

Moyennes

PARTIE A - DIFFÉRENTES MOYENNES

Soit n un entier naturel non-nul et des réels strictement positifs $x_1, \dots, x_n$. On souhaite montrer que

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

Le membre de gauche de cette inégalité s'appelle la **moyenne géométrique** et celui de droite la **moyenne arithmétique** de $x_1, \dots, x_n$, où dans la rue la moyenne, tout simplement.

- ① Montrer que pour tout x réel, $x \leq e^{x-1}$. Dans quel cas a-t-on égalité ?
- ② En notant $m := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ et en considérant le produit des réels $\frac{x_1}{m}, \dots, \frac{x_n}{m}$, démontrer l'inégalité arithmético-géométrique.
- ③ Décrire précisément, à l'aide d'une condition nécessaire et suffisante, le cas d'égalité dans l'inégalité arithmético-géométrique (A-G).
- ④ On définit la **moyenne harmonique** de $x_1, \dots, x_n$ comme le réel $h > 0$ qui vérifie $\frac{1}{h} := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}$.
Comparer les moyennes harmonique et géométrique de $x_1, \dots, x_n$, en utilisant l'inégalité A-G sur $\frac{1}{h}$.
- ⑤ Des trois moyennes vues dans cet exercice, laquelle préférez-vous que j'utilise pour calculer vos moyennes semestrielles ?

PARTIE B - L'INÉGALITÉ DE CARLEMAN

On souhaite établir l'inégalité suivante.

Inégalité de Carleman Pour tous $x_1, \dots, x_n > 0$, $\sum_{k=1}^n \sqrt[k]{x_1 \dots x_k} \leq e \sum_{k=1}^n x_k$.

Soient $x_1, \dots, x_n > 0$. On pose pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_k = k \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$.

- ⑥ (a) Simplifier le produit $a_1 \dots a_k$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
- (b) Montrer, en appliquant l'inégalité arithmético-géométrique aux réels $a_1 x_1, \dots, a_k x_k$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, que

$$\sum_{k=1}^n \sqrt[k]{x_1 \dots x_k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \sum_{i=1}^k a_i x_i.$$

- ⑦ Simplifier $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, puis montrer que, $\sum_{k=1}^n \sqrt[k]{x_1 \dots x_k} \leq \sum_{i=1}^n a_i x_i \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{n+1} \right)$.

- ⑧ (a) Dédire du résultat de la question ②a) que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\left(1 + \frac{1}{p}\right)^p \leq e$.
- (b) Conclure.

On cherche à présent à montrer que la constante 'e' est optimale dans l'inégalité de Carleman. On se donne pour cela un réel $C \geq 0$ pour lequel pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous $x_1, \dots, x_n > 0$,

$$\sum_{k=1}^n \sqrt[k]{x_1 \dots x_k} \leq C \sum_{k=1}^n x_k.$$

On veut donc prouver que $C \geq e$.

- ⑨ (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_k^{k+1} \ln t \, dt \geq \ln k$ et calculer la dérivée de la fonction $t \mapsto t \ln t - t$.
- (b) En déduire que $n! \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis que pour tout $k \geq 2$, $\sqrt[k]{(k-2)!} \leq \frac{k+1}{e}$.
- ⑩ Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$, puis en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty$.
- ⑪ (a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt[k]{(k-2)!}} \leq C \left(2 + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k} \right)$.
- (b) En déduire l'existence d'un réel λ pour lequel pour tout $n \geq 2$, $(C - e) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \lambda$, puis conclure.

PARTIE C - ON PEUT FAIRE MIEUX !

Soient $x_1, \dots, x_n > 0$ avec $n \geq 2$. On pose

$$a = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k, \quad g = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k}, \quad m = \max_{1 \leq k \leq n} x_k \quad \text{et} \quad v = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2.$$

D'après l'inégalité arithmético-géométrique, $a \geq g$, mais on va obtenir un peu mieux.

- ⑫ (a) Exprimer $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i + x_j)$ et $\prod_{1 \leq i < j \leq n} \sqrt{x_i x_j}$ en fonction de n, a et g .
- (b) Montrer, en appliquant l'inégalité arithmético-géométrique aux réels $\sqrt{x_i x_j}$ pour lesquels $1 \leq i < j \leq n$, que :

$$a - g \geq \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\sqrt{x_i} - \sqrt{x_j})^2$$

- (c) En déduire que $a - g \geq \frac{v}{8m}$.