

Matrices - Premiers pas

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désignera un corps commutatif et Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ deux entiers ≥ 1 .

1 GÉNÉRALITÉS : UN TABLEAU DE NOMBRES

1.1 DÉFINITIONS ET VOCABULAIRE

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ deux entiers ≥ 1 .

Définition 1 : Matrice

On appelle matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute famille $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$.

En pratique

On visualise une matrice comme un tableau de nombres rectangulaire (à n lignes et p colonnes)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Le premier indice s'appelle l'indice de ligne, et le second l'indice de colonne.
L'élément $a_{2,5}$ est donc le nombre à la ligne 2 et à la colonne 5 dans la matrice A .

Notations On note

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes,
et
 $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) := \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et n colonnes

Définition 2 : Les matrices particulières

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq l \\ 1 \leq j \leq m}}$ une matrice.

Une matrice carrée est une matrice A telle que $m = n$, avec donc le même nombre de colonnes que de lignes.

La matrice nulle est une matrice de taille $m \times n$, composée de seulement des 0, c'est à dire, $0_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Une matrice diagonale est une matrice A carrée telle que $a_{i,j} = 0$ lorsque $i \neq j$. On note parfois $\text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$ la matrice carrée de taille n diagonale dont les coefficients de la diagonale sont $a_{11}, \dots, a_{nn}$. Cette diagonale est appelée la **diagonale principale** de A .

La matrice unité (ou identité) de taille n est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux valent tous 1.

On la note I_n . C'est la matrice de l'application identité de $\mathbb{R}^n$. Concrètement $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Une matrice triangulaire supérieure est une matrice dont tous les coefficients $a_{i,j}$ avec $i > j$ sont nuls. Elles sont **strictes** lorsque, qu'en plus, la diagonale principale est nulle.

Une matrice triangulaire inférieure est une matrice dont tous les coefficients $a_{i,j}$ avec $i < j$ sont nuls. Elles sont **strictes** lorsque, qu'en plus, la diagonale principale est nulle.

Une matrice ligne est une matrice avec 1 ligne, soit quand $n = 1$.

Une matrice colonne est une matrice avec 1 colonne, soit quand $m = 1$.

Une matrice élémentaire, notée $E_{i,j}$, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$, est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui à la i -ème ligne et j -ème colonne qui vaut 1. Les matrices $E_{i,j}$ forment une base de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Définition vecteur ligne - vecteur colonne d'une matrice

Soit A une matrice à n lignes et p colonnes. On associe à la matrice A n vecteurs de $\mathbb{K}^p$, appelés vecteurs lignes de A

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}, \quad \text{où } L_i = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{ip}), \text{ pour } i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

On lui associe également p vecteurs de $\mathbb{K}^n$ appelés vecteurs colonnes de A

$$A = (C_1 \quad C_2 \quad \cdots \quad C_p), \quad \text{où } C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \text{ pour } j \in \llbracket 1, p \rrbracket.$$

Essayer par exemple de donner les vecteurs lignes et colonnes de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1.2 STRUCTURE D'ESPACE VECTORIEL

Définition 3 : Opérations linéaires entre deux matrices

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ de coefficients génériques respectifs a_{ij} et b_{ij} , avec $i = 1, \dots, m$ et $j = 1, \dots, n$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit alors l'addition et la multiplication par un scalaire comme suit :

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

et

$$\lambda A := (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

On définit la **transposée** de la matrice A la matrice à n lignes et m colonnes

$${}^t A = A^T := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

L'ensemble de toutes les matrices de taille $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Exemple 1

On peut écrire toute matrice comme combinaison linéaire de matrices élémentaires $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22}$

La transposée en pratique

Cela revient à recopier en colonnes les lignes de A (ou l'inverse). Par exemple, la transposée de $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple 2

Transposer $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -6 & 10 & 5 \end{pmatrix}$

Proposition 1 : Opérations linéaires et transposée

Pour tout $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a

$$(1) \quad {}^t({}^t A) = A.$$

$$(2) \quad {}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^t A + \mu {}^t B.$$

Cela fait donc de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

et de l'application transposée une application linéaire de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$

Preuve. Immédiat en passant à la définition. A vous de trouver le neutre du groupe commutatif $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +)$!

□

Exemple 3

Quelques calculs linéaires avec les matrices

$$3 \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 3 & 3 \times 0 & 3 \times (-1) \\ 3 \times 2 & 3 \times 1 & 3 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -3 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 & 0+2 & -1+1 \\ 2+1 & 1+3 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & -7 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -3 \cdot 1 & -3 \cdot 1 & -3 \cdot (-2) \\ -3 \cdot (-1) & -3 \cdot 0 & -3 \cdot 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & -7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 3 & 0 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & -7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3+0 & -3+0 & 6+2 \\ 3+(-1) & 0+5 & -9+(-7) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & -3 & 8 \\ 2 & 5 & -16 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Proposition 2

L'ensemble des matrices **triangulaires supérieures** (resp. **triangulaires inférieures**), l'ensemble des matrices **triangulaires supérieures strictes** (resp. **triangulaires inférieures strictes**) et l'ensemble des matrices diagonales sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Preuve. Il suffit de vérifier les propriétés d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\square$

Combinaison linéaire de matrices

On dit qu'une matrice A est combinaison linéaire des matrices $M_1, M_2, \dots, M_m$ s'il existe m scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tels que

$$A = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \dots + \lambda_m M_m = \sum_{k=1}^m \lambda_k M_k .$$

On retrouve la même définition que dans le cas d'un espace vectoriel.

Proposition 3

Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrices élémentaires, et l'expression d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dans cette famille est $A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{ij} E_{ij}$

Preuve. Immédiat. $\square$

1.3 MATRICES SYMÉTRIQUES ET ANTISYMMÉTRIQUES**Définition 4**

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **symétrique** si ${}^t A = A$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **antisymétrique** si ${}^t A = -A$. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

Proposition 4

$\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Autrement dit, toute matrice se décompose, de manière unique, comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Preuve. $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont des sous-espaces vectoriels, d'après la Proposition 1.

Si $M \in \mathcal{S} \cap \mathcal{A}$, alors

$$-M = {}^t M = M ,$$

donc $M = 0$. La somme est donc directe, autrement dit la seule matrice qui est à la fois symétrique et antisymétrique est la matrice nulle. De plus, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$M = \frac{1}{2}(M + {}^tM) + \frac{1}{2}(M - {}^tM).$$

On vérifie que $\frac{1}{2}(M + {}^tM) \in \mathcal{S}$ et $\frac{1}{2}(M - {}^tM) \in \mathcal{A}$. On écrit

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}.$$

□

En pratique

Les matrices symétriques sont les matrices qui ont les mêmes coefficients au dessus et en dessous de la diagonale. Les matrices anti-symétriques sont les matrices qui ont des zéros sur la diagonale et qui ont des coefficients opposés au dessus et en dessous de la diagonale.

2 MULTIPLICATION DE MATRICES, STRUCTURE D'ANNEAU

2.1 DÉFINITION DU PRODUIT MATRICIEL

Produit scalaire et produit matriciel

Soient $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. On définit le produit scalaire entre ces deux vecteurs par

$$(a_1, \dots, a_n) \cdot (b_1, \dots, b_n) = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

Soit $L = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$ une matrice ligne et $C = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ une matrice colonne de même taille. On définit le produit

de L par C par le produit matriciel entre les produits correspondants

$$L \cdot C = \sum_{k=1}^n a_k b_k.$$

Par conséquent, le produit ne peut se faire que si L et C ont la "même taille".

On va définir le produit matriciel entre deux matrices A et B , comme le produit scalaire des lignes de A par les colonnes de B . Les lignes de A doivent avoir la "même taille" que les colonnes de B , soit $A \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ deux matrices.

Définition 5 : Multiplication de matrices

Deux matrices peuvent être multipliées si le **nombre de colonnes de la matrice de gauche** est égal au **nombre de lignes de la matrice de droite**. Le produit d'une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq l \\ 1 \leq j \leq m}}$ de taille $l \times m$ et d'une matrice $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ de taille $m \times n$ est une matrice $C = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq l \\ 1 \leq j \leq n}}$ de taille $l \times n$ dont les entrées sont calculées comme suit :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} \cdot b_{kj}$$

pour tout $1 \leq i \leq l$ et $1 \leq j \leq n$.

⚠ ATTENTION

- Le produit de A par B n'est possible que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B .
- Si on peut effectuer le produit AB , on ne peut pas forcément faire le produit BA .

- Quand le produit de A par B est possible et le produit de B par A est possible, on n'a pas forcément $AB = BA$. On dit que le produit de matrice n'est pas commutatif.

Exemple 4

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 5 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-4) + 3 \cdot 6 \\ (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 0 + (-2) \cdot 2 & (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot 5 + (-2) \cdot (-1) & (-1) \cdot 3 + 3 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-1) & (-1) \cdot 2 + 3 \cdot (-4) + (-2) \cdot 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 & 16 \\ -4 & 18 & -7 & -20 \end{pmatrix}$$

Exemple 5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer lorsque cela est possible: AB, BA, CD, DC, AC, CA

Que remarque-t-on?

Produit matriciel par lignes et par colonnes

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Notons $C_1, \dots, C_p$ ses colonnes et $L_1, \dots, L_n$ ses lignes.

- Si $B \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{K})$ alors

$$BA = (BC_1 \mid \dots \mid BC_p) \quad (\text{notation colonne par colonne})$$

- Si $B \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$ alors

$$AB = \begin{pmatrix} L_1 B \\ \vdots \\ L_n B \end{pmatrix} \quad (\text{notation ligne par ligne})$$

Cette vision est particulièrement pratique pour faire les calculs quand une ligne de la première matrice, ou une colonne de la deuxième matrice ont beaucoup de 0.

Puissance d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note $A^p := \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{p \text{ facteurs}}$ la puissance p -ème de A , et $A^0 = I_n$.

On peut alors faire montrer facilement que $\forall p, q \in \mathbb{N}$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$\textcircled{1} A^p \times A^q = A^{p+q} \quad \textcircled{2} (A^p)^q = A^{pq} \quad \textcircled{3} \text{ Si } A \text{ et } B \text{ commutent, } (AB)^p = A^p \times B^p.$$

⚠ ATTENTION On ne peut pas prendre la puissance d'une matrice qui n'est pas carrée !

Exemple 6

Soit $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer E^2 puis E^3 . Que remarque-t-on?

Puissance d'une matrice diagonale

Il est très simple que calculer une puissance d'une matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}^{2025} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{2025} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{2025} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{2025} \end{pmatrix}.$$

2.2 PROPRIÉTÉS ET CONSÉQUENCES SUR LA STRUCTURE D'ANNEAU

Proposition 5 : Propriétés de la multiplication matricielle

On a les propriétés suivantes, pour tout $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

- ① Pour tout $r \in \mathbb{N}$, $O_{r,m}A = O_{r,n}$ et $AO_{n,r} = O_{m,r}$.
- ② $I_m A = A I_n = A$.
- ③ Pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$, on a $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.
- ④ **Distributivité** Le produit est distributif à droite et à gauche par rapport à l'addition :
 Pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $(A + C)B = AB + CB$, et
 pour tout $B \in \mathcal{M}_{r,m}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B(A + C) = BA + BC$.
- ⑤ **Associativité** $\forall B \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K})$, $(AB)C = A(BC)$.
- ⑥ **Transposée du produit** $\forall B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, ${}^t(AC) = {}^tC {}^tA$.

Preuve. Directe en passant par la définition du produit matriciel. Par exemple pour l'associativité, on a pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq r$,

$$((AB)C)_{ij} = \sum_{k=1}^q (AB)_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^p a_{il} b_{lk} c_{kj} \quad \text{et} \quad (A(BC))_{ij} = \sum_{l=1}^p a_{il} (BC)_{lj} = \sum_{l=1}^p \sum_{k=1}^q a_{il} b_{lk} c_{kj}$$

et il suffit d'invertir les deux sommes. $\square$

Produit de deux matrices élémentaires

Soit $(E_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,p \rrbracket}$ la famille des matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$,
 Soit $(E'_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,p \rrbracket \times \llbracket 1,q \rrbracket}$ la famille des matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$,
 Soit $(E''_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,q \rrbracket}$ la famille des matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K})$. Alors

$$E_{i,j} E'_{k,l} = \delta_{j,k} E''_{i,l}$$

où $\delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$ est appelé le symbole de Kronecker

Corollaire 5.1 : Structure d'anneau

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau de neutre I_n , qui n'est **ni commutatif**, **ni intègre**, si $n \geq 2$.
 Il contient les sous anneaux suivants

- L'ensemble des matrices triangulaires supérieures (ou inférieures),
- L'ensemble des matrices diagonales.

L'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes (ou inférieures strictes) est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +)$.

Preuve. $F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donnent un contre exemple pour l'intégrité. $\square$

Formule du binôme, factorisation de $A^p - B^p$

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices qui commutent. D'après ce que l'on a vu dans un anneau, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$(A + B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k}, \quad A^p - B^p = (A - B) \sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-k-1}$$

⚠ ATTENTION Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas commutatif, les formules de la remarque précédente sont fausses en général. Par exemple, pour $n = 2$,

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2 \text{ si } AB \neq BA$$

Définition 6 : Matrice nilpotente

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **nilpotente** lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$.

Exemple 7

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ est nilpotente.}$$

Exemple 8

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 18 & -18 \\ 6 & 18 & -18 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donc $\begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ est nilpotente.

Exemple 9

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On souhaite calculer les puissances de A . Notons que $A = I_3 + N$, avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

De plus I_3 et N commutent donc par le binôme de Newton, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} N^i I_3^{k-i} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} N^i$$

On remarque par ailleurs que N est nilpotente car $N^2 = 0$, donc pour tout $i \geq 2$, $N^i = 0$. Ainsi

$$\forall k \geq 2, \quad A^k = I_3 + kN = \begin{pmatrix} 1 & k & 2k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et par ailleurs cette formule reste valable pour $k \in \{0, 1\}$.

Proposition 6

Une matrice triangulaire supérieure stricte est nilpotente.

Preuve. Pour tout $k \geq 0$ et notons

$$\mathcal{T}_k^+(\mathbb{K}) := \{A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid a_{i,j} = 0 \text{ si } i + k > j\} .$$

Soient $k, l \geq 1$ et $A \in \mathcal{T}_k^+(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{T}_l^+(\mathbb{K})$. Alors on a

$$a_{i,j} = 0 \text{ si } i + k > j \quad \text{et} \quad b_{i,j} = 0 \text{ si } i > j - l .$$

On a, pour $i + k > j - l$,

$$[A \times B]_{i,j} = \sum_{r=1}^n a_{i,r} b_{r,j} = \sum_{r=1}^{i+k-1} \underbrace{a_{i,r}}_{=0} b_{r,j} + \sum_{r=i+k}^n a_{i,r} \underbrace{b_{r,j}}_{=0 \text{ car } r \geq i+k > j-l} = 0 .$$

Donc $AB \in \mathcal{T}_{k+l}^+$.

Mais toute matrice triangulaire supérieure stricte A appartient à $\mathcal{T}_1^+(\mathbb{K})$.

Donc, d'après ce que l'on vient de démontrer $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $A^k \in \mathcal{T}_k^+(\mathbb{K})$.

En particulier, on a donc $A^n \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) = \{0_n\}$. Donc on a bien A nilpotente, d'ordre de nilpotence $\leq n$. $\square$

⚠ ATTENTION Comme le montre l'exemple 8, toute matrice nilpotente n'est pas triangulaire.

2.3 INTERPRÉTATION DES OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

Les matrices de transvections, de transposition et de dilatation (Hors programme)

Une matrice de transvection $T_{i,j}(\alpha)$ de coefficient $\alpha \in \mathbb{K}$, de direction e_i est une matrice carrée de taille n de la forme

$$T_{i,j}(\alpha) := I_n + \alpha E_{i,j} .$$

Dans l'élimination (ou le pivot) de Gauss, ces matrices représentent l'addition d'une ligne ou d'une colonne à une autre. Vous pouvez vérifier que si on a une matrice A (qui peut venir d'un système), alors $T_{i,j}(\alpha) \cdot A$ est la matrice A à laquelle on a ajouté α fois la ligne j de A à la ligne i de A et

$A \cdot T_{i,j}(\alpha)$ est la matrice A à laquelle on a ajouté α fois la colonne i de A à la colonne j de A .

Une matrice de transposition $P_{i,j}$ entre les lignes (ou colonnes) $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, avec $i \neq j$, est une matrice carrée de taille n de la forme

$$P_{i,j} := I_n + E_{i,j} + E_{j,i} - E_{i,i} - E_{j,j} .$$

Dans l'élimination (ou le pivot) de Gauss, ces matrices représentent la transposition de deux lignes ou de deux colonnes. En effet, vous pouvez vérifier que si on a une matrice A (qui peut venir d'un système), alors $P_{i,j} \cdot A$ est la matrice A où l'on a échangé les places de la ligne i et de la ligne j et

$A \cdot P_{i,j}$ est la matrice A où l'on a échangé les places de la colonne i et de la colonne j .

Une matrice de dilatation $D_i(\alpha)$ de coefficient $\alpha \in \mathbb{K}$ est une matrice carrée de taille n de la forme

$$D_i(\alpha) := I_n + (\alpha - 1)E_{ii} .$$

Dans l'élimination (ou le pivot) de Gauss, ces matrices représentent la multiplication d'une ligne ou d'une colonne par un scalaire. En effet, vous pouvez vérifier que si on a une matrice A (qui peut venir d'un système), alors

$D_i(\alpha) \cdot A$ est la matrice A mais avec la ligne i multipliée par α

et

$A \cdot D_i(\alpha)$ est la matrice A mais avec la colonne i multipliée par α .

2.4 MATRICES INVERSIBLES

Définition 7

La matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **inversible** s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, appelée matrice inverse de A , telle que

$$AB = I_n = BA .$$

Exemple 10

Les matrices de transvection, de dilatation, de transposition, les matrices diagonales (donc la matrice I_n) sont inversibles.

Définition 8

On note $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble de toutes les matrices carrées inversibles. Cet ensemble est appelé **groupe linéaire**.

Proposition 7

Muni de la multiplication, $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ est un groupe.

⚠ ATTENTION

On continue à faire attention à l'inverse du produit ! Si A et B deux matrices inversibles, alors AB est inversible et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Inverse d'une puissance

Pour toute matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tout entier $m \geq 1$, on pose

$$A^{-m} := (A^{-1})^m.$$

Proposition 8

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- ① A est inversible à gauche : il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$.
- ② A est inversible à droite : il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AC = I_n$.
- ③ A est inversible.

Preuve. Il suffit de montrer que ① $\Rightarrow$ ③. La preuve est la même pour ② $\Rightarrow$ ③. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$. Posons $a_i = A^{-t} (0 \cdots 0 \ 1 \ 0 \cdots 0)$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On montre par récurrence sur n que $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
 $x \mapsto Ax$ est surjective.

Pour le rang 1, on est dans le cas de scalaires, donc c'est immédiat.

Supposons que $\mathbb{R}^{n-1}$, l'application est surjective, c'est à dire que pour tout $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\exists x \in \mathbb{R}^{n-1}$, tel que $Ax = y$.

Essayez de finir la preuve sur une disjonction de cas en fonction de $(0 \cdots 0 \ 1) A^{-t} (0 \cdots 0 \ 1 \ 0 \cdots 0) = 0$, pour tout i ou non.

□

Dans les exercices

Vous avez donc juste à vérifier que $AB = I_n$, ou $BA = I_n$, pour montrer que B est l'inverse de A .

Exemple 11

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que la matrice $I + A$ soit inversible. On pose $B = (I - A)(I + A)^{-1}$.

Montrons que $I + B$ est inversible.

Comme $(I + A)(I - A) = (I - A)(I + A)$, on a, en multipliant à droite et à gauche par $(I + A)^{-1}$, la relation

$$(I - A)(I + A)^{-1} = (I + A)^{-1}(I - A).$$

On a alors

$$(I + A)(I + B) = (I + A) + (I - A) = 2I,$$

donc $I + B$ est inversible et

$$(I + B)^{-1} = \frac{1}{2}(I + A),$$

et en fait on a

$$(I - B)(I + B)^{-1} = \frac{1}{2}(I + A - (I - A)) = A.$$

Proposition 9 : Propriétés de l'inverse

Soient A et B deux matrices carrées de même taille.

- ① **Involution** Si A est inversible alors A^{-1} aussi et $(A^{-1})^{-1} = A$.
- ② **Produit** si A et B sont inversibles alors $A \times B$ aussi et $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$.
- ③ **Transposée** Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible alors $A^\top$ l'est aussi et $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

Preuve. À vous ! Il suffit de vérifier que les candidats donnés sont bien les inverses ! $\square$

Une condition de non-inversibilité

Si une matrice A a une ligne ou une colonne nulle, alors elle n'est pas inversible. En effet, notons $A_1, \dots, A_n$ les colonnes de A . Alors

$$A^{-1}A = (A^{-1}A_1 | \dots | A^{-1}A_n)$$

a la même colonne nulle donc ne peut pas être égale à I_n .

On raisonne de même pour les lignes.

Proposition 10

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il y a équivalence entre :

- ① S'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $Y = AX$, alors $X = BY$.
- ② A est inversible et $A^{-1} = B$.

Preuve. Si ②, alors il suffit de multiplier par B des deux côtés de l'égalité pour obtenir ① :

$$X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \text{ tel que } Y = AX \Rightarrow B \times Y = B \times AX \Rightarrow BY = X.$$

Supposons maintenant ①. Une méthode consiste à décomposer B en colonnes. Le produit BA s'écrit comme les lignes de B multipliées par les colonnes de A . En effet, posons

$$A = (A_1, \dots, A_n) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix},$$

où $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont les colonnes de A et où $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ sont les lignes de B . On a alors

$$BA = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} (A_1, \dots, A_n) = \begin{pmatrix} B_1 A_1 & B_1 A_2 & \dots & B_1 A_n \\ B_2 A_1 & B_2 A_2 & \dots & B_2 A_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_n A_1 & B_n A_2 & \dots & B_n A_n \end{pmatrix},$$

par définition du produit matriciel. Par hypothèse, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$,

$$Y = AX \Rightarrow BY = X.$$

① Prenons $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. On a

$$Y = AX = (A_1, A_2, \dots, A_n) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A_1 \quad \text{et donc} \quad BY = BA_1 = \begin{pmatrix} B_1 A_1 \\ B_2 A_1 \\ \vdots \\ B_n A_1 \end{pmatrix} \quad \text{doit être égal à} \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

② Prenons $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. On a

$$Y = AX = (A_1, A_2, \dots, A_n) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A_2 \quad \text{et donc} \quad BY = BA_2 = \begin{pmatrix} B_1 A_2 \\ B_2 A_2 \\ \vdots \\ B_n A_2 \end{pmatrix} \quad \text{doit être égal à} \quad X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

③ Prenons $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. On a

$$Y = AX = (A_1, A_2, \dots, A_n) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A_3 \quad \text{et donc} \quad BY = BA_3 = \begin{pmatrix} B_1 A_3 \\ B_2 A_3 \\ \vdots \\ B_n A_3 \end{pmatrix} \quad \text{doit être égal à} \quad X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\vdots$
 $\vdots$
 $\vdots$

④ Prenons $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. On a

$$Y = AX = (A_1, A_2, \dots, A_n) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = A_n \quad \text{et donc} \quad BY = BA_n = \begin{pmatrix} B_1 A_n \\ B_2 A_n \\ \vdots \\ B_n A_n \end{pmatrix} \quad \text{doit être égal à} \quad X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a reconstitué toutes les colonnes de BA et on a montré que

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

□

Comment calculer l'inverse d'une matrice - Méthode 1

On prend deux vecteurs colonnes quelconques X, Y , et on cherche à résoudre le système $Y = AX$ pour trouver les coordonnées de X en fonction de ceux de Y . On trouve alors $X = A^{-1}Y$, ce qui nous donne la matrice inverse.

Comment calculer l'inverse d'une matrice - Méthode 2

On peut constater que les multiplications par les matrices de transvection, de transposition et de dilatation, sont équivalentes aux opérations sur les lignes ou sur les colonnes des matrices. Concrètement sur quelques exemples : Soient

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

trois matrices, respectivement, de transvection, de transposition et de dilatation. On remarque que, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{aligned} TA &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2c & b-2d \\ c & d \end{pmatrix} && \text{correspond à } L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2, \\ RA &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} && \text{correspond à } L_1 \leftrightarrow L_2, \\ DA &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ c & d \end{pmatrix} && \text{correspond à } L_1 \leftarrow 2 \times L_1, \end{aligned}$$

donc une combinaison linéaire de lignes,
donc une transposition de lignes,
donc une multiplication d'une ligne par un scalaire,

et en multipliant à droite

$$\begin{aligned} AT &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b-2a \\ c & d-2c \end{pmatrix} && \text{correspond à } C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1, \\ AR &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} && \text{correspond à } C_1 \leftrightarrow C_2, \\ AD &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b \\ 2c & d \end{pmatrix} && \text{correspond à } C_1 \leftarrow 2 \times C_1, \end{aligned}$$

donc une combinaison linéaire de colonnes,
donc une transposition de colonnes,
donc une multiplication d'une colonne par un scalaire.

Finalement, plusieurs opérations sur les lignes ou sur les colonnes peuvent être représentées par la multiplication par une matrice inversible, qui serait le produit de toutes les matrices représentant chaque opération.

Prenons maintenant une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ que l'on suppose inversible. En faisant des opérations sur les lignes on obtient la matrice identité. Ce qui veut dire qu'il existe B telle que $BA = I_n$. Pour trouver B , il suffirait de faire ces mêmes opérations sur une matrice identité située à droite de A . Concrètement

$$\begin{aligned} (A \mid I_n) \\ \downarrow \quad \text{opérations sur les lignes} \\ (I_n \mid ?) \end{aligned}$$

Alors le point interrogation obtenu est la matrice inverse de A . En effet, si B est la matrice inversible qui résume les opérations sur les lignes faites sur A et I_n , on a

$$BA = I \text{ et } B = BI_n = ? .$$

Exemple 12

Par exemple pour la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, on peut procéder comme suit.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ &\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ &\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array} \right) & L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2 \end{aligned}$$

Donc $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ est l'inverse de A .

Pour la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ on a

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

On conclut donc que

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exemple 13

Faites de même avec la matrice

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'inverse d'une matrice 2×2

En utilisant la méthode de la remarque précédente, on peut démontrer qu'une matrice

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est **inversible** si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Le nombre $ad - bc$ est appelé le déterminant de A et est noté $\det A$. Dans ce cas, on a

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Proposition 11

Une matrice triangulaire (ou diagonale) A est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Dans ce cas A^{-1} est triangulaire du même type et ses coefficients diagonaux sont les inverses de ceux de A .

Preuve. Soit A une matrice triangulaire supérieure. Nous allons transformer A en I_n par opérations élémentaires sur les colonnes.

- Si $a_{11} = 0$ alors A a sa première colonne nulle donc est non inversible.
- Sinon, $C_1 \leftarrow \frac{1}{a_{11}}C_1$ transforme le pivot a_{11} en un 1 qu'on peut ensuite utiliser pour éliminer tous les éléments à sa droite via des opérations sur les colonnes ($C_j \leftarrow C_j - a_{1j}C_1$). On obtient une matrice qu'on note A' .

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_{11}} & \star & \cdots & \star \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} & & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} & & & & 1 \end{array} \right)$$

On recommence : si $a_{22} = 0$, A' a une colonne nulle donc est non inversible et donc A non plus car les opérations élémentaires préservent l'inversibilité. Sinon, on peut le transformer en un 1 et éliminer tous les coefficients à sa droite. On continue. $\square$

Pour les matrices diagonales

Dans le cas particulier d'une matrice diagonale, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & 0 \\ \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$, D est inversible si et seulement si $\prod_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$

$$\text{et } D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & 0 \\ \cdots & 0 & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Exemple 14

Dans certains cas, on peut utiliser les polynômes en A pour inverser une matrice. Par exemple, pour calculer l'inverse de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on peut remarquer que $A^2 = 3I + 2A$, et donc

$$A^{-1} = \frac{1}{3}(A - 2I).$$

3 SYSTÈMES LINÉAIRES

On considère le système à n équations et p inconnues

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

La matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ s'appelle la matrice du système.

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ s'appelle la matrice (ou vecteur colonne) des inconnues. et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ s'appelle la matrice (ou vecteur

colonne) du second membre.

Avec les notations précédentes, le système linéaire $(\mathcal{S})$ est équivalent à l'équation matricielle $AX = B$.

On dit que le système est **compatible** s'il possède au moins une solution.

- On appelle système homogène associé à $(\mathcal{S})$ le système $(\mathcal{S}_0) : AX = 0_{p,1}$

Remarque

Le système $(\mathcal{S})$ est compatible si et seulement si B s'écrit comme combinaison linéaire des colonnes de A .
Le système homogène a toujours une solution : $0_{n,1}$.

Proposition 12

Les solutions du système compatible $AX = B$ sont les $X_0 + Y$, où X_0 est une solution particulière et où Y parcourt l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

Preuve. Comme pour les EDL ! $\square$

N'oubliez pas !

Chaque opération du pivot de Gauss peut s'interpréter comme la multiplication à gauche de matrices...

Exemple 15

Résolvons le système suivant, en discutant suivant la valeur du paramètre m .

$$\begin{cases} x + y + mz = 0 \\ x + my + z = 0 \\ mx + y + z = 0 \end{cases}$$

On utilise la matrice associée au système

$$\begin{array}{l} L_2 - L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 - mL_1 \rightarrow L_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 0 \\ 1 & m & 1 & 0 \\ m & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

On distingue alors le premier cas $m = 1$. Les deux dernières lignes sont nulles et le système est équivalent à

$$x + y + z = 0$$

L'ensemble des solutions est $\{(-y - z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$. Lorsque $m \neq 1$, on peut multiplier la deuxième et la troisième ligne par $1/(m - 1)$ et on trouve le système équivalent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -m-1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -m-2 & 0 \end{array} \right),$$

Si $m = -2$, le système est équivalent à

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

dont l'ensemble des solutions est $\{(z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$. Si $m \neq -2$ (et toujours $m \neq 1$), le système est équivalent à

$$\begin{cases} x + y + mz = 0 \\ y - z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

dont l'unique solution est $(0, 0, 0)$.

Exemple 16

Résoudre le système d'inconnue (x, y, z, t) de paramètres a, b . On effectuera un pivot de Gauss, sur les matrices !

$$(S) = \begin{cases} x + y &= 2a \\ y + z &= 2b \\ z + t &= 4 \\ t + x &= -2 \end{cases}$$