\}$, temos: $C \cap D = \emptyset$
 c) Sendo $E = \{b, c, d, e\}$ e $F = \{a, b, c, d, e, f\}$, temos: $E \cap F = \{b, c, d, e\}$

Propriedades da intersecção de conjuntos

Sendo A , B e C conjuntos quaisquer, temos:

P1. Se B é subconjunto de A , então $A \cap B = B$; e, se $A \cap B = B$, então B é subconjunto de A .

Ou seja: $B \subset A \Leftrightarrow A \cap B = B$

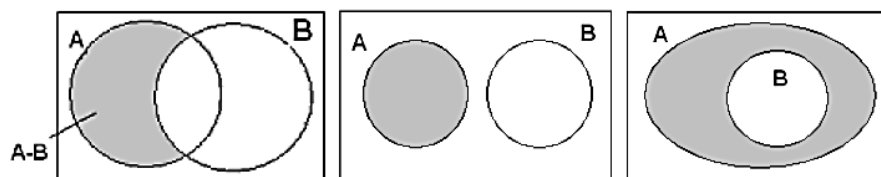
P2. $A \cap B = B \cap A$

P3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

12.3- **Diferença de conjuntos:** A diferença entre dois conjuntos A e B , é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e não pertencem a B . Matematicamente:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Nos diagramas abaixo $A - B$, é a região hachurada:



A **diferença** de dois conjuntos, A e B , nessa ordem, que indicamos por $A - B$, é o conjunto cujos elementos são todos aqueles que pertencem a A e não pertencem a B .

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Exemplos

a) Sendo $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, temos:

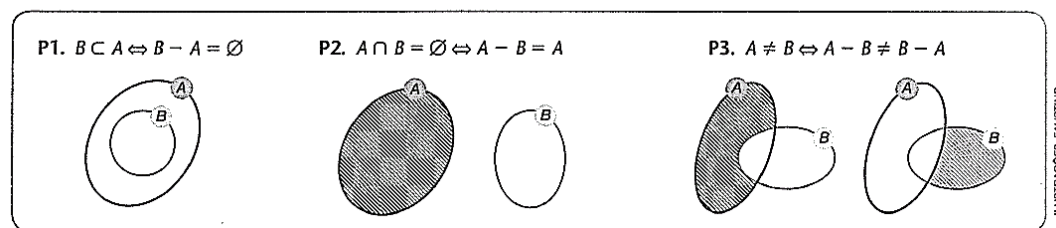
$$A - B = \{1, 2, 3\} \text{ e } B - A = \{6, 7, 8, 9\}$$

b) Sendo $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $D = \{3, 4, 5\}$, temos: $C - D = \{1, 2, 6\}$ e $D - C = \emptyset$

c) Sendo $E = \{1, 2, 3\}$ e $F = \{4, 5, 6\}$, temos: $E - F = E$ e $F - E = F$

► Propriedades da diferença de conjuntos

Sendo A e B conjuntos quaisquer, temos:



12.4 - Conjunto complementar

Conjunto complementar: Dados os conjuntos A e U , se o conjunto A está contido no conjunto U , a diferença $U - A$, é chamada **complementar** de A em relação a U . Chamaremos o conjunto U conjunto universo.

Ao complementar de A em relação a U usaremos a notação: C_U^A , ou A^c , ou $\bar{A}$.

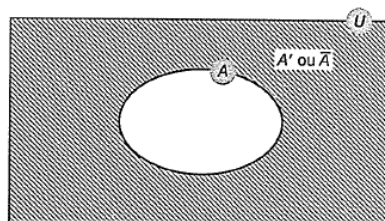
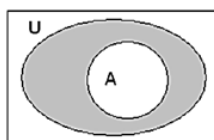
Então:

$$C_U^A = \{x \mid x \in U \text{ e } x \notin A\}$$

No diagrama ao lado C_U^A é a região hachurada:

Ex: Seja $U = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ e $A = \{1, 3, 5, 7\}$ daí

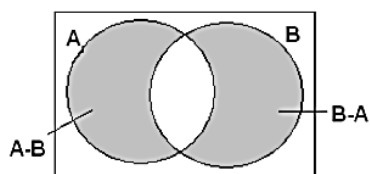
$$C_U^A = U - A = \{0, 1, 4, 6, 8, 9\}$$



12.5. Diferença Simétrica: a diferença simétrica entre os conjuntos A e B , é o conjunto dos elementos que pertencem a A e não pertencem a B ou, os elementos que pertencem a B e não pertencem a A . Indicaremos a diferença simétrica entre A e B por: $A \Delta B$. Daí:

$$A \Delta B = \{x \mid x \in A - B \text{ ou } x \in B - A\} = (A - B) \cup (B - A)$$

No diagrama abaixo $A \Delta B$, é região hachurada:

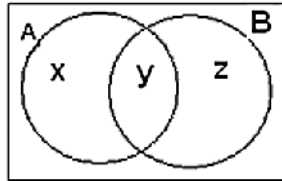


12.6. Número de elementos da união de conjuntos: O número de elementos da união de :

- dois conjuntos A e B será: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
- três conjuntos A , B e C será:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Dedução:



$$\text{Seja } \begin{cases} n(A) = x + y \\ n(A \cap B) = y \\ n(B) = y + z \end{cases} \quad \text{pelo diagrama temos q } n(A \cup B) = x + y + z, \text{ fazendo as}$$

substituições de x, y e z teremos a fórmula, para o número de elementos da união dos dois conjuntos.

