



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Relatório de Iniciação Científica

Período: 12/11/2008 a 30/03/2009

HISTÓRIA DA ASTRONOMIA E UMA INTRODUÇÃO AOS PRINCÍPIOS MATEMÁTICOS DA FILOSOFIA NATURAL

Orientador: Masayoshi Tsuchida

Aluno: André Amarante Luiz

Sumário

Introdução	iii
1 Astronomia Antiga: O Nascimento da Mecânica Celeste	1
1.1 A Era de Ouro da Astronomia	4
1.2 Os “Astrônomos” Gregos	6
1.3 A Escola de Pitágoras	13
1.3.1 O Modelo Heliocêntrico de Aristarco	17
1.4 O Modelo Geocêntrico de Ptolomeu	18
1.4.1 O Mundo não é Chato	21
2 Astronomia Medieval: A Queda de sua Excelência	22
3 Astronomia na Idade Moderna: A Ascensão e o Desenvolvimento da Mecânica Celeste	24
3.1 O Modelo Heliocêntrico de Copérnico	25
3.1.1 O Modelo Tychônico do Universo	28
3.1.2 O Modelo de Tycho Brahe	29
3.2 O Modelo Final do Sistema Solar por Johannes Kepler	30
3.2.1 A 4ª Lei de Kepler	35
3.3 As Contribuições Astronômicas de Galileu Galilei para a Teoria Heliocêntrica	38
3.4 O Teorema da Velocidade Média	44
4 Isaac Newton	48
4.1 O Método de Hooke	49
4.2 Prova da Lei das Áreas de Kepler	50
4.3 Prova de que a Órbita de um Planeta é Coplanar	52
4.4 Massa	54
4.5 Quantidade de Movimento	54
4.6 Força Impressa	54
4.7 Força Central	54
4.8 Medida da Força Motriz	54
4.9 Leis do Movimento	54
4.10 Composição de Forças (Regra do Paralelogramo)	55
4.11 Aceleração Centrípeta	56
4.12 A Lei do Inverso do Quadrado da Distância	59
4.13 O Teste da Lua	62

4.14	O Argumento Original da Lei do Inverso do Quadrado da Distância	69
4.14.1	O Círculo Osculador	73
4.14.2	Primeira Proporção	75
4.14.3	Segunda Proporção	77
4.14.4	Terceira Proporção	86
4.14.5	O Latus Rectum	87
4.15	Massa Inercial X Massa Gravitacional	92
4.15.1	Massa Inercial	92
4.15.2	Massa Gravitacional	93
4.16	Princípio da Equivalência de Newton	94
5	Astronomia Clássica e Contemporânea: Grandes Nomes	96
5.1	Albert Einstein e o pensamento mais feliz	97
	Índice de Figuras	101
	Bibliografia	103

Introdução

O céu sempre foi motivo de fascinação e interesse para o homem desde os tempos mais remotos. A razão para isso se torna evidente para qualquer um que contemple o céu em uma noite limpa e escura. Depois que o Sol - nossa fonte de vida - se põe, as belezas do céu noturno surgem em todo o seu esplendor. A Lua se torna o objeto celeste mais importante, continuamente mudando de fase. As estrelas aparecem como uma miríade de pontos brilhantes, entre as quais os planetas se destacam por seu brilho e movimento. E a curiosidade para saber o que há além do que podemos enxergar é inevitável.

Chineses, indianos e as populações que habitavam as regiões consideradas como o berço da civilização ocidental - a Mesopotâmia, o Peloponeso, o Norte da África, o Oriente Médio - observaram as estrelas durante séculos. Entretanto, além de alguns esparsos registros chineses e textos indianos de cunho religioso e fraseologia obscura, os únicos documentos que chegaram aos nossos dias e se referem às atividades astronômicas na Antiguidade são tabuinhas cuneiformes babilônicas, datadas de época relativamente recente: 700 a.C.

O exame desses textos revela que os babilônios faziam observações sistemáticas que lhes permitiam prever acontecimentos astronômicos (eclipses solares e lunares), efetuar medidas das translações planetárias, etc.

Os babilônios, entretanto, não se preocuparam em construir modelos geométricos que explicassem os movimentos dos astros; foi na Grécia que a atenção dos filósofos se voltou decisivamente para essa tarefa, e, entre tais filósofos, Platão foi o que maior influência exerceu sobre as gerações seguintes, no que se refere às idéias cosmológicas. Platão encarava a Terra como a região mais indigna do Universo, devendo por esta razão, ocupar posição inferior às dos demais astros; estes por sua vez, seriam corpos perfeitos, que somente poderiam executar um movimento perfeito - O CIRCULAR. Nessas concepções repousou toda a cosmologia que predominou desde o século IV a.C. até o princípio do século XVI d.C.

Por que estudar Astronomia?

Nosso objetivo é utilizar o Universo como laboratório, deduzindo de sua observação as leis físicas que poderão ser utilizadas em coisas muito práticas, desde prever as marés e estudar a queda de asteróides sobre nossas cabeças, até como construir reatores nucleares, analisar o aquecimento da atmosfera por efeito estufa causado pela poluição, necessários para a sobrevivência e desenvolvimento da raça humana.

Capítulo 1

Astronomia Antiga: O Nascimento da Mecânica Celeste

Sendo este o primeiro capítulo, apresentamos uma breve história da astronomia, ressaltando suas origens, seu desenvolvimento, juntamente com suas fases: antiga, medieval e moderna, procurando compreender desde o seu nascimento, até como e porque ela foi por muito tempo alvo de estudo de nossos antepassados.

Desde há milênios, em virtude do seu próprio objeto, a Astronomia fascina o espírito do homem. Os povos da antiguidade já registravam a posição e o deslocamento dos astros no céu, e procuravam encontrar as leis às quais esses deslocamentos obedeciam. Naquela época, o estudo dos astros tinha uma preocupação inicialmente prática: pelas observações dos astros é que eles determinavam a direção a seguir no deserto ou no mar, medir o tempo e prever a aproximação das estações.

Com o desenvolvimento do comércio, da agricultura e as migrações dos povos nômades, cresceu também o estímulo às observações dos astros, e dessas exigências práticas imediatas, nasceu a Astronomia, a ciência que estuda os corpos celestes.

Por cerca de três mil anos a região conhecida como Mesopotâmia, palavra de origem grega (meso + potos) que quer dizer “entre rios”, posto que se situava entre os rios Tigre e Eufrates, foi ocupada por vários povos que tornaram aquela área o berço da Astronomia Moderna. Sumérios, acadianos, amoritas (do primeiro Império Babilônio), assírios e caldeus (do segundo Império Babilônio), há cinco mil anos, aproximadamente, foram os principais habitantes dessa região que se localizava onde hoje é o Iraque.

Essas civilizações foram responsáveis por avanços nas mais diversas áreas do conhecimento, como, por exemplo, a Matemática, a Arquitetura, a Agricultura, o Direito, além da Astronomia, obviamente. Eles desenvolveram ainda o método de escrita cuneiforme, cujos caracteres eram impressos em tabletes de argila mole com estiletos. Ao final deste processo, tais registros eram guardados e os que resistiram ao tempo fazem parte do acervo que permitiu o estudo dessas tábuas, a fim de desvendar os saberes daqueles povos.

No que diz respeito ao seu conhecimento matemático, eles tinham um grande talento aritmético, e foram capazes de aplicá-lo aos seus estudos celestes, algo que lhes proporcionou uma precisão invejável em suas previsões. Utilizavam o sistema numérico sexagesimal, que é, inclusive, um de seus legados, pois em nossas principais

medições de tempo ainda usamos essa base (a hora dividida em 60 minutos, bem como a divisão desses minutos).

Mas foi na Astronomia que eles deram sua imensa contribuição. A motivação em se conhecer bem o que acontecia no céu estava associada a uma necessidade de medir com boa precisão o tempo de uma forma geral, e também construir presságios para o futuro, como veremos mais adiante. Para isso, aproveitavam sua habilidade em identificar padrões, já que existem diversos deles nos movimentos dos astros.

O primeiro registro escrito com o nome de um objeto celeste data de cerca de 2500 a.C.: Mul-Mul (“estrela”, para os sumérios), e foi feito em alusão ao aglomerado estelar atualmente conhecido como Plêiades. Já no século XVII a.C., durante o reinado de Amnisaduga, as primeiras observações sobre Vênus também foram registradas. Com os dados obtidos, foi possível calcular o ciclo do planeta como sendo de 587 dias (valor extremamente próximo ao correto que é de 584 dias; algo deveras surpreendente).

Entre os séculos XVII e XI a.C., houve um salto significativo na quantidade de registros feitos em tábuas de argila ou ainda em selos cilíndricos. Um dos textos mais famosos é o *Enuma Anu Enlil* (que significa “No tempo de Anu e Enlil”, uma referência a dois dos três deuses mais importantes dos sumérios). Alguns historiadores acreditam que o rei Babilônio Nabucodonosor I foi quem redigiu as informações ali contidas, e que posteriormente teriam sido copiadas para outras tábuas. Mais de 7000 observações foram registradas sobre fenômenos celestes (nascer de estrelas, conjunção de planetas, etc.).

Uma prática relativamente comum neste mesmo período, e que merece destaque por ter ajudado os estudiosos a reconhecer as imagens de algumas constelações clássicas, era a representação desses agrupamentos em pedras chamadas *kudurru* (Fig. 1.1) (“fronteira, território”, em acadiano). Esses marcos eram uma espécie de escritura que transferia o direito de posse sobre uma propriedade para uma pessoa ou um grupo de pessoas, e que recebia as figuras das constelações como forma de garantia de autenticidade.



Figura 1.1. Kudurru.

Durante o período em que os assírios dominaram a Mesopotâmia, grande parte do conhecimento acumulado até então foi reunido na biblioteca de Assurbanipal, localizada na cidade de Nínive, no século VII a.C. Uma das principais peças desse

acervo eram as tábuas *Mul.Apin* (o prefixo, como já vimos, quer dizer “estrela”, e acompanhava todos os nomes de constelação, e a segunda palavra significa “o arado”, e se refere ao asterismo formado pelas sete estrelas mais brilhantes da constelação boreal hoje chamada de Ursa Maior). Esse registro histórico era uma espécie de almanaque astronômico que foi bastante reproduzido naquela época, e trazia um resumo da Astronomia Mesopotâmica do primeiro milênio a.C. (alguns autores especulam que, pela posição dos astros no céu ali descrito, os dados presentes nessa tábua são de 1100 a.C., aproximadamente). Muitas constelações que usamos ainda hoje estão presentes nas *Mul.Apin*, dentre elas, várias zodiacais. Como o calendário utilizado por aqueles povos era lunissolar, baseado nas posições do Sol e na trajetória da Lua, 16 constelações ocupavam a faixa da eclíptica.

Posteriormente, no século VI a.C., sob o reinado de Nabucodonosor II, esse número foi reduzido para 12, visto que essa era a quantidade de lunações (intervalo que deu origem à definição de “mês”) que ocorria em um ano solar. Algumas dessas constelações permanecem com o mesmo nome até hoje (Fig. 1.2): O Agricultor (Carneiro), Touro Celeste (Touro), Pastor Celeste e Os Gêmeos (Órion + Gêmeos), O Caranguejo (Caranguejo), O Leão (Leão), A Espiga (Virgem), A Balança (Balança), O Escorpião (Escorpião), O Arqueiro (Sagitário), A Cabra-Peixe (Capricórnio), O Grande (Aquário), As Caudas de Peixes (Peixes).



Figura 1.2. Os 12 Signos do Zodíaco.

À medida que o ser humano aprofundava o seu conhecimento no campo dos movimentos dos corpos celestes, prevendo assim com bastante antecedência alguns fenômenos, ao mesmo tempo (assim como ocorreu com os mesopotâmios e outros povos), isso inspirava uma mística admiração por aquele gigantesco mecanismo que ele ia dominando pouco a pouco. Não há como não dizermos que este misticismo tenha dado lugar a certas crenças, principalmente aquela que, se a hora e as estações dependiam do curso dos astros no firmamento, da mesma maneira, os acontecimentos históricos também eram por eles condicionados. Surgiu daí o nascimento de uma pseudo-ciência, a astrologia, que é a arte de predizer os acontecimentos pela observação dos astros, e que não deve ser confundida com a Astronomia.

No entanto, na Antiguidade e na Idade Média, os acontecimentos de fenômenos inquietantes tais como eclipses, cometas, quedas de meteoritos, eram tido como sinais de maus presságios e então, a Astronomia e a astrologia se combinaram e recombinaram sem cessar. Coube aos gregos, matemáticos em excelência, pôr de lado suas lendas e procurar explicações mais corretas para os fenômenos observados. A isto se chamou o milagre grego, o qual deu um novo e decisivo impulso às ciências do cosmos.

Como se pode notar, as civilizações que habitaram a Mesopotâmia na Antiguidade nos deixaram um imenso legado, do qual muitas coisas foram aproveitadas integralmente. Veremos no próximo capítulo que esse conhecimento foi bastante difundido entre os povos gregos e romanos que adotaram diversas maneiras de enriquecer ainda mais esse acervo, sem alterar suas bases.

1.1 A Era de Ouro da Astronomia

Enfim, chegamos à Grécia, palco do ápice da Astronomia na Antiguidade. Entre os séculos VII a.C. e III da Era Comum, uma grande safra de astrônomos gregos elevou o nível do conhecimento humano acerca desta ciência de forma somente superada no Renascimento. Foi, sem dúvida alguma, um momento singular da História, no qual muitas idéias hoje sedimentadas tiveram origem e puderam ser desenvolvidas.

No início, os gregos faziam o mesmo uso da Astronomia que seus antecessores e contemporâneos: basicamente, medir o tempo a fim de conhecer bem a relação entre a posição de alguns objetos celestes e constelações com determinados fenômenos sazonais. Os primeiros registros escritos desse povo evidenciam esta característica, como os grandes épicos dos poetas Homero (*A Ilíada* e *A Odisséia*, produzidos por volta do século VIII a.C.) e Hesíodo (*Os Trabalhos e os Dias*, escrito provavelmente no século VII a.C.). Nestas obras, podem-se encontrar facilmente várias destas relações identificando os principais astros e agrupamentos, e os períodos do ano que eles marcavam, por exemplo, a época do plantio ou o melhor momento para navegar. As referências astronômicas mais comuns nesses livros eram as constelações do Órion e da Ursa Maior, os aglomerados estelares Plêiades e Híades, e as estrelas Sirius (da constelação do Cão Maior) e Arturus (da constelação do Boieiro).

Boa parte das constelações adotadas pelos gregos foi herdada dos mesopotâmicos, bem como alguns de seus mitos. Obviamente, neste processo de intercâmbio cultural, algumas adaptações foram feitas para adequar certos grupos com a mitologia grega, esta talvez, juntamente com a romana, a mais famosa dentre todas. Os planetas foram batizados com nomes de deuses do panteão grego, sendo posteriormente substituídos por seus correspondentes na mitologia romana, permanecendo assim até hoje. Além disso, muitas histórias de sua cultura foram reproduzidas em outros agrupamentos, como é o caso da lenda de Andrômeda e Perseu, que envolve diversas constelações boreais.

Para enfatizar ainda mais a importância que a Astronomia teve durante a hegemonia grega, vale destacar a criação de uma “musa” para esta ciência, visto que as principais atividades desenvolvidas na época tinham musas que as representavam. Totalizando nove, eram elas: Calíope, a de bela voz (musa da Poesia Épica); Clio,

a proclamadora (musa da História); Érato, a amável (musa da Poesia Romântica); Melpômene, a poetisa (musa da Tragédia); Euterpe, a doadora de prazeres (musa da Música); Terpsícore, a rodopiante (musa da Dança); Polímnia, a de muitos hinos (musa da Poesia Sacra); Tália, a que faz brotar flores (musa da Comédia); e Urânia, a celestial (musa da Astronomia)(Fig. 1.3).



Figura 1.3. Urânia: deusa grega da astronomia.

Mas os gregos estavam longe de estabelecer apenas uma relação mítica e religiosa com os astros. Foi a partir deles que análises sistemáticas e quantitativas começaram a ser realizadas e aplicadas em Astronomia. O avanço matemático empreendido por eles foi essencial para o desenvolvimento astronômico, principalmente no ramo da Geometria. Alguns autores informam que este conhecimento foi levado à Grécia por Tales de Mileto, no começo do século VI a.C., trazido do Egito. No entanto, foi aproximadamente em 300 a.C., com a confecção da obra máxima de Euclides (Elementos), que a Geometria elevou seu status, atingindo o auge desta especialidade.

Os gregos também se tornaram célebres por tentar modelar o Universo, que naquele tempo era quase um sinônimo de Sistema Solar. Num cenário onde muitas propostas foram apresentadas, como a de uma Terra plana ou até mesmo cilíndrica, predominou a da Terra esférica situada no centro de tudo que existe, modelo este conhecido como geocêntrico.

A maioria quase absoluta dos astrônomos gregos adotou a proposta geocêntrica. Após passar por diversas reformulações, este se tornou o modelo oficial da Igreja Cristã na Idade Média, perdurando por quase dois milênios.

Para uma melhor compreensão sobre as principais idéias gregas no que se diz respeito à astronomia da época e seus pensadores, existem algumas formas de se dividir e organizar os diversos períodos de maior proficiência deste povo: pode-se utilizar como marco a vida de um grande nome, como é o caso de Sócrates, que viveu no século V a.C., definindo os períodos pré-socrático, socrático e pós-socrático. Também é possível se usar, como referência, a região na qual se concentravam as principais atividades intelectuais, como, por exemplo, a Jônia (localizada na costa ocidental da Ásia Menor, onde hoje é a Turquia), a cidade de Atenas e, posteriormente, Alexandria. Particularmente, pretendemos alternar entre estes dois formatos, a fim de deixar bem claro em que época e local cada um dos personagens sedimentou

sua fama.

Outra coisa que deve ser discutida antes de começarmos as apresentações formais destes gênios é como devemos nos referir a eles. Todos aqueles que forem citados aqui, de alguma forma deram sua contribuição para a Astronomia, portanto podemos considerá-los astrônomos. Naquele tempo, ser astrônomo era exercer uma função técnica, pois estes se limitavam a realizar observações e elaborar teorias cosmogônicas. Alguns autores costumam chamá-los mais genericamente de cientistas, pois geralmente consideram que foi na Grécia Antiga que a prática científica teve origem.

Porém, é muito mais comum encontrarmos referências que os rotulam de filósofos¹ (ou filósofos naturais, posto que estes seriam verdadeiras autoridades no estudo da Natureza).

Podemos concluir, então, que naquele tempo todo astrônomo, de certa forma, era filósofo, embora o inverso não valha diretamente. De qualquer maneira, para o nosso caso, tanto “astrônomo” como “filósofo” serão os adjetivos utilizados a partir de agora.

1.2 Os “Astrônomos” Gregos



Figura 1.4. Scuola di Atene: A Escola de Atenas: pintura de 1509, de autoria do gênio renascentista Rafael, retratando diversos pensadores gregos da Antigüidade.

Os primeiros filósofos gregos foram os da Escola Jônica.

Diz-se que a filosofia ocidental foi inaugurada por **Tales** (640 - 562), **de Mileto**, uma das principais cidades da Escola Jônica. Não se sabe ao certo se ele foi o autor de todas as façanhas das quais recebeu o mérito, pois uma prática relativamente comum entre os discípulos pré-socráticos era a de dar o crédito de sua obra ao seu mestre, isto é, seus alunos podem ter assinado trabalhos com seu nome.

¹Filósofo é uma palavra de origem grega que quer dizer “amante da sabedoria”, e acredita-se que foi utilizada pela primeira vez por Pitágoras para se referir a si mesmo. Antes desta definição, estudiosos com este perfil eram chamados de sofistas, que em grego quer dizer “sábio”, e posteriormente passou a ter um sentido pejorativo, sendo usado principalmente para se referir a impostores (O filósofo alemão Georg Hegel definiu de forma magistral a diferença entre filósofos e sofistas. Segundo ele, o filósofo seria o expert em vinhos, enquanto o sofista seria o bebedor).

De qualquer maneira, seu papel de destaque é inegável, principalmente pelo seu pioneirismo. Muitos autores afirmam que Tales é o responsável por introduzir a Geometria na Grécia Antiga, trazida do Egito. Alguns acreditam também que, em suas viagens, ele teria adquirido dos babilônios o conhecimento necessário para prever eclipses. Em 585 a.C., Tales teria anunciado a ocorrência de um eclipse solar, fato que o tornou célebre, e até hoje remete a lendas de que uma guerra teria sido impedida após este fenômeno. É difícil saber, porém, se ele realmente conhecia o método de obtenção deste tipo de informação, ou se ele apenas teria se aproveitado de dados já existentes dos babilônios.

Outra história que contam a seu respeito é que, certa vez, ao prever uma super-safra de azeitonas para o ano seguinte, Tales teria alugado diversas prensas acreditando que a procura por esse equipamento aumentaria. Na época prevista, tudo aconteceu conforme ele havia imaginado, e quem quisesse fazer uso das prensas teria que negociar com Tales. Esta passagem permite identificar como a figura do filósofo era emblemática aos olhos do povo. Eles eram vistos quase como pessoas capazes de “manipular” a natureza, devido ao seu conhecimento sobre fenômenos astronômicos, e até mesmo meteorológicos baseados nos ciclos dos astros.

É de Tales também a autoria de algumas idéias bastante ousadas para o seu tempo. Ele foi o primeiro a propor que tudo que existia teria se originado de uma única substância: a água. Para muitos, este é considerado o primeiro princípio físico, o de um elemento primordial no Universo. Ainda segundo Tales, a Terra seria um disco plano que flutuaria num imenso oceano e, no céu, existiria uma abóbada a limitar o universo (Fig. 1.5). Esta concepção de mundo já havia sido proposta na obra do poeta grego Homero (Fig. 1.6) e, apesar de passar longe da realidade, indica o início de uma nova fase da tentativa de se compreender o Universo, só que desta vez sem recorrer à mitologia.



Figura 1.5. Modelo proposto por Tales com a Terra plana cercada por um oceano e pela abóbada limitante do universo.



Figura 1.6. Modelo proposto por Homero semelhante ao de Tales.

Para finalizar a lista de grandes contribuições deixadas por este grande filósofo, não poderia deixar de mencionar que ele foi o primeiro grego a calcular a duração do ano astronômico a partir da medição do intervalo entre dois solstícios iguais. Tales também transmitiu aos seus conterrâneos o conhecimento adquirido, provavelmente com os fenícios, de navegar se orientando pelas estrelas.

Depois de Tales, o filósofo que se consagrou graças às suas idéias cosmológicas foi **Anaximandro** (611 - 545), também de Mileto, e discípulo do próprio Tales. Pré-socrático da Escola Jônica, ele certamente se inspirou na idéia de seu mestre para propor que tudo teria se originado de uma massa primordial que ele chamou de infinito (apeíron, em grego). Anaximandro é conhecido ainda por ter confeccionado aquele que se acredita ser o primeiro mapa do mundo antigo.

Entretanto, sua contribuição de maior destaque na Astronomia foi o modelo de Universo concebido por ele, importantíssimo pela sua característica mecânica. Era a primeira vez que se idealizava algo assim. Segundo Anaximandro, a Terra teria a forma de um cilindro, com uma largura tripla da sua altura, habitado apenas na sua parte superior, e situado sem qualquer suporte no centro de uma esfera que é o céu. Em sua camada superior estaria o ar e as nuvens. Muito além dessa região haveria fogo e vários anéis que circundavam a Terra, com orifícios que permitiam que a luz deste fogo chegasse até ela. Um destes furos seria o Sol, outro deles a Lua, e cada estrela seria um furo menor nos anéis superiores. O curioso deste sistema é que esses anéis se movimentariam, fazendo com que os astros se deslocassem no céu (Fig. 1.7 e 1.8).

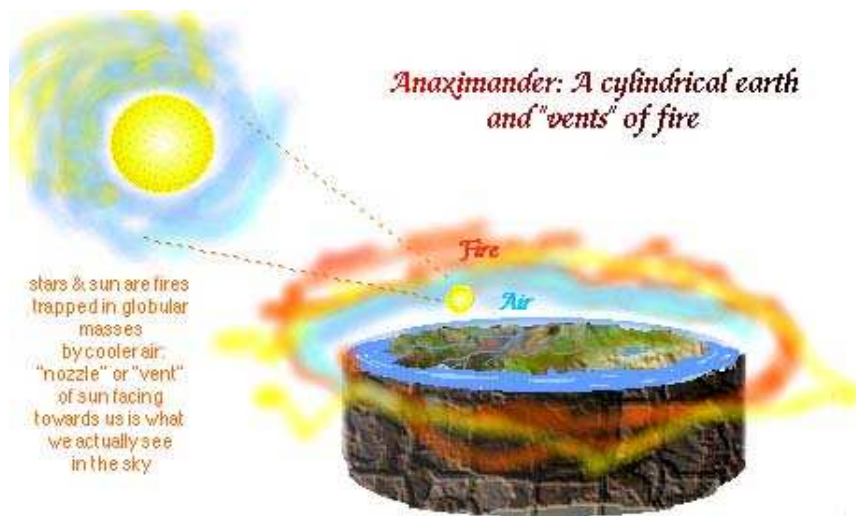


Figura 1.7. A Terra cilíndrica, de Anaximandro de Mileto imersa no apeíron.

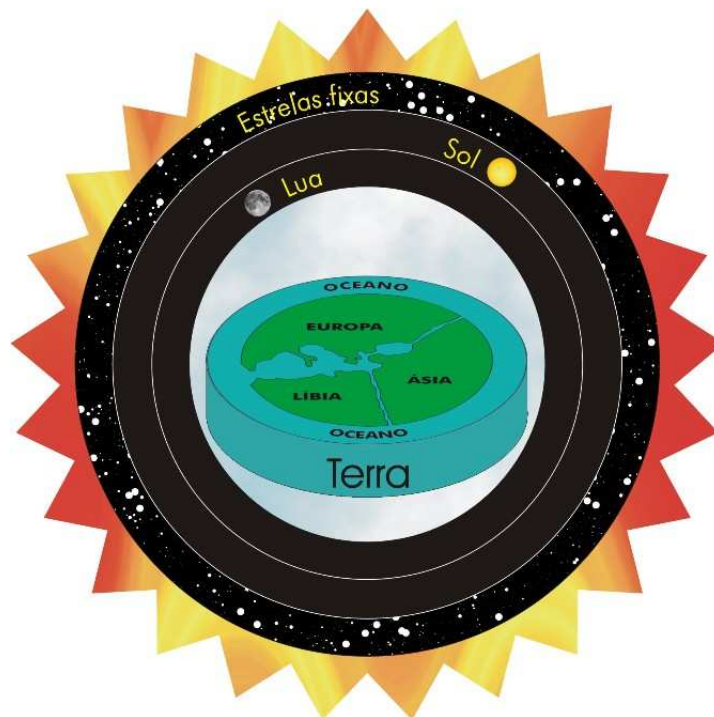


Figura 1.8. Modelo de Anaximandro com uma Terra cilíndrica no centro. Na superfície superior do cilindro está representado o mapa do mundo como ele imaginava.

Alguns historiadores relatam ainda que Anaximandro teria concluído, a partir de observações solares, que o Sol era 28 vezes maior do que a Terra. Não se sabe ao certo como ele chegou a este resultado, mas é possível perceber que o caminho trilhado era o correto, baseado em trabalhos observacionais e deixando as crenças de lado. Futuramente, suas idéias serão aprimoradas por outros astrônomos gregos.

Anaximandro foi professor de alguns filósofos importantes para a Astronomia, como **Anaxímenes** (585 - 525), outro nascido em Mileto, e **Pitágoras de Samos** (570 - 497). O primeiro, além de sugerir que a substância fundamental do Universo seria o ar, contribuiu com um conceito que se tornou essencial para os “cosmólogos” gregos que o sucederam: as esferas cristalinas concêntricas. De acordo com Anaxímenes, que alguns autores afirmam ter sido o primeiro grego a diferenciar formalmente os planetas das estrelas no céu, cada planeta estaria em uma dessas esferas, cujos tamanhos diferentes fariam com que cada um deles ficasse a uma distância específica da Terra (Fig. 1.9).

Cabe destacar aqui que a própria origem da palavra *planeta* é grega, e quer dizer “astro errante”² (Fig. 1.10). Naquele tempo, eles consideravam estes sete astros como planetas: Sol, Lua, Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno. Anaxímenes defendia erroneamente que esses corpos celestes eram planos e flutuavam no ar infinito (a Terra inclusive), uma espécie de modelo adaptado com idéias de Tales e seu mestre Anaximandro, além de outras próprias que davam maior relevância ao seu elemento primordial.



Figura 1.9. A Terra plana de Anaxímenes de Mileto flutuando no elemento ar.

²Os planetas eram assim denominados, pois não acompanhavam o movimento das outras estrelas (fixas) no céu.

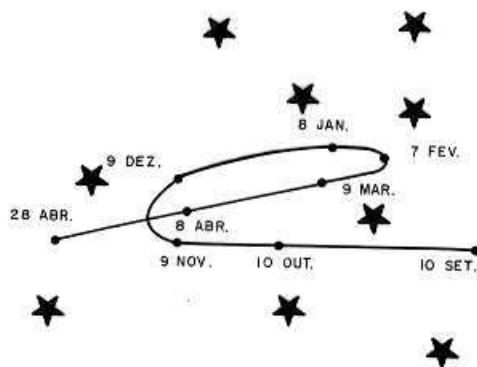


Figura 1.10. Trajetória aparente de Marte em relação às estrelas fixas, mostrando um movimento de regressão entre 10 setembro e 28 de abril.

Pitágoras, por sua vez, é considerado até hoje o maior filósofo entre os pré-socráticos. Nascido na ilha grega de Samos, localizada no mar Egeu, ele é famoso pelo teorema que leva seu nome: o Teorema de Pitágoras. Segundo ele, num triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual à hipotenusa ao quadrado ($a^2 = b^2 + c^2$). Atualmente, sabemos que este conhecimento é anterior à época de Pitágoras. Seu grande feito foi ter demonstrado matematicamente este teorema, inaugurando assim a era das provas dedutivas.

A Matemática talvez tenha sido a área que Pitágoras deixou seu maior legado. Até mesmo a palavra “matemática” (mathematike, em grego) foi introduzida por ele. Historiadores acreditam que Pitágoras viajou por cerca de 30 anos visitando diversas regiões importantíssimas daquele tempo, como o Egito, a Babilônia, a Síria, a Fenícia, entre outras. Nesses locais, teria adquirido conhecimentos nas mais diversas áreas, tanto na ciência, quanto no misticismo.

Por volta do ano 530 a.C., Pitágoras se estabeleceu em Crotona, colônia grega localizada no Sul da Itália, onde fundou a Escola Pitagórica, algo como uma seita místico-científica, e retomou essa concepção esférica do cosmos. Juntamente com seus seguidores, Pitágoras pretendia explicar o mundo através da Matemática. Segundo seu ponto de vista, a essência do Universo seriam os números, da mesma forma que para Tales era a água.

Entre os astrônomos gregos, acredita-se que ele tenha sido o primeiro a perceber que os astros brilhantes conhecidos como phosphorus (estrela da manhã) e hesperus (estrela vespertina) tratavam-se do mesmo objeto celeste: o planeta Vênus.

Observar o céu permitiu a Pitágoras vislumbrar a existência de uma ordem no Universo. Com base nesta premissa, ele cunhou o termo cosmos, que até hoje é utilizado como sinônimo de Universo, e em grego significa exatamente o objeto de sua busca: ordem. Num contexto mais amplo, o Cosmos seria o mais belo dos corpos, harmonioso e perfeito. A perfeição foi um atributo bastante aplicado por Pitágoras. Ele qualificou formas como a esfera e o círculo desta maneira, e até o número 10 mereceu esta denominação muitos séculos antes de Pelé brilhar nos gramados.

Durante a observação de um eclipse lunar, Pitágoras teria concluído que a Terra era esférica, justificando sua idéia a partir da forma circular da sombra do planeta

projetada na Lua. A Terra seria então perfeita, e como os demais astrônomos antes dele haviam proposto, estaria no centro do Universo. Neste Cosmos, os outros planetas também seriam esféricos e suas órbitas ao redor da Terra seriam circulares, ou seja, a ordem e a beleza reinariam no céu pitagórico.

Além disso, Pitágoras desenvolveu o primeiro estudo complexo a respeito da Música. Ele descobriu que havia uma relação entre o comprimento das cordas de um instrumento e a harmonia produzida, criando, assim, a escala musical. Pitágoras associava com esta descoberta a Música e a Matemática. Mas ele não parou aí, e resolveu aplicar este conhecimento no campo da Astronomia, afirmando que haveria uma harmonia nas esferas celestes, de forma que a distância entre os planetas seria proporcional aos intervalos da escala musical. Alguns historiadores registram que em sua cosmovisão haveria entre a Terra e a Lua um intervalo musical de um tom. Já entre a Lua e Mercúrio a distância corresponderia a um semitom, assim como entre Mercúrio e Vênus. De Vênus ao Sol o intervalo seria de uma terça menor. Esta seqüência de intervalos se repete entre os próximos planetas, isto é, do Sol a Marte, um tom; de Marte a Júpiter, um semitom; de Júpiter a Saturno, um semitom; e de Saturno até a esfera onde as estrelas fixas se encontram, uma terça menor.

Este modelo contém a ordem que Pitágoras acreditava que os planetas estavam dispostos no Sistema Solar (Fig. 1.11). Conforme podemos notar, tomando como ponto de partida a Terra, a seqüência seria: Lua, Mercúrio, Vênus, Sol, Marte, Júpiter e Saturno. Ao final, haveria uma esfera com todas as estrelas fixas. Este Cosmos pitagórico foi bastante adotado ao longo dos séculos, como veremos mais adiante.



Figura 1.11. Modelo de Pitágoras com a Terra esférica no centro e os planetas em suas órbitas respeitando a ordem de afastamento.

1.3 A Escola de Pitágoras

A filosofia astronômica da escola pitagórica foi estabelecida por três dos seus maiores membros: Pitágoras, Filolau e Parmênides.

Parmênides (540 - 450), a princípio pitagórico, introduziu a idéia de uma Terra esférica, no centro de um universo igualmente esférico.

Foi **Filolau** (450 - 400), nascido na mesma cidade que Pitágoras fundou sua escola (Crotona), quem sistematizou as concepções astronômicas da escola pitagórica.

Como já foi dito antes (mas nunca é demais repetir), a autoria dos trabalhos de alguns discípulos gregos era costumeiramente creditada a seus mestres. Portanto, não é raro encontrarmos na bibliografia as idéias de Filolau sendo atribuídas a Pitágoras. Perceberemos que o aluno por diversas vezes se baseia na obra do professor, porém, veremos também que existirão algumas diferenças notáveis no modelo de Filolau. Acredita-se fortemente que ele tenha sido o primeiro a imaginar que a Terra estava em movimento, e não estática no centro do Universo.

O sistema proposto por Filolau foi lançado em sua obra intitulada “O Tratado do Céu” e, de acordo com ele, no centro do Cosmos estaria o que chamou de “fogo central”, chamado também de fogo d’Héstia, em homenagem a deusa Héstia, que abençoava o fogo e trazia conforto aos homens nas noites frias do inverno. Ao redor deste fogo central haveria nove astros³, dispostos em ordem de afastamento da seguinte maneira: anti-Terra, Terra, Lua, Sol, Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno⁴. Isso mesmo, Filolau inseriu um planeta inexistente no Sistema Solar. E, curiosamente, não seguiu a mesma seqüência proposta por seu mestre Pitágoras, mudando o Sol de posição. Na esfera mais externa estaria o que ele chamou de “fogo periférico”, onde se encontrariam as estrelas fixas (Fig. 1.12).

³Segundo ele, deveria haver dez corpos celestes no nosso sistema, e isto por uma razão de puro misticismo: a transcendência do sistema decimal em relação a todos os outros conjuntos. O fogo central ocupava o único ponto fixo do universo, e, em torno deste gravitavam a anti-Terra, depois a Terra, e a grande distância no plano do equador celeste, a Lua, o Sol e os cinco planetas na seguinte ordem: Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno. Seguiam-se as estrelas fixas, depois o fogo exterior, e finalmente o infinito.

⁴Os planetas até então conhecidos eram cinco: Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno. Acrescentava-se-lhes ainda a Terra, a Lua e o Sol, bem como a anti-Terra e o fogo central, eixo de todo o sistema.



Figura 1.12. Modelo proposto por Filolau com o fogo central, a anti-Terra e os demais planetas.

Vamos agora tentar entender um pouco do que pode ter passado pela cabeça de Filolau para construir este modelo. A primeira constatação (e mais óbvia) é a tentativa de montar um sistema onde houvesse 10 astros, pois como todo bom pitagórico, o número perfeito tinha que estar presente em seu trabalho.

Um dos motivos usados por alguns historiadores para explicar a existência do fogo central diz respeito a um confronto intelectual entre escolas da época. Segundo contam, um grupo de “concorrentes” dos pitagóricos teria afirmado que a luz da Lua era, na verdade, a luz do Sol refletida em sua superfície, algo que sabemos estar certo. Para não ficarem atrás, alguns dos seguidores de Pitágoras, entre eles Filolau, propuseram a existência deste fogo central. A partir de então, eles passaram a dizer que a luz do Sol era proveniente do reflexo da luz do fogo central, algo totalmente irreal, como sabemos hoje.

Entretanto, neste modelo insólito de Filolau, uma idéia já citada anteriormente merece destaque: a de uma Terra móvel. Embora não tenha sido concebida da maneira correta, neste sistema nosso planeta já executava seus principais movimentos: a revolução (só que ao redor do fogo central) e a rotação em torno de seu eixo. Neste caso, no entanto, ambos os movimentos teriam a mesma duração, fato este que faria com que um observador na Grécia (localizada no hemisfério terrestre voltado para a parte externa do Universo) não tivesse acesso visual à parte interna, onde estariam a Antiterra e o fogo central.

A presença da anti-Terra também é explicada. Além de fazer número para que a contagem chegasse a 10, este astro exerceria a importante função de proteger os

antípodas, que seriam os habitantes do hemisfério oposto àquele no qual a Grécia estava situada, de serem queimados pelo fogo central. Como a Terra levava 24 horas para completar uma volta ao redor do seu eixo, e executava uma volta em torno do fogo central no mesmo intervalo de tempo, a anti-Terra também levaria 24 horas em seu movimento orbital, de forma que o hemisfério “inferior” terrestre estivesse sempre protegido. Este comportamento explica porque tanto a anti-Terra, quanto o fogo central seriam invisíveis para os gregos. Particularmente, o fogo central seria invisível mesmo para os antípodas (Fig. 1.13).

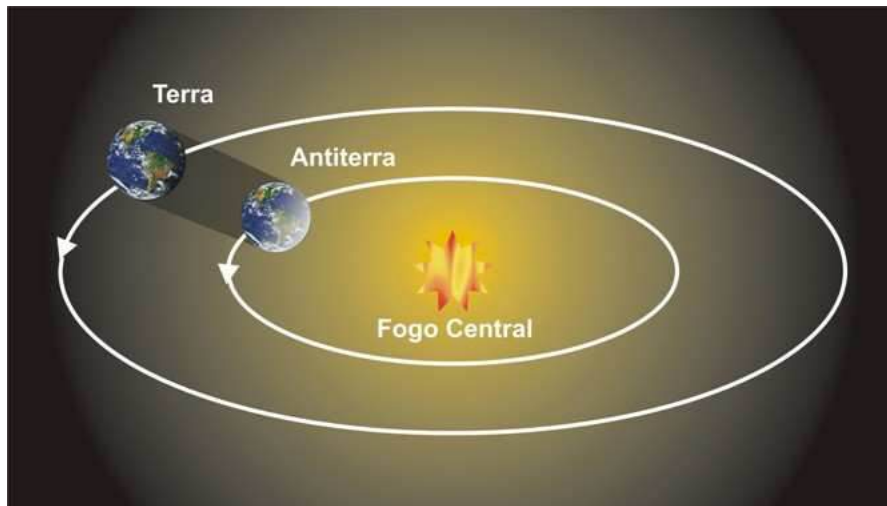


Figura 1.13. Ilustração de como era a parte mais interna do modelo proposto por Filolau com o fogo central, a Terra e a anti-Terra.

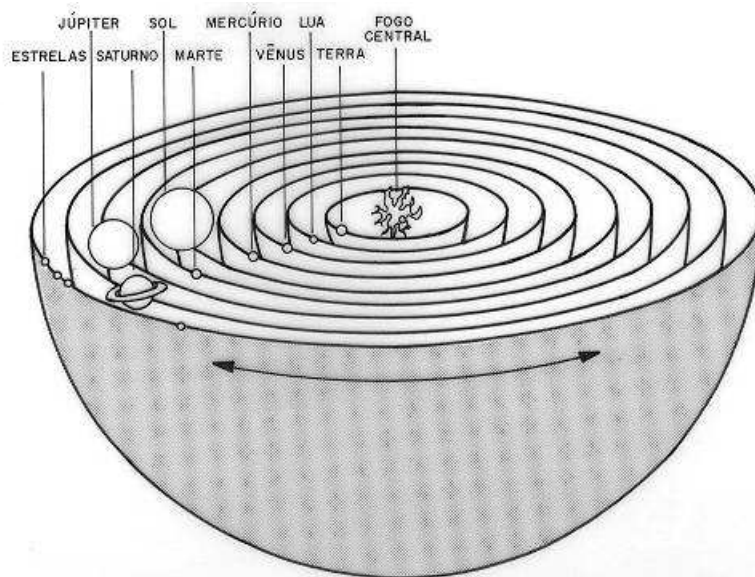


Figura 1.14. O Universo simplificado de Filolau sem a anti-Terra, pois esta, segundo ele, era invisível aos olhos humanos.

Este modelo não é geocêntrico (Fig. 1.14), porém, a partir de **Eudócio** (408 - 355) e de **Aristóteles** (384 - 322), a concepção geocêntrica do cosmos voltou a ganhar força, apesar de terríveis dificuldades.

Eudócio, discípulo de Platão, tentou expressar matematicamente as idéias de Platão sobre as posições e movimento dos planetas. Eudócio sabia que um sistema de poucas esferas, uma para cada corpo, era obviamente inadequado. Os planetas não se movem constantemente sobre um círculo. Eles se movem mais rápido ou mais devagar e até mesmo param e se movem para trás (Fig. 1.10). Eudócio elaborou um esquema com uma vasta família de esferas concêntricas. Cada planeta tinha um conjunto de quatro esferas, o Sol e a Lua tinham três esferas cada. Com uma combinação sutil do eixo de rotação dessas esferas, ele podia reproduzir, razoavelmente, os fatos observados.

Aristóteles rejeitou o modelo pitagórico e tentou melhorar o modelo de Eudócio colocando mais esferas, que no total chegaram a 54 esferas, com eixos, diâmetros e velocidades diferentes (Fig. 1.16). Aristóteles concluiu que a Terra era redonda observando que a sombra da Terra sobre a face da Lua, num eclipse lunar, era um arco.

Antecipando-se a Copérnico, **Heráclito do Ponto**, que viveu entre 400 e 300, descobriu a rotação da Terra, e propôs um sistema misto⁵. A Terra estaria no centro do Universo, mas Mercúrio e Vênus, que nunca eram vistos muito distantes do Sol, girariam em torno deste, explicando assim o fato dos planetas ora se encontrarem mais próximos, ora mais afastados de nós que o Sol (Fig. 1.15). A sua obra foi continuada em Alexandria por **Aristarco** por volta de 290 a.C.

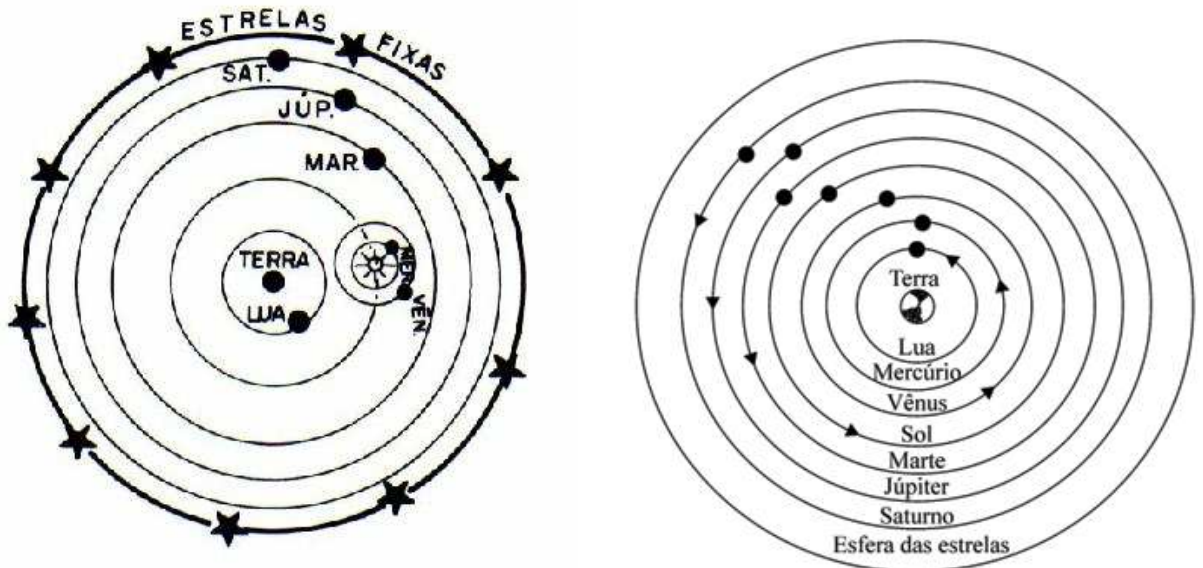


Figura 1.15. Sistema Geocêntrico proposto por Heráclides. **Figura 1.16.** Universo Aristotélico.

⁵Pois no século IV a.C. o sistema geocêntrico não explicava os movimentos dos planetas com relação às estrelas fixas.

Cabe aqui destacar o modelo heliocêntrico de Aristarco.

1.3.1 O Modelo Heliocêntrico de Aristarco

Aristarco que já admitia a Terra descrevendo a eclíptica⁶, enquanto o Sol ocupava o lugar de uma estrela fixa, construiu um modelo com duas hipóteses simplificadoras:

1. A Terra gira sobre si - o que explica o dia e a noite. (Outros fizeram essa sugestão, entre eles Heráclides).
2. A Terra gira ao redor do Sol e os outros planetas também. Isto explica o movimento aparente do Sol e planetas.

A idéia era simples mas o modelo falhava completamente aos dogmas da época:

- A tradição era contra. Era só uma idéia.
- Não havia nenhuma evidência da rotação da Terra.
- Se a Terra gira ao redor do Sol, as estrelas deveriam apresentar paralaxe⁷ e nenhuma delas apresentava⁸.
- Essa concepção impusera-se, pois as grandes variações do brilho de Vênus e Marte, tornavam indefensável a hipótese de sua distância ser invariável em relação à Terra.
- Esse modelo apresentava, aos olhos dos filósofos de então, a falha imperdoável de se afastar do dogma platônico da imobilidade da Terra. Por conseguinte, a celebridade de Aristóteles fez mergulhar no esquecimento a teoria, e o sistema de esferas ocas e homocêntricas prevaleceu. Por essa razão, o Universo heliocêntrico de Aristarco ficou esquecido.

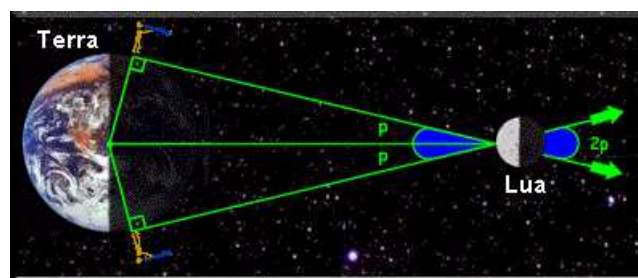


Figura 1.17. O método da paralaxe aplicado à medida Terra-Lua.

⁶A eclíptica é definida como a circunferência imaginária correspondente à trajetória aparente do Sol na esfera celeste. O eixo da eclíptica é uma reta perpendicular à eclíptica e passa pelo centro da Terra.

⁷A paralaxe estelar é a variação de posição de uma estrela em relação a outras mais distantes devido ao movimento da Terra em torno do Sol (Fig. 1.17).

⁸As estrelas não apresentavam paralaxe porque as paralaxes estelares são difíceis de medir. Mesmo as estrelas mais próximas estão muito longe. Por este motivo, as paralaxes são normalmente muito pequenas, inferiores a 1 segundo de arco, imperceptíveis ao olho humano.

A partir de 250 a.C., época em que a ciência grega emigrou para a Alexandria, observadores incansáveis começaram a acumular dados astronômicos. Podemos citar **Apolônio** (230 a.C.), **Hiparco** (130 a.C.) e **Ptolomeu** (140 d.C.). Então esta escola de Alexandria tinha em mãos uma difícil tarefa, qual seja, a de resolver um problema bastante complexo: determinar todos os movimentos, diretos ou retrógrados, dos corpos celestes tendo-se a posição da Terra fixa no centro do mundo.

Podemos dizer que aí começou a nascer a Mecânica Celeste. A solução encontrada foi utilizar um dispositivo semelhante ao diferencial dos automóveis, isto é, no centro, a Terra, e à sua volta a Lua e o Sol descrevendo círculos fixos, e mais afastados, os planetas em movimento uniforme sobre epiciclos cujos centros estariam se movendo uniformemente ao longo de outros círculos maiores, os deferentes. Com um modelo mais aperfeiçoado, Ptolomeu conseguiu explicar razoavelmente as observações, colocando os centros dos epiciclos de Mercúrio e Vênus alinhados com o Sol. (Fig. 1.18)

1.4 O Modelo Geocêntrico de Ptolomeu

O último dos grandes astrônomos gregos foi Cláudio Ptolomeu. Escreveu o famoso livro *Almagesto* “O Maior”, obra na qual seu modelo foi exposto e constituiu a Bíblia astronômica dos 1400 anos que se seguiram.

Os conceitos de círculos e epiciclos (ou epiciclos) não são originais de Ptolomeu, pois foram propostos por outros antes dele, entre eles Hiparco. De acordo com o sistema ptolomaico, cada planeta se move num círculo pequeno (epiciclo), cujo centro se move ao redor da Terra, a qual é estacionária e está no centro do Universo.

Como Mercúrio e Vênus são vistos sempre perto do Sol, Ptolomeu colocou o centro de seus epiciclos sobre uma linha entre a Terra e o Sol, com o centro dos epiciclos movendo-se ao redor da Terra, num círculo condutor (deferente) (Fig. 1.18).

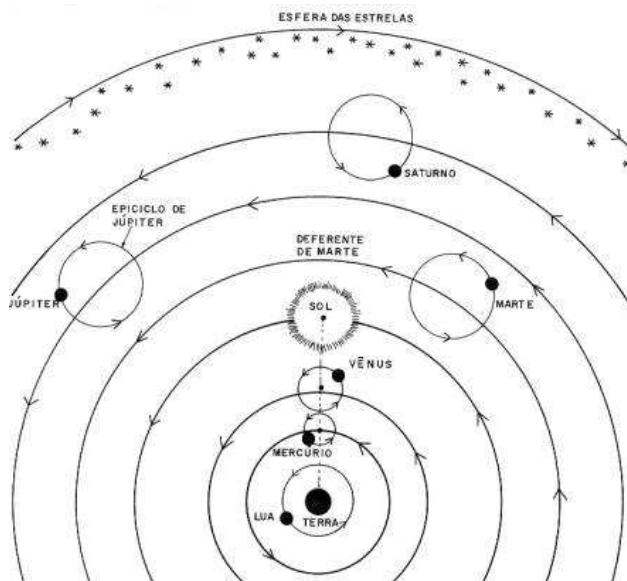


Figura 1.18. O Sistema Ptolomaico.

Desenvolvendo o modelo, Ptolomeu percebeu que se os corpos se movem em órbitas circulares ao redor da Terra, um observador sempre veria os planetas se movendo na mesma direção e isto não concorda com as observações, porque os planetas, em certas épocas, parecem parar e se mover na direção oposta (laçada) (Fig. 1.10). Para explicar esta laçada, Ptolomeu colocou cada planeta movendo-se num pequeno círculo (epiciclo), cujo centro C move-se ao longo de uma circunferência maior (círculo condutor ou deferente) com seu centro em A (Fig. 1.19). O centro do epiciclo move-se com velocidade constante⁹ ao redor do ponto Q (equante), o qual é colocado sobre o lado oposto ao centro do círculo condutor (deferente) em relação à Terra. O movimento retrógrado é produzido quando o planeta está dentro da deferente.

Ptolomeu reproduziu o movimento observado dos planetas e forneceu meios de se prever a posição futura deles, “facilmente”.

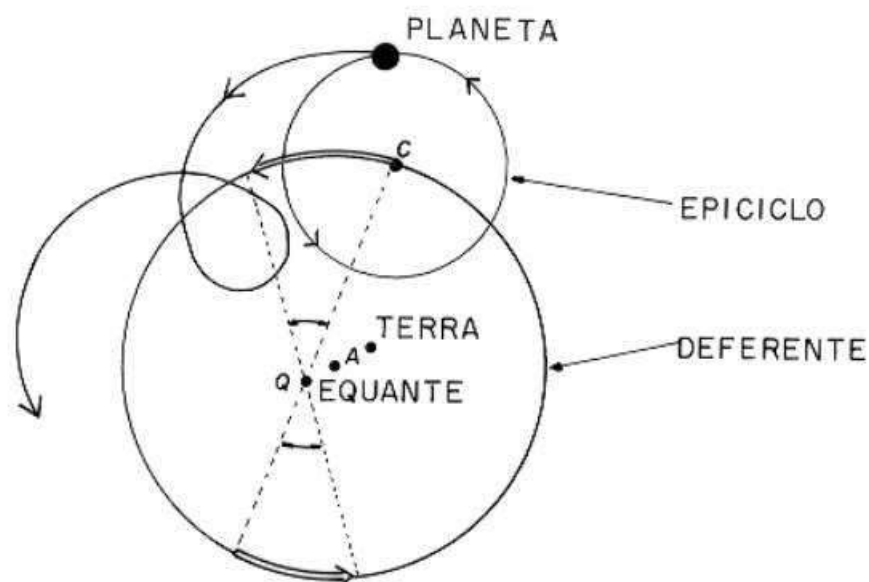


Figura 1.19. O Sistema de Epiciclos de Ptolomeu.

Os astrônomos gregos, além de montar cosmologias e descrever fenômenos, tiveram também outras preocupações como medir o perímetro da Terra, e determinar distâncias entre os corpos celestes.

Quanto ao perímetro da Terra, **Eratóstenes** (230 a.C.) o mediu por meio de uma simples observação que descreveremos a seguir.

Ele era bibliotecário-chefe da famosa Biblioteca de Alexandria, e foi lá que encontrou, num velho papiro, indicações de que ao meio-dia de cada 21 de junho na cidade de Siena (atual Assuão), 800Km (5000 estádios) ao sul de Alexandria, uma vareta fincada verticalmente no solo não faz qualquer sombra.

⁹O Movimento Circular e Uniforme era tido como o mais perfeito dos movimentos, e por isso fora adotado para medir os movimentos das coisas perfeitas do céu, dentre elas os movimentos dos astros.

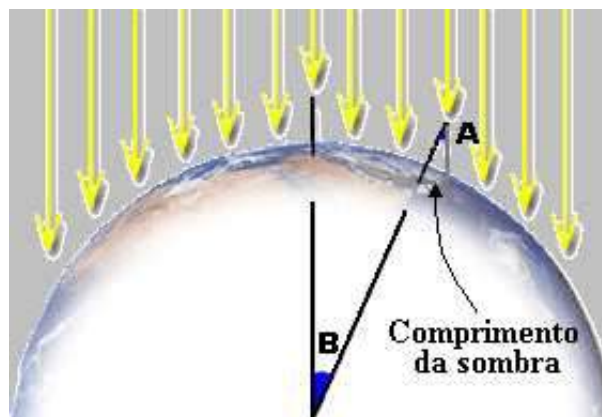
Cultura inútil, diriam alguns. Não para um homem observador como Eratóstenes. Ele percebeu que o mesmo fenômeno não ocorria no mesmo dia e horário em Alexandria e pensou:



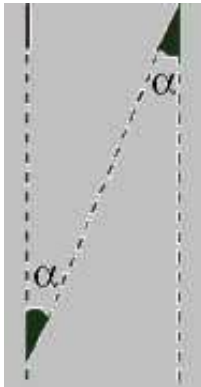
Figura 1.20. Se o mundo é plano como uma mesa, então as sombras das varetas têm de ser iguais. Se isto não acontece é porque a Terra deve ser curva!

Mais do que isso. Quanto mais curva fosse a superfície da Terra, maior seria a diferença no comprimento das sombras. O Sol deveria estar tão longe que seus raios de luz chegam à Terra paralelos.

Varetas fincadas verticalmente no chão em lugares diferentes lançariam sombras de comprimentos distintos. Eratóstenes decidiu fazer um experimento. Ele mediu o comprimento da sombra em Alexandria ao meio-dia de 21 de junho, quando a vareta em Sienna não produzia sombra. Assim obteve o ângulo A , conforme a figura abaixo.



Eratóstenes mediu $A \approx 7^\circ$ (aproximadamente um quinquagésimo da circunferência da Terra). Se as varetas estão na vertical, dá para imaginar que se fossem longas o bastante iriam se encontrar no centro da Terra. Preste atenção na figura acima. O ângulo B terá o mesmo valor que A , pois o desenho de Eratóstenes se reduz a uma geometria muito simples: “Se duas retas paralelas interceptam uma reta transversal, então os ângulos alternos internos são iguais”.



As retas paralelas são os raios de luz do Sol e a reta transversal é a que passa pelo centro da Terra e pela vareta em Alexandria. O ângulo B (também igual a 7°), é a uma fração conhecida da circunferência da Terra e corresponde ao arco entre Siena e Alexandria (distância entre as duas cidades).

Eratóstenes sabia que essa distância valia cerca de 800Km e então pensou: 7° ($1/50$ da circunferência) está para 360° (1 inteiro) assim como 800Km está para X .

Oitocentos quilômetros vezes cinquenta são quarenta mil quilômetros, de modo que deve ser este o valor da circunferência da Terra.

1.4.1 O Mundo não é Chato

VALOR ENCONTRADO ATUALMENTE: cerca de 40.072 Km ao longo da linha do equador. Um erro muito pequeno para uma medida tão simples, e feita há tanto tempo. Com a circunferência, podemos calcular o diâmetro e o raio ou ainda o volume e a área da superfície, através de fórmulas simples.

Repare que o conhecimento utilizado por Eratóstenes (retas paralelas cortadas por uma transversal) é formalmente adquirido hoje nas aulas de geometria do ensino fundamental.

Igualmente, a distância da Terra à Lua, os gregos calcularam com boa aproximação, valendo-se da razão 4 para 1 que se observa entre o diâmetro da sombra da Terra projetada sobre a Lua na ocasião dos eclipses, e o diâmetro aparente desta. Por outro lado, a Lua é vista sob um ângulo de meio grau, e como se sabe que para um círculo sob esse ângulo, é preciso colocá-lo a uma distância igual a 120 vezes o seu diâmetro, concluíram que a distância procurada era de 60 raios terrestres. Esse resultado é atribuído a Hiparco (161 - 127).

A distância da Terra ao Sol foi calculado por Aristarco como sendo 19 vezes a da Terra à Lua, e embora esse valor esteja muito longe da realidade, foi aceito durante 15 séculos.

Ainda os gregos nos legaram um catálogo de mais de 100 estrelas, estudos sobre a órbita lunar com relação à sua excentricidade, seu movimento da linha dos ápides e dos nodos, e o cálculo da precessão dos equinócios.

Capítulo 2

Astronomia Medieval: A Queda de sua Excelência

O princípio da Idade Média foi palco de vários acontecimentos nefastos, os quais contribuíram decididamente para a decadência da Astronomia e, em contrapartida, a astrologia que em momento algum deixou de existir, pois os grandes filósofos gregos que também se dedicaram a ela, entraram em franca ascensão.

Essa época foi marcada pela ruína do Império Romano, o fechamento das universidades em 529 por Justiniano, e o pior de todos os acontecimentos, foi a destruição de mais de 700000 manuscritos da biblioteca de Alexandria pelos árabes.

Na Idade Média, assim como na era posterior, a igreja cristã também contribuiu para o enfraquecimento da Astronomia, e isto pode ser facilmente evidenciado por uma série de papas - Leão III, Silvestre II, Honório III, Urbano V - que foram amigos e protetores de astrólogos. Além do mais, é fato notório que a igreja se opôs ferozmente a qualquer teoria que não fosse geocêntrica e, em razão dessa atitude, essa concepção perdurou por 14 séculos, até a publicação da obra “De Revolutionibus Orbium Celestium” - Das Revoluções das Órbitas Celestes - de Copérnico (1543), obra essa, que revolucionou a Astronomia.

Apesar de tudo, o progresso da Astronomia não foi nulo, graças porque a prática da astrologia exige o conhecimento das posições precisas dos astros no céu, e estas observações são fundamentais no desenvolvimento da ciência astronômica.

Albatênio (858 - 929) reobservou as posições do Sol, calculou com cuidado a obliquidade da eclíptica, introduziu o seno em trigonometria e retificou a constante de precessão de Ptolomeu. **Al-Sufi** (903 - 986) e **Abul Feda** (939 - 998) foram outros dois representantes da escola de Bagdad fundada no século VIII, sendo que o primeiro se dedicou a completar o catálogo de estrelas de Ptolomeu, verificando inclusive o brilho relativo, e o segundo desenvolveu a trigonometria e descobriu a libração lunar¹. A obra dessa escola foi continuada nos séculos X a XII pelos astrônomos do Cairo, onde podemos lembrar aqui, **Al-Hazen** e **Ibn Yunis**, falecidos respectivamente em 1038 e 1088, e que estabeleceram as primeiras efemérides² de

¹A libração acontece devido ao deslocamento, real ou aparente, dos eixos lunares em relação às suas posições médias. Assim, esse deslocamento nos permite ver um pouco mais da superfície lunar nas áreas do limbo (borda) Norte, Sul, Leste e Oeste da Lua. Cerca de 9% da face oculta (escondida) da Lua é observável graças a este fenômeno.

²Tabela que fornece, em intervalos de tempo regularmente espaçados, as coordenadas que de-

que se tem conhecimento. Foram também responsáveis por importantes progressos na matemática.

Em 1252, **Afonso V**, rei de Castela, protetor e aluno dos astrólogos árabes do seu reino, publicou as Tábuas Afonsinas que dizem respeito ao movimento dos astros. Também entre os mongóis a astrologia era praticada. **Ulug-Beg** (1394 - 1449), munido de um observatório com um gigantesco quadrante de 60m de raio, observou a obliquidade da eclíptica, estabeleceu tábuas independente do catálogo de Ptolomeu.

finem a posição de um astro. As efemérides constituem o elo entre as teorias sobre as quais são constituídas e as observações posteriores, o que permite provar a validade daquelas.

Capítulo 3

Astronomia na Idade Moderna: A Ascensão e o Desenvolvimento da Mecânica Celeste

A partir do século XV houve autênticos gênios que praticaram a astrologia. **Regiomontanus**, por exemplo, que nasceu em Königsberg em 1436, foi um dos maiores astrônomos da Europa. Reviu o texto do “Almagesto” - O Maior -, obra de Ptolomeu, traduziu-o para o latim, e o publicou em Veneza em 1496. Foi também o construtor do primeiro observatório da Europa (1472), e nele efetuou observações sobre um cometa, provavelmente o Halley.

Jerônimo Cardan (1501 - 1577), brilhante matemático italiano, foi outro fanático da astrologia. A ele devemos a fórmula das equações algébricas do 3º grau, de raízes imaginárias.

Por outro lado, o mais popular dos astrólogos, **Michael de Nostre-Dame**, ou **Nostradamus** (1503 - 1566), não teve nenhuma participação científica, apenas deixou profecias expressas sob forma de centúrias.

O começo da Idade Moderna é caracterizado pelas grandes explorações marítimas, feitas pelos portugueses e espanhóis, e esse fato combinado com o surgimento da imprensa (1453), propiciaram o desenvolvimento das ciências em geral, principalmente a Astronomia. É importante ressaltar que essas explorações foram possíveis graças à bússola herdada dos árabes, bem como graças aos elementos matemático-astronômicos que permitiram determinar as coordenadas em pleno mar. Basta lembrar que as efemérides que cobriam os anos de 1475 a 1505, elaboradas por Regiomontanus, foram utilizadas por Vasco da Gama e Cristovão Colombo.

A Astronomia por sua vez, beneficiou-se das grandes descobertas decorrentes, as quais levaram os estudiosos a conhecer melhor o nosso planeta, quanto à esfericidade e isolamento. Esses novos conhecimentos estimularam os homens a ter novas idéias, e os encorajaram a duvidar da validade das concepções medievais.

O primeiro a repensar na cosmologia, foi o cardeal belga, **Nicolau de Cusa** (1401 - 1464), que retornou a defender sem sucesso as teses de Aristarco.

3.1 O Modelo Heliocêntrico de Copérnico

No fim da Idade Média estava surgindo na Europa um clima de livre pensamento (sem muitas interferências políticas e religiosas). Textos Árabes e Gregos estavam sendo traduzidos para o Latim e universidades estavam sendo fundadas. Escolas de pensamento estavam se formando.

Nesse cenário de florescimento de idéias é que **Nicolau Copérnico** (1473 - 1543), cômego polaco nascido em Thorn, apresentou seu modelo heliocêntrico do Universo. Sua obra foi publicada no livro “Sobre a Revolução dos Corpos Celestes” em 1543, ano de sua morte.

O modelo de Copérnico é mais simples e próximo da realidade; ele é baseado no fato de que a Terra gira sobre si diariamente; que o centro da Terra não é o centro do Universo, mas simplesmente o centro dela e da órbita da Lua; que todos os corpos celestes giram ao redor do Sol, o qual é ou está próximo do centro do Universo; e que um corpo mais próximo do Sol viaja com velocidade orbital maior do que quando está distante (Fig. 3.4 e 3.5).

Ptolomeu colocou a Terra no centro e sem girar porque ela se quebraria se girasse. Copérnico argumentou que sendo a esfera celeste muito maior teria se quebrado primeiro se tivesse que girar ao redor da Terra.

Os sistemas de Copérnico e Ptolomeu apresentam duas grandes diferenças básicas:

1. Copérnico trocou a posição do Sol e da Terra e eliminou o ponto Q (equante).
2. Para explicar as variações nas órbitas celestes ele supôs que os planetas se moviam em 34 epiciclos, 7 para Mercúrio, 5 para Vênus, 3 para a Terra, 5 para Marte, 5 para Júpiter, 5 para Saturno e 4 para a Lua.

Através do modelo de Copérnico foi possível a primeira determinação de distância de um planeta ao Sol, em termos de distância Terra-Sol (Fig. 3.1).

A partir da figura abaixo torna-se evidente que quando visto da Terra, Mercúrio irá apresentar uma oscilação em torno do Sol (Fig. 3.2).

Isto é, se num certo instante a Terra está em T_1 e Mercúrio está numa posição de máximo afastamento angular M_1 , à “direita” do Sol, digamos, então, depois de 116 dias Mercúrio estará, novamente, numa posição M_2 de máximo afastamento angular, à direita do Sol e a Terra estará na posição T_2 . O ângulo de máximo afastamento angular para Mercúrio é de 23° e é determinado observacionalmente. O ângulo de 67° é facilmente calculado, pois o triângulo T_1SolM_1 é retângulo em M_1 . O ângulo entre T_1 e T_2 é determinado pela seguinte regra de três:

$$\left\{ \begin{array}{l} 360^\circ - 365,25 (= 1 \text{ ano}) \\ \left. \vphantom{360^\circ} \right\} \left. \vphantom{360^\circ} \right\} \\ T_1T_2 - 116 \text{ dias} \end{array} \right. \quad \therefore T_1T_2 = 114^\circ$$

O ângulo de 47° é obtido pela diferença $114^\circ - 67^\circ$, portanto, em 116 dias Mercúrio deu uma volta 360° mais 114° ($= 47^\circ + 67^\circ$), ou seja, percorreu 474° ; assim podemos determinar o período T de Mercúrio pela seguinte regra de três:

$$\left\{ \begin{array}{l} T = 360^\circ \\ 116 \text{ dias} = 474^\circ \end{array} \right. \setminus T = 116 \text{ dias} \times \frac{360^\circ}{474^\circ} \setminus T @ 88 \text{ dias}$$

Para Vênus o procedimento é idêntico e para os planetas exteriores (que estão além da Terra) o procedimento é um pouco diferente.

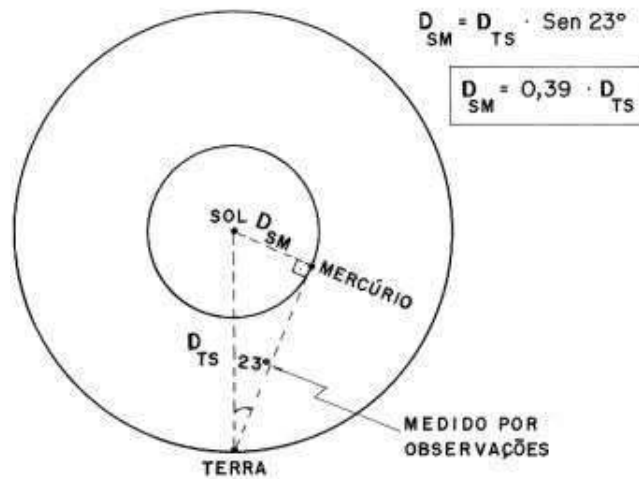


Figura 3.1. Cálculo da distância Sol-Mercúrio em termos da distância Sol-Terra.

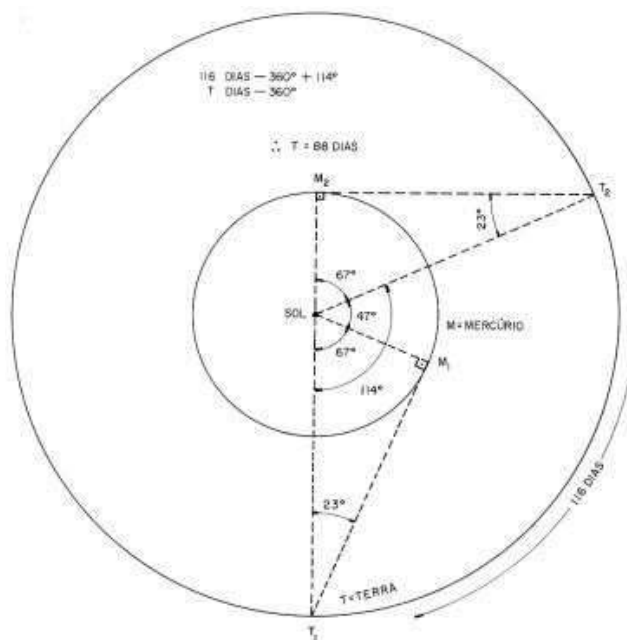


Figura 3.2. Esquema para o cálculo do período orbital de Mercúrio.

A estranha laçada (loop) que os planetas externos apresentam foi muito bem explicada por Copérnico. O fato do observador estar em referencial móvel, causa as inversões do movimento (Fig. 3.3). A teoria heliocêntrica conseguiu dar explicações mais naturais e simples para os fenômenos observados, porém, Copérnico não conseguiu prever as posições dos planetas com suficiente precisão e, infelizmente, ele não alcançou uma prova categórica de que a Terra estava em movimento. Sua teoria foi violentamente atacada pela Igreja Cristã e a sua obra foi colocada em 1616 no Índice dos livros proibidos pela Inquisição, e retirado somente séculos depois. Todos aqueles que atreveram a lê-lo, foram impiedosamente perseguidos pela Inquisição.

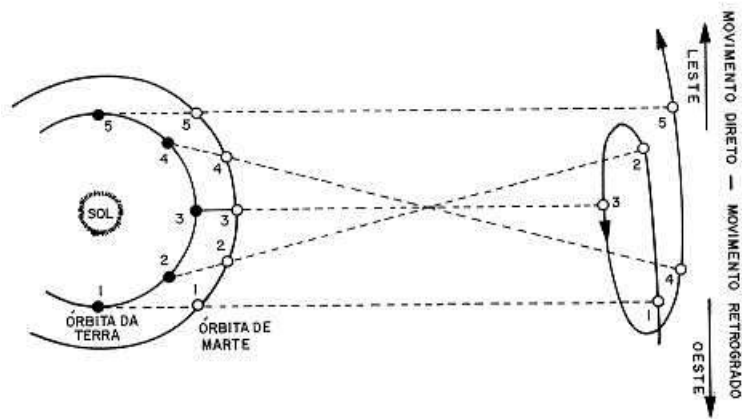


Figura 3.3. Movimento aparente do planeta.

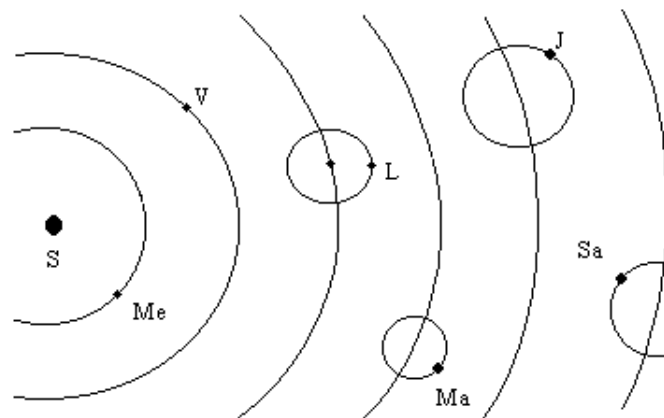


Figura 3.4. Modelo heliocêntrico de Copérnico com epiciclos .

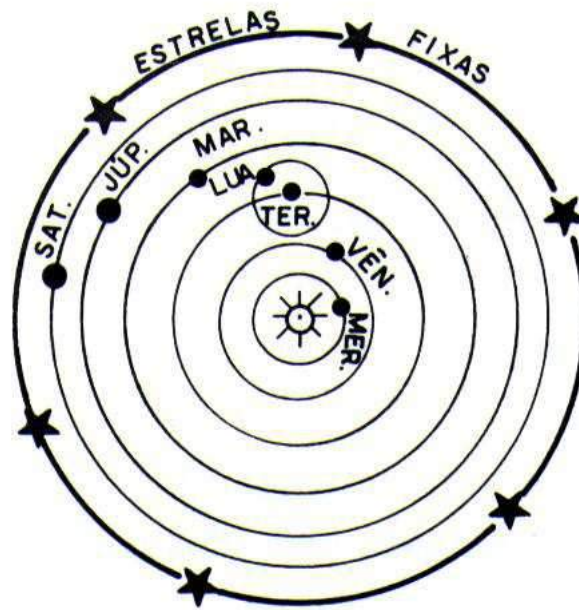


Figura 3.5. Modelo heliocêntrico de Copérnico.

Se a Idade Média foi uma era desfavorável para o crescimento da Astronomia, em compensação, a Idade Moderna foi muito fecunda, a começar pela genialidade de Copérnico. Seguiram-se a ele, outros grandes nomes que modificaram profundamente o estudo dos corpos celestes, criando assim uma nova era para a Mecânica Celeste.

3.1.1 O Modelo Tychônico do Universo

Em 1546, três anos depois da morte de Copérnico, nasceu **Tycho Brahe** (1546 - 1601) em Knudstrup (Escócia). De família nobre, estudou na Universidade de Copenhague Línguas e Direito. Nesta época ocorreu um eclipse previsto e isto mudou o curso de sua vida. A partir daí começou a estudar matemática e astronomia.

Ele construiu seu próprio observatório em Augsburg, Alemanha, e nele colocou os instrumentos mais sofisticados que existiam na época (ainda não havia lunetas ou telescópios). Fez observações sistemáticas do céu. Em 11/11/1572 viu uma estrela que brilhava até durante o dia - uma supernova.

O rei Frederico II, da Dinamarca, ficou tão impressionado com Brahe, que o convidou para ser matemático da corte e professor de matemática e astronomia na Universidade de Copenhagen. O rei deu para ele uma ilha, onde construiu um observatório - melhor do mundo - e muito dinheiro. Com todas essas facilidades, Brahe fez registros muito precisos das posições dos planetas durante anos seguidos.

Tycho Brahe observou um grande cometa e mostrou que ele estava muito além da Lua e, portanto, não era fenômeno meteorológico como pensavam.

Tycho era um tremendo mau-caráter; administrou seu observatório com mão de

ferro e fez tantos inimigos que quando o rei Frederico II morreu, ele foi forçado a abandonar seu observatório-castelo.

Em 1599 ele chegou em Praga convidado pelo imperador Rodolfo II para servir como matemático da corte. Dois anos depois, Brahe morreu.

3.1.2 O Modelo de Tycho Brahe

Para Brahe, a Terra era o centro do Universo, pois ele nunca observou a paralaxe de uma estrela. Assim, não aceitou o modelo de Copérnico, mas mudou o modelo de Copérnico para deixá-lo mais compatível com suas convicções.

O modelo Tychônico era uma combinação do modelo de Ptolomeu e do de Copérnico. No centro do Universo estava a Terra, imóvel; o Sol girava ao redor da Terra e os planetas, esta é a diferença, giravam ao redor do Sol (Fig. 3.6 e 3.7).

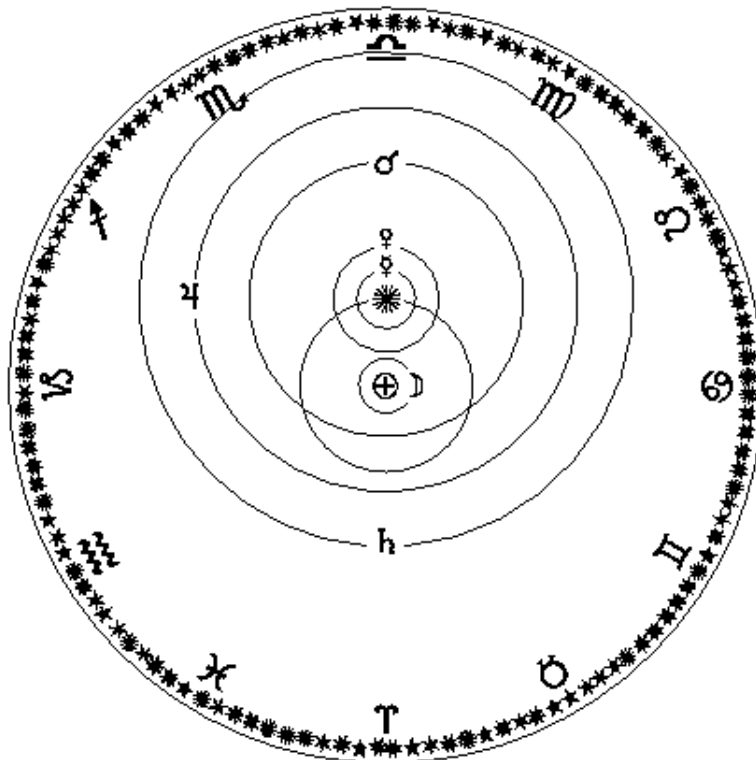


Figura 3.6. O Sistema idealizado por Brahe.

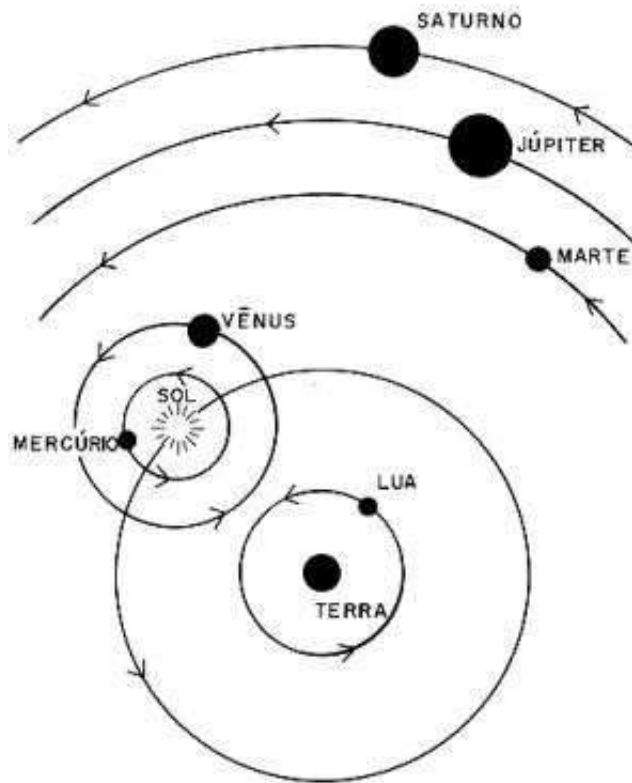


Figura 3.7. O sistema Tychônico, uma combinação dos sistemas Ptolomaico e Copernicano. A Lua e o Sol giram ao redor da Terra; Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno, planetas conhecidos até então, giram ao redor do Sol.

3.2 O Modelo Final do Sistema Solar por Johannes Kepler

Discípulo de Brahe **Johannes Kepler** (1571 - 1630), natural de Weil, Alemanha, tinha inicialmente a ambição de ser pastor luterano, mas na Universidade de Tubingen, sob a influência de um professor de matemática e astronomia - Michael Maestlin -, abandonou a teologia e estudou astronomia. Este professor o ensinou que Ptolomeu estava certo, mas Kepler preferiu o modelo de Copérnico.

Kepler publica "Mysterium Cosmographicum". É neste livro que está seu místico modelo de Universo, sob forte influência neo-platônica, desenvolvido sobre a idéia de que as distâncias dos planetas até o Sol, no sistema copernicano, eram determinadas pelos cinco poliedros de Platão. Bastava supor que a órbita de cada planeta estava circunscrita sobre um sólido e inscrita em outros seguintes (Fig. 3.8).

Ocorre frequentemente, entretanto, que mesmo a mais bela correlação entre dados não tem qualquer significado profundo para explicar a natureza das coisas. Hoje, essa descoberta está esquecida. Seu sistema está destruído pelo fato de haver mais de seis planetas. Mas, o sétimo só foi descoberto muitos anos depois de sua morte.

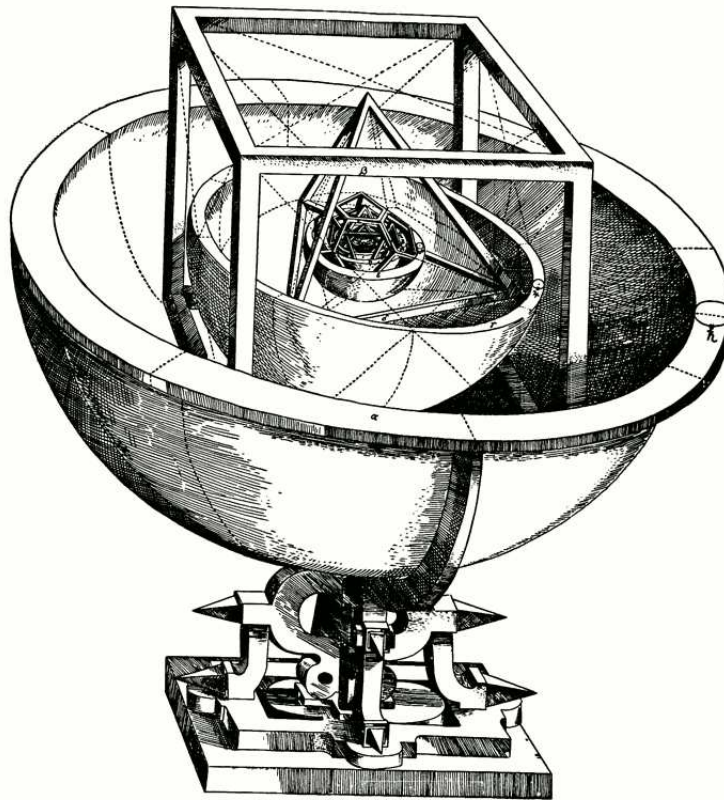


Figura 3.8. A lei de Kepler das órbitas planetárias baseava-se nos cinco sólidos regulares. De acordo com a lei, uma esfera de raio igual ao da órbita de Saturno circunscrive um cubo. Uma esfera inscrita nesse cubo tem raio igual ao da órbita de Júpiter. Assim, é inscrito a essa esfera de raio igual ao da órbita de Júpiter um tetraedro. Uma esfera inscrita no tetraedro dá o raio da órbita de Marte. Nessa esfera, inscreve-se um dodecaedro. Uma esfera inscrita nele dá a órbita da Terra. A essa esfera se inscreve um icosaedro. A esse icosaedro se inscreve outra esfera de raio igual ao da órbita de Vênus. E por fim, a essa esfera inscreve-se um octaedro. E inscrevendo-se uma esfera a ela obtém-se a órbita de Mercúrio.

Depois de publicar “*Mysterium Cosmographicum*”, Kepler manda cópias para Brahe e Galileu. Brahe o convida para ser seu assistente em 1600, em Praga, um ano antes da morte de Brahe.

A reunião de Brahe e Kepler é de grande importância para a astronomia. Brahe era ótimo observador, mas não tão bom teórico, enquanto Kepler era ótimo teórico e muito persistente em seus propósitos. Quando Brahe morreu, em 1601, seus dados observacionais - que eram muitos - ficaram à disposição de Kepler. Com estes dados, Kepler descobriu as Leis do Movimento Planetário.

Depois de mais de cinco anos de trabalho tedioso com os dados observacionais de Tycho, das posições de Marte, Kepler concluiu que a órbita de Marte era uma elipse, com o Sol num foco (isso já depois de ter descoberto as leis das áreas - atual

segunda lei).

Em 1609, Kepler publicou em seu livro, *Astronomia Nova*, suas duas primeiras Leis:

1. Os planetas se movem em trajetórias elípticas, onde o Sol ocupa um dos focos.
2. A linha reta que une o planeta ao Sol, varre áreas iguais em intervalos de tempos iguais.

Com a primeira Lei, extremamente simples, substituiu todos os ciclos e epiciclos dos modelos ptolomaico, copernicano, tichônico, etc (Fig. 3.9).

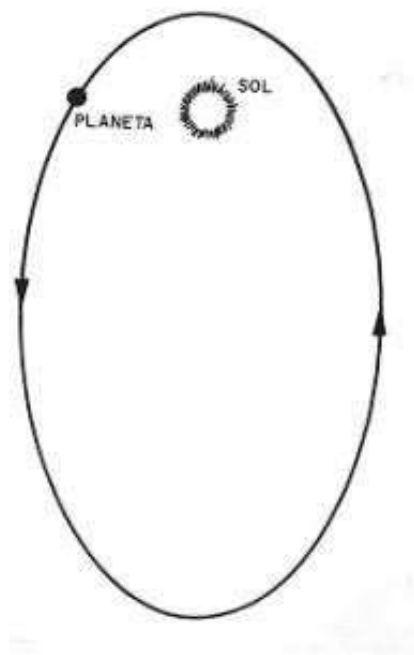


Figura 3.9. Lei das órbitas. A órbita de um planeta é uma elipse, com o Sol num dos focos.

Com a segunda, os seus dados apontaram um estranho fenômeno que ele se esforçou para entender em vão: que os corpos não têm velocidades (em módulo) constantes, mais sim velocidades maiores quando próximos do Sol e velocidades menores quando mais afastados do Sol (Fig. 3.10), isto é, o Sol influenciara nas velocidades dos planetas.

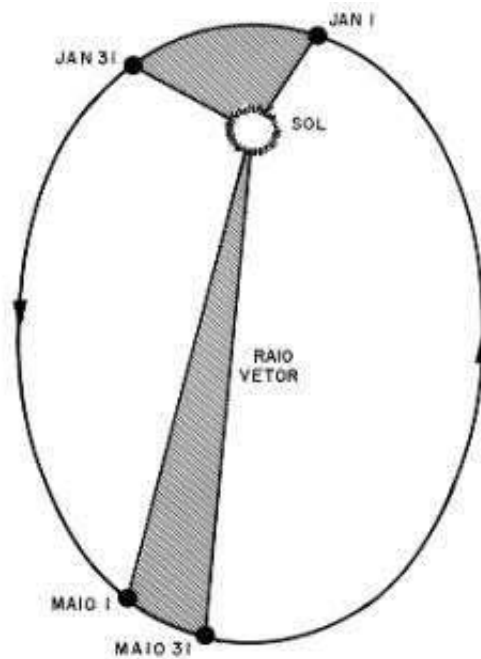


Figura 3.10. Lei das áreas. O raio vetor do planeta varre áreas iguais em iguais intervalos de tempo.

Através destas Leis, Kepler tira de vez a Terra do centro do Universo e tira também o Sol do centro do Universo. Não se fala mais em centro do Universo e a Terra tem que girar sobre si mesma.

Mesmo depois de publicadas estas Leis (1609), Galileu foi condenado (1633). Não havia evidência para a rotação da Terra e a Bíblia possui passagens que dizem que a Terra não gira, etc.

Dez anos mais tarde, Kepler publica sua terceira Lei (1619), num livro cheio de misticismo, *Epitome Astronomiae Copernicanae*, do qual só se aproveita mesmo, sua terceira Lei.

Kepler conhecia os períodos e distâncias dos planetas. Em termos do período da Terra (=1 ano) e da distância da Terra ao Sol (=1 unidade) os períodos dos planetas e suas distâncias ao Sol são:

Planeta	Período (T)	Distância (D)
Mercúrio	0,24	0,39
Vênus	0,62	0,72
Terra	1,00	1,00
Marte	1,88	1,52
Júpiter	11,86	5,20
Saturno	29,46	9,54

Agora se calcularmos a razão $\frac{T^2}{D^3}$ obteremos a seguinte tabela abaixo:

Planeta	Razão	Resultado
Mercúrio	T^2/D^3	0,97
Vênus	T^2/D^3	1,03
Terra	T^2/D^3	1,00
Marte	T^2/D^3	1,01
Júpiter	T^2/D^3	1,00
Saturno	T^2/D^3	1,00

Conclusão: a razão acima é aproximadamente constante.

$$\frac{T^2}{D^3} \approx K$$

De posse desta constância Kepler enuncia sua Terceira Lei:

3. A razão entre o quadrado do período pelo cubo da distância média¹ do planeta ao Sol é uma constante.

¹Entende-se por distância média como a média aritmética da maior e menor distância do planeta ao Sol.

3.2.1 A 4ª Lei de Kepler

O que poucas pessoas conhecem é que ao lado das primeiras leis publicadas na *Astronomia Nova*, em 1609, Kepler formulou uma outra lei que, se válida, seria hoje considerada como uma quarta Lei de Kepler e que poderíamos denominá-la “Lei das Velocidades” ou “Lei Cinemática”:

“A velocidade de um planeta é, em cada instante, inversamente proporcional à sua distância ao Sol.”

A afirmação não é correta. Seria válida se considerasse a componente da velocidade orbital de um planeta perpendicular ao seu raio vetor. Esta sim é inversamente proporcional à distância do planeta ao Sol, como veremos adiante.

Por que não é válida a “Quarta Lei de Kepler”?

A velocidade orbital de um planeta é um vetor tangente à elipse descrita pelo planeta ao redor do Sol. Um vetor tangente a uma elipse **NÃO** é, no caso geral, perpendicular a nenhum dos segmentos que une o ponto de tangência aos focos. Desta maneira, o vetor velocidade não é, em geral, perpendicular ao raio-vetor do planeta, exceto quando ocorrem as passagens periélica e afélica (Fig. 3.11).

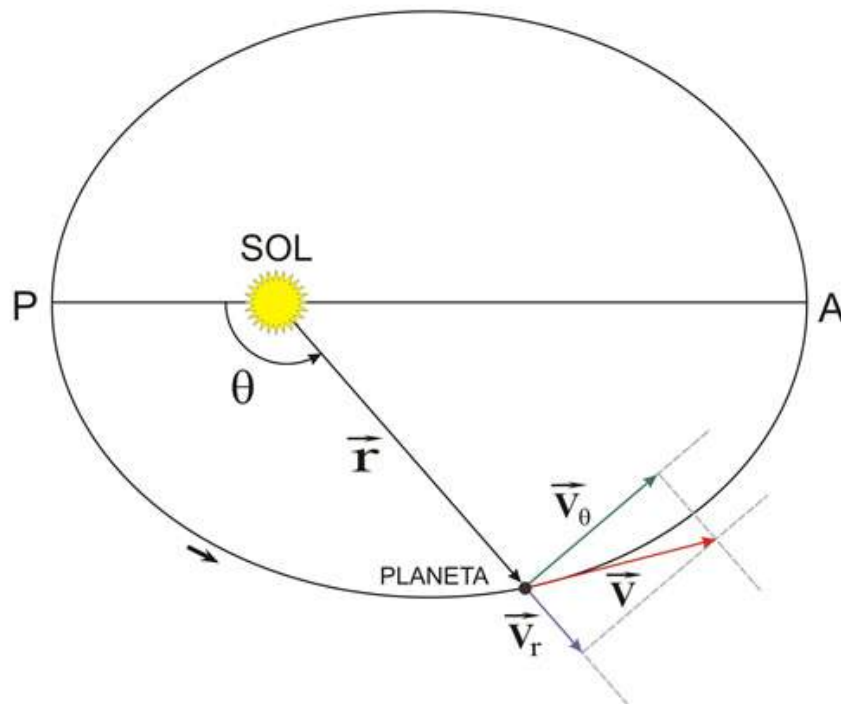
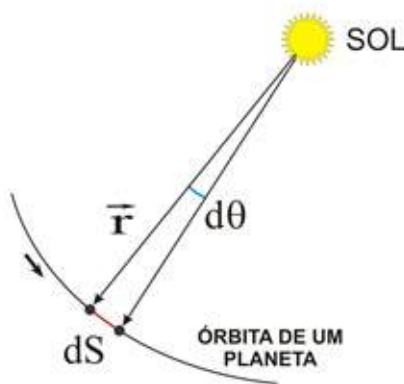


Figura 3.11. A velocidade orbital de um planeta e suas componentes radial e normal ao raio-vetor.

Podemos, então, decompor o vetor velocidade em duas componentes com direções perpendiculares entre si: uma normal ao raio-vetor e outra na sua direção ou direção radial, como está ilustrado na figura 3.11. A partir da expressão diferencial para a lei das áreas - uma consequência da Lei da Conservação do Momento Angular - podemos obter as expressões para as velocidades radial e normal ao raio-vetor.

A EXPRESSÃO DIFERENCIAL DA LEI DAS ÁREAS

A figura abaixo ilustra a situação de um planeta descrevendo um pequeno arco de sua trajetória ao redor do Sol, com comprimento dS . No mesmo intervalo de tempo, a anomalia verdadeira tem uma pequena variação representada por $d\theta$. Considerando que durante o pequeno intervalo de tempo o raio-vetor não sofre uma variação significativa em seu comprimento, podemos calcular a área dA do triângulo formado pelo Sol e pelas duas posições ocupadas pelo planeta, pela seqüência de passos ilustrados abaixo. A chamada velocidade areolar do planeta $\left(\frac{dA}{dt}\right)$, que corresponde à área varrida pelo raio-vetor na unidade de tempo, pode ser também obtida:



$$d\theta = \frac{dS}{r} \quad \rightarrow \quad dS = r d\theta$$

$$dA = \frac{1}{2} r dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad \rightarrow \quad 2 \frac{dA}{dt} = r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = C$$

Pode-se demonstrar que a constante C , que corresponde ao dobro do valor da velocidade areolar, tem por valor:

$$C^2 = G (M_{\odot} + m) a (1 - e^2)$$

Nessa expressão, G representa a constante de Gravitação Universal, M_{\odot} a massa do Sol, m a massa do planeta, a o semi-eixo maior e e a excentricidade orbital.

A COMPONENTE NORMAL DA VELOCIDADE ORBITAL

A partir da expressão diferencial da lei das áreas, obtemos:

$$V_{\theta} = r \frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r} = \frac{C (1 + e \cos \theta)}{a (1 - e^2)}$$

Como se verifica, esta componente é inversamente proporcional à distância do planeta ao Sol.

A COMPONENTE RADIAL DA VELOCIDADE ORBITAL

Derivando, em relação ao tempo, a expressão que relaciona o módulo do raio-vetor com a anomalia verdadeira e utilizando o resultado anterior, obtemos:

$$V_{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} = \frac{C.e.\sin\theta}{a(1-e^2)}$$

Especial atenção deve ter o leitor para não confundir a derivada temporal do raio-vetor, que corresponde ao vetor velocidade orbital, com a derivada temporal do módulo do raio-vetor, efetuada acima, que corresponde ao módulo da velocidade radial.

A VELOCIDADE ORBITAL AO REDOR DO SOL

Aplicando-se o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo cujos catetos são as velocidades radial e normal e cuja hipotenusa é a velocidade orbital, fazendo uso das expressões anteriores para as velocidades radial e normal e efetuando-se as substituições necessárias para eliminar a anomalia verdadeira, obtemos a seguinte expressão para o módulo da velocidade orbital:

$$V^2 = V_{\mathbf{r}}^2 + V_{\theta}^2 = G(M_{\odot} + m) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

A expressão anterior deixa evidente que a velocidade orbital de um planeta ao redor do Sol, não é, em cada instante, inversamente proporcional à sua distância ao Sol. Cabe também ressaltar que na ocasião em que Kepler fez as suas descobertas ainda não existia o Cálculo Diferencial, de maneira que a noção de velocidade sobre uma curva não havia ainda sido estabelecida de maneira rigorosa, do ponto de vista matemático. Além disso, o fato das órbitas no Sistema Solar serem elipses de pequenas excentricidades, provavelmente dificultou a percepção de Kepler com relação à alteração da velocidade orbital em função da variação da distância do planeta ao Sol.

Como vimos Tycho Brahe e seu discípulo Johannes Kepler, ambos praticantes de astrologia mais por conveniência ditada pelas circunstâncias da época, são tidos como observadores admiráveis, e tomam lugar entre os mais ilustres astrônomos.

A propósito, a astrologia recebeu na Europa o seu golpe de misericórdia quando, ao fundar em 1666 a Academia de Ciências, Colbert proibiu expressamente que os astrônomos se ocupassem de astrologia.

Pela primeira vez o modelo heliocêntrico permitia previsões melhores do que o da Terra como centro. Não era apenas um modelo baseado em dados reais, mas permitia boas previsões, que é o que a ciência deve fazer.

3.3 As Contribuições Astronômicas de Galileu Galilei para a Teoria Heliocêntrica

Depois de Brahe e Kepler, veio **Galileu Galilei**, italiano de Piza (1564 - 1643), pai da física moderna, que revolucionou as observações astronômicas construindo uma luneta, inicialmente idealizada por Jean-Baptiste Porta (1590).



Figura 3.12. A célebre luneta de Galileu.

Inúmeros livros de divulgação científica dizem que, apesar de Galileu não ter sido o inventor da luneta, tem o mérito de ter sido o primeiro a apontá-la para o céu. Isso, porém, é uma informação equivocada. O primeiro homem a apontar uma luneta para os céus foi um inglês chamado **Thomas Harriot** (1560 - 1621), o primeiro cartógrafo da Lua, contemporâneo de Galileu.

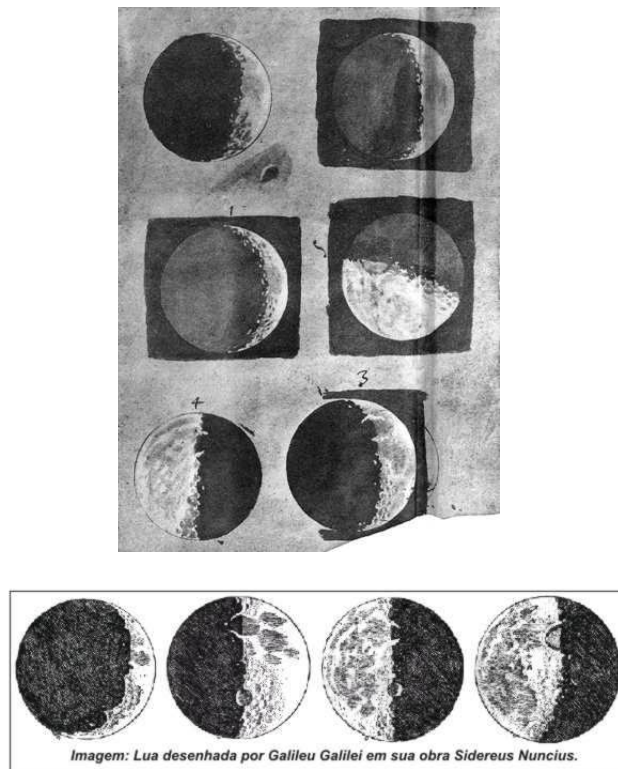


Figura 3.13. Desenho das fases da Lua de Galileu. Quebrando o dogma de uma Lua de superfície lisa, tal como acreditava-se na época.

A primeira grande contribuição que Galileu deu à teoria heliocêntrica foi a descoberta das quatro luas de Júpiter ou satélites de Júpiter se preferirem, pois pelo menos alguma coisa não girava ao redor da Terra, como afirmavam os Ptolomaicos. Derrubou, assim, o dogma de que somente um sistema estacionário (Terra) poderia ser o centro do Universo.



Figura 3.14. As quatro luas de Júpiter.

Outra grande contribuição de Galileu foi a descoberta das fases de Vênus, mostrando que as variações de brilho eram devido a uma órbita ao redor do Sol. Isto provava

claramente que Vênus orbitava o Sol. Era a prova definitiva de um sistema heliocêntrico.

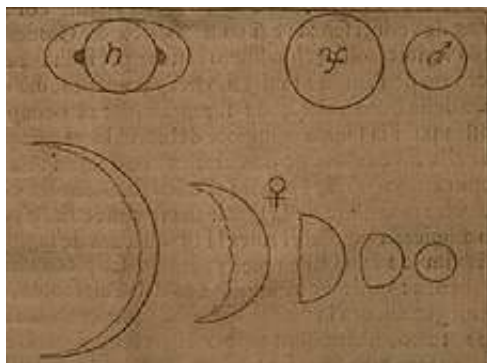


Figura 3.15. Fases de Vênus vistas por Galileu.

Aquilo que Copérnico supôs por motivos estéticos e que Kepler deduziu utilizando medidas e cálculos, Galileu provou, viu e revelou.

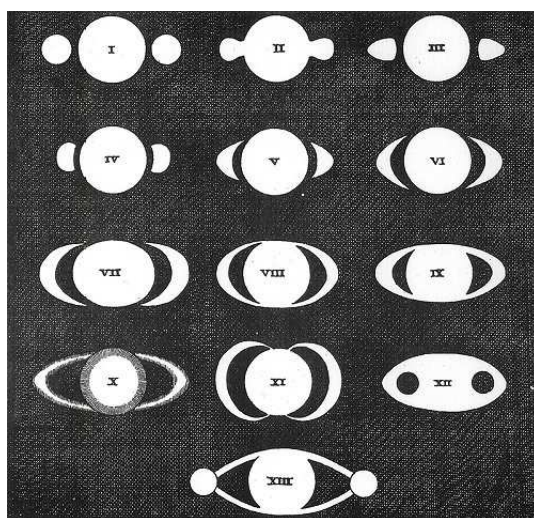


Figura 3.16. As grandes orelhas de Saturno desenhadas por Galileu.

Galileu foi fervoroso defensor do heliocentrismo de Copérnico. Foi seu principal divulgador, tanto que caiu nas garras da Inquisição, não por tentar convencer a Igreja a concordar com suas idéias, mas por reinterpretar a bíblia por conta própria sem a permissão da Igreja, e só não foi queimado porque renegou tudo que disse e era muito bajulador.

Pouco antes de sua morte em 1643, Galileu sem perceber tropeçou em uma pista para o enigma de Kepler sobre a estranha influência do Sol no movimento dos planetas. O último trabalho publicado por Galileu lidava com as propriedades dos corpos em queda (é nesse contexto que se desenvolve a famosa experiência, que não se sabe se de fato é verdadeira, da torre de Pisa). Ele notava que nessa queda os

corpos sempre aceleravam na mesma velocidade independentemente da massa. Mas seria preciso outro gênio para conectar estas duas peças do quebra-cabeça com a teoria da gravidade.

A publicação do livro *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* atrasou cerca de 20 anos; ele só foi publicado em 1687, e, dessa vez não foi por culpa do editor. A verdade é que Newton não podia tê-lo feito antes disso. A razão para tão grande espera foi que, embora Newton tivesse idéias bastante claras a respeito das leis físicas sobre a gravitação desde o início de sua carreira científica, faltavam-lhe os métodos matemáticos. A Matemática existente então não incorporava as bases que eram extremamente necessárias para o desenvolvimento de todas as conseqüências da sua lei fundamental da interação entre dois corpos materiais. O que se conhecia de Matemática naquele tempo era insatisfatório para a solução dos problemas que foram aparecendo a respeito da interação de corpos.

Essas dificuldades também já se haviam apresentado para o nosso famoso cientista italiano Galileu Galilei. Não tanto para verificar o isocronismo do pêndulo (oriundo da colorida história da Catedral de Pisa), nem mesmo para constatar que a velocidade dos corpos em queda livre não depende do peso dos corpos que caem (oriundo do relato não oficial sobre a torre inclinada de Pisa), mas sim para encontrar uma relação matemática entre a velocidade de um corpúsculo em queda livre e o tempo gasto em atingi-la. O problema de relacionar o espaço percorrido pelo corpo com o tempo de percurso foi resolvido com especial maestria. Como a queda livre, no caso mais geral, é realmente um movimento rápido demais para podermos segui-la com a vista desarmada, e como Galileu não dispunha dos atuais equipamentos (rápidas câmaras de filmagem, por exemplo), ele resolveu “diluir” a força da gravidade. Fez com que bolas de diferentes materiais rolassem sobre um plano inclinado ao invés de deixá-las cair diretamente; percebendo perfeitamente a similitude entre os dois tipos de “quedas”. A vantagem que ele enxergou disso é que a escala de tempo seria aumentada por um fator que iria depender da inclinação do plano. Seu relógio, então, era um relógio de água, onde os intervalos de tempo eram medidos pelo peso da água que escoava.

Seu experimento pode ser hoje repetido com singular simplicidade e, para tanto, basta um cilindro metálico e uma tábua bem polida, com mais de 2 m de comprimento, que apresente uma de suas extremidades elevada cerca de 5 cm.

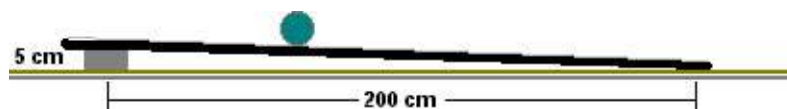


Figura 3.17. Cilindro rolando sobre o plano inclinado.

A inclinação da tábua será $\frac{5\text{cm}}{200\text{cm}} = \frac{1}{40}$, e essa será a proporção segundo a qual a gravidade age sobre o cilindro. Abandone o cilindro do alto do plano, sem empurrá-lo. O trabalho a seguir será anotar, a cada segundo, as distâncias percorridas pelo cilindro, a contar do topo da tábua, ou seja, deve-se anotar o espaço percorrido no primeiro segundo; o espaço percorrido nos dois primeiros segundos; nos três primeiros segundos, e assim por diante. Com alguma aproximação deve-se obter, como média de várias experiências, o seguinte: 12cm , 49cm , 110cm , 196cm e 306cm .

Notemos, como o fez Galileu, que essas distâncias ao fim do segundo, terceiro, quarto e quinto segundos são aproximadamente 4, 9, 16 e 25 vezes maior que a distância percorrida ao cabo do primeiro segundo de movimento. Essa experiência demonstra que a velocidade na queda livre aumenta de modo tal que a distância percorrida pelo corpo, aumenta na mesma proporção que os quadrados dos tempos de percurso ($4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$, $25 = 5^2$) (Fig. 3.18).

Número de intervalos de tempo	Total de unidades de distância percorrida
0	0
1	$0 + 1 = 1$
2	$0 + 1 + 3 = 4$
3	$0 + 1 + 3 + 5 = 9$
4	$0 + 1 + 3 + 5 + 7 = 16$
5	$0 + 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$
6	$0 + 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$
7	$0 + 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49$

Figura 3.18. A distância percorrida em intervalos de tempos iguais sucessivos, é proporcional aos números ímpares.

Na notação moderna escreveríamos: $S = \frac{1}{2}at^2$, onde $\frac{1}{2}a$ é o fator de proporcionalidade. Repita agora a experiência com um cilindro de madeira densa e com outro de madeira de balsa e verificará que a velocidade do movimento e as distâncias percorridas ao fim de intervalos de tempos consecutivos e iguais permanecem as mesmas.

O problema mais sério de Galileu veio a seguir: como determinar **a lei de variação da velocidade com o tempo**, a qual levaria à dependência entre distância e tempo acima estabelecida. Em seu livro *Diálogo Concernente a Duas Novas Ciências*, Galileu escreveu que: “*as distâncias percorridas aumentariam com os quadrados dos tempos de percurso, se a velocidade do movimento fosse proporcional à primeira potência do tempo*”.

O argumento utilizado por Galileu para justificar tal proposição foi brilhante. Acredito (pensamento do autor) que ele se lastrou nas técnicas da Geometria Plana na resolução de questões (já bem desenvolvidas na época) para sua justificação. Explico: ele admitiu o “problema resolvido”, ou seja, que a velocidade do corpo em queda livre fosse proporcional à primeira potência do tempo e, a partir disso demonstrou que se pode chegar à lei dos espaços percorridos já aceita, demonstrada e justificada experimentalmente. E, o que ele fez foi nada mais nada menos que aplicar o que hoje conhecemos como “método da integração”. Vejamos como seria essa justificação usando notações um tanto já modernizadas.

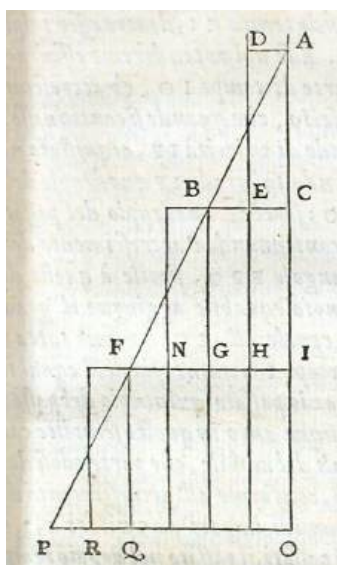


Figura 3.19. Método de integração de Galileu.

Antes, vamos fazer uma pausa e ver de onde surgiram as técnicas de Geometria Plana que Galileu se utilizou para chegar à sua lei dos espaços.

Uma modificação profunda do entendimento do movimento foi feita no século XIV, em Oxford, na Inglaterra. **William of Ockham** (1287 - 1347), um teólogo e frade franciscano, definiu o movimento com conceitos bem diferentes dos aristotélicos. Ele enuncia um princípio epistemológico, que ficou conhecido como *Navalha de Ockham*, que significa algo como “[...]”é fútil usar mais entidades [para explicar alguma coisa], se for possível usar menos “[...]”. Segundo Ockham, “movimento” pode ser concebido como o mero deslocamento do corpo (no tempo), o que torna “fútil” o uso de outras “entidades”². As idéias de Ockham influenciaram seus contemporâneos, em Oxford. Um grupo de pensadores pertencentes ao Colégio de Merton inventou o que se chama, hoje, Cinemática, dentre eles o seu mais célebre pensador: **Nicole Oresme** (1323 - 1382). Embora não tivessem as categorias matemáticas para desenvolver um tratamento matemático analítico, puderam utilizar Geometria. Importantes contribuições foram:

1. Uma clara distinção entre *descrição* do movimento e *causa* do movimento. Obviamente, isso decorre da definição de *movimento* dada por Ockham.
2. A definição de *velocidade* (no sentido de “rapidez” ou de “vagarosidade”) como deslocamento no tempo e a conceitualização de *velocidade instantânea*.
3. A definição de *aceleração* como variação de velocidade no tempo.
4. A consideração de *movimentos uniformes* e *movimentos uniformemente acelerados*. Traçaram os gráficos $v \times t$ desses movimentos e entenderam que as *distâncias percorridas* nesses movimentos são dadas, respectivamente, pelas

²Ockham critica a tradição aristotélica, segundo a qual a definição de “movimento” exigiria a introdução de “entidades desnecessárias”, tais como lugar natural, corpo pesado, corpo leve, um “algo” para empurrar o corpo de modo que ele se mantenha em movimento.

áreas do retângulo e do triângulo, formados pelo conjunto das ordenadas (velocidade).

5. A formulação e demonstração do *Teorema da Velocidade Média*.

O problema colocado pelos Mertonianos foi o de como **qualidades** podem ser somadas ou subtraídas. Para tratar esse problema, os Mertonianos atribuíram a uma qualidade uma *intensidade* e uma *extensão*: A *intensidade* é medida por *graus*; saber como uma qualidade varia consiste, agora, em saber como o *grau* de sua *intensidade* varia ao longo de uma linha arbitrária e imaginária, chamada *extensão*. Uma felicidade na História da Física foi terem concebido o movimento como uma qualidade: O *grau* é a *velocidade instantânea* e a *extensão*, o *tempo*, embora se saiba que, durante muitos anos, Galileu usou a *distância* ao invés do *tempo*.

Galileu usou as idéias Mertonianas de maneira original. Ele deu ao *Teorema da Velocidade Média* uma aplicação que jamais seria concebida no século XIV: Ele o usou para resolver o problema da queda dos corpos.

3.4 O Teorema da Velocidade Média

O teorema diz que a distância percorrida em um movimento uniformemente acelerado é igual à distância que seria percorrida no movimento uniforme feito com a velocidade média (Fig. 3.20).

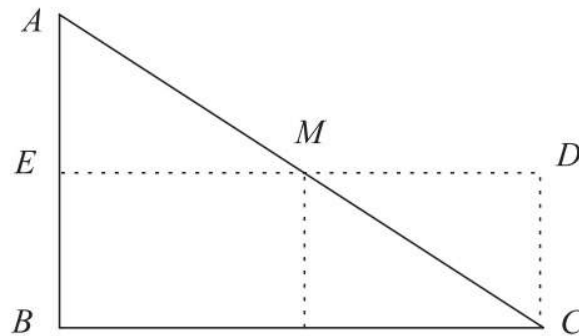


Figura 3.20. Teorema da Velocidade Média. A área do triângulo AEM é igual a área do triângulo MDC , de modo que o triângulo ABC e o retângulo $BCDE$ têm a mesma área.

Galileu usou esse teorema para provar que, se um corpo se move com movimento uniformemente acelerado, as distâncias, s_1 e s_2 , percorridas, respectivamente, em tempos t_1 e t_2 obedecem à seguinte relação:

$$\frac{s_1}{s_2} = \left(\frac{t_1}{t_2} \right)^2;$$

em notação moderna: $s = \frac{1}{2}gt^2$. Ele também demonstrou o corolário:

$$\frac{s_1}{s_2} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^2 ;$$

em notação moderna: $v^2 = 2gs$.

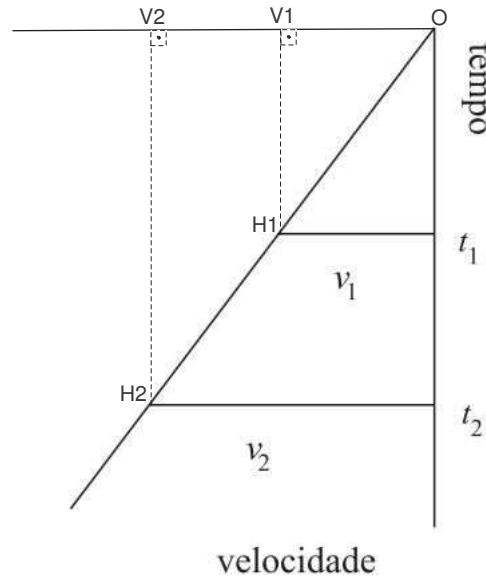


Figura 3.21. Demonstração da Lei da Queda dos Corpos.

Pelo Teorema da Velocidade Média: $\frac{s_1}{s_2} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right) \times \left(\frac{t_1}{t_2} \right)$;

por definição de movimento uniformemente acelerado: $\frac{v_1}{v_2} = \frac{t_1}{t_2}$; logo:

$$\frac{s_1}{s_2} = \left(\frac{t_1}{t_2} \right)^2 . \text{ Segue-se um corolário: } \frac{s_1}{s_2} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^2 .$$

Como dito anteriormente um dos grandes legados dos calculadores do Merton College foi o achado de que a distância percorrida por um móvel com velocidade constante é dada pela área de um gráfico $v \times t$ (pois, por definição de velocidade: $v = \frac{s}{t} \Rightarrow s = v \times t$). E Galileu se utilizou deste fato para chegar a proporção dos espaços com os quadrados dos tempos.

Demonstração

Seja um corpo movendo-se com velocidade constante, tal que sua velocidade nos instantes t_1 e t_2 vale v_1 e v_2 , respectivamente. E seja o gráfico da figura 3.21, o gráfico de seu movimento.

Temos que para esse corpo:

$$\triangle Ot_1H_1 \sim \triangle Ot_2H_2 \implies \frac{v_1}{v_2} = \frac{t_1}{t_2}$$

E pela definição de velocidade: $s_1 = v_1 \times t_1$ e $s_2 = v_2 \times t_2$, onde s_1 e s_2 são os espaços percorridos pelo móvel dentro dos intervalos t_1 e t_2 .

Logo, fazendo a razão entre os espaços percorridos desse móvel nos intervalos de tempo considerados, obtemos:

$$\frac{s_1}{s_2} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right) \times \left(\frac{t_1}{t_2}\right)$$

Mas, como mostramos anteriormente: $\frac{v_1}{v_2} = \frac{t_1}{t_2}$

$$\therefore \frac{s_1}{s_2} = \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2$$

E se substituirmos agora $\frac{t_1}{t_2}$ por $\frac{v_1}{v_2}$, temos:

$$\frac{s_1}{s_2} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2$$

□

O que precisamos agora é achar a razão desta proporção. E é o que Galileu faz com seu “método de integração”, utilizando-se novamente da contribuição 4 dos mertonianos.

Demonstração

Se a velocidade varia com a primeira potência do tempo, ou seja, aumenta linearmente com o tempo $\left(\frac{V}{t} = a \implies V = a \times t\right)$, seu gráfico será uma reta (linha vermelha) passando pela origem dos eixos V e t (Fig. 3.22).

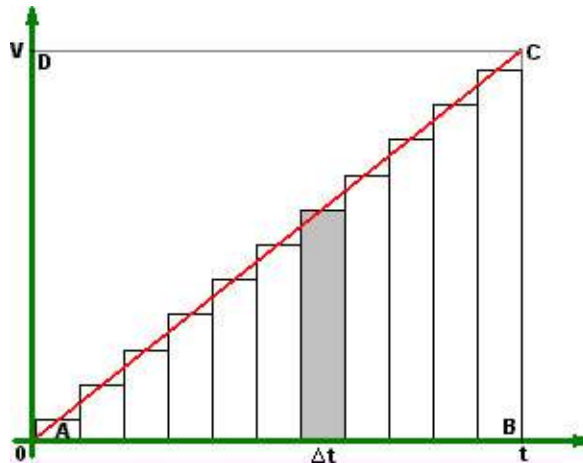


Figura 3.22. O Método de Integração de Galileu.

A seguir, Galileu dividiu o intervalo de tempo de 0 até t (quando então a velocidade vale V) em um grande número de pequenos intervalos de tempo e traçou as linhas verticais, como ilustramos acima. Com isso, obteve um grande número de retângulos finos e compridos. Seu pensamento seguinte foi: *substituir a reta original da hipótese (a vermelha), que representa a variação contínua da velocidade com o tempo, por uma linha que lembra uma espécie de escada de degraus muito estreitos*

(pelo teorema da velocidade média, as áreas dos triângulos que sobram acima da linha vermelha são iguais as áreas dos triângulos que faltam abaixo da linha vermelha). Nessa representação, a velocidade passa a representar um movimento feito aos trancos; a velocidade aumenta bruscamente e a seguir permanece constante até o próximo tranco. Entretanto, continua Galileu, se fizermos os intervalos de tempo cada vez menores e seu número cada vez maior ($\Delta t \rightarrow 0$), a diferença entre a subida perfeitamente suave e aquela pela escada tornar-se-á cada vez menos perceptível e desaparecerá quando o número de divisões se tornar infinitamente grande (essa idéia foi bastante utilizada para cálculos de áreas e volumes, em geometria, já conhecida na época).

A beleza da idéia está em que, durante cada um desses curtos intervalos de tempo, o movimento se processa com uma velocidade constante, própria desse breve intervalo de tempo (teorema da velocidade média) e que a distância percorrida é igual a essa velocidade multiplicada pela extensão desse intervalo de tempo (**área** = $\Delta s = \Delta V \times \Delta t$). Pronto! O complicado movimento de queda livre foi “quebrado” em numerosos e breves movimentos uniformes! A seguir a coisa ficou mais simples, veja: cada minúsculo retângulo tem a seguinte propriedade: sua área representa o espaço percorrido naquele pequeno intervalo de tempo Δt e, sendo assim, a área total (soma das áreas de todos os magros retângulos) deverá representar o espaço percorrido pelo corpo em queda livre até o instante t . Mas, essa área é simples de ser calculada, é a área do triângulo $\triangle ABC$, logo:

$$\text{espaço percorrido (S)} = \frac{1}{2} \times \text{base (t)} \times \text{altura (V)}$$

↓

$$S = \frac{1}{2} t V$$

entretanto, como por hipótese, a velocidade é proporcional ao tempo ($V = a \times t$); logo substituindo na expressão acima, obtemos:

$$S = \frac{1}{2} \times V \times t = \frac{1}{2} \times (a \times t) \times t = \frac{1}{2} \times a \times t^2$$

$$\boxed{\therefore S = \frac{1}{2} a t^2}$$

Bingo! Chegamos à lei do quadrado dos tempos, que é verdadeira ... logo a velocidade ser proporcional a primeira potência do tempo ($V = a \times t$) também é verdadeira!

Outra contribuição importante de Galileu à jovem ciência da Mecânica, foi a descoberta do princípio da superposição dos movimentos porém, sua mais importante contribuição foi mesmo ter legado um método que, embora já conhecido pelos geômetras (Arquimedes o usou para encontrar o volume de um cone e de outras figuras), pela primeira vez foi utilizado nos fenômenos físicos. Esse método, nas mãos de Newton, tornou-se um dos ramos mais importantes da Matemática.

A próxima seção será abordada de um modo diferente que as anteriores, não se limitando apenas na parte histórica. Será realizado um estudo aprofundado de [2] dando enfoque à algumas proposições que nos serão úteis no decorrer do desenvolvimento da pesquisa.

Capítulo 4

Isaac Newton

Finalmente não podemos esquecer de citar o descobridor da Gravitação Universal, **Sir Isaac Newton** (1642 - 1727) (Fig. 4.1), nascido em Woolsthorpe, no Lincolnshire, Inglaterra.



Figura 4.1. Quadro de Newton, feito por Godfrey Kneller em 1702.

Como dito acima, a maior concretização da obra de Newton dá-se ao nível da Física¹ e da Mecânica Celeste com a teoria da Gravitação Universal. Em 1666, Newton possuía já versões preliminares das suas três leis do movimento. Também havia descoberto a lei que dava conta da força centrífuga no movimento circular uniforme. Todavia, a sua interpretação da mecânica do movimento circular não era ainda a correta (Fig. 4.2). E segundo Isaac Bernard Cohen, grande biógrafo de Newton, foi aplicando o método de Hooke (Fig. 4.3) que Newton aprendeu a tratar trajetórias curvas.

¹Ele foi o primeiro a ver as leis fundamentais por trás dos eventos de até então, explicando assim quase tudo e iniciando uma nova era na ciência usando observação e matemática para descrever as leis da natureza. Portanto, não é exagero dizer que Newton criou a Física.

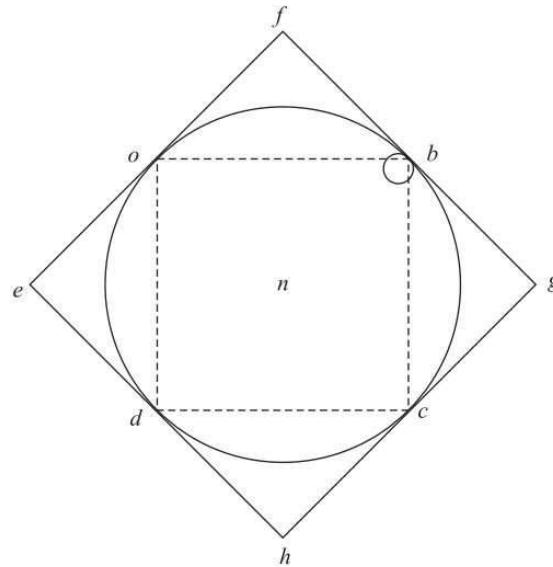


Figura 4.2. O conatus: uma pequena esfera move-se dentro de um círculo. A esfera colide com o círculo - de dentro para fora, de modo que Newton pensa em termos de um efeito centrífugo - percorrendo o quadrado inscrito. Newton demonstra que: $\frac{Pe}{Fm} = \frac{\text{perimetrodocirculo}}{\text{raiodocirculo}} = 2\pi$; onde Pe é a pressão da esfera sobre a tangente ao círculo em um percurso completo, e Fm é a força do movimento.

4.1 O Método de Hooke

Em 1679, Robert Hooke escreveu a Newton, convidando-o a comentar sobre um método de sua autoria para descrever movimentos curvilíneos. A idéia de Hooke consiste em separar o movimento de um corpo que é atraído para um centro em duas componentes: uma componente inercial, o movimento que o corpo teria, se continuasse a se mover com a velocidade instantânea, sem atuação da atração; e uma componente radial, um “soco” em direção a um centro atrativo (centrípeto), isto é, o que nós chamaríamos “impulso instantâneo”, radial, na direção de um centro de forças. As figuras 4.3 e 4.4 ilustram a aplicação do método de Hooke, feita por Newton, no *Princípios*, para demonstrar a *Lei das Áreas, de Kepler*.

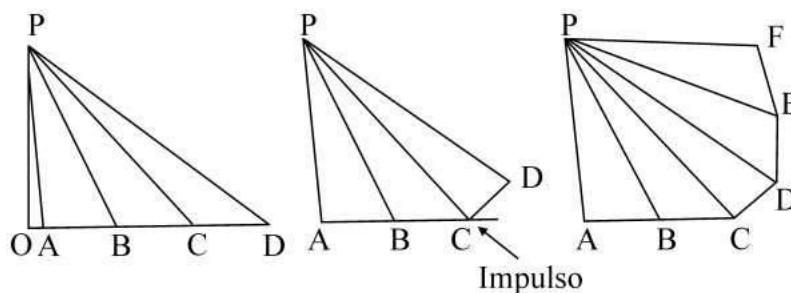


Figura 4.3

A Proposição I da seção II do Livro I dos Princípios, onde Newton estabelece que a existência de uma força central implica a segunda Lei de Kepler e que a trajetória deverá ser plana, tem o seguinte enunciado: “As áreas que os corpos em movimento de translação descrevem por raios que passam por um centro imóvel de uma força (central) jazem no mesmo plano imóvel e são proporcionais aos tempos em que são descritas”.

Vamos entender agora como Newton chegou a demonstração desta proposição.

Newton, recorrendo à figura 4.4, aproxima a trajetória curvilínea descrita por um corpo, por pequenos segmentos de reta, formando assim uma poligonal.

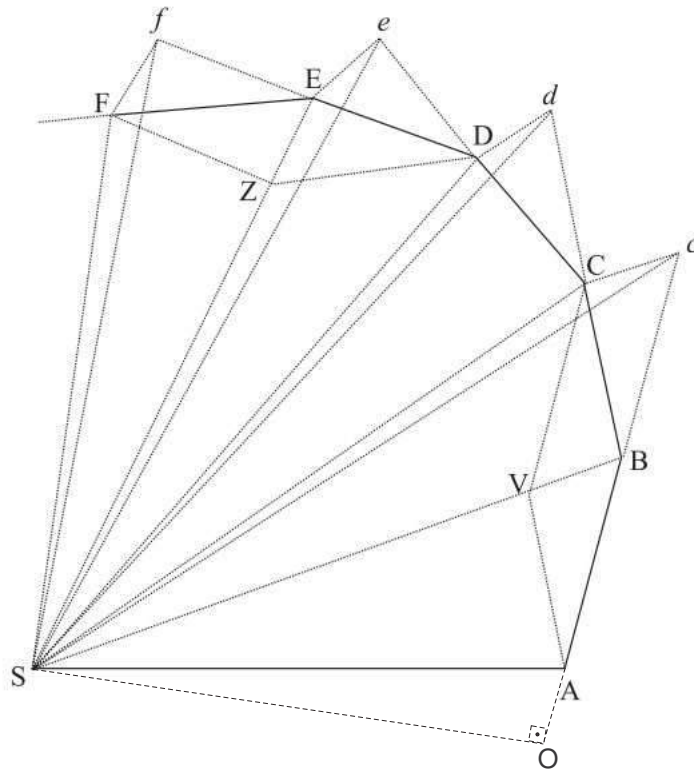


Figura 4.4

4.2 Prova da Lei das Áreas de Kepler

Demonstração

Na figura 4.3 da esquerda, o corpo move-se uniformemente ao longo da linha reta horizontal. Em intervalos de tempo iguais, o corpo terá, sucessivamente, as posições A, B, C, D . Esses pontos são ligados a um ponto P , acima do ponto O (origem), formando os triângulos PAB, PBC, PCD . Esses triângulos têm a mesma área, pois têm base de comprimentos iguais ($AB = BC = CD$), já que o corpo move-se uniformemente, e mesma altura (PO).

Observe agora a figura 4.4 e veja que acontece o mesmo. Para isto considere

os triângulos SAB e SBc . Suponha agora que ao invés do ponto P da figura 4.3 você tenha o centro de forças S e que este seja o “Sol”, e que o corpo movendo-se uniformemente ao longo da linha horizontal seja a “Terra”, e que esta caminhe agora em torno da linha horizontal AB . Considere agora que no intervalo de tempo Δt a Terra mova-se de A para B . Se nenhuma força atuar sobre ela na posição B então pela primeira lei de Newton (ou princípio da inércia) esta mover-se-á da posição B para a posição c no mesmo intervalo de tempo Δt e daí as áreas dos triângulos SAB e SBc serão as mesmas, pois o segmento \overline{AB} é congruente ao segmento \overline{Bc} (em consequência do movimento uniforme da Terra), e ambos os triângulos têm a mesma altura \overline{SO} .

Voltando para a figura 4.3 (figura do centro); suponha, agora, que o corpo receba, em C , um “soco” (impulso instantâneo ou durando um tempo muito pequeno) na direção do ponto P . Após o impulso, o corpo move-se em uma linha reta, mas em outra direção. Após um intervalo de tempo igual aos anteriores, ele está em D , mas não necessariamente $\overline{CD} \cong \overline{BC}$ ou $\overline{CD} \cong \overline{AB}$ (só o será, se o “soco” for perpendicular a \overline{CD} , que é o caso do movimento circular).

Agora vamos voltar novamente à figura 4.4. Suponha que ao invés da Terra continuar seu movimento retilíneo e uniforme de B para c , ela receba um impulso, na direção de S , em B mudando sua direção, mas continuando, pela lei da inércia, com seu movimento uniforme, só que agora na direção \overrightarrow{BC} . Como explicitado anteriormente, a medida de \overline{BC} não necessariamente é igual a de \overline{AB} , isto vai depender da direção do impulso aplicado em B . Afirmamos agora que a área do triângulo SBC é igual a área do triângulo SBc . Para isto, basta mostrarmos que eles têm ao menos um dos lados congruentes e a mesma altura. Sabemos que eles têm o lado SB em comum, portanto congruentes. Agora falta mostrarmos que eles têm a mesma altura. De fato, mostremos que as retas Cc e VB são paralelas, pois daí sabemos da geometria plana (todos os pontos em questão são coplanares, e isto será mostrado em seguida. Portanto, podemos usar argumentos da geometria plana) que a distância (altura relativa ao lado comum \overline{SB} dos triângulos SBC e SBc) entre duas retas paralelas é sempre igual, independentemente do ponto que escolhermos (no caso os vértices C e c dos triângulos SBC e SBc). Quando é dado o impulso em B na direção de S , aplica-se a regra do paralelogramo (método de Hooke) para determinar em que posição e direção a Terra vai estar após o intervalo de tempo Δt , e então as componentes \overrightarrow{Bc} (inercial) e \overrightarrow{VB} (impulsiva) são somadas vetorialmente, resultando na componente \overrightarrow{BC} (posição C). Logo, pela própria forma como a componente \overrightarrow{BC} é definida temos que as retas em questão são paralelas, resultando assim que os triângulos SBC e SBc têm a mesma altura. Portanto, suas áreas são iguais. Porém, mostramos também que os triângulos SAB e SBc possuem a mesma área, então pela transitividade, a área do triângulo SAB é igual a área do triângulo SBC .

Se o corpo recebesse “socos” a iguais intervalos de tempo, sua trajetória formaria uma poligonal, ao redor do ponto P (figura 4.3 da direita) e os triângulos formados teriam a mesma área.

É o que acontece agora se procedermos de maneira análoga no mesmo intervalo de tempo e usando a transitividade; concluiremos que as áreas dos triângulos SAB , SBC , SCD , SDE e SEF da figura 4.4 são iguais. Ou seja, no mesmo intervalo de

tempo Δt a Terra percorre áreas iguais. O que demonstra a *Segunda Lei de Kepler*. \square

No caso limite em que o intervalo de tempo Δt entre os “socos” (impulsos) sucessivos for muito pequeno, tendendo a zero, a força se torna contínua, sempre direcionada para o ponto S , e o polígono se torna uma curva suave (Fig. 4.5).

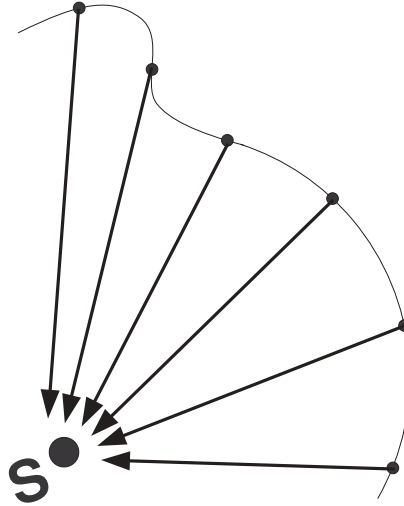


Figura 4.5

4.3 Prova de que a Órbita de um Planeta é Coplanar

Demonstração

Para mostrarmos agora que a órbita da Terra se situa sempre no mesmo plano no decorrer da sua trajetória ao redor do Sol, ou seja, que ela é coplanar, considere a figura 4.4 novamente.

Sabemos de um postulado da geometria, que por três pontos distintos passam sempre um único plano. Tomando então os pontos S , A e B temos que eles determinam um único plano α . Temos também da geometria que os pontos A e B determinam uma única reta \overleftrightarrow{AB} e, mais ainda, que os pontos A , B e c são colineares, isto é, c pertence à reta \overleftrightarrow{AB} , pois é a trajetória que um corpo (Terra) percorre se sobre ele não atuar nenhuma força (primeira Lei de Newton: todo corpo permanece em seu estado de repouso ou de **movimento retilíneo** e uniforme). Em vista disto, como os pontos S , A e B determinam o plano α e a reta \overleftrightarrow{AB} tem dois de seus pontos pertencentes a este plano, então por um teorema, também da geometria, a reta \overleftrightarrow{AB} está contida em α , isto é, os quatro pontos S , A , B e c são coplanares. O ponto V também é coplanar com os pontos anteriores, pois V pertence à reta \overleftrightarrow{SB} e esta tem dois de seus pontos em α , pela própria maneira que este plano foi construído. Observe, agora, que quando em B é aplicada a regra do paralelogramo, então como o próprio nome da regra diz, o quadrilátero $CcVB$ é um paralelogramo. E como todo paralelogramo é um polígono plano, então os pontos

C , c , V e B também são coplanares segundo um plano β . Queremos concluir que $\alpha = \beta$, o que acarretará que os pontos A , B e C são coplanares segundo um único plano, já que A e $B \in \alpha$ e $C \in \beta$. De fato, se $\alpha \neq \beta$, então teríamos dois planos α e β passando por três pontos distintos, a saber: V , B e c . O que é um absurdo, pois contraria o postulado da geometria que diz que por três pontos distintos passa um único plano. Logo, A , B e C são coplanares.

Seguindo raciocínio análogo, provamos que todos os pontos A , B , C , D , E e F são coplanares. O que demonstra que a órbita da Terra, jaz num mesmo plano, como queríamos demonstrar. □

Em carta anterior, Hooke havia proposto um problema a Newton que pode ser parafraseado como se segue:

“Se um corpo sofre uma atração em direção a um centro, que tipo de curva seria sua órbita, se o “poder de atração” variasse inversamente com o quadrado da distância?”

Newton respondeu a Hooke que seu método lhe era desconhecido; e, em vez de discutir o problema proposto por Hooke, apresentou um outro problema². O problema é aristotélico em sua origem conceitual, portanto, não foi inventado por Newton. É o problema da possibilidade ou não de se atribuir uma rotação diurna à Terra. Se a Terra se movesse de oeste para leste, um corpo abandonado do alto de uma torre, na direção oeste, jamais poderia cair ao pé da torre, pois, enquanto o corpo cai, a Terra teria se movido para oeste, afastando-se do local onde, inicialmente, estaria a base da torre. Galileu respondeu ao desafio aristotélico, arguindo que o corpo possui, juntamente com a Terra, uma velocidade de rotação, além de uma velocidade para baixo, de modo que cai ao pé da torre. Trata-se, então de saber o que aconteceria com o corpo, se ele pudesse continuar a cair para dentro da Terra, isto é, se a Terra fosse permeável; em outros termos, é o problema de uma massa que se move sob ação da força central constante.

Quando, em 1684, Edmund Halley, o astrônomo, visitou Newton e lhe fez a mesma pergunta, Newton teria respondido, imediatamente, que, segundo seus cálculos, era uma elipse. Embora não encontrasse os papéis com seus cálculos, disse a Halley que havia resolvido esse problema quatro anos antes. No entanto, em *De Motu* (o “rascunho” que antecedeu ao *Principia*) apenas se encontra a demonstração inversa. A demonstração de que as forças, obedecendo ao inverso do quadrado da distância, implicam órbitas de secções de cónicas, está escrita na Cor.1 da Prop.13 no Livro 1 do *Principia*, mas não na sua primeira edição.

Três meses mais tarde Newton envia a Halley uma demonstração da forma das órbitas quando sujeitas a uma força inversamente proporcional ao quadrado da distância. Halley, insistiu, então, que ele escrevesse o tratamento integral da sua nova Física. Passado um ano (1687); o resultado, após alguns pequenos tratados (rascunhos do trabalho maior), foi o *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* ou, simplesmente, *Principia*, como é geralmente conhecida.

No livro *Principia*, Newton começa com uma série de definições, nas quais são

²O problema pode ser parafraseado como se segue: achar a trajetória de um corpo deixado cair do alto de uma torre, o qual - supondo que a Terra fosse permeável - continuaria a cair atraído pelo centro da Terra com uma força central constante

introduzidos os conceitos de massa, força, força centrípeta (na verdade, central), entre outros.

4.4 Massa

Definição 1. Quantidade de matéria é uma medida da matéria que surge da densidade e volume, conjuntamente.

Segundo I. Bernard Cohen, Newton procurava uma definição de matéria que não fosse uma “qualidade acidental”.

4.5 Quantidade de Movimento

Definição 2. Quantidade de movimento é a medida de movimento que surge da velocidade e da quantidade de matéria, conjuntamente.

4.6 Força Impressa

Definição 4. Força impressa é a ação exercida em um corpo para mudar seu estado, seja de repouso, seja de movimento uniforme para a frente. [...] Além disso, há várias fontes de força impressa, tais como percussão, pressão ou força centrípeta [central].

4.7 Força Central

Definição 5. Força centrípeta [central] é a força pela qual corpos são levados para todos os lados, são impelidos ou tendem, de alguma forma, para algum ponto como centro.

Uma força deste tipo é a gravidade, pela qual corpos tendem em direção ao centro da Terra; outra é a força magnética, pela qual o ferro procura uma pedra magnética ou magnetita; e, no entanto, outra é aquela força, o quê quer que seja que ela possa ser, pela qual os planetas são continuamente retirados de movimentos retilíneos e compelidos a revolver em linhas curvas.

4.8 Medida da Força Motriz

Definição 8. A quantidade motiva da força centrípeta [central] é a medida dessa força que é proporcional ao movimento que ela gera em um dado tempo.

4.9 Leis do Movimento

Eis os enunciados das leis de Newton retirados da edição de 1726 dos Principia:

I - Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

II - *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.*

III - *Actioni contrariam semper et aequalam esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.*

Em português escrever-se-á:

1ª Lei (Lei da Inércia) - Todo corpo persevera em seu estado de repouso ou de movimento uniformemente retilíneo para a frente, exceto quando ele for compelido a mudar seu estado por forças impressas.

2ª Lei (Lei Fundamental da Dinâmica) - A variação de movimento é proporcional à força motriz impressa e se dá ao longo da linha reta na qual essa força é impressa. Em termos modernos: $F = ma^3$.

3ª Lei (Lei da Ação-Reação) - A uma ação corresponde sempre uma reação igual e oposta; em outras palavras, as ações de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e sempre opostas em direção.

4.10 Composição de Forças (Regra do Paralelogramo)

Corolário 1. Um corpo no qual atuam duas forças agindo conjuntamente descreve a diagonal de um paralelogramo no mesmo tempo no qual ele descreveria os lados, se as forças agissem separadamente.

A obra Principia é reconhecida como o livro científico de maior impacto que alguma vez foi escrito. Newton analisou o movimento dos corpos com e sem atrito sob a ação de forças centrípetas. Os resultados foram aplicados a corpos em órbita, projéteis, pêndulos e corpos em queda livre próximos da Terra. Demonstrou ainda que os planetas eram atraídos para o Sol com uma força que variava com o inverso do quadrado da distância e fez a generalização desta demonstração para todos os corpos celestes atraídos uns pelos outros.

A idéia inovadora de Newton em 1666 foi imaginar que a gravidade da Terra influenciava o movimento da Lua, contrabalançando a sua força centrífuga. A partir da sua lei da força centrífuga e da terceira Lei de Kepler do movimento planetário, Newton desenvolveu a Lei do inverso do quadrado da distância.

O tema central dos Principia era a universalidade da força gravitacional. No livro, Newton estabelece a Lei da Gravitação Universal que diz que:

“...toda a matéria atrai toda a restante matéria com uma força proporcional ao produto das duas massas consideradas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas...”

e que pode escrever-se sob a forma da equação:

$$F_g = G \frac{mM}{R^2} \quad (4.1)$$

³Ao contrário do que muitos pensam, essa equação não aparece no Principia. Ela foi escrita anos mais tarde por outros filósofos.

em que m e M são as massas dos dois corpos que estão a exercer atração gravitacional mútua, G a constante gravitacional e R é a distância entre os centros dos dois corpos.

Como chegou à Lei propriamente dita, não é muito claro, mas pode tentar-se uma abordagem provável, que trataremos a seguir.

4.11 Aceleração Centrípeta

Antes de demonstrarmos a equação 4.1, vamos tratar do problema de determinar a aceleração centrípeta de um corpo, peça fundamental para o desenvolvimento da fórmula da Lei da Gravitação Universal, e ver de um modo semelhante ao de Newton, como chegar a esta demonstração.

Newton descobriu que a aceleração centrípeta (aceleração dirigida para o centro de curvatura) dos corpos era dada por

$$a_c = \frac{V^2}{R} \quad (4.2)$$

uma constatação observacional que já havia sido publicada por Christian Huygens.

Demonstração

Considere a figura 4.6, onde temos o sistema Terra-Lua.

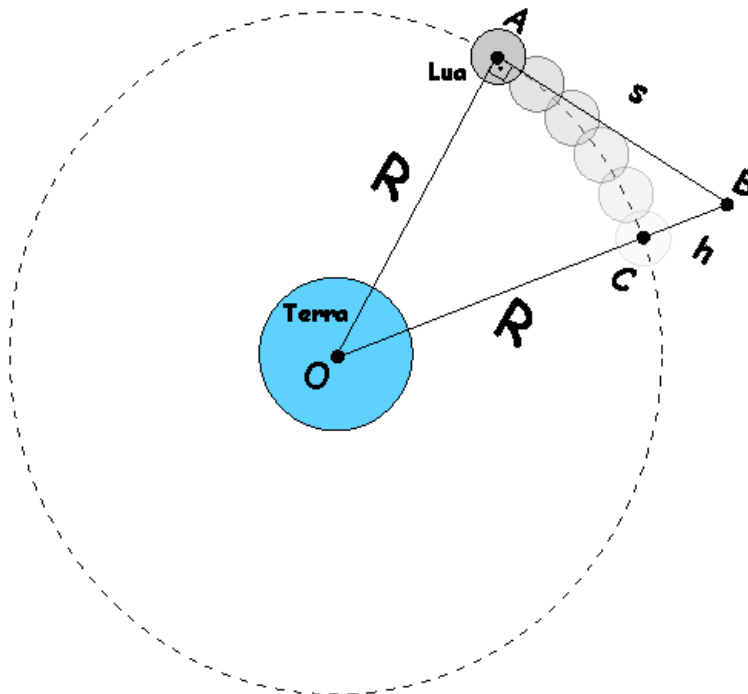


Figura 4.6. Paráfase do cálculo da aceleração centrípeta feita por Newton.

Se a força gravitacional mútua do sistema Terra-Lua parasse de atuar no instante em que a Lua encontra-se na posição A , então pela primeira lei de Newton, num

instante posteriormente, digamos t , a “tendência centrífuga”⁴ faria com que a Lua percorresse o segmento AB perpendicularmente com o raio da órbita da Lua \overline{OA} , isto é, a Lua “sairia pela tangente”. Mas, visto que a força gravitacional do sistema também atua sobre a Lua, então nesse mesmo intervalo de tempo t , ela também tem um movimento de queda em direção à Terra (ou como pensa Newton: se a Lua não saísse pela tangente, então a sua “tendência centrífuga” seria contrabalanceada com o peso pela terceira lei), percorrendo o segmento \overline{BC} .

O que fizemos aqui foi dividir o movimento real da Lua, que no intervalo de tempo t percorre o arco AC , nas componentes \overline{AB} (tangencial) e \overline{BC} (radial), como já feito anteriormente.

De posse disto, denotemos por s a distância de A até B , por h a distância de B até C e por R o raio da órbita a Lua. Pela primeira lei de Newton, temos que:

$$s = tV \quad (4.3)$$

(já que, pela lei da inércia, a lua percorre um movimento uniforme nesse intervalo de tempo).

Como a Lua percorre a distância h em um movimento de queda (ou em um movimento de “tendência centrífuga” que é contrabalanceado pelo peso, e portanto de mesma intensidade que ele), e Galileu já havia mostrado experimentalmente que os espaços e os tempos dos corpos em queda obedecem à relação:

$$\Delta S = \frac{1}{2}a\Delta t^2$$

Então apenas passando para nossas notações, temos:

$$h = \frac{1}{2}a_c t^2 \quad (4.4)$$

Vamos utilizar agora o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABO e ver o que acontece.

$$(R + h)^2 = R^2 + s^2$$

↓

$$R^2 + 2Rh + h^2 = R^2 + s^2$$

↓

$$s^2 = 2Rh + h^2$$

Substituindo s e h pelas equações 4.3 e 4.4 respectivamente, temos:

⁴Nessa altura Newton ainda não havia tido a interpretação correta do movimento curvilíneo. Porém, podemos pensar em termos de “tendência centrípeta” de maneira análoga ao método de Hooke, que o efeito será o mesmo.

$$(tV)^2 = 2R\left(\frac{1}{2}a_c t^2\right) + \left(\frac{1}{2}a_c t^2\right)^2$$

↓

$$t^2 V^2 = a_c R t^2 + \frac{1}{4} a_c^2 t^4$$

($\div t^2$)

↓

$$V^2 = a_c R + \frac{1}{4} a_c^2 t^2$$

↓

$$a_c R = V^2 - \frac{1}{4} (a_c t)^2$$

($\div R$)

↓

$$a_c = \frac{V^2}{R} - \frac{1}{4R} (a_c t)^2$$

Agora para um intervalo de tempo Δt muito pequeno, vejamos o que acontece com a aceleração a_c , se aplicarmos o limite na mesma e fizermos o tempo t tender a zero; que é o que queremos, pois decorrerá que o segmento \overline{AB} coincidirá com o arco AC nas proximidades do ponto A (ou de modo semelhante, fazemos a distância h de queda da Lua tender a zero).

$$\lim_{t \rightarrow 0} a_c = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{V^2}{R} - \frac{1}{4R} (a_c t)^2 \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{V^2}{R} - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{4R} (a_c t)^2$$

↓

$$- \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{4R} (a_c t)^2 \rightarrow 0$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 0} a_c = \frac{V^2}{R}$$

que coincide com a equação 4.2

□

4.12 A Lei do Inverso do Quadrado da Distância

Associando a relação anterior à segunda lei de Newton, obtém-se a célebre *Lei do Inverso do Quadrado da Distância*. Vejamos como.

Demonstração

Considere novamente a mesma figura 4.6. Mas, agora no lugar da Terra, imagine o Sol e no lugar da Lua a própria Terra. Vamos calcular a força gravitacional de atração mútua entre a Terra e o Sol.

Primeiramente calculemos a força de atração gravitacional que a Sol exerce sobre a Terra.

Não podemos nos esquecer que quando é dito “calculemos a força”, pela segunda lei de Newton, precisamos da massa do corpo que será aplicado a força, e da aceleração que será imprimida neste. E para calcularmos a aceleração exercida sobre este corpo, precisamos da velocidade e do instante em que a força é aplicada. E quando falamos em “velocidade” temos que saber em que ponto (espaço) da trajetória o corpo receberá a força.

Portanto, observando a figura 4.6, calcularemos a força gravitacional que o Sol exerce sobre a Terra, no ponto A , ou em termos de limite, nas proximidades do mesmo.

Sejam m a massa gravitacional⁵ da Terra e V a velocidade orbital da mesma em torno do Sol. Vamos adotar a partir de agora que a órbita terrestre é uma circunferência⁶ de raio R .

Então pela segunda lei de Newton, temos que $F_g = ma$. Todavia a aceleração de que estamos falando é do tipo centrípeta. Logo, a força gravitacional exercida pelo Sol sobre a Terra é dada por:

$$F_g = ma_c$$

Porém, já foi mostrado que nas proximidades do ponto A , a aceleração centrípeta instantânea é dada por $a_c = \frac{V^2}{R}$. Com isso a equação anterior toma a seguinte forma:

$$F_g = m \left(\frac{V^2}{R} \right) \quad (4.5)$$

Sabemos que a velocidade V orbital da Terra em cada instante de sua trajetória circular ao redor do Sol, é sempre constante, pois trata-se de um movimento circular uniforme (pela primeira lei de Newton). Logo, a velocidade média e a velocidade instantânea (pontual) se coincidem. Então basta calcularmos a velocidade da Terra em um ponto qualquer de sua órbita, que encontraremos a velocidade instantânea

⁵Newton mostrou algebricamente e também fora mostrado experimentalmente, que não há diferenças entre a massa gravitacional e a inercial. Logo, podemos usar a massa gravitacional como a massa inercial de que fala a segunda lei de Newton, aplicá-la na determinação da força gravitacional que o Sol exerce sobre a Terra e simplesmente denotá-la por m . A definição dessas duas massas e a maneira que Newton chegou na igualdade entre elas, será tratado mais adiante.

⁶Podemos adotar tal órbita, pois como sabemos as órbitas planetárias são elipses com o Sol (e no caso da Lua, com a Terra) em um de seus focos, contudo, a excentricidade de tais órbitas é muito pequena, podendo ser assim comparadas à circunferências.

em qualquer outro ponto, particularmente no ponto A ; que é o ponto que estamos interessados.

Sabemos que após a Terra percorrer uma volta completa em torno do Sol em um período de tempo T , sua velocidade média será de $\frac{2\pi R}{T}$. Portanto, sua velocidade pontual em A será a mesma. Podemos então agora continuar com a demonstração da equação 4.5 e desenvolver sua expressão.

Substituindo V por $\frac{2\pi R}{T}$ na equação 4.5 temos:

$$F_g = m \left(\frac{V^2}{R} \right)$$

↓

$$F_g = m \frac{\left(\frac{2\pi R}{T} \right)^2}{R}$$

↓

$$F_g = m \frac{4\pi^2 R^2}{T^2 R}$$

Multiplicando e dividindo o segundo membro desta última equação por R , obtemos:

$$F_g = m \frac{4\pi^2 R^3}{R^2 T^2}$$

Observando esta equação, notamos que aparece uma constante entre seus termos do segundo membro: $\frac{R^3}{T^2}$. É a constante K da terceira lei de Kepler do movimento planetário.

$$F_g = m \frac{4\pi^2}{R^2} \left(\frac{R^3}{T^2} \right)$$

↓

$$F_g = 4\pi^2 K \frac{m}{R^2} \quad (4.6)$$

Na verdade temos, quatro constantes, nessa última igualdade, a saber: m^7 , 4, π^2 e K .

Considere novamente a figura 4.6. Mas, agora no lugar da Terra, imagine qualquer planeta do Sistema Solar, com uma órbita circular girando ao redor do Sol.

Suponha agora que Newton fizesse como nós. Tentasse calcular a força de atração que o Sol exerce sobre este planeta. Ele chegaria na mesma expressão 4.6. Só que agora, m seria a massa do planeta em questão, R a distância média do planeta ao Sol e a constante K relacionada ao sistema Planeta-Sol.

Assim, para qualquer planeta orbitando o Sol ter-se-ia que a força gravitacional exercida pelo Sol seria dada pela expressão 4.6.

Mas, pela terceira lei de Newton, se o Sol exerce uma força de atração sobre a Terra, por exemplo; então esta também exerce uma força de atração sobre ele de mesma intensidade porém, de sentido contrário àquela exercida pelo Sol. Logo, se queremos achar uma fórmula para a atração mútua do sistema Terra-Sol, esta deve conter também a massa do Sol, já que a massa deste é proporcional a nossa força atrativa (gravitacional).

Então, seja M a massa do Sol e multipliquemos e dividamos o segundo membro da expressão 4.6 pela mesma.

$$F_g = \frac{4\pi^2 K}{M} \frac{mM}{R^2}$$

Denotando todas as constantes $\frac{4\pi^2 K}{M}$ por uma única constante G (a massa M do Sol também não varia). Obtemos:

$$F_g = G \frac{mM}{R^2} \quad (4.7)$$

que coincide com a expressão 4.1. □

Newton agora precisa verificar se a relação que ele havia encontrado condizia com os dados da natureza e ele parte para testá-la usando a Lua. Pois como se vê da demonstração, a expressão 4.7 apenas seria válida para corpos orbitando em torno do Sol (Sistema Solar), pois a constante G inclui a massa do Sol e a constante K de Kepler para planetas orbitando o Sol. Newton deverá ter pensado que provavelmente a razão entre a constante K de Kepler para qualquer sistema e a massa do corpo central seria, por si mesma, constante, e terá tentado generalizar para todos os corpos.

Mas como e por quê?

⁷Na verdade a massa de um corpo pode variar, entretanto isso só foi descoberto anos mais tarde por Albert Einstein com a Teoria da Relatividade.

4.13 O Teste da Lua

Reza a lenda que Newton viu uma maçã⁸ a cair no seu jardim em Lincolnshire, e que terá pensado na força atrativa na direção da Terra.

Kepler havia observado em suas anotações os efeitos de atração do Sol que agia como um ímã gigante. Será que os planetas agiam da mesma forma ?

Galileu havia teorizado sobre a aceleração dos corpos em queda percebendo que independentemente da massa, os objetos em queda apresentavam a mesma velocidade (Fig. 4.7).



Figura 4.7. Todos os corpos caem com a mesma aceleração num dado campo gravitacional.

A sacada de Newton foi unir as idéias de Galileu e Kepler e perceber que o que causa a queda de objetos na Terra é o que faz os planetas girarem em torno do Sol. Pensou que a mesma força que fizera cair a maçã poderia estender-se até à distância da Lua.

Ele conhecia bem o trabalho de Galileu sobre projéteis e sugeriu que o movimento da Lua poderia ser uma extensão natural daquela teoria. Para se entender o que se pretende afirmar com isto, considere-se um revólver que dispara um projétil horizontalmente do cimo de uma montanha e imagine-se que cada vez se utiliza mais pólvora obtendo-se uma velocidade inicial da bala cada vez maior (Fig. 4.8).

⁸Segundo I. B. Cohen, na época da alegada queda da maçã, Newton não estava preparado para descobrir a Gravitação Universal, pois não possuía, ainda, as ferramentas conceituais que, de fato, o levaram a conceber a lei. E propõe que: Newton chegou à *Gravitação Universal* por uma aplicação de sua *Terceira Lei*. A *Terceira Lei* só foi formulada por ele no último rascunho do Princípios, por volta de 1685. Logo, a história da maçã é falsa, pois teria ocorrido 20 anos antes.

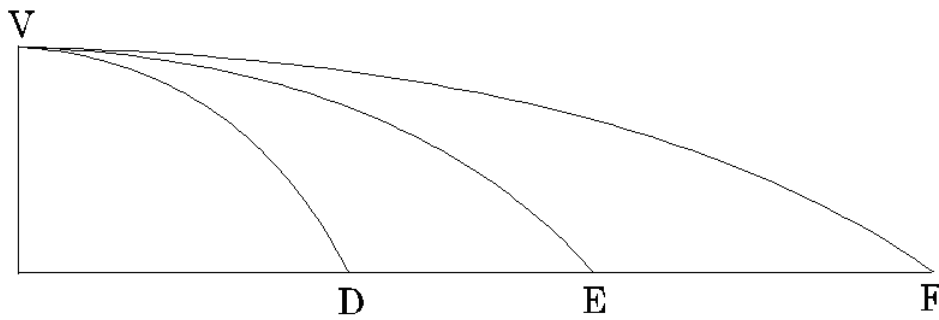


Figura 4.8. Trajetórias parabólicas de projéteis disparados horizontalmente com diferentes velocidades iniciais, atingindo diferentes pontos do solo.

As trajetórias parabólicas vão ficar cada vez mais planas, e se imaginarmos que a montanha é suficientemente alta para que o atrito possa ser desprezado e o revólver for suficientemente potente, eventualmente o ponto de queda será tão distante que teremos que considerar a curvatura da Terra ao considerar a curvatura da trajetória, para determinar o ponto de queda.

De fato, a situação é mais drástica, pois a curvatura da Terra pode significar que o projétil de fato nunca chegue ao solo. Isto foi previsto por Newton no livro *Principia*, e ninguém melhor que o próprio Sir Isaac Newton para nos explicar (Fig. 4.9).

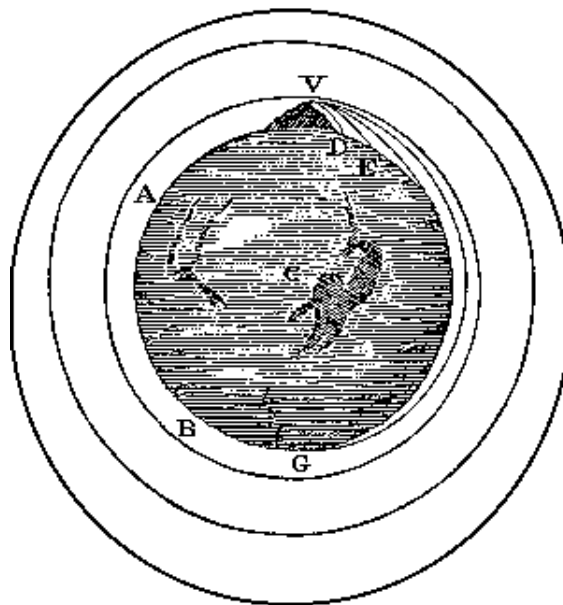


Figura 4.9. Se um projétil fosse lançado horizontalmente de um monte tão alto que o atrito do ar fosse desprezável, desde que a sua velocidade fosse suficiente, entraria em órbita em torno da Terra.

Leia a seguir um trecho de seu artigo *Um Tratado sobre o Sistema do Mundo*,

publicado em 1728, onde ele explica como a força gravitacional mantém os satélites em suas órbitas. A linguagem foi adaptada por nós mas o argumento, brilhante e cristalino, é do grande mestre inglês.

“Para explicar como os satélites se mantêm em suas órbitas consideremos o movimento de um corpo lançado inicialmente com uma trajetória horizontal. Por causa de seu peso, o corpo sai de sua trajetória reta, descreve uma curva e cai sobre o solo. Quanto maior a velocidade com que é lançado, mais longe ele alcança antes de cair sobre a Terra. Veja a figura 4.9 que representa a Terra e as linhas curvas que o corpo percorreria se projetado em uma direção horizontal do topo de uma alta montanha, com velocidades cada vez maiores. Suponha que não há resistência do ar. Aumentando cada vez mais a velocidade inicial do corpo ele cairá cada vez mais longe até que, quando a velocidade inicial for suficientemente grande, acabará percorrendo toda a circunferência da Terra, voltando à montanha de onde foi lançado.

Agora, se o corpo for projetado em direções paralelas ao horizonte, de grandes alturas, dependendo de sua velocidade inicial e da força da gravidade na altura em que está, ele descreverá círculos concêntricos ou elipses e permanecerá girando nessas órbitas celestes do mesmo modo que a Lua gira em torno da Terra e os planetas giram em torno do Sol”.

Essa explicação, com figura e tudo, é uma jóia de clareza e simplicidade. Ela inclui a idéia de que a mesma força que faz cair uma pedra (ou uma maçã!) também mantém o movimento de um satélite em torno da Terra. E devemos mencionar que, por esse trecho, Newton foi o primeiro a ter a idéia de um satélite artificial.

Voltando à nossa figura. O cume da montanha V deve estar bem acima da atmosfera da Terra e com uma velocidade inicial apropriada, o projétil orbitará a Terra com uma trajetória circular. De fato, a curvatura da Terra é tal que a superfície “cai”, relativamente a uma superfície verdadeiramente horizontal aplicada no ponto de partida considerado, cerca de cinco metros nos primeiros $8Km$ (basta considerar a órbita lunar da figura 4.10 como a circunferência da Terra, a Lua como o projétil, a distância AD como sendo de medida $5m$, a distância DE como $2R - AD$ e com a propriedade da média geométrica no $\triangle ACE$, calcula-se a distância $AB = 8000m = 8Km$ que o projétil percorreu).

Como se sabe da cinética de Galileu, a distância vertical percorrida durante a queda de um corpo que parte com componente vertical da velocidade nula (situação de repouso ou de lançamento horizontal) é dada pela expressão:

$$S = \frac{1}{2}gt^2$$

em que g é a aceleração da gravidade (aproximadamente $10m/s^2$ ou ainda mais aproximadamente, $9,8m/s^2$) e t é o tempo percorrido desde o instante inicial considerado.

Assim sendo, o corpo cai cerca de cinco metros no primeiro segundo (basta substituímos as variáveis g e t na expressão de Galileu por $10m/s^2$ e $1s$ respectivamente), o que significa que se um projétil fosse disparado horizontalmente com uma velocidade de $8000m/s$, ao fim de um segundo estará a passar horizontalmente à mesma altura $8Km$ adiante, e assim consecutivamente, segundo após segundo, o que significaria que o corpo descreveria uma órbita circular paralela ao solo (a seguir

haverá uma demonstração formal deste fato).

Newton concebeu que a trajetória circular da Lua poderia ser facilmente explicada através da mesma força gravitacional que pode manter o projétil anterior em órbita baixa. Naquela época, Christian Huygens, estudando o movimento oscilatório do pêndulo, já calculara um valor de aproximadamente $10m/s^2$ para a aceleração da gravidade na superfície da Terra. E como se sabe da queda dos corpos de Galileu, se a Lua fosse o nosso projétil anterior orbitando a circunferência da Terra, então esta também cairia cinco metros no primeiro segundo, pois independentemente da massa, os corpos, na superfície terrestre, caem com a mesma aceleração de $10m/s^2$. De posse disto Newton calcula o quanto a Lua “cai”⁹ relativamente à sua órbita no decorrer de 1 segundo. Para pensar neste conceito, consideremos a Lua numa trajetória, começando num instante em particular, desviando-se de uma linha horizontal tal como o projétil anterior. A primeira questão é saber o quanto a Lua cairá no primeiro segundo da trajetória. Isto não foi difícil de determinar para Newton, pois a trajetória da Lua já era bem conhecida. A órbita da Lua tem um raio médio de cerca de $384000Km$ e é percorrida em 27,3 dias. Logo, seu perímetro tem aproximadamente $2411520Km$. Convertendo 27,3 dias em segundos, temos 2358720 segundos; por isso, aplicando uma regra de três simples, a distância percorrida em um segundo é de cerca de 1 quilômetro (considerando-se as mesmas condições anteriores da demonstração da lei da gravitação para a órbita lunar). Agora para calcularmos o quanto a Lua cai no decorrer do primeiro segundo, faremos o uso da figura 4.10.

Seja ACE um triângulo inscrito numa semi-circunferência de raio AO , com um de seus lados passando pelo centro da mesma, como o da figura 4.10. Vamos provar que ACE é retângulo em C .

Demonstração

Temos que o triângulo OAC é isósceles (pois os lados \overline{OA} e \overline{OC} deste triângulo são os raios da semi-circunferência), logo, $m\widehat{OAC} = m\widehat{OCA}$. Por um teorema da geometria que diz que “a medida do ângulo externo de um triângulo é igual a soma das medidas de seus ângulos internos não adjacentes à ele”, temos que $m\widehat{COE} = m\widehat{OAC} + m\widehat{OCA} \implies m\widehat{COE} = 2m\widehat{OCA}$. De maneira análoga, só que agora considerando o triângulo OCE , provamos que $m\widehat{AOC} = 2m\widehat{OCE}$. No entanto, temos que o ângulo \widehat{AOE} é um ângulo raso (de medida 180) e é a soma das medidas dos ângulos \widehat{AOC} e \widehat{COE} , isto é, $m\widehat{AOE} = m\widehat{AOC} + m\widehat{COE} \implies m\widehat{AOE} = 2m\widehat{OCE} + 2m\widehat{OCA} \implies 2m\widehat{OCE} + 2m\widehat{OCA} = 180 \implies m\widehat{OCE} + m\widehat{OCA} = 90$. Mas, $m\widehat{OCE} + m\widehat{OCA} = m\widehat{ACE}$. Portanto, o ângulo \widehat{ACE} é reto. □

Provemos agora que CD é a média geométrica de AD e DE .

Demonstração

Para isto, tracemos a altura relativa ao lado \overline{AE} do triângulo ACE e vamos demonstrar que os triângulos ADC e CDE são semelhantes. De fato, precisamos mostrar que eles têm dois de seus ângulos congruentes, daí pelo *corolário AA* a

⁹Conhecidas as massas e distâncias, é fácil calcular as atrações gravitacionais que o Sol e os planetas exercem. Fazendo isso você descobrirá, para seu espanto, que no caso da Lua a atração do Sol é 2,2 vezes maior que a exercida pela Terra. Isto significa que se a Lua estivesse imóvel, iria cair na direção do Sol e não da Terra!

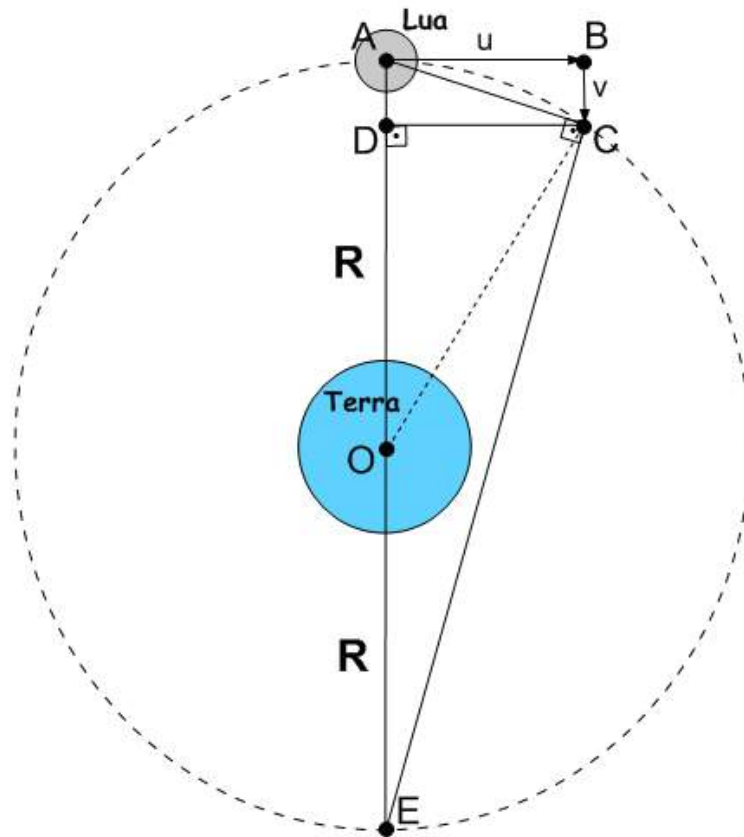


Figura 4.10. ACE é um triângulo retângulo inscrito numa semi-circunferência de raio \overline{AO} .

semelhança nos será garantida. Já temos que os ângulos \widehat{CDE} e \widehat{ADC} são congruentes, pois são ângulos retos (\overline{CD} é altura). Basta provarmos então que outros dois dos seus ângulos são congruentes. Vamos mostrar que $\widehat{DCE} \equiv \widehat{CAD}$. De fato, pois considerando os triângulos CDE e ACE temos que: $\widehat{CDE} \equiv \widehat{ACE}$ (ângulos retos), $\widehat{DEC} \equiv \widehat{AEC}$ (ângulo em comum) e como a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo plano é 180, temos então que:

$$m\widehat{CDE} + m\widehat{DEC} + m\widehat{DCE} = m\widehat{ACE} + m\widehat{AEC} + m\widehat{CAE}$$

↓

$$90 + m\widehat{DEC} + m\widehat{DCE} = 90 + m\widehat{DEC} + m\widehat{CAD}$$

↓

$$m\widehat{DCE} = m\widehat{CAD} \implies \widehat{DCE} \equiv \widehat{CAD}$$

$$\therefore ADC \sim CDE$$

Logo, os lados homólogos são proporcionais. Assim, podemos montar a seguinte proporção:

$$\frac{CD}{AD} = \frac{DE}{CD} \implies CD^2 = AD \cdot DE \implies CD = \sqrt{AD \cdot DE}$$

□

Denotemos por R a medida do raio \overline{AO} da órbita lunar e sejam u e v as componentes inercial e radial, respectivamente, do movimento circular da Lua (regra do paralelogramo). Temos que o quadrilátero $ABCD$ é um retângulo (paralelogramo), logo a norma de v é igual à medida do segmento \overline{AD} e representa a distância de queda da Lua; e a norma de u tem medida igual a do segmento \overline{DC} e representa o quanto a Lua “andou” no instante em que a força gravitacional parou de atuar.

A distância AB (norma de u), que é igual a CD (altura do triângulo ACE), que a Lua “andou” no decorrer do primeiro segundo é igual a $1Km$.

Vamos denotar por x a medida do segmento \overline{AD} , que é igual a norma de v , então a medida do segmento \overline{DE} é igual a $2R - x$. Fazendo o uso agora da média geométrica que deduzimos anteriormente, temos então, a seguinte equação do segundo grau:

$$CD = \sqrt{AD \cdot DE} \implies 1 = x(2R - x) \implies 1 = 2Rx - x^2 \implies x^2 - 2Rx + 1 = 0$$

$$\Delta = (-2R)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4R^2 - 4$$

$$x = \frac{-(-2R) \pm \sqrt{4R^2 - 4}}{2} = \frac{2R \pm \sqrt{4(R^2 - 1)}}{2} = \frac{2R \pm 2\sqrt{R^2 - 1}}{2} = R \pm \sqrt{R^2 - 1}$$

↓

$$x = R \pm \sqrt{R^2 \left(1 - \frac{1}{R^2}\right)} = R \pm R\sqrt{1 - \frac{1}{R^2}} \tag{4.8}$$

Vamos fazer uma importante observação a partir deste ponto.

Temos que

$$\boxed{\left(1 \pm \frac{y}{2}\right)^2 = 1 \pm y + \frac{y^2}{4}}$$

De modo que, para y muito pequeno, aproximadamente, tem-se

$$\boxed{1 \pm y + \frac{y^2}{4} \approx 1 \pm y}$$

Logo,

$$\boxed{\sqrt{1 \pm y} \approx \sqrt{1 \pm y + \frac{y^2}{4}} = \sqrt{\left(1 \pm \frac{y}{2}\right)^2} = \left|1 \pm \frac{y}{2}\right|, \text{ para } y \text{ muito pequeno}}$$

Voltando à expressão 4.8 e tomando $y = \frac{1}{R^2}$, temos que para um R muito grande, que é o nosso caso, pois R é o raio médio da órbita da Lua, tem-se um y muito pequeno e daí pela observação acima, a expressão toma a seguinte cara:

$$x = R \pm R\sqrt{1 - \frac{1}{R^2}} \approx R \pm R\left(1 - \frac{1}{2R^2}\right)$$

Desenvolvendo a expressão temos:

$$x \approx R \pm R\left(1 - \frac{1}{2R^2}\right) = R - R + \frac{1}{2R}$$

$$\boxed{\therefore x = \frac{1}{2R}}$$

OBS: 1-) O sinal de $-$ foi escolhido por que se escolhêssemos o sinal de $+$, encontraríamos $2R$ para o valor de x .

$$x = R + R - \frac{1}{2R} \approx 2R$$

E vemos claramente que este valor não é solução da equação $x^2 - 2Rx + 1 = 0$, pois substituindo-o na mesma, somos levados a $1 = 0$, o que é um absurdo!

$$2-)\left|1 - \frac{1}{2R^2}\right| > 0$$

Tendo em vista que o raio médio da órbita da Lua é de $384000Km$, podemos calcular agora a queda da Lua relativamente à horizontal.

$$x \approx 0,00001302084Km = 1,302084mm$$

O que significa que a aceleração da gravidade da Lua sentida em sua órbita relativamente à sentida à superfície da Terra é dada pela razão $\frac{5000mm}{1,302084mm} = 3840 \approx 3600$, ou seja, a aceleração sentida pela Lua é 3600 vezes mais pequena que a aceleração sentida por ela mesma ou por uma maçã à superfície da Terra.

Como a órbita da Lua é cerca de 60 vezes o raio da Terra, a relação entre a força gravitacional sentida por um corpo à superfície da Terra e pela Lua parecem relacionadas pela lei do inverso do quadrado da distância. Pois, devemos observar que, a esta altura, Newton já havia demonstrado, em proposições no Livro I, que se uma força fosse capaz de gerar movimento circulares ou elípticos e se esses movimentos obedecessem à Terceira Lei de Kepler, então tal força deveria ser radial e proporcional ao inverso do quadrado da distância ao centro da circunferência ou foco da elipse. Desse modo, Newton já havia demonstrado que a força centrípeta deveria ser proporcional ao inverso do quadrado da distância. Newton toma agora forças (**f**) proporcionais às acelerações (**a**), considerando que para situações de aceleração constante, a exemplo de movimentos na superfície da Terra, a aceleração é proporcional à distância percorrida (**S**) e inversamente proporcional ao quadrado do tempo gasto no percurso (**T**) (lei dos quadrados dos tempos de Galileu).

E faz a razão das forças que atuam sobre a Lua, considerando a força de atração gravitacional quando esta se encontra percorrendo sua órbita, e a força de atração

gravitacional supondo que ela esteja na superfície da Terra; para ver se seus resultados obtidos estão correlacionados com a Teoria.

$$\frac{f_o}{f_s} = \frac{(R_s)^2}{(R_o)^2}$$

onde f_o é a força de atração gravitacional em órbita da Lua, f_s a força de atração gravitacional na superfície da Terra, R_o o raio da órbita lunar e R_s o raio da Terra. Mas, $R_o \approx 60R_s$. Logo,

$$\frac{f_o}{f_s} = \frac{(R_s)^2}{60^2(R_s)^2}$$

↓

$$\frac{f_s}{f_o} = 3600$$

E como a força é diretamente proporcional à aceleração, temos:

$$\frac{a_s}{a_o} = 3600$$

onde a_s é a aceleração da Lua sentida na superfície da Terra e a_o é a aceleração de queda da mesma relativamente à sua órbita.

O que leva à mesma razão de $\frac{5000mm}{1,302084mm} \approx 3600$ (o que está em concordância, visto que a órbita da Lua não é circular e foram ignorados os efeitos da gravidade do Sol e também devido as aproximações nas contas)

Newton havia confirmado sua teoria!

Prosseguindo, a constante de gravitação universal para a Lua orbitando em torno da Terra tomaria a seguinte forma:

$\frac{4\pi^2 K}{M_t}$ com $K = \frac{R_l^3}{T_l^2}$ e M_t a massa da Terra, R_l^3 o raio da órbita lunar e T_l^2 o período de translação da Lua.

4.14 O Argumento Original da Lei do Inverso do Quadrado da Distância

“Se um corpo possui uma órbita elíptica, é necessário encontrar a expressão da força centrípeta que tende ao foco da elipse”.

Na seção II dos Princípios, Newton procura estabelecer uma relação entre a força centrípeta e grandezas geométricas (distâncias) para um corpo movendo-se sobre uma trajetória qualquer. O resultado obtido é: a força centrípeta é inversamente proporcional a $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$ (seção II, proposição VI, corolários I e V).

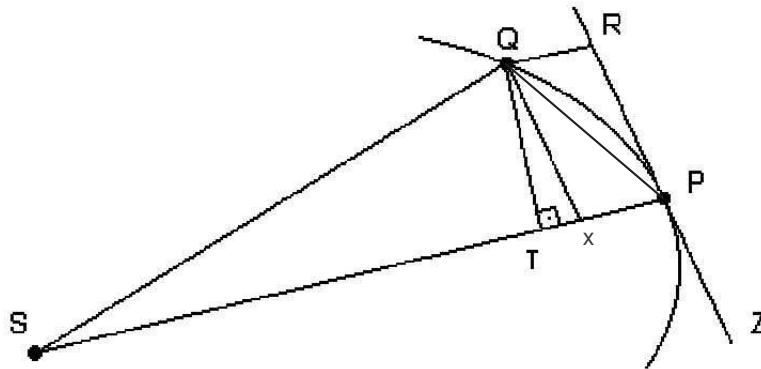


Figura 4.11

Vejamus como Newton obteve esse resultado utilizando-se da figura 4.11.

Demonstração

Seja P um corpo movendo-se numa trajetória curvilínea qualquer e S o centro de forças. Pela primeira lei de Newton, se nenhuma força F atuasse sobre P , este descreveria à direção da semi-reta \overrightarrow{PR} da reta tangente \overrightarrow{RZ} à curva no ponto P , movendo-se uniformemente ao longo desta. Porém, como F atua em toda a sua magnitude, na direção de \overrightarrow{PS} , ficamos então com Q , que é a posição de P , percorrida a diagonal \overrightarrow{PQ} do paralelogramo $RPxQ$, somando-se vetorialmente esses dois movimentos (de tangência \overrightarrow{PR} e de queda \overrightarrow{Px}), decorrido um tempo pequeno Δt (regra do paralelogramo).

$RPxQ$ paralelogramo $\Rightarrow \overrightarrow{Px} \cong \overrightarrow{QR}$. Da Cinemática de Galileu¹⁰ $Px = QR = \frac{a(\Delta t)^2}{2}$, onde a é a aceleração centrípeta dirigida para o centro S de forças.

Mas, pela segunda lei de Newton: $F = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m}$

Temos então,

$$QR = \frac{\frac{F}{m}(\Delta t)^2}{2} \Rightarrow QR = \frac{F(\Delta t)^2}{2m} \Rightarrow F = \frac{2mQR}{\Delta t^2} \Rightarrow F = 2mQR \left(\frac{1}{\Delta t^2} \right)$$

Agora precisamos verificar quanto vale $\left(\frac{1}{\Delta t^2} \right)$, nesta parte Newton usa a constante de Kepler K_2 da segunda lei, pois ele já havia provado que basta assumirmos que se P sofre atuação de uma força central, sendo sua órbita uma curva qualquer, então as linhas que ligam P à S limitadas pelos seus respectivos arcos, percorrem áreas iguais em tempos iguais (Seção ??). Sendo assim,

$$K_2 = \frac{\text{AreadosetorSQP}}{\Delta t} \approx \frac{\text{Area}\Delta SQP}{\Delta t} = \frac{\frac{SP \times QT}{2}}{\Delta t} = \frac{SP \times QT}{2\Delta t}$$

Então,

¹⁰Adiante será dado o argumento para este fato. E também para a aproximação da área do setor SQP e do ΔSQP .

$$K_2 = \frac{SP \times QT}{2\Delta t} \Rightarrow \frac{1}{\Delta t} = \frac{2K_2}{SP \times QT} \Rightarrow \frac{1}{\Delta t^2} = \frac{4K_2^2}{SP^2 \times QT^2}$$

Substituindo na relação anterior temos,

$$F = 2mQR \left(\frac{1}{\Delta t^2} \right) \Rightarrow F = 2mQR \left(\frac{4K_2^2}{SP^2 \times QT^2} \right) \Rightarrow F = 8K_2^2 m \left(\frac{QR}{SP^2 \times QT^2} \right)$$

↓

$$\left(\frac{SP^2 \times QT^2}{QR} \right) F = 8K_2^2 m$$

Como 8 , K_2^2 e m são constantes, temos então que a força F é inversamente proporcional a $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$, isto é,

$$F \propto \frac{QR}{SP^2 \times QT^2}$$

□

Vamos entender agora o porquê de “... Da Cinemática de Galileu $Px = QR = \frac{a(\Delta t)^2}{2}$, onde a é a aceleração centrípeta dirigida para o centro S de forças...”

Como vimos anteriormente, Galileu havia concluído que os corpos em queda na superfície da Terra obedecem a seguinte relação: $S = \frac{1}{2}at^2$. Newton tentou generalizar esta relação para qualquer corpo que sofresse a atuação de uma força central, utilizando-se do método de Hooke e abandonando de uma vez por todas sua “tendência centrífuga” (conatus).

Vamos tratar primeiramente do caso em que a órbita do corpo que sofre a atuação da força central é circular e depois generalizar para qualquer órbita curvilínea com a ajuda do círculo osculador.

Considere a figura 4.10 e seja a Lua como o corpo em que estamos lidando. Como já feito anteriormente, pela regra do paralelogramo, que nada mais é que a aplicação do método de Hooke, vamos separar o movimento deste corpo que vai de A para C nas componentes tangencial \overrightarrow{AB} (se nenhuma força atuasse sobre ele) e radial \overrightarrow{AD} (com a força centrípeta atuando sobre ele). Vamos relacionar a distância de queda \overline{BC} com o tempo, de modo semelhante ao feito nesta mesma seção ???. Para isto, seja $BC = x$, $AB = v\Delta t$ (o movimento tangencial é um MCU) e R o raio. Temos que $BC = AD = x$ e $AB = CD = v\Delta t$.

Da geometria do triângulo retângulo ACE inscrito na semi-circunferência:

$$CD = \sqrt{AD \cdot DE} \Rightarrow v\Delta t = \sqrt{x(2R - x)} \Rightarrow (v\Delta t)^2 = 2Rx - x^2 \Rightarrow x^2 - 2Rx + (v\Delta t)^2 = 0$$

$$\Delta = (-2R)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (v\Delta t)^2 = 4R^2 - 4(v\Delta t)^2$$

$$x = \frac{-(-2R) \pm \sqrt{4R^2 - 4(v\Delta t)^2}}{2} = \frac{2R \pm \sqrt{4[R^2 - (v\Delta t)^2]}}{2} = \frac{2R \pm 2\sqrt{R^2 - (v\Delta t)^2}}{2} =$$

$$R \pm \sqrt{R^2 - (v\Delta t)^2}$$

↓

$$x = R \pm \sqrt{R^2 \left[1 - \frac{(v\Delta t)^2}{R^2} \right]} = R \pm R\sqrt{1 - \frac{(v\Delta t)^2}{R^2}} \quad (4.9)$$

Vamos fazer uma importante observação a partir deste ponto. Temos que

$$\boxed{\left(1 \pm \frac{y}{2} \right)^2 = 1 \pm y + \frac{y^2}{4}}$$

De modo que, para y muito pequeno, aproximadamente, tem-se

$$\boxed{1 \pm y + \frac{y^2}{4} \approx 1 \pm y}$$

Logo,

$$\boxed{\sqrt{1 \pm y} \approx \sqrt{1 \pm y + \frac{y^2}{4}} = \sqrt{\left(1 \pm \frac{y}{2} \right)^2} = \left| 1 \pm \frac{y}{2} \right|, \text{ para } y \text{ muito pequeno}}$$

Voltando à expressão 4.9 e tomando $y = \frac{(v\Delta t)^2}{R^2}$, temos que se $(v\Delta t)^2$ for muito pequeno, quando comparado com R^2 , que é o nosso caso, pois R é o raio médio da órbita da Lua, tem-se um y muito pequeno e daí pela observação acima, a expressão toma a seguinte cara:

$$x = R \pm R\sqrt{1 - \frac{(v\Delta t)^2}{R^2}} \approx R \pm R\left[1 - \frac{(v\Delta t)^2}{2R^2} \right]$$

Desenvolvendo a expressão temos:

$$x \approx R \pm R\left(1 - \frac{v^2\Delta t^2}{2R^2} \right) = R - R + \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{R} \right)\Delta t^2$$

$$\boxed{\therefore x = \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{R} \right)\Delta t^2}$$

O que significa que essa expressão, quando comparada com a equação $S = \frac{1}{2}at^2$ de Galileu, difere unicamente pela constante a da aceleração, isto é, a lei de queda dos corpos que se movem em trajetórias circulares impelidos por forças centrípetas é igual à lei de queda dos corpos de Galileu impelidos pela gravidade na superfície da Terra, e se faz segundo uma aceleração igual a $\left(\frac{V^2}{R} \right)$.

OBS: 1-) O sinal de $-$ foi escolhido por que se escolhêssemos o sinal de $+$, encontraríamos $2R$ para o valor de x , já que $(v\Delta t)^2$ é muito pequeno, quando comparado à $2R$.

$$x = R + R - \frac{(v\Delta t)^2}{2R} \approx 2R$$

E vemos claramente que este valor não é solução da equação $x^2 - 2Rx + (v\Delta t)^2 = 0$, pois substituindo-o na mesma, somos levados a $v = 0$, já que $\Delta t \neq 0$, o que é um absurdo! Porque daí como $v = \frac{AB}{\Delta t}$, somos levados que $AB = 0$.

2-) $\left| 1 - \frac{(v\Delta t)^2}{2R^2} \right| > 0$

3-) Na parte da aproximação poderíamos ter feito diferente, considerando

$$\boxed{(1 \pm y)^2 = 1 \pm 2y + y^2}$$

De modo que, para y muito pequeno, aproximadamente, tem-se

$$\boxed{1 \pm 2y + y^2 \approx 1 \pm 2y}$$

Logo,

$$\boxed{\sqrt{1 \pm 2y} \approx \sqrt{1 \pm 2y + y^2} = \sqrt{(1 \pm y)^2} = |1 \pm y|, \text{ para } y \text{ muito pequeno}}$$

Daí bastava multiplicar e dividir por 2 a expressão 4.9, ficando assim:

$$R \pm R\sqrt{1 - \frac{2(v\Delta t)^2}{2R^2}}$$

E considerar $y = \frac{(v\Delta t)^2}{2R^2}$. Daí, fazendo uso da observação anterior,

$$x = R \pm R\sqrt{1 - \frac{2(v\Delta t)^2}{2R^2}} \approx R \pm R\left[1 - \frac{(v\Delta t)^2}{2R^2}\right]$$

□

4.14.1 O Círculo Osculador

No caso em que o corpo percorre um movimento curvo qualquer, a força centrípeta é a componente da força que corresponde somente pela curvatura da trajetória, logo é a componente perpendicular à velocidade, portanto direcionada para o centro de curvatura.

Os conceitos de *raio de curvatura* e *centro de curvatura* não são difíceis de se entender. Dada uma curva qualquer, pode-se desenhar um único círculo tangente à ela, em qualquer um de seus pontos; esse círculo tem o belo nome de *círculo osculador*¹¹, seu raio é o *raio de curvatura* e seu centro é o *centro de curvatura*.

É na seção III que ele passa a analisar diversos tipos de órbitas particulares. No nosso caso, a órbita elíptica com a força centrípeta dirigida para um dos focos da elipse. O trabalho resume-se, portanto, em encontrar uma razão igual à expressão

¹¹Ósculo significa beijo.

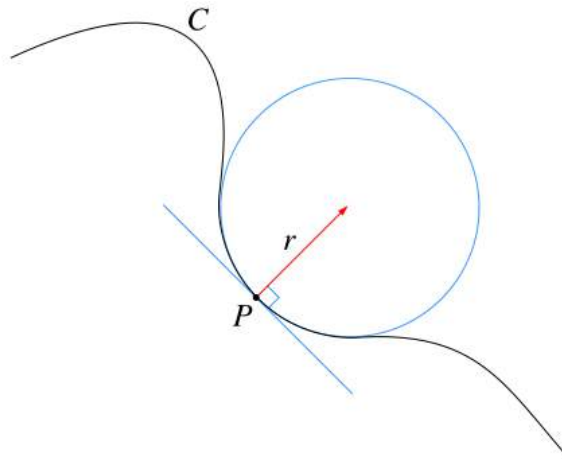


Figura 4.12. O Círculo Osculador.

$\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$. Isto é feito multiplicando-se três proporções determinadas exclusivamente por métodos geométricos (semelhança de triângulos, propriedades da elipse, etc.) e com o auxílio do conceito de limite, sendo este último estabelecido na seção I (Método das primeiras e últimas razões).

O que Newton precisa agora é tender Q a P e ver o que acontece, mas para isso ele precisa supor a órbita percorrida, e neste instante ele assume que é uma elipse como Kepler havia mostrado empiricamente. Temos então o seguinte:

$$F = \frac{8K_2^2 m}{SP^2} \times \lim_{Q \rightarrow P} \frac{QR}{QT^2}$$

Visto que somente QR e QT se alteram ao movermos Q à P (Fig. 4.11), e o que se segue é um dos argumentos mais famosos da ciência, e Newton usa o seguinte diagrama para prová-lo:

Sejam as mesmas condições do corpo P da figura 4.11 só que agora suponhamos que a trajetória curvilínea que ele percorre seja a elipse da figura 4.13 e que a força central seja direcionada para o foco S desta.

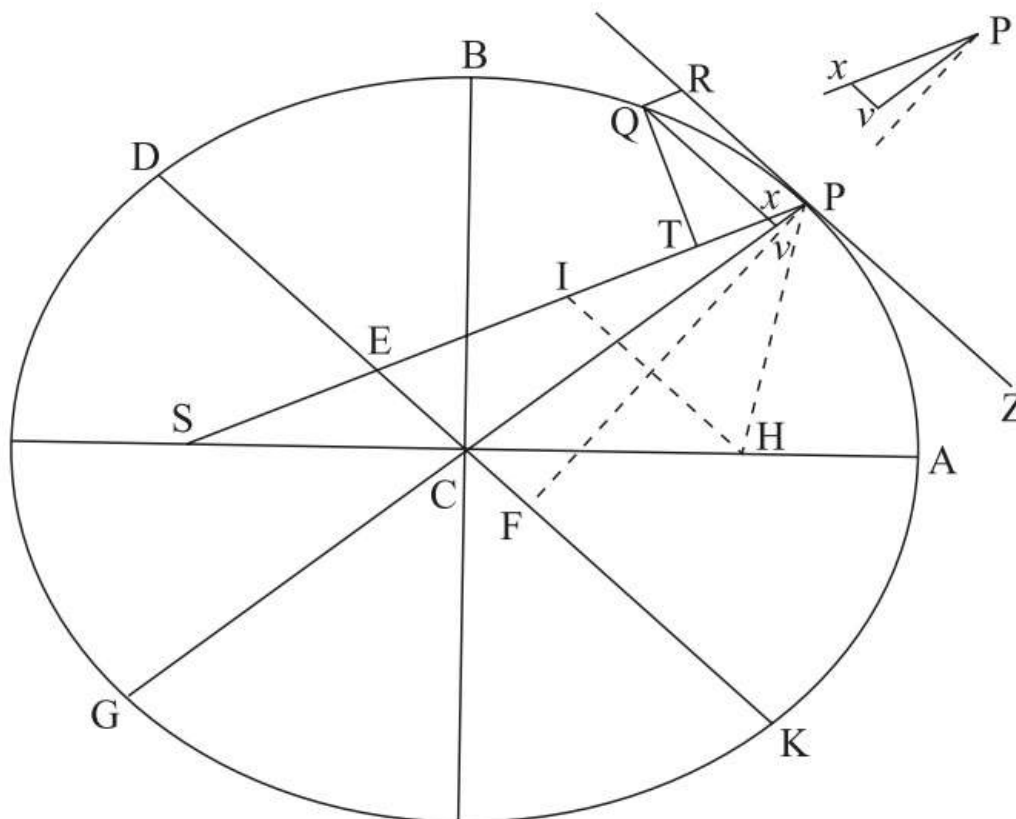
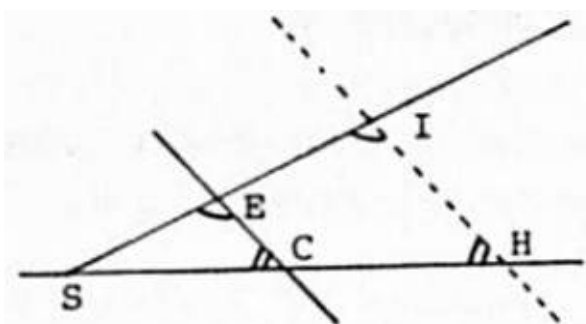


Figura 4.13. Se um corpo gira em uma elipse, propõe-se encontrar a lei da força centrípeta que tende para o foco da elipse.

Demonstração

4.14.2 Primeira Proporção

Tracemos por H a reta \overleftrightarrow{HI} paralela à \overleftrightarrow{RZ} interseccionando \overline{SP} em I . Tracemos também por C a reta \overleftrightarrow{DK} ¹² paralela à \overleftrightarrow{HI} interseccionando \overline{SP} em E . Aplicando o Teorema Fundamental da Proporcionalidade no $\triangle SIH$, temos:



¹²Na verdade essa reta tem um nome muito especial: diâmetro da elipse. Um diâmetro de uma elipse pode ser definido como o segmento que tem suas extremidades na elipse passando pelo centro da mesma. Pode-se mostrar que o centro da elipse é o ponto médio do diâmetro.

$\frac{ES}{EI} = \frac{CS}{CH}$. Porém, como as distâncias dos focos ao centro da elipse são iguais, isto é, $CS = CH$, temos então: $\frac{ES}{EI} = 1 \Rightarrow ES = EI$.

Ou como $\triangle SEC \sim \triangle SIH \Rightarrow \frac{ES}{IS} = \frac{CS}{HS}$. Mas, $CS = CH \Rightarrow HS = CS + CH = 2CS$. Logo, $\frac{ES}{IS} = \frac{CS}{HS} \Rightarrow \frac{ES}{ES + EI} = \frac{CS}{2CS} \Rightarrow 2ES = ES + EI \Rightarrow ES = EI$.

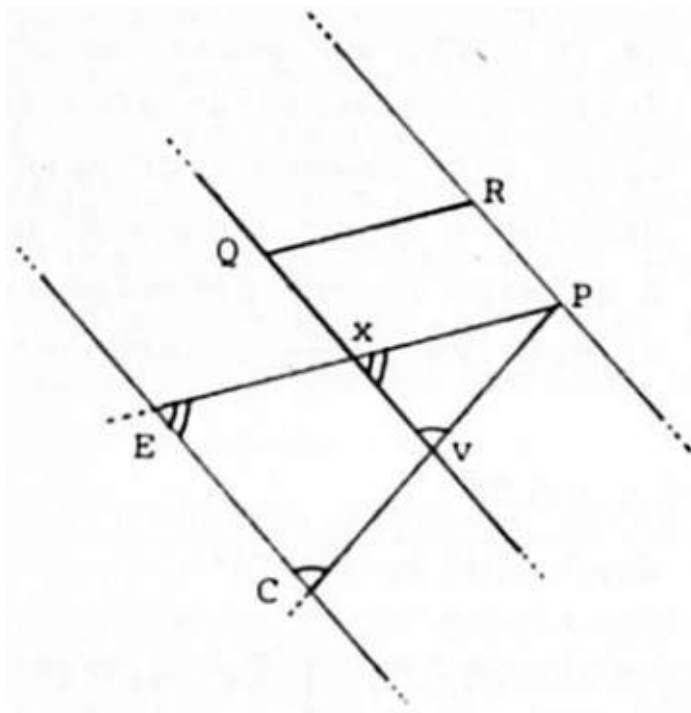
Vamos ligar o ponto P ao ponto H e formar assim o $\triangle PHI$. Provemos agora que este triângulo é isósceles, ou seja, que $PI = PH$.

Considere as retas paralelas \overleftrightarrow{RZ} e \overleftrightarrow{HI} cortadas pelas transversais \overleftrightarrow{PI} e \overleftrightarrow{PH} .

Temos da geometria que $\widehat{RPS} \cong \widehat{PIH}$ e $\widehat{ZPH} \cong \widehat{PHI}$, já que são pares de ângulos alternos internos.

Mas, por propriedade da elipse $\widehat{RPS} \cong \widehat{ZPH}$. Logo, $\widehat{PIH} \cong \widehat{PHI}$ o que implica, pela recíproca do teorema do triângulo isósceles, que $PI = PH$.

Sabemos que por definição de elipse $PS + PH = 2AC$. Logo, $2AC = PS + PH = (PI + EI + ES) + PH = (PI + PH) + (ES + EI) = 2PI + 2EI = 2(PI + EI) = 2PE \Rightarrow 2AC = 2PE \Rightarrow AC = PE$.



Considere agora o ponto v de intersecção da reta Qx com a reta PG . Temos então que $\triangle Pxv \sim \triangle PEC$, já que $\widehat{Pxv} \cong \widehat{PEC}$ e $\widehat{Pvx} \cong \widehat{PCE}$, pois são pares de ângulos correspondentes ($xv \parallel EC$). Logo,

$\frac{Px}{PE} = \frac{Pv}{PC} \Rightarrow \frac{Px}{Pv} = \frac{PE}{PC}$. Mas, como o quadrilátero $RPxQ$ é um paralelogramo, temos que: $Px = QR$. E $AC = PE$, como já provamos. Portanto,

$$\boxed{\frac{QR}{Pv} = \frac{AC}{PC}} \tag{1}$$

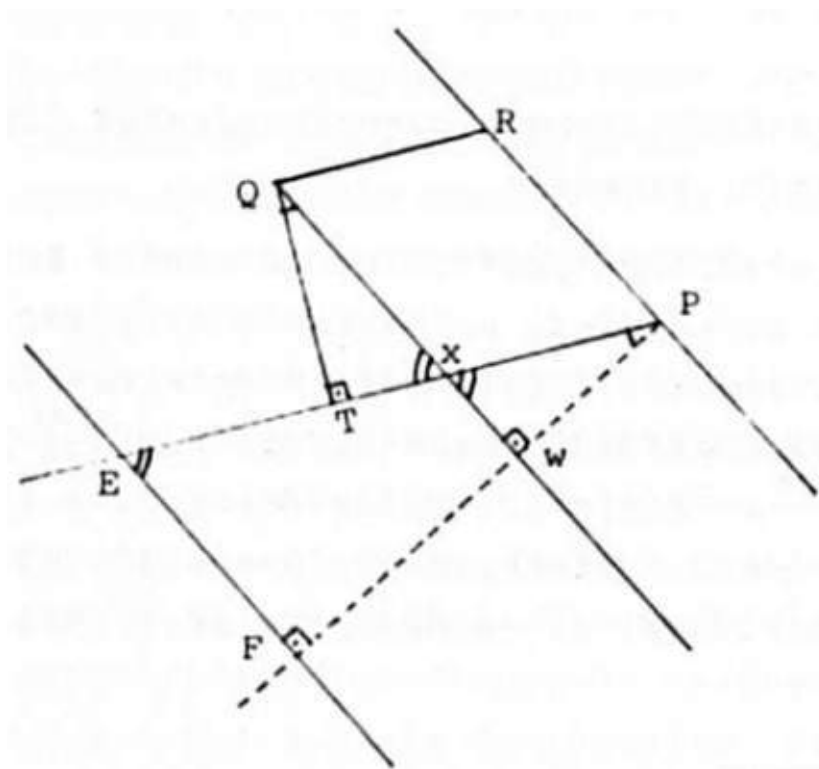
4.14.3 Segunda Proporção

Sejam agora w e F as projeções do ponto P sobre as retas Qx e DK respectivamente, como na figura abaixo.

Temos que $\triangle QTx \sim \triangle Pwx \Rightarrow \frac{Qx}{Px} = \frac{QT}{Pw} \Rightarrow \frac{Qx}{QT} = \frac{Px}{Pw}$. Temos também que $\triangle Pwx \sim \triangle PFE \Rightarrow \frac{Pw}{PF} = \frac{Px}{PE} \Rightarrow \frac{Pw}{Px} = \frac{PF}{PE} \Rightarrow \frac{Px}{Pw} = \frac{PE}{PF}$.

Logo, $\frac{Qx}{QT} = \frac{Px}{Pw} = \frac{PE}{PF}$; pelo lema VII, corolário II, quando $Q \rightarrow P \Rightarrow x \rightarrow v \rightarrow w \Rightarrow Qx \rightarrow Qv \rightarrow Qw \Rightarrow \frac{Qv}{QT} = \frac{PE}{PF}$.

Aqui já aparece uma das idéias fundamentais do cálculo: o conceito de limite. O lema VII diz que: "... a razão última entre o arco, a corda e a tangente, qualquer um para qualquer outro, é a razão da igualdade ...". Tentemos então, utilizando-nos de uma notação moderna, provar este lema:

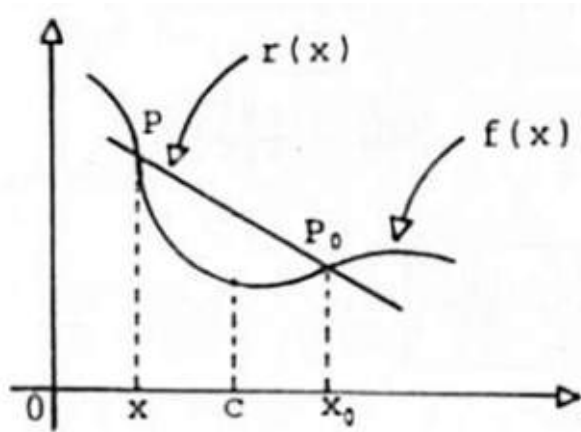


Seja C_f o comprimento do arco determinado pelos pontos P_0 e P e seja C_r o comprimento do segmento de reta determinado por P_0 e P . Desejamos determinar o limite de $\frac{C_f}{C_r}$ quando x tende a x_0 (**OBS:** $a = x_0$ e $b = x$).

Sabemos que:

$$C_f(x) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

$$C_r(x) = \sqrt{(x - x_0)^2 + [f(x) - f(x_0)]^2}$$



Quando $x \rightarrow x_0$, $f'(c) \rightarrow f'(x)$ e no limite (uma vez que $f(x)$ é contínua) $f'(c) = f'(x)$; mas pelo Teorema do Valor Médio para derivadas:

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad f'(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1)$$

Vamos substituir (1) na expressão da integral de $C_f(x)$,

$$C_f(x) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right]^2} dx =$$

$$\int_a^b \frac{\sqrt{(x - x_0)^2 + [f(x) - f(x_0)]^2}}{(x - x_0)} dx = \int_a^b \frac{\sqrt{(x - x_0)^2 + [f(x) - f(x_0)]^2}}{(x - x_0)} dx$$

Fazendo a razão entre C_f e C_r e aplicando o limite quando $x \rightarrow x_0$, tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{C_f}{C_r} = \frac{\int_a^b \frac{\sqrt{(x - x_0)^2 + [f(x) - f(x_0)]^2}}{(x - x_0)} dx}{\sqrt{[f(x) - f(x_0)]^2 + (x - x_0)^2}} \quad (2)$$

Aplicando a regra de L'Hospital:

$$\frac{dC_f}{dx} = \frac{\sqrt{[f(x) - f(x_0)]^2 + (x - x_0)^2}}{(x - x_0)} \quad (3)$$

$$\frac{dC_r}{dx} = \frac{2f'(x)[f(x) - f(x_0)] + 2(x - x_0)}{2\sqrt{[f(x) - f(x_0)]^2 + (x - x_0)^2}}$$

Simplificando e utilizando (1), temos:

$$\frac{dC_r}{dx} = \frac{\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] [f(x) - f(x_0)] + (x - x_0)}{\sqrt{[f(x) - f(x_0)]^2 + (x - x_0)^2}} =$$

$$\frac{[f(x) - f(x_0)]^2 + (x - x_0)^2}{(x - x_0)\sqrt{[f(x) - f(x_0)]^2 + (x - x_0)^2}} \quad (4)$$

Substituindo (3) e (4) em (2),

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{C_f}{C_r} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{\sqrt{[f(x) - f(x_0)]^2 + (x - x_0)^2}}{(x - x_0)}}{\frac{[f(x) - f(x_0)]^2 + (x - x_0)^2}{(x - x_0)\sqrt{[f(x) - f(x_0)]^2 + (x - x_0)^2}}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[f(x) - f(x_0)]^2 + (x - x_0)^2}{[f(x) - f(x_0)]^2 + (x - x_0)^2} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1$$

Isso demonstra uma parte do lema: “a razão última” (diríamos hoje, o limite da razão) entre o comprimento da corda e o comprimento do arco é igual a um, isto é, no limite a corda e o arco têm o mesmo comprimento. As outras razões podem ser demonstradas de maneira semelhante.

Com este lema podemos dar uma explicação notável do porquê de aproximarmos a área do setor SQP com a área do $\triangle SQP$ na figura 4.11.

Acontece que na figura, por este lema, quando Q tende a P , o comprimento da corda \overline{QP} e do arco são iguais. Logo, o lado \overline{QP} do $\triangle SQP$, que nada mais é que a corda \overline{QP} , coincide com o arco e daí podemos dizer que a área do triângulo coincide com a área do setor, já que os outros dois lados \overline{SQ} e \overline{SP} são comuns ao triângulo e ao setor.



Figura 4.14. O desenho geométrico da elipse da figura 4.13 o qual Newton usou para demonstrar a lei do inverso do quadrado da distância, figura no verso da nota inglesa “one pound” (uma libra), impressa em 1960.

Prosseguindo raciocínio, Newton escreve:

$$\frac{Qv}{QT} = \frac{PE}{PF}. \text{ Mas, } PE = AC \implies \frac{Qv}{QT} = \frac{AC}{PF} \implies \frac{Qv^2}{QT^2} = \frac{AC^2}{PF^2}$$

Vamos agora precisar de um outro lema para prosseguirmos na demonstração.

No lema XII, Newton diz: “*Todo paralelogramo circunscrito sobre quaisquer diâmetros conjugados de uma dada elipse ou hipérbole são iguais entre si*”; ou seja, possuem áreas iguais. É importante frisar que a palavra “paralelogramo” inclui o retângulo, uma vez que este é um caso particular do primeiro. Vejamos como esse teorema conduz à proporção utilizada, a começar pela próxima figura, que nada mais é que a elipse da figura original 4.13.

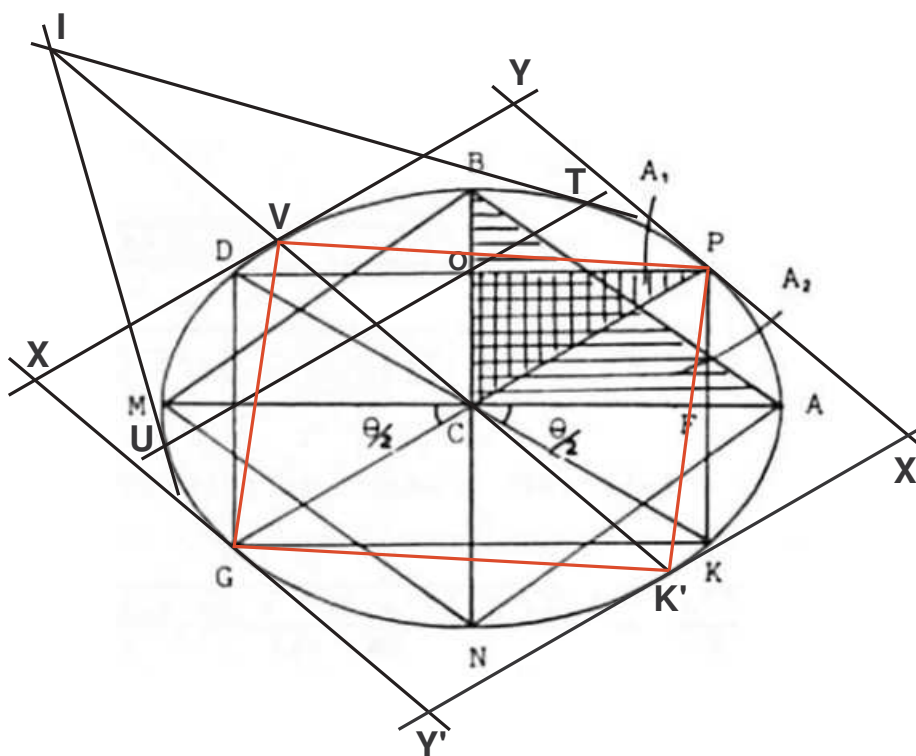


Figura 4.15

Primeiramente vamos entender o que é um par de diâmetros conjugados de uma dada elipse, utilizando-nos desta mesma figura.

Considere o diâmetro \overline{PG} da figura acima, vamos construir o diâmetro conjugado à ele.

Tracemos uma corda qualquer \overline{TU} paralela à \overline{PG} . Agora construa as tangentes à elipse pelos pontos T e U e seja I o ponto em que essas tangentes se interseccionam. Ligue agora este ponto I com o centro C da elipse e seja V o ponto de intersecção do segmento \overline{IC} com a elipse. Chamamos de semi-diâmetro conjugado à \overline{PG} ao segmento \overline{CV} . O diâmetro conjugado à \overline{PG} é o segmento com extremidades V e K' na elipse passando pelo centro C da mesma.

Sejam agora as tangentes à elipse por V e K' , provemos que estas tangentes são paralelas. Para isso vamos utilizar a figura 4.16.

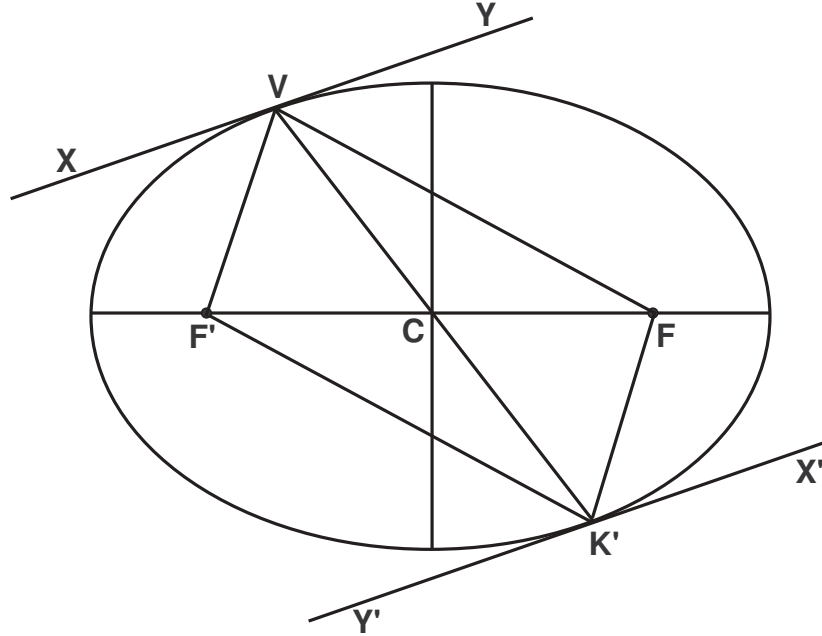


Figura 4.16

Sabemos que por $\overline{VK'}$ ser um diâmetro da elipse, então seu ponto médio coincide com o centro C da circunferência. Logo, $\overline{VC} \cong \overline{CK'}$. Sabemos também da elipse que C é médio da distância focal $F'F$, ou seja, $\overline{F'C} \cong \overline{CF}$; o que implica por um resultado da geometria plana que diz *que se dois segmentos, no caso $\overline{VK'}$ e $\overline{F'F}$, se bisseccionam, então suas extremidades são vértices de um paralelogramo*. Portanto, o quadrilátero $VF'K'F$ é um paralelogramo, e como sabemos num paralelogramo os pares de ângulos opostos são congruentes, o que implica que $\widehat{F'VF} \cong \widehat{F'K'F}$.

Temos também que os ângulos \widehat{XVY} e $\widehat{Y'K'X'}$ são rasos, logo suas medidas são iguais $m\widehat{XVY} = m\widehat{Y'K'X'}$; e mais ainda $m\widehat{XVY} = m\widehat{XVF'} + m\widehat{F'VF} + m\widehat{YVF}$ e $m\widehat{Y'K'X'} = m\widehat{Y'K'F'} + m\widehat{F'K'F} + m\widehat{X'K'F}$. Porém, pela propriedade focal da elipse $m\widehat{XVF'} = m\widehat{YVF}$ e $m\widehat{Y'K'F'} = m\widehat{X'K'F}$, acarretando:

$$m\widehat{XVY} = m\widehat{Y'K'X'}$$

↓

$$m\widehat{XVF'} + m\widehat{F'VF} + m\widehat{YVF} = m\widehat{Y'K'F'} + m\widehat{F'K'F} + m\widehat{X'K'F}$$

↓

$$(m\widehat{XVF'} + m\widehat{YVF}) + m\widehat{F'VF} = m\widehat{F'K'F} + (m\widehat{Y'K'F'} + m\widehat{X'K'F})$$

↓

$$2m\widehat{XVF'} = 2m\widehat{X'K'F} \Rightarrow m\widehat{XVF'} = m\widehat{X'K'F} \Rightarrow \widehat{XVF'} \cong \widehat{X'K'F}$$

Considere agora os $\triangle VCF'$ e $\triangle K'CF$ temos que eles são congruentes pelo caso LAL ($\overline{VC} \cong \overline{CK'}$, $\overline{F'C} \cong \overline{CF}$ e $VCF' \cong K'CF$ OPV); o que implica que $F'VC \cong FK'C$. Logo, temos:

$$m\widehat{XVF'} = m\widehat{X'K'F}$$

$$m\widehat{F'VC} = m\widehat{FK'C}$$

Somando essas igualdades,

$$m\widehat{XVF'} + m\widehat{F'VC} = m\widehat{X'K'F} + m\widehat{FK'C}$$

↓

$$m\widehat{XVC} = m\widehat{X'K'C} \Rightarrow \widehat{XVC} \cong \widehat{X'K'C} \implies \overrightarrow{XY} \parallel \overrightarrow{Y'X'}$$

OBS: Os focos F e F' desta elipse, na verdade são os focos S e H da elipse da figura 4.13.

O mesmo vale para as tangentes por P e G na figura 4.15. Sejam X, Y, X' e Y' os pontos em que essas tangentes se encontram, como nesta figura. Formamos assim então o paralelogramo $XYX'Y'$. Newton afirma que qualquer outro paralelogramo circunscrito à elipse, construído desta maneira a partir de outro diâmetro qualquer, tem a mesma área que nosso paralelogramo $XYX'Y'$.

Vamos agora mudar um pouco o lema XII, e provar a partir dele outro teorema: “*Todo paralelogramo inscrito a uma dada elipse, construído a partir de um par de diâmetros conjugados, possuem a mesma área*”.

Consideremos o paralelogramo $XYX'Y'$ da figura acima. Ligue agora o pontos V, P, K' e G para formar o quadrilátero $VPK'G$. Como \overline{PG} e $\overline{VK'}$ formam um par de diâmetros conjugados, eles se bisseccionam em C . Portanto, o quadrilátero $VPK'G$ é um paralelogramo. Vamos mostrar que a área deste paralelogramo $VPK'G$ inscrito à elipse é metade da área do paralelogramo $XYX'Y'$ circunscrito à elipse.

De fato, considere o paralelogramo $VCGX$ pelo caso LLL ($\overline{XV} \cong \overline{CG}$, $\overline{XG} \cong \overline{CV}$ e \overline{VG} comum) temos que $\triangle XVG \cong \triangle CGV$. Logo, eles possuem a mesma área $\triangle XVG = \triangle CGV$. De maneira análoga, só que agora considerando os paralelogramos $YPCV, PX'K'C$ e $CK'Y'G$; provamos que $\triangle YPV = \triangle CVP$, $\triangle PX'K' = \triangle K'CP$ e $\triangle CK'G = \triangle Y'GK'$. Mas,

$$\square XYX'Y'X = \triangle XVG + \triangle CGV + \triangle YPV + \triangle CVP + \triangle PX'K' + \triangle K'CP + \triangle CK'G + \triangle Y'GK' = 2\triangle CGV + 2\triangle CVP + 2\triangle K'CP + 2\triangle Y'GK' = 2(\triangle CGV + \triangle CVP + \triangle K'CP + \triangle Y'GK') = 2\square VPK'G \implies \square VPK'G = \frac{1}{2}\square XYX'Y'X$$

Seja agora um outro paralelogramo $Y'X''Y''X'$ circunscrito a circunferência, e sejam V', P', K'' e G' os pontos de tangência deste paralelogramo à elipse. Façamos o mesmo que anteriormente, ligando os pontos de tangência deste paralelogramo, formando assim um outro paralelogramo $V'P'K''G'$ inscrito a circunferência, do mesmo modo é possível mostrar que $\square Y'X''Y''X' = 2\square V'P'K''G'$. Mas, pelo lema XII; $\square Y'X''Y''X' = \square YX'Y'X$. Porém, como provamos anteriormente $\square YX'Y'X = 2\square VPK'G$, o que implica:

$$2\square VPK'G = \square YX'Y'X = \square Y'X''Y''X' = 2\square V'P'K''G' \implies \square VPK'G = \square V'P'K''G'$$

Portanto, quaisquer paralelogramos inscritos à elipse a partir de dois diâmetros conjugados têm a mesma área, como queríamos demonstrar.

Voltando à figura 4.15, pelo teorema que acabamos de demonstrar, o paralelogramo $VPK'G$ inscrito à elipse possui a mesma área do paralelogramo $BANM$ também inscrito à elipse, construído a partir dos eixos da mesma.

Consideremos os segmentos \overline{PK} e \overline{DG} ambos perpendiculares ao eixo maior da elipse pelos pontos P e G respectivamente (**OBS:** o ponto F não tem nada a ver com o foco da elipse, é simplesmente a intersecção da reta \overleftrightarrow{PK} por P perpendicular, com o eixo maior da elipse).

Formamos assim o retângulo $DPKG$. Esse retângulo tem área aproximadamente igual a do paralelogramo $VPK'G$. Para concluirmos isto, consideremos os diâmetros \overline{DK} e \overline{PG} , que nada mais são que as diagonais do retângulo $DPKG$; e o diâmetro $\overline{VK'}$. Com isso, formamos os triângulos $\triangle GDP$ e $\triangle GVP$. Esses triângulos têm áreas aproximadamente iguais, pois possuem o lado \overline{GP} em comum, e como a tangente \overleftrightarrow{XY} em T é paralela à \overleftrightarrow{GP} e o vértice D está muito próximo dessa tangente, podendo assim considerarmos que D pertence à tangente; então esses dois triângulos $\triangle GDP$ e $\triangle GVP$ possuem a mesma altura relativa ao lado \overline{GP} comum, já que a distância entre retas paralelas, no caso \overleftrightarrow{GP} e \overleftrightarrow{XY} , mantêm-se constante. Portanto, eles possuem aproximadamente a mesma área.

Analogamente provamos que os triângulos $\triangle PKG$ e $\triangle PK'G$ possuem aproximadamente áreas iguais. Com isso,

$$\triangle GDP = \triangle GVP \qquad \triangle PKG = \triangle PK'G$$

Somando essas duas últimas igualdades obtemos:

$$\triangle GDP + \triangle PKG = \triangle GVP + \triangle PK'G \implies \square DPKG = \square VPK'G$$

Logo, $\square VPK'G = \square DPKG$. Mas, mostramos anteriormente que $\square VPK'G = \square BANM$. Portanto, $\square DPKG = \square BANM$, ou seja, a área do retângulo $DPKG$ inscrito à elipse é igual a área do paralelogramo $BANM$ também inscrito à elipse, construído a partir dos eixos da mesma.

Vamos então a partir da igualdade dessas duas áreas, chegar finalmente a proporção que queremos.

$$\square DPKG = \square BANM$$

Mas,

$$\square DPKG = 8 \cdot A_1$$

$$\square BANM = 4 \cdot A_2$$

e

$$A_1 = \frac{PO \cdot CO}{2}; \quad A_2 = \frac{BC \cdot AC}{2}; \quad \widehat{PCK} = \theta$$

Assim,

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{PO}{PC} \Rightarrow PO = PC \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right); \quad \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{CO}{PC} \Rightarrow CO = PC \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$A_1 = \frac{PO \cdot CO}{2} = \frac{\left[PC \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \left[PC \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]}{2} = \frac{PC^2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2}$$

Porém,

$$\text{sen}\left[\left(\frac{\theta}{2}\right) + \left(\frac{\theta}{2}\right)\right] = \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

↓

$$\text{sen}\left[\left(\frac{\theta}{2}\right) + \left(\frac{\theta}{2}\right)\right] = \text{sen}(\theta) = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Logo,

$$A_1 = \frac{PC^2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2} = \frac{2 \cdot PC^2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{4} = \frac{PC^2 \cdot \text{sen}(\theta)}{4}$$

Temos que o triângulo formado pelo segmento \overline{PC} e as retas $\overleftarrow{PK'}$ e \overleftarrow{PK} é aproximadamente isósceles, implicando que o ângulo $\widehat{PCK} = \theta$ seja igual ao ângulo $\widehat{CPK'}$, mas este por sua vez é aproximadamente igual ao ângulo \widehat{CPF} . Com isso, $\widehat{CPF} = \theta$; de modo que $\text{sen}(\widehat{CPF}) = \text{sen}(\theta)$.

Continuando,

$\frac{PC^2 \cdot \text{sen}(\theta)}{4}$; mas $PC = CD$, uma vez que $DPKG$ é um retângulo. E $\text{sen}\widehat{CPF} = \text{sen}\theta = \frac{PF}{PC} \Rightarrow PC \cdot \text{sen}(\theta) = PF$. O que implica que $A_1 = \frac{CD \cdot PF}{4}$.

$$\therefore \square DPKG = \square BANM \Rightarrow 8 \cdot A_1 = 4 \cdot A_2 \Rightarrow 8 \cdot \frac{CD \cdot PF}{4} = 4 \cdot \frac{BC \cdot AC}{2}$$

↓

$$\frac{AC}{PF} = \frac{CD}{BC} \Rightarrow \frac{AC^2}{PF^2} = \frac{CD^2}{BC^2}$$

No entanto, no início desta seção mostramos que $\frac{AC^2}{PF^2} = \frac{Qv^2}{QT^2}$. Portanto,

$$\boxed{\frac{Qv^2}{QT^2} = \frac{CD^2}{BC^2}} \quad (2)$$

OBS: A elipse da figura 4.15 é a mesma elipse da figura 4.13. Na verdade o diâmetro \overline{DK} da elipse da figura 4.13 é na verdade o diâmetro $\overline{VK'}$ da elipse da figura 4.15. E quando concluímos que $PC = CD$, na verdade estamos concluindo que $PC = VC$, pois como V e D estão muito próximos, o semi-diâmetro \overline{CD} é aproximadamente igual ao semi-diâmetro \overline{VC} . A reta tangente à elipse por P , \overleftrightarrow{RZ} , da figura 4.13, é na verdade a reta tangente à elipse também por P , $\overleftrightarrow{YX'}$, da figura 4.15.

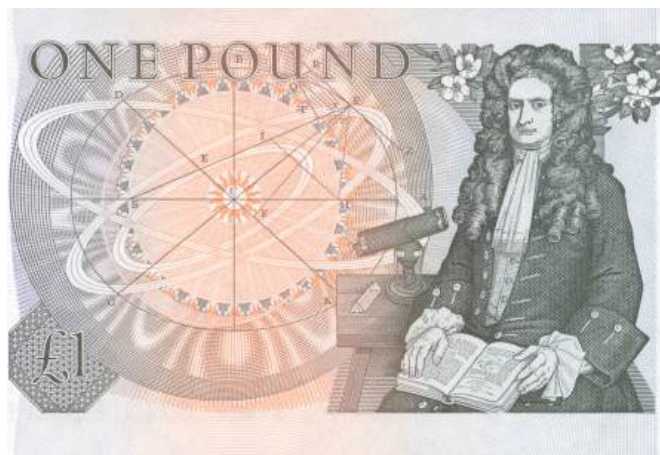
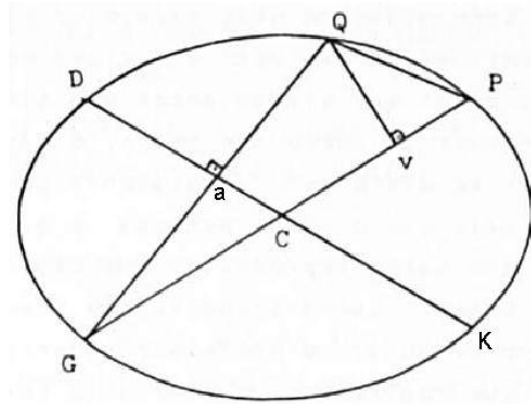


Figura 4.17. Verso da nota de uma libra inglesa.

4.14.4 Terceira Proporção



Quando $Q \rightarrow P$ na figura acima, os triângulos $\triangle QvG$ e $\triangle QvP$ tenderão a se tornar semelhantes. Pois, quando Q se aproxima de P , a perpendicular Qv coincide com a corda \overline{QP} , de modo que o ângulo \widehat{vQP} tenda a zero. O mesmo acontece com a corda \overline{QG} ; quando Q tende a P , esta coincide com o diâmetro GP , o que acarreta também o ângulo \widehat{QGP} tender a zero. Logo, como a soma dos ângulos internos destes dois triângulos é 180 e eles têm cada um, um ângulo reto e no limite outros dois que tendem a zero, temos que o $\widehat{GQv} \cong \widehat{GPQ}$. Temos então, no limite: $\widehat{vQP} \cong \widehat{QGP}$ ou $\widehat{GQv} \cong \widehat{GPQ}$ e $QvP \cong QvG = 90$. Logo, pelo corolário AA de semelhança, no limite $\triangle QvG \sim \triangle QvP$. Ou de uma outra maneira, seja Q a posição de P quando a corda \overline{QG} é perpendicular ao diâmetro \overline{DK} ($m\widehat{DaQ} = 90$), prova-se que quando este fato ocorre, Q e P estão muito próximos, de modo que as retas \overleftrightarrow{QP} e \overleftrightarrow{DK} podem ser consideradas paralelas. Logo, temos duas paralelas \overleftrightarrow{QP} e \overleftrightarrow{DK} cortadas pela transversal \overleftrightarrow{QG} , implicando que $m\widehat{GQP} = 90$, ou seja, o triângulo $\triangle GQP$ é retângulo em Q . Daí de maneira análoga a feita na figura 4.10 da seção ??, conclui-se que $\triangle QvG \sim \triangle QvP$.

OBS: Denotamos por \overline{Qv} a perpendicular ao diâmetro \overline{GP} da figura acima, pois, no limite quando $Q \rightarrow P$ essa perpendicular coincide com a paralela \overline{Qv} à reta \overline{RZ} da figura original 4.13.

Continuando podemos, portanto, montar a seguinte proporção:

$$\frac{Pv}{Qv} = \frac{Qv}{Gv} \implies \frac{Gv \cdot Pv}{Qv^2} = 1$$

$$\text{Mas, } PC = CD \implies PC^2 = CD^2 \implies \frac{PC^2}{CD^2} = 1$$

Logo,

$$\boxed{\frac{Gv \cdot Pv}{Qv^2} = \frac{PC^2}{CD^2}} \quad (3)$$



Figura 4.18. Repare na figura e veja que contém um erro. O Sol está no centro da elipse!

Multiplicando agora, os membros correspondentes das proporções (1), (2) e (3), obteremos:

$$\frac{QR}{Pv} \cdot \frac{Qv^2}{QT^2} \cdot \frac{Gv \cdot Pv}{Qv^2} = \frac{AC}{PC} \cdot \frac{CD^2}{BC^2} \cdot \frac{PC^2}{CD^2}$$

⇓

$$\frac{Pv}{Pv} \cdot \frac{Qv^2}{Qv^2} \cdot \frac{QR \cdot Gv}{QT^2} = \frac{CD^2}{CD^2} \cdot \frac{PC^2}{PC} \cdot \frac{AC}{BC^2}$$

⇓

$$\frac{QR \cdot Gv}{QT^2} = \frac{AC \cdot PC}{BC^2}$$

4.14.5 O Latus Rectum

Considere a figura acima, vamos mostrar que a medida do latus rectum¹³ L da elipse tem medida igual a $2 \frac{BC^2}{AC}$.

Antes provemos a relação fundamental da elipse: $a^2 = b^2 + c^2$.

Temos que o $\triangle HBS$ é isósceles ($\triangle HBC \cong \triangle SBC$, pois $\overline{HC} \cong \overline{SC}$, \overline{BC} comum e $\widehat{HCB} \cong \widehat{SCB}$, o que implica $\widehat{CHB} \cong \widehat{CSB}$ e daí pela recíproca do teorema do triângulo isósceles, $\overline{HB} \cong \overline{SB}$, denotemos por x a medida dos lados congruentes \overline{HB} e \overline{SB} deste triângulo isósceles), mas por definição de elipse: $HB + SB = 2a \Rightarrow$

¹³O latus rectum L de uma dada elipse é uma de suas cordas que é perpendicular ao eixo maior da elipse, passando por um de seus focos. O semi-latus rectum p de uma elipse é o segmento que tem uma de suas extremidades na elipse e outra no foco e é perpendicular ao eixo maior da elipse pelo foco. Prova-se que o semi-latus rectum tem metade da medida do latus rectum $L = 2p$, ou seja, seu ponto médio coincide com o foco.

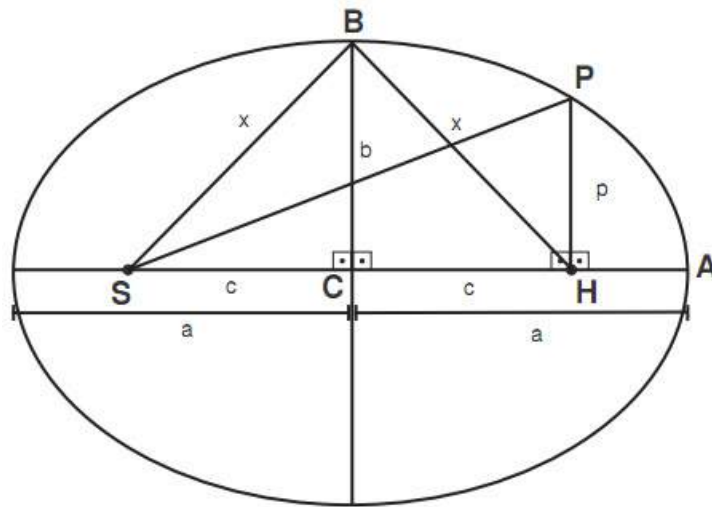


Figura 4.19

$x + x = 2a \Rightarrow 2x = 2a \Rightarrow x = a$. Aplicando pitágoras agora no triângulo retângulo em C $\triangle HCB$, temos: $x^2 = b^2 + c^2$; mas $x = a$, logo: $a^2 = b^2 + c^2$.

Vamos agora provar que $L = 2 \frac{BC^2}{AC}$.

Temos no triângulo retângulo em H , $\triangle PHS$ que,

$$PS^2 = p^2 + (2c)^2$$

Mas, por definição de elipse: $PS + p = 2a \Rightarrow PS = 2a - p$. Substituindo temos,

$$(2a - p)^2 = p^2 + 4c^2 \Rightarrow 4a^2 - 4ap + p^2 = p^2 + 4c^2 \Rightarrow 4a^2 - 4ap = 4c^2 \Rightarrow a^2 - ap = c^2$$

Porém, pela relação fundamental da elipse: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2$. Então substituindo,

$$a^2 - ap = c^2 \Rightarrow a^2 - ap = a^2 - b^2 \Rightarrow -ap = -b^2 \Rightarrow p = \frac{b^2}{a} \Rightarrow p = \frac{BC^2}{AC}$$

Mas, $2p = 2 \frac{BC^2}{AC} \Rightarrow L = 2 \frac{BC^2}{AC}$

Continuando, vamos multiplicar ambos os membros da nossa última igualdade da demonstração da lei do inverso do quadrado da distância por $\left(\frac{L}{Gv}\right)$.

$$\frac{QR \cdot Gv}{QT^2} = \frac{AC \cdot PC}{BC^2} \Rightarrow \left(\frac{L}{Gv}\right) \cdot \frac{QR \cdot Gv}{QT^2} = \left(\frac{L}{Gv}\right) \cdot \frac{AC \cdot PC}{BC^2} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{2BC^2}{AC \cdot Gv}\right) \cdot \frac{QR \cdot Gv}{QT^2} = \left(\frac{2BC^2}{AC \cdot Gv}\right) \cdot \frac{AC \cdot PC}{BC^2} \Rightarrow \left(\frac{2BC^2}{AC}\right) \cdot \frac{QR}{QT^2} = \frac{2PC}{Gv} \Rightarrow$$

$$L \cdot \frac{QR}{QT^2} = \frac{2PC}{Gv} \implies \frac{QR}{QT^2} = \frac{2PC}{Gv} \cdot \frac{1}{L}$$

Aplicando agora o limite temos,

$$\lim_{Q \rightarrow P} \frac{QR}{QT^2} = \frac{1}{L} \times \lim_{Q \rightarrow P} \frac{2PC}{Gv}$$

Novamente, quando $Q \rightarrow P$, $2PC \rightarrow Gv$, de modo que $\lim_{Q \rightarrow P} \frac{2PC}{Gv} = 1$. Logo,

$$\lim_{Q \rightarrow P} \frac{QR}{QT^2} = \frac{1}{L}$$

Voltando a nossa expressão da força,

$$F = \frac{8K_2^2 m}{SP^2} \times \lim_{Q \rightarrow P} \frac{QR}{QT^2}$$

↓

$$F = \frac{8K_2^2 m}{SP^2} \times \frac{1}{L} \implies F = \frac{8K_2^2 m}{L} \times \frac{1}{SP^2}$$

Entretanto, para uma dada elipse, L é constante, o que implica finalmente que “a força central é inversamente proporcional ao quadrado da distância do foco”. Como queríamos demonstrar.

Ou, de modo equivalente, como no limite, $\frac{QR}{QT^2} = \frac{1}{L} \implies QR \cdot L = QT^2$. Então, multiplicando ambos os membros por $\left(\frac{SP^2}{QR}\right)$, obteremos:

$$\left(\frac{SP^2}{QR}\right) \cdot QR \cdot L = \left(\frac{SP^2}{QR}\right) \cdot QT^2$$

↓

$$L \cdot SP^2 = \frac{SP^2 \cdot QT^2}{QR}$$

No entanto, Newton mostrou que para uma dada trajetória curvilínea a força central era inversamente proporcional à $\frac{SP^2 \cdot QT^2}{QR}$; mas na elipse $\frac{SP^2 \cdot QT^2}{QR} = L \cdot SP^2$. Logo, a força central é inversamente proporcional à $L \cdot SP^2$. Como L é constante, então a força central é inversamente proporcional à SP^2 .

Vamos agora fazer de um modo diferente. Suponhamos que não sabemos se L é constante, ou seja, se $2\frac{BC^2}{AC}$ é constante. Então, vamos desenvolver um pouco a expressão da força central, que já tem o *latus rectum*, para vermos o que acontece.

$$F = \frac{8K_2^2 m}{L} \times \frac{1}{SP^2}$$

Porém, $L = 2\frac{BC^2}{AC}$. Logo,

$$F = \frac{8K_2^2 m AC}{2BC^2} \times \frac{1}{SP^2}$$

Mas, se lembrarmos bem a constante K_2 , é a constante de que fala a Segunda Lei de Kepler, ou Lei das Áreas; isto é, a velocidade areolar de um corpo, ou no nosso caso, da Terra em cada instante de sua trajetória elíptica ao redor do Sol, é sempre constante, independentemente qual seja sua órbita. Logo, a velocidade areolar média e a velocidade areolar instantânea se coincidem. Então basta calcularmos a velocidade areolar da Terra em um ponto qualquer de sua órbita, que encontraremos a velocidade areolar instantânea em qualquer outro ponto. No nosso caso, queremos a velocidade areolar instantânea no ponto P .

Para uma volta completa ao redor do Sol, temos que a velocidade areolar média da Terra vale $\left(\frac{\pi ab}{T}\right)$, que nada mais é que a razão da área da elipse pelo período orbital. Portanto, essa também é sua velocidade instantânea em qualquer outro ponto de sua órbita. Ou seja, ela é sempre constante independentemente do ponto escolhido. Então, a velocidade areolar instantânea em P vale $\left(\frac{\pi ab}{T}\right)$.

Substituindo K_2 por $\left(\frac{\pi ab}{T}\right)$ e denotando BC e AC por b e a respectivamente, obteremos:

$$F = \frac{8\left(\frac{\pi ab}{T}\right)^2 ma}{2b^2} \times \frac{1}{SP^2} = \frac{8\pi^2 a^2 b^2 am}{2b^2 T^2} \times \frac{1}{SP^2} = \frac{4\pi^2 a^3 m}{T^2} \times \frac{1}{SP^2}$$

↓

$$F = 4\pi^2 m \times \frac{a^3}{T^2} \times \frac{1}{SP^2}$$

Daí, pela Terceira Lei de Kepler $\frac{a^3}{T^2} = K$.

$$F = 4\pi^2 K m \times \frac{1}{SP^2}$$

□

Newton não só mostrou que se um corpo desenvolvesse uma órbita elíptica com seu centro de forças em um de seus focos, sua força variaria com o inverso do quadrado da distância (problema direto) e vice-versa (problema inverso). Ele analisou também diversos outros tipos de curvas e mostrou como estas variavam dependendo da distância:

<u>Órbita</u>	<u>Centro de forças</u>	<u>Força</u>
Círculo	Centro do círculo	Constante
Círculo	Um ponto qualquer no círculo	$F \propto 1/R^5$
Elipse	Centro da elipse	$F \propto R$
Elipse	Um foco da elipse	$F \propto 1/R^2$
Espiral	Pólo da espiral	$F \propto 1/R^3$

Figura 4.20. Tabela de algumas órbitas com suas respectivas variações de forças. Mostrando como estas variam dependendo de suas distâncias à seus centros de forças. Onde está denotado, por exemplo, $F \propto 1/R$; quer dizer que a “força é proporcional ao inverso do raio”.

Newton mostrou que a gravidade é a energia que impede que objetos como a Terra e os planetas sejam impelidos pela vastidão do espaço.

A gravidade, a força de atração que afeta toda a matéria é o que dá ordem ao Universo. E a gravidade é descrita pela ciência da Física.

As mesmas leis que faziam os planetas girarem em torno do Sol faziam a Lua orbitar a Terra. O grande livro de Newton, princípios matemáticos da filosofia natural revelava que as marés, a velocidade orbital dos planetas e até o formato da Terra podiam ser explicados pela força da gravidade.

Afinal tudo que possui massa exerce uma força de atração mútua sobre outros corpos. A Lua atrai os oceanos, a Terra atrai a Lua, o Sol atrai a Terra e quanto mais próximos estes objetos estiverem mais forte é a atração da gravidade.

Os princípios de Newton são um trabalho genial, tão avançado que quase compensa por um desconcertante fato.

Apesar de Newton ter formulado as leis que governam a gravidade, ele nunca explicou ou tentou entender por que ela funciona. E a gravidade se pensarmos bem é algo muito estranho.

Como a Terra sabe onde o Sol está para orbitá-lo ?

Se o Sol se movesse, o que a Terra faria ?

Isso ele não tentou compreender. Ele não se preocupou com essa questão, pois a lei funcionava.

Apesar dos físicos se esforçarem até hoje para definir a gravidade, Newton deu um grande passo revelando-a ao mundo. Duzentos anos depois Albert Einstein rivalizaria com a genialidade de Newton, não só criando uma nova lei da física mas reinventando o Universo.

4.15 Massa Inercial X Massa Gravitacional

4.15.1 Massa Inercial

No livro I, Newton apresenta suas 3 leis do movimento, onde a 2ª lei é conhecida como lei fundamental da dinâmica:

“A mudança do movimento é proporcional à força motriz impressa, e se faz segundo a linha reta pela qual se imprime essa força”.

A leitura mais comum dessa lei pode ser expressa por uma equação¹⁴ dada por :

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \quad (1)$$

em que $p = mv$ é a quantidade de movimento, que também foi definida por Newton em seu Principia. Se a massa do corpo não variar com o tempo a equação (1) pode ser escrita como¹⁵

$$F = m \frac{\Delta v}{\Delta t} = ma \quad (2)$$

com a sendo a aceleração adquirida pelo corpo e m a sua massa. Nesse momento m é apresentada simplesmente como a massa do corpo e a sua verdadeira natureza é omitida.

Para encontrarmos uma expressão para o peso de um corpo, além de fazermos uma analogia com a equação (2), buscamos também na experiência, que a aceleração de um corpo em queda livre é igual à aceleração da gravidade g , e então escrevemos¹⁶

$$W = mg \quad (3)$$

sendo W o peso do corpo. Mas será que essa analogia com a equação (2) é óbvia? As massas nas equações (2) e (3) são conceitualmente iguais?

Na Definição I do primeiro volume do Principia, Newton escreve:

“A quantidade de matéria é a medida da mesma, oriunda conjuntamente da sua densidade e grandeza”

Logo depois, na Definição III, o conceito dessa massa fica mais claro, pois ele fala justamente da sua propriedade de resistência ao movimento¹⁷;

“A força inata (ínsita) da matéria é um poder de resistir pelo qual cada corpo, enquanto depende dele, persevera em seu estado, seja de descanso, seja de movimento uniforme em linha reta”.

¹⁴Como já dissemos, essa equação não aparece no Principia. Ela foi escrita anos mais tarde por outros filósofos.

¹⁵A 2ª lei nessa forma foi apresentada pela primeira vez em 1747 por Euler em “*Recherches sur le mouvement des corps célestes en général*” e em 1749 foi publicada nas *Mémoires de L’Académie des Sciences de Berlin*.

¹⁶A definição de peso como o produto da massa pela aceleração da gravidade apareceu com o trabalho de Jean Bernoulli, em 1742.

¹⁷Newton ainda se mostra preso à física antiga, pois admite que a inércia seja uma força que seria propriedade do corpo.

Tecendo em seguida os seguintes comentários:

“Essa força é sempre proporcional ao seu corpo, e não difere da inércia da massa senão no nosso modo de conceber. É pela inércia da matéria que todo corpo dificilmente sai de seu estado de descanso ou de movimento... Mas um corpo só exerce essa força quando da mutação de seu estado por outra força impressa em si; e o exercício dessa força pode ser considerado sob duplo aspecto de resistência ou de ímpeto: resistência, enquanto, para conservar o seu estado, o corpo se opõe à força impressa; ímpeto, enquanto o mesmo corpo, dificilmente cedendo à força do obstáculo oposto, esforça-se por mudar o estado deste...”

Continuando então, com a Definição IV:

“A ação impressa é uma ação exercida sobre um corpo para mudar seu estado de repouso ou de movimento uniforme em linha reta”.

Comentando então:

“Esta força consiste somente na ação, nem permanece no corpo depois dela. De fato, um corpo persevera em todo novo estado, apenas pela força de inércia¹⁸...”

Logo, uma leitura mais exata da 2ª lei nos mostra a verdadeira natureza dessa massa. Quando Newton usa o termo *força motriz*, ele se refere a uma força (ação) que atua em um intervalo de tempo pequeno (Definição IV), ou seja, somente para alterar o estado do corpo. Logo, matematicamente a 2ª lei é escrita como¹⁹:

$$F\Delta t = \Delta p = m\Delta v \quad (4)$$

Na verdade a massa m da 2ª lei mede a tendência que o corpo tem para conservar o seu movimento “natural” (retilíneo e uniforme), o que está de acordo com nossa intuição de que quanto mais massivo for o corpo, mais difícil será tirá-lo do repouso, fazê-lo parar ou mudar sua direção de movimento. Por isso, o nome dado de massa inercial.

4.15.2 Massa Gravitacional

Durante algum tempo os pontos relacionados à gravidade estavam obscuros para Newton. Podemos perceber que não é óbvia a analogia entre (2) e (3), pois o peso é uma força que atua em um intervalo de tempo muito grande, ou seja, o peso está sempre atuando no corpo e a 2ª lei não se refere a este tipo de força. Mas como resolver este problema se o peso é uma força ?

O peso é uma força que também depende da massa do corpo, mas nesse caso, a massa não aparece como uma característica do corpo de preservar o seu “movimento natural”, já que um corpo submetido à força peso sempre entrará em movimento (queda livre). Ela aparece como uma reação do corpo à ação gravitacional. A essa massa foi dado o nome de *massa gravitacional*.

Desde a publicação, em 1638, de *Duas Novas Ciências*²⁰ de Galileu Galilei, o

¹⁸O que Newton chama de Força de Inércia é a “a força de resistência ao movimento”, que todo o corpo possui. Não deve-se confundir com Forças Fictícias, que aparecem em referencias acelerados.

¹⁹O enunciado da 2ª lei, matematicamente, é o que hoje chamamos de Impulso.

²⁰Em *Duas Novas Ciências*, Galileu nos descreve um diálogo entre três personagens que discutem situações que derrubam a Física aristotélica. Esse diálogo ocorre em quatro jornadas, onde são discutidos resistência dos corpos sólidos, movimento uniforme e acelerado e movimento de projéteis.

diálogo entre Salviati (personagem que fala por Galileu), Sagredo (homem com mente aberta e inteligente) e Simplicio (o aristotélico) destrói toda uma base aristotélica de pensamento, de que um corpo mais pesado cairia mais rápido que um corpo mais leve.

4.16 Princípio da Equivalência de Newton

Para comparar estas duas noções de massa, consideremos como a gravidade terrestre atua sobre um corpo em repouso situado à superfície da Terra.

Demonstração

Neste caso, R será igual à distância entre o corpo e o centro da Terra e M_g a massa gravitacional da Terra. M_g e R são pois constantes. A força gravitacional F_g que atua sobre o corpo em repouso, é dada por $F_g = G \frac{m_g M_g}{R^2}$; e portanto, proporcional à sua massa gravitacional m_g .

$$F_g = K m_g$$

onde $K = \frac{GM_g}{R^2} = \text{constante}$

Mas, como também a força gravitacional atua constantemente sobre nosso corpo em repouso na superfície da Terra, tentando mudar constantemente este seu estado de repouso, então pela segunda lei de Newton, essa força também é igual a $F_g = m_i g$; onde m_i é a massa de inércia do corpo e g a aceleração devida à gravidade. Já que a todo instante essa massa do corpo atua no sentido de perseverar esse seu estado de repouso sobre a superfície terrestre.

Podemos raciocinar de modo análogo considerando o sistema Terra-Lua da figura 4.10. A força gravitacional exercida pela Terra sobre a Lua é tal que faz com que esta constantemente mude seu estado de movimento retilíneo e uniforme (saia pela tangente); fazendo-a percorrer uma órbita circular. Neste caso, a força gravitacional, pela segunda lei de Newton, é dada por $F_g = m_i g$, onde m_i é a massa inercial, pois de novo essa massa atua no sentido de perseverar o estado “natural” do corpo (Lua), que é o de continuar com seu movimento retilíneo e uniforme; lutando constantemente contra a força gravitacional (sentido negativo da massa).

Entretanto, podemos pensar também que a massa da Lua é responsável pela atração que a Terra exerce sobre esta, isto é, quanto maior a massa da Lua, maior será a atração gravitacional que a Terra exercerá sobre ela. Então, neste caso a massa da Lua já não tem um sentido contrapositivo com a força gravitacional, e sim um sentido positivo, sendo a favor desta. Ela é proporcional a força gravitacional. Portanto, neste caso $F_g = G \frac{m_g M_g}{R^2} = K m_g$, onde m_g é nesse contexto a massa gravitacional.

Logo,

$$K m_g = F_g = m_i g \implies K = \frac{m_i}{m_g} g$$

Se existissem dois corpos para os quais $\frac{m_i}{m_g}$ fossem diferentes, então g também

seria, pois, por exemplo, se a razão $\frac{m_i}{m_g}$ fosse diminuída, como K é constante para os dois corpos, então g teria que ser aumentada e os dois corpos cairiam com acelerações distintas. Porém, é fato experimental que dois corpos adquirem a mesma velocidade ao chegarem ao solo, quando abandonados da mesma altura (célebre experiência realizada por Galileu no cimo da torre de Pisa). E mais ainda, eles caem com a mesma aceleração independentemente de suas massas, isto é, qualquer que seja a massa, esta não interfere na aceleração adquirida pelo corpo. Portanto,

$$K = \frac{m_i}{m_g}g \implies g = K \frac{m_g}{m_i} \implies g = \frac{GM_g m_g}{R^2 m_i}$$

E para que não dependemos das massas na expressão da aceleração g , devemos ter:

$$\frac{m_g}{m_i} = 1 \implies m_g = m_i$$

Ou, para provarmos a igualdade entre as duas razões:

Considere agora um outro corpo na superfície da Terra, tal que sua massa inercial seja m_{i2} e sua massa gravitacional seja m_{g2} . Temos também que:

$$K = \frac{m_{i2}}{m_{g2}}g$$

Igualando,

$$K = K \implies \frac{m_i}{m_g}g = \frac{m_{i2}}{m_{g2}}g \implies \frac{m_i}{m_g} = \frac{m_{i2}}{m_{g2}}$$

□

A lei de atração universal confere pois à força de atração gravitacional uma característica única entre todas as forças conhecidas na Natureza.

De fato, enquanto que uma força qualquer F , quando atua num corpo, comunica-lhe uma aceleração, a , que depende da sua massa m_i :

$$a = \frac{F}{m_i}$$

A força de atração gravitacional, criada por uma massa M_g , comunica a esse corpo uma aceleração que não depende da sua massa:

$$g = \frac{GM_g m_g}{R^2 m_i} = \frac{GM_g}{R^2}$$

já que $m_g = m_i$

Na mecânica newtoniana essa igualdade é simplesmente uma coincidência, não havendo nenhuma explicação para este fato. Newton constatou um fato experimental e, de seguida, elevou-o à categoria de postulado. Mas não deu uma explicação para isso. A natureza nos mostra que existe essa igualdade, pois se isso não fosse verdade, dois corpos abandonados da mesma altura chegariam ao solo em tempos diferentes, logo com velocidades diferentes.

Capítulo 5

Astronomia Clássica e Contemporânea: Grandes Nomes

Como o principal objetivo desta introdução é apenas dar um rápido histórico da evolução cronológica da Astronomia, é impossível enumerar aqui todos os feitos desses ilustres cientistas. Limitaremos apenas em dizer que, como já foi enfatizado, o conjunto dos trabalhos desses pesquisadores constitui o núcleo da Astronomia Clássica.

Da mesma maneira, descrever a Astronomia Clássica e enumerar os cientistas que nela tomaram parte, é outra tarefa inexecutável no momento. Seria necessário um volume inteiro dedicado a essa finalidade, e portanto a parte da Astronomia na era Contemporânea, assim como o final da Idade Moderna serão omitidos. Indicaremos apenas alguns acontecimentos notáveis relacionados com a Astronomia:

- Entre *1672* a *1675*, **Cassini** descobre novos satélites e uma divisão no anel de Saturno.
- Em *1676*, **Roemer** descobre a velocidade da luz, observando as irregularidades periódicas do 1º satélite (Io) de Júpiter.
- Em *1682*, **Halley** prevê o retorno do seu cometa para o ano de *1759*. Em *1718*, ele descobre o movimento próprio de estrelas.
- *1686* foi o ano da publicação da obra “Principia” de **Newton**.
- **Herschel** descobre Urano em *1781*, e o movimento do Sol em direção ao ápex em *1783*.
- *1788* é o ano da publicação do “Tratado da Mecânica Analítica” de **Lagrange**.
- **Laplace** inicia em *1799*, a redação da sua obra “Mecânica Celeste”, e a termina em *1827*.
- **Piazzi** em *1801*, descobre por acaso o primeiro asteróide. De *1804* a *1807*, outros são descobertos por **Olbers**: Ceres, Palas, Juno e Vesta.

- Em 1830 surge a primeira hipótese sobre a existência de um planeta transurânico. Em 1845, **Le Verrier** descobre todas as características desse planeta, e o chama de Netuno. Um ano depois Netuno é observado por **Galle**, precisamente na posição prevista por Le Verrier.
- **Arrhenius** descobre a pressão de radiação solar em 1900. Esse efeito já era citado por Kepler no seu estudo dos cometas (Tratado dos Cometas).
- 1905 é o ano da descoberta da Relatividade Restrita por **Albert Einstein**.
- **Tombaugh** estabelece a existência de um planeta transnetuniano em 1918. Somente em 1950, Plutão é fotografado por **Kuiper**, com o auxílio do telescópio de 5m de Monte Palomar.
- Em 4 de outubro de 1957, é lançado o primeiro satélite artificial pelos russos (Sputnik I). **Youri Gagarin** foi o primeiro homem a orbitar ao redor da Terra num satélite artificial (Vostok I). Isso foi em 12 de abril de 1961.
- Primeiro pouso suave na Lua (Lumik 9) em 1966.
- No dia 20 de julho de 1969, pela primeira vez o homem pisa no solo lunar.

5.1 Albert Einstein e o pensamento mais feliz

Albert Einstein, nascido em 1879 na Alemanha é provavelmente o mais famoso cientista da história, graças ao que ele realizou em Berna na Suíça em 1905.

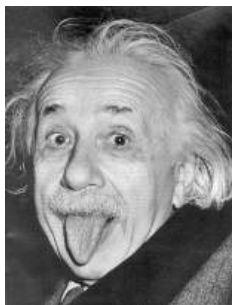


Figura 5.1. Uma das mais famosas fotos de Albert Einstein. Einstein não queria mais ser incomodado pelos fotógrafos da época, e daí pensou em fazer uma careta bem feia para que eles parassem de incomodá-lo. Mal saberia ele que seria uma de suas mais célebres fotografias.

Depois de já ter publicado em 1905 a Teoria da Relatividade Especial (ou Restrita), em 1907, durante a preparação de um artigo sobre a mesma teoria, Albert Einstein perguntou a si mesmo de que modo a Teoria da Gravitação de Newton deveria ser modificada para que suas leis se ajustassem à Relatividade Restrita. Nessa época ele teve o que chamou de “glücklichste gedanke meines lebens” (pensamento mais feliz da minha vida). Suas conclusões foram relatadas anos mais tarde:

“Esta lei... da igualdade da massa inercial e da massa gravitacional foi então percebida por mim com todo o seu significado. Fiquei abismado com sua existência e conjecturei que ela deveria conter a chave para uma compreensão mais profunda da inércia e da gravitação”.

Em 1916, Einstein publica sua teoria da gravitação (Teoria da Relatividade Geral) e uma das bases da sua teoria é justamente a igualdade da massa inercial e da massa gravitacional, que está nas entrelinhas do Princípio da Equivalência:

Num pequeno laboratório em queda livre num campo gravitacional, as leis físicas são as mesmas que num referencial inercial na ausência do campo gravitacional.

Vamos entender melhor estas palavras usando o exemplo que o próprio Einstein usou. O chamado “elevador de Einstein”.

Imagine um homem no interior de um elevador sem ter conhecimento algum do que ocorre no exterior (Fig. 5.2). Leve este elevador para o espaço sideral, com o auxílio de um foguete, longe de qualquer campo gravitacional. O homem ficará flutuando no interior do elevador, pois não há atuação da força peso. Se ele soltar uma bola, ela permanecerá no mesmo lugar em que foi solta, pois do mesmo modo não há força gravitacional atuando.

Agora deixe esse elevador em queda livre num campo gravitacional (Fig. 5.3). O homem e o elevador irão cair juntos. As paredes do elevador não se movem em relação ao homem (pois cai junto com ele). Ou seja, para o homem os experimentos que ele fizer se comportarão da mesma maneira nas duas situações.



Figura 5.2. Desligam-se os motores do foguete de tal forma que agora o elevador desloca-se com movimento uniforme relativamente ao observador de inércia anterior. O observador dentro do elevador larga um corpo e vê esse corpo flutuar, permanecendo em repouso relativamente ao observador.

Outra versão do Princípio da Equivalência pode ser escrita como se segue:

Um referencial acelerado é idêntico a uma referencial em repouso em um campo gravitacional.

Para entender esta nova forma vamos voltar ao exemplo do elevador.

Imagine o mesmo homem no mesmo elevador na superfície de um planeta (Fig. 5.4). O homem deixa cair uma bola no interior do elevador e verifica que ela cai com aceleração da gravidade g . O próprio homem sente a ação do campo, pois seu corpo pressiona o chão do elevador. Agora leve este elevador para o espaço sideral,

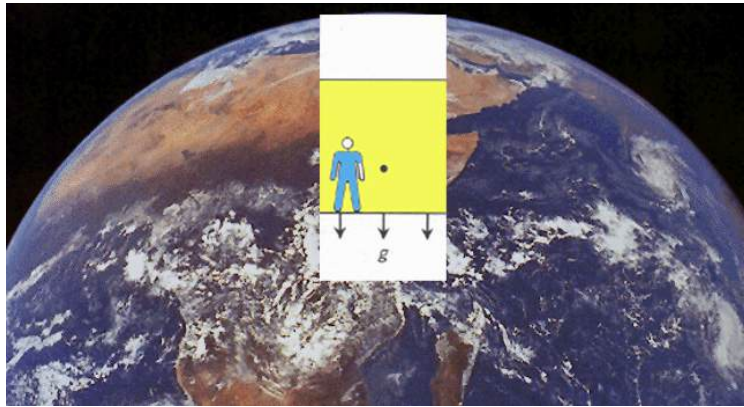


Figura 5.3. O elevador é colocado num poço terrestre e cai livremente em direção ao centro da Terra. O homem dentro do elevador larga um corpo e vê esse corpo flutuar, permanecendo em repouso relativamente a ele próprio.

novamente com a ajuda de um foguete, longe de qualquer ação gravitacional (lembre-se que estamos considerando que o homem não percebe nada). Acelere o elevador para cima com uma aceleração g (Fig. 5.5). Tal aceleração será transmitida para o homem em sentido oposto. O homem solta uma bola e verifica que esta atinge o chão do elevador com aceleração g . Ele mesmo sente seus pés pressionarem o chão do elevador. Logo, tudo se passa como se ele estivesse em um campo gravitacional, ou seja, o homem não consegue distinguir um referencial acelerado de um referencial imerso num campo gravitacional.

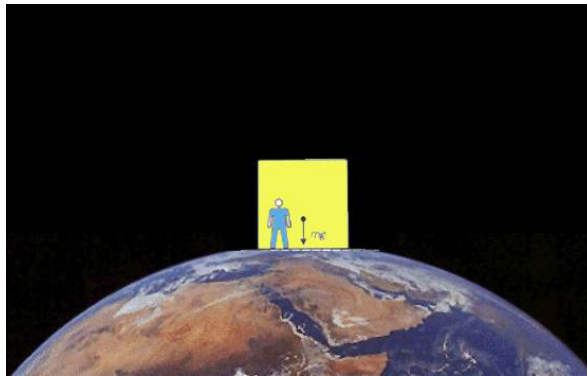


Figura 5.4. O elevador é colocado na superfície da Terra. Ignoram-se os movimentos de rotação e orbital da Terra. O homem dentro do elevador larga um corpo inicialmente em repouso e vê esse corpo cair no chão com aceleração g .

Ou seja, a gravitação e inércia são duas palavras para uma mesma coisa. A natureza da massa dependerá do ponto de vista do observador, daí vem a igualdade da massa gravitacional e da massa inercial.

Considere a segunda experiência do elevador, quando este se encontra no espaço sideral acelerado para cima com aceleração g . Ao soltar a bola ele verifica que esta atinge o chão com aceleração g , ele portanto, pode concluir que está num campo



Figura 5.5. Um elevador é colocado num foguete longe da ação de qualquer campo gravitacional. O foguete é acelerado para a frente com aceleração constante g relativamente a um observador de inércia. O observador dentro do elevador larga um corpo inicialmente em repouso e vê esse corpo cair no chão com aceleração g .

gravitacional e que a força peso da bola atuou fazendo com que ela entrasse em movimento. Logo, para ele a massa da bola será a massa gravitacional. Mas se um observador externo observar o movimento do elevador, verificará que a aceleração g da bola é devido a aceleração adquirida pelo elevador quando submetido à ação de uma força F . Então, para o observador externo a massa da bola, nada mais é, do que a massa inercial.

Mas qual dos dois observadores está correto?

Na verdade os dois estão corretos. A descrição do Universo não dependerá do ponto de vista do observador. As leis físicas devem ser as mesmas em qualquer referencial sem que haja um referencial privilegiado.

Lista de Figuras

- 1.1 Figura por racine.ra.it
- 1.2 Figura por Google Imagens.
- 1.3 Figura por Google Imagens.
- 1.4 Figura por fsc.ufsc.br.
- 1.5 Figura por faccacientifica.org.
- 1.6 Figura por fsc.ufsc.br.
- 1.7 Figura por fsc.ufsc.br.
- 1.8 Figura por faccacientifica.org.
- 1.9 Figura por fsc.ufsc.br.
- 1.10 Figura por oba.org.br.
- 1.11 Figura por faccacientifica.org.
- 1.12 Figura por faccacientifica.org.
- 1.13 Figura por faccacientifica.org.
- 1.14 Figura por oba.org.br.
- 1.15 Figura por astro.iag.usp.br.
- 1.16 Figura por [14].
- 1.17 Figura por zenite.nu.
- 1.18 Figura por oba.org.br.
- 1.19 Figura por oba.org.br.
- 1.20 Figura por zenite.nu.
- 3.1 Figura por oba.org.br.
- 3.2 Figura por oba.org.br.
- 3.3 Figura por oba.org.br.
- 3.4 Figura notas de aula, por Masayoshi Tsuchida.
- 3.5 Figura por astro.iag.usp.br.
- 3.6 Figura por fsc.ufsc.br.
- 3.7 Figura por oba.org.br.
- 3.8 Figura por pt.wikipedia.org.
- 3.9 Figura por oba.org.br.
- 3.10 Figura por oba.org.br.
- 3.11 Figura por [38].
- 3.12 Figura por Google Imagens.
- 3.13 Figura por Google Imagens.
- 3.14 Figura por Google Imagens.
- 3.15 Figura por Google Imagens.
- 3.16 Figura por Google Imagens.
- 3.17 Figura por feiradeciencias.com.br.

- 3.18 Tabela por [16].
- 3.19 Figura por pt.wikipedia.org.
- 3.20 Figura por [15].
- 3.21 Figura por [15], modificada por LUIZ, A. A.
- 3.22 Figura por feiradeciencias.com.br.
- 4.1 Figura por fsc.ufsc.br.
- 4.2 Figura por [15].
- 4.3 Figura por [15].
- 4.4 Figura por [15], modificada por LUIZ, A. A.
- 4.5 Figura por LUIZ, A. A.
- 4.6 Figura por LUIZ, A. A.
- 4.7 Figura por cmup.fc.up.pt.
- 4.8 Figura por ccvalg.pt.
- 4.9 Figura por ccvalg.pt.
- 4.10 Figura por LUIZ, A. A.
- 4.11 Figura por [17], modificada por LUIZ, A. A.
- 4.12 Figura por pt.wikipedia.org.
- 4.13 Figura por [15].
- 4.14 Figura por Google Imagens.
- 4.15 Figura por [4], modificada por LUIZ, A. A.
- 4.16 Figura por LUIZ, A. A.
- 4.17 Figura por Google Imagens.
- 4.18 Figura por Google Imagens.
- 4.19 Figura por LUIZ, A. A.
- 4.20 Tabela por cmup.fc.up.pt.
- 5.1 Figura por Google Imagens.
- 5.2 Figura por cmup.fc.up.pt.
- 5.3 Figura por cmup.fc.up.pt.
- 5.4 Figura por cmup.fc.up.pt.
- 5.5 Figura por cmup.fc.up.pt.

Referências Bibliográficas

- [1] S. O., Kepler; F. O. S., Maria. *Astronomia e Astrofísica*. 2 ed. São Paulo: Livraria da Física, 2004.
- [2] NEWTON, Isaac. *Principia: Princípios Matemáticos de Filosofia Natural - Livro I*. 2 ed. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2002.
- [3] GALILEI, Galileu. O Mensageiro das Estrelas. *Scientific American Brasil*, São Paulo: Duetto Editorial Ltda.
- [4] T. M., Roberto. Philosophiae Naturalis Principia Mathematica: uma proposta didática. *Revista de Ensino de Física*, v. 9, n. 1, out. 1987.
- [5] TSUCHIDA, M. *Notas de Aulas*.
- [6] TAMBELLINI, L. *Introdução à Dinâmica Orbital*. Relatório da FAPESP, 2006.
- [7] POLLARD, H. *Mathematical Introduction to Celestial Mechanics*. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1966.
- [8] MCCUSKEY, V. G. *Introduction to Celestial Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1963.
- [9] BOYER, C. B. *História da Matemática*. 2 ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
- [10] EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Editora da Unicamp, 1995.
- [11] NEVES, M. C. D; ARGÜELLO, A. C. *Astronomia de Régua e Compasso: de Kepler a Ptolomeu*. Campinas: Papirus, 1986.
- [12] VERDET, S. P. *Uma história da Astronomia*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1991.
- [13] Apostila. *13ª Escola de Verão em Dinâmica Orbital e Planetologia*. UNESP Guaratinguetá, 2009.
- [14] M. C. D., Penha; M. S. S., Wilma; T. M. S., Mariana. The Universal Gravity: a text for highschool students. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Rio de Janeiro: Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, v. 26, n. 3, p. 257 - 271, ago. 2004.

- [15] M. C. D., Penha. $F=ma$?!! The birth of the dynamic law. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Rio de Janeiro: Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, v. 28, n. 2, p. 205 - 234, mar. 2005.
- [16] STUDART, N. *Lei dos Corpos em Queda Livre*. São Carlos: Departamento de Física, UFSCar, 2004.
- [17] MACEDO, V. V. Q. *Surpresas Sobre a Lei da Gravitação Universal*. Rio de Janeiro: IM, UFRJ.
- [18] G., Caio; W., Eduardo. *Seções Cônicas*.
- [19] MUKAI, H.; FERNANDES, P. R. G. *Equações da Cinemática*.
- [20] F. J., Olival; M. F., Manoel; L. V., Adriano. *Uma Exposição Didática de como Newton Apresentou a Força Gravitacional*. Bahia: Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia.
- [21] VASCONCELLOS, C. A. Z. *Lista Temática e de Problemas: Momentum Angular Orbital e Momentum Angular Intrínseco na Mecânica Quântica*. Rio Grande do Sul: Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- [22] OLIVEIRA, N. J.; DANTAS, M. J. H. *Uma Introdução à Mecânica Clássica: força central e movimento planetário*. Uberlândia: Famat - UFU - MG, jul. 2005.
- [23] CASTELLANI, O. C. Discussion on the concepts of inertial mass and gravitational mass. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Rio de Janeiro: Departamento de Campos e Partículas, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, v. 23, n. 3, set. 2001.
- [24] <http://www.oba.org.br/cursos/astro/fundamentoshistastro.htm>. Acedido em 15 de Dezembro de 2008.
- [25] http://www.feiradeciencias.com.br/sala04/04_47.asp. Acedido em 15 de Dezembro de 2008.
- [26] http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S1806-11172004000300012&script=sci_arttext. Acedido em 15 de Dezembro de 2008.
- [27] <http://www.zenite.nu>. Acedido em 16 de Dezembro de 2008.
- [28] http://www.ccvalg.pt/astro/historia/isaac_newton.htm. Acedido em 17 de Dezembro de 2008.
- [29] <http://cmup.fc.up.pt/cmup/feynman/index.html>. Acedido em 18 de Dezembro de 2008.
- [30] <http://cmup.fc.up.pt/cmup/relatividade/RG/node5PE2.html>. Acedido em 18 de Dezembro de 2008.

- [31] <http://www.fsc.ufsc.br/pesqpeduzzi/hom-inicio.htm>. Acedido em 20 de Dezembro de 2008.
- [32] <http://www.astro.iag.usp.br/jane/aga215/aula01/cap1.htm>. Acedido em 21 de Dezembro de 2008.
- [33] <http://www.searadaciencia.ufc.br/tintim/fisica/satelites/tintim3.htm>. Acedido em 7 de Janeiro de 2009.
- [34] <http://www.sbfisica.org.br/rbef/edicoes.shtml>. Acedido em 10 de Janeiro de 2009.
- [35] <http://www.faccaocientifica.org/index.php>. Acedido em 10 de Janeiro de 2009.
- [36] <http://www.fsc.ufsc.br/pesqpeduzzi/hom-inicio.htm>. Acedido em 12 de Janeiro de 2009.
- [37] <http://astro.if.ufrgs.br/index.html>. Acedido em 15 de Janeiro de 2009.
- [38] <http://www.uranometrianova.pro.br/astrologia/AA002/4leikepler.htm>. Acedido em 15 de Maio de 2009.
- [39] <http://www.cdcc.usp.br/cda/aprendendo-basico/forcas-de-mares/forcas-de-mares.htm>. Acedido em 06 de Junho de 2009.
- [40] http://www.estv.ipv.pt/dep/demgi/SADE_homepage/Divulga%E7%E3o/SAdeBolso/Set_2002/Cabe%E7a_Lua.asp. Acedido em 06 de Junho de 2009.
- [41] http://www.prof2000.pt/users/danila/pag_galeria_de_fotos/pag_galeria_de_fotos.htm. Acedido em 06 de Junho de 2009.
- [42] <http://www.if.ufrgs.br/ast/solar/portug/solarsys.htm>. Acedido em 09 de Junho de 2009.
- [43] <http://www.if.ufrgs.br/ast/solar/portug/sun.htm>. Acedido em 09 de Junho de 2009.
- [44] <http://www.if.ufrgs.br/ast/solar/portug/mercury.htm>. Acedido em 09 de Junho de 2009.
- [45] <http://www.if.ufrgs.br/ast/solar/portug/venus.htm>. Acedido em 09 de Junho de 2009.
- [46] <http://www.if.ufrgs.br/ast/solar/portug/earth.htm>. Acedido em 09 de Junho de 2009.
- [47] <http://www.if.ufrgs.br/ast/solar/portug/moon.htm>. Acedido em 09 de Junho de 2009.
- [48] <http://www.if.ufrgs.br/ast/solar/portug/mars.htm>. Acedido em 09 de Junho de 2009.

- [49] <http://www.if.ufrgs.br/ast/solar/portug/deimos.htm>. Acedido em 09 de Junho de 2009.
- [50] <http://www.if.ufrgs.br/ast/solar/portug/phobos.htm>. Acedido em 09 de Junho de 2009.
- [51] <http://www.if.ufrgs.br/ast/solar/portug/jupiter.htm>. Acedido em 09 de Junho de 2009.
- [52] <http://www.if.ufrgs.br/ast/solar/portug/io.htm>. Acedido em 09 de Junho de 2009.
- [53] <http://www.if.ufrgs.br/ast/solar/portug/europa.htm>. Acedido em 09 de Junho de 2009.
- [54] <http://www.if.ufrgs.br/ast/solar/portug/ganymede.htm>. Acedido em 09 de Junho de 2009.
- [55] <http://www.if.ufrgs.br/ast/solar/portug/callisto.htm>. Acedido em 09 de Junho de 2009.
- [56] <http://www.if.ufrgs.br/ast/solar/portug/saturn.htm>. Acedido em 09 de Junho de 2009.
- [57] <http://www.if.ufrgs.br/ast/solar/portug/dione.htm>. Acedido em 09 de Junho de 2009.
- [58] <http://www.if.ufrgs.br/ast/solar/portug/uranus.htm>. Acedido em 09 de Junho de 2009.
- [59] <http://www.if.ufrgs.br/ast/solar/portug/neptune.htm>. Acedido em 09 de Junho de 2009.
- [60] <http://www.if.ufrgs.br/ast/solar/portug/pluto.htm>. Acedido em 09 de Junho de 2009.
- [61] <http://www.if.ufrgs.br/ast/solar/portug/asteroid.htm>. Acedido em 09 de Junho de 2009.
- [62] <http://www.if.ufrgs.br/ast/solar/portug/comet.htm>. Acedido em 09 de Junho de 2009.
- [63] <http://www.if.ufrgs.br/ast/solar/portug/meteor.htm>. Acedido em 09 de Junho de 2009.
- [64] <http://www.if.ufrgs.br/ast/solar/portug/history.htm>. Acedido em 09 de Junho de 2009.
- [65] <http://www.constelacoes.hpg.ig.com.br>. Acedido em 09 de Junho de 2009.