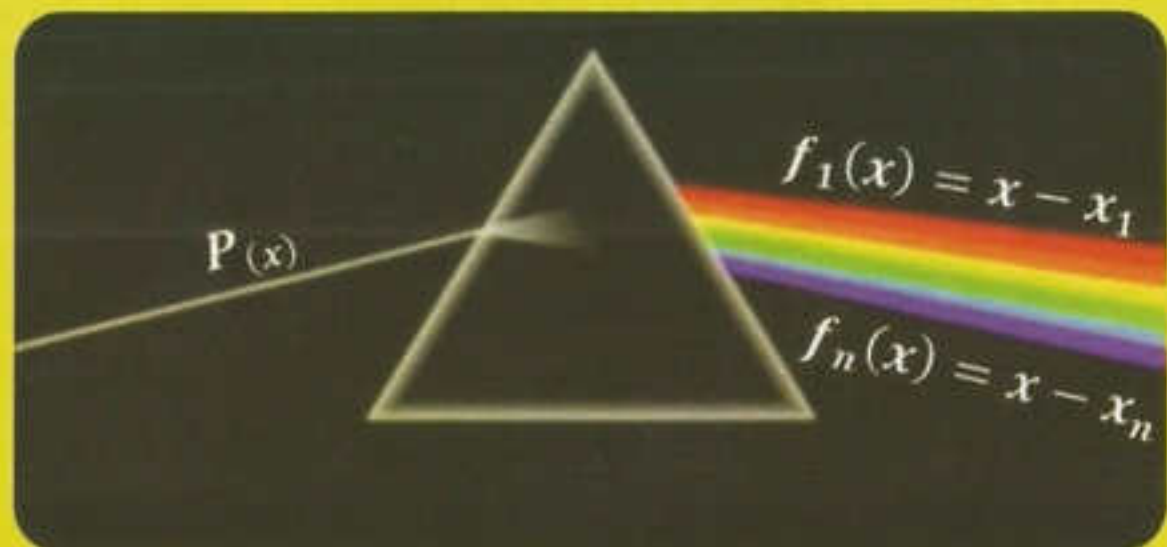


ÁLGEBRA

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS



$$P(x) = (x - x_1)^\alpha (x - x_2)^\beta (x - x_3)^\theta \dots (x - x_n)^\gamma$$

$\bar{x}-14\sqrt{\mathbb{H}\mu\epsilon\vec{r}\tau\alpha s}$

Las Matemáticas son fáciles

twitter.com/calapenshko

Christiam Huertas

Nivel UNI



Factorización de polinomios

Introducción. La factorización es una de las herramientas más empleadas en el trabajo matemático para “transformar” una expresión algebraica de manera conveniente, para resolver algún problema. Pero su real utilidad, vista a través de la historia, es la solución de ecuaciones algebraicas; de hecho, en un primer momento, la factorización surge ante la necesidad de solucionar ecuaciones de segundo grado.

El desarrollo moderno de la factorización se inicia en el Renacimiento Italiano, hacia el año 1545, con la publicación del *Ars Magna* de Girolamo Cardano (1501-1576) en el cual se muestran las soluciones para la ecuación cúbica y cuártica, desarrolladas por Nicolo Fontana Tartaglia (1500-1557), Ludovico Ferrari (1522-1565) y él mismo, obtenidas a partir de un procedimiento sistemático completando el cuadrado, de una manera conveniente, para llegar a la solución. Probablemente esta fue la mayor contribución al álgebra, desde que los babilonios aprendieron a completar el cuadrado para solucionar ecuaciones cuadráticas.



Preliminares

Los conjuntos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, verifican siempre que la suma y el producto de dos elementos del conjunto es otro elemento del conjunto. Además, en ellos existe inverso para la suma (se puede restar) e inverso para el producto (se puede dividir sin salirse del conjunto).

A los conjuntos con este tipo de características se les denomina **cuerpos** o **campos** (a los conjuntos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ se les llama **cuerpos conmutativos** pues el producto es conmutativo: $ab = ba; \forall a, b$).

Nota

De ahora en adelante, $\mathbb{K}$ denotará cualquiera de los conjuntos:

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$

(rationales, reales o complejos)

Polinomio

Se llama polinomio en variable x y con coeficientes en un cuerpo conmutativo $\mathbb{K}$, a toda expresión de la forma

$$P_{(x)} = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

siendo $a_0, a_1, \dots, a_n$ elementos de $\mathbb{K}$.

Al conjunto de todos los polinomios en la variable x con coeficientes en $\mathbb{K}$ lo denotamos por $\mathbb{K}[x]$:

$$\mathbb{K}[x] = \{P_{(x)} = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \mid \forall i, a_i \in \mathbb{K}\}$$

Así:

$$\mathbb{Q}[x] = \{P_{(x)} = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \mid a_i \in \mathbb{Q}\}$$

es el conjunto de los polinomios con coeficientes racionales

$$\mathbb{R}[x] = \{P_{(x)} = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

es el conjunto de los polinomios reales (con coeficientes reales)

$$\mathbb{C}[x] = \{P_{(x)} = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \mid a_i \in \mathbb{C}\}$$

es el conjunto de los polinomios complejos (con coeficientes complejos)

Nota

Como $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, entonces:

$$\mathbb{Q}[x] \subset \mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x]$$

Polinomio definido sobre un conjunto (o campo)

Si un polinomio tiene todos sus coeficientes en el conjunto (o campo) $\mathbb{K}$, se dice que el polinomio está definido sobre $\mathbb{K}$.

Ejemplo

1. El polinomio $P_{(x)} = 5x^2 - 3x + 2$ está definido sobre el conjunto $\mathbb{Z}$, pues todos sus coeficientes: 5; -3 y 2 son enteros.
2. El polinomio $T_{(x,y)} = 7x^2 - \frac{2}{5}xy + \frac{1}{3}y^2$ está definido sobre el campo $\mathbb{Q}$, pues todos sus coeficientes: 7; $-\frac{2}{5}$ y $\frac{1}{3}$ son racionales.

3. El polinomio $S(x) = 3x^2 + \sqrt{2}x - \frac{1}{2}x + \pi$ está definido sobre el campo $\mathbb{R}$, pues todos sus coeficientes: 3 ; $\sqrt{2}$; $-\frac{1}{2}$ y π son reales.
4. El polinomio $R(x) = 2x^3 + ix^2 - \sqrt[3]{4}$ está definido sobre el campo $\mathbb{C}$, pues todos sus coeficientes: 2 ; i y $-\sqrt[3]{4}$ son números complejos.

Factor algebraico

Sean f y P dos polinomios no constantes. Se dice que f es factor algebraico de P , si existe un único polinomio q tal que $P = f \cdot q$; es decir, P es divisible por f .

Ejemplo $f(x) = x - 2$ es factor de $P(x) = x^3 - 8$.

En efecto:

Existe $q(x) = x^2 + 2x + 4$ tal que $P(x) = f(x) \cdot q(x)$.

Es decir,

$$P(x) = x^3 - 8 = \underbrace{(x - 2)}_{f(x)} \underbrace{(x^2 + 2x + 4)}_{q(x)}$$

En consecuencia, $P(x)$ es divisible por $f(x)$.

Ejemplo Respecto al polinomio

$$P(x) = 2(x - 3)(x^2 + 1)(2x + 1)$$

Podemos afirmar lo siguiente:

- $f(x) = x - 3$ es un factor algebraico de $P(x)$.
- $g(x) = x^2 + 1$ es un factor algebraico de $P(x)$.
- $h(x) = 2x + 1$ es un factor algebraico de $P(x)$.
- $k(x) = 2$ no es factor algebraico de $P(x)$, pues $k(x)$ es una constante de grado cero.

Ejemplo Si el polinomio $f(x) = x - c$ es un factor del polinomio

$P(x) = ax^3 - acx^2 + bx + c$, $abc \neq 0$, determine el valor de b .

Resolución

Como $f_{(x)} = x - c$ es un factor de $P_{(x)} = ax^3 - acx^2 + bx + c$, entonces la división $P_{(x)} \div f_{(x)}$ es exacta. Es decir:

$$\frac{ax^3 - acx^2 + bx + c}{x - c} \text{ tiene residuo cero: } R_{(x)} = 0$$

Halleemos el resto aplicando el Teorema del Resto:

i. $x - c = 0$

ii. $x = c$

iii. $R_{(x)} = \underline{D_{(c)}} = 0$

$$ac^3 - acc^2 + bc + c = 0$$

$$ac^3 - ac^3 + bc + c = 0$$

$$bc + c = 0$$

$$bc = -c$$

Cancelamos c : $b = -1$

twitter.com/calapenshko

Polinomio reductible

Un polinomio P de grado $n \geq 2$ es **reductible** sobre un conjunto (o campo) $\mathbb{K}$, si se descompone en la multiplicación de dos o más factores algebraicos (sobre el conjunto o campo $\mathbb{K}$).

Ejemplo El polinomio $P_{(x)} = x^2 - 4$ es reductible sobre $\mathbb{Z}$.

En efecto:

$P_{(x)}$ se descompone así:

$$P_{(x)} = (x + 2)(x - 2)$$

También podemos decir que $P_{(x)}$ es reductible sobre $\mathbb{Q}$, pues $(x + 2)$ y $(x - 2)$ están definidos sobre $\mathbb{Q}$.

Ejemplo El polinomio $T_{(x)} = x^2 - 3$ no es reductible sobre $\mathbb{Z}$ ni sobre $\mathbb{Q}$.

En efecto:

Pese a que $T_{(x)}$ se descompone así:

$$T_{(x)} = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$$

los polinomios $(x + \sqrt{3})$ y $(x - \sqrt{3})$ no están definidos sobre $\mathbb{Z}$ ni sobre $\mathbb{Q}$, pero si lo están sobre $\mathbb{R}$. Luego, podemos decir que el polinomio $T_{(x)} = x^2 - 3$ es reducible sobre $\mathbb{R}$.

Ejemplo

El polinomio $S_{(x)} = x^2 + 1$ no es reducible sobre $\mathbb{Z}$, ni sobre $\mathbb{Q}$, ni sobre $\mathbb{R}$.

En efecto:

Pese a que $S_{(x)}$ se descompone así:

$$S_{(x)} = (x + i)(x - i)$$

los polinomios $(x + i)$ y $(x - i)$ no están definidos sobre $\mathbb{Z}$, ni sobre $\mathbb{Q}$, ni sobre $\mathbb{R}$; pero si lo están sobre $\mathbb{C}$. Luego, podemos decir que el polinomio $S_{(x)} = x^2 + 1$ es reducible sobre $\mathbb{C}$.

Polinomio irreducible

Cuando un polinomio no es reducible sobre un determinado conjunto (o campo), diremos que es irreducible sobre dicho conjunto (o campo).

Ejemplo

1. El polinomio $T_{(x)} = x^2 - 3$ no es reducible sobre $\mathbb{Z}$ (ni sobre $\mathbb{Q}$) entonces es irreducible sobre $\mathbb{Z}$ (y sobre $\mathbb{Q}$).

2. El polinomio $P_{(x)} = x^2 + 1$ es irreducible sobre $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.

Pues no se puede descomponer sobre $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.

En general: Todo polinomio de la forma: $P_{(x)} = x^2 + (\text{positivo})$ es irreducible sobre $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.

3. El polinomio $J_{(x)} = 2x + 1$ es irreducible sobre $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.

Pues no se puede descomponer sobre $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.

Teorema

Todo polinomio de primer grado es irreducible.

En efecto:

Si admitimos que este polinomio puede descomponerse en la multiplicación de al menos dos factores algebraicos (de menor grado), estos tendrán que ser de grado cero, pero el producto de cualesquiera polinomios de grado cero, es de nuevo de grado cero y no de grado uno.

Ejemplo Los polinomios:

$$\blacksquare P(x) = 4x - 7$$

$$\blacksquare Q(x,y) = 5x - 6y + 3$$

$$\blacksquare R(x,y,z) = 8x - 2y + 4z - 5$$

$$\blacksquare S(a,b,c) = 4a + 3b + 2c + 1$$

Son irreducibles por ser de primer grado.

Corolario

Si el polinomio $f(x)$ es irreducible, entonces $k \cdot f(x)$ con $k \neq 0$, también lo es.

Ejemplo A continuación mencionaremos algunos polinomios que son irreducibles sobre $\mathbb{Z}$, sobre $\mathbb{Q}$ y sobre $\mathbb{R}$.

$$\blacksquare P(x) = x^2 + x + 1$$

$$\blacksquare f(x,y) = x^2 + xy + y^2$$

$$\blacksquare Q(x) = x^2 - x + 1$$

$$\blacksquare g(x,y) = x^2 - xy + y^2$$

$$\blacksquare R(x) = x^2 + 1$$

$$\blacksquare h(x,y) = x^2 + y^2 + z^2$$

Son polinomios que aparecen con frecuencia a la hora de factorizar, por eso tenerlo en cuenta.

Polinomio primo

La definición depende del conjunto (o campo) donde se está trabajando.

Polinomio primo sobre $\mathbb{Z}$

Si trabajamos con polinomios sobre $\mathbb{Z}$, diremos que un polinomio irreducible es primo si tiene coeficiente principal positivo y todos sus coeficientes son coprimos (primos entre sí).

Polinomio primo sobre $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$

Si trabajamos con polinomios sobre los campos $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$, diremos que un polinomio irreducible es primo, si este es mónico (coeficiente principal uno).

Ejemplo

1. El polinomio $P_{(x)} = 2x + 1$ irreducible sobre $\mathbb{Z}$ es primo.
2. El polinomio $Q_{(x)} = 4x - 2$ irreducible sobre $\mathbb{Z}$ no es primo, ya que sus coeficientes no son coprimos.
3. El polinomio $R_{(x)} = x^2 + 1$ irreducible sobre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ es primo.

En general, un polinomio de la forma: $P_{(x)} = x^2 + (\text{positivo})$ es primo sobre $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.

4. El polinomio $S_{(x)} = 2x - 1$ irreducible sobre $\mathbb{Q}$ no es primo.
En efecto, $S_{(x)} = 2x - 1$ no es mónico.
5. El polinomio $T_{(x)} = 6 - x$ irreducible sobre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ no es primo.
En efecto, su coeficiente principal no es positivo, mucho menos es un polinomio mónico.

Nótese que el polinomio $S_{(x)} = 2x - 1$ es primo sobre $\mathbb{Z}$ pero no lo es sobre $\mathbb{Q}$.

Factor primo

Sean P y f dos polinomios sobre un conjunto $\mathbb{K}$. Diremos que f es factor primo de P si f es factor algebraico de P y polinomio primo a la vez.

Ejemplo

1. El polinomio $f_{(x)} = x - 2$ definido sobre $\mathbb{Q}$, es factor primo de $P_{(x)} = x^3 - 8$.

En efecto:

$f_{(x)} = x - 2$ es primo, pues es lineal y mónico; además, es factor algebraico de $P_{(x)} = x^3 - 8$.

2. El polinomio $f_{(x)} = 2x + 1$ definido sobre $\mathbb{Z}$, es factor primo de $P_{(x)} = 4x^2 - 1$.

En efecto:

$f_{(x)} = 2x + 1$ es primo, pues es lineal con coeficiente principal positivo y de coeficientes PESI; además, es factor algebraico de $P_{(x)} = 4x^2 - 1$, pues $4x^2 - 1 = (2x + 1)(2x - 1)$.

3. El polinomio $f_{(x)} = x^2 + 1$ definido sobre $\mathbb{R}$, es factor primo de $P_{(x)} = 4(x - 6)(x^2 + 1)$.

En efecto:

$f_{(x)} = x^2 + 1$ es irreducible, mónico y factor algebraico de $P_{(x)}$.

Factorización

Factorizar un polinomio sobre un conjunto (o campo) $\mathbb{K}$ es descomponerlo en la multiplicación indicada de sus factores primos (o potencias de estos).

Es decir, si $P_{(x)}$ es un polinomio definido sobre $\mathbb{K}$, su factorización debe tener la forma:

$$P_{(x)} = a \left(\begin{smallmatrix} \text{primo} \\ \text{sobre } \mathbb{K} \end{smallmatrix} \right)^m \cdot \left(\begin{smallmatrix} \text{primo} \\ \text{sobre } \mathbb{K} \end{smallmatrix} \right)^n \cdot \dots \cdot \left(\begin{smallmatrix} \text{primo} \\ \text{sobre } \mathbb{K} \end{smallmatrix} \right)^t$$

Ejemplo

- El polinomio $P_{(x)} = 5 \underbrace{(2x + 1)}_{\text{primo}} \underbrace{(x^2 + 1)}_{\text{primo}}$ esta factorizado sobre $\mathbb{Z}$. Tiene 2 factores primos (uno lineal y uno cuadrático).
- El polinomio $T_{(x)} = 3 \underbrace{(x + 4)^2}_{\text{primo}} \underbrace{(x - 2)^3}_{\text{primo}} \underbrace{(x^2 + x + 1)}_{\text{primo}}$ esta factorizado sobre $\mathbb{Z}$ y sobre $\mathbb{Q}$. Tiene 3 factores primos (dos lineales y uno cuadrático).
- El polinomio $A_{(x)} = -2 \underbrace{(x + 1)}_{\text{primo}} \underbrace{(x + \sqrt{3})}_{\text{primo}} \underbrace{(x - \sqrt{3})}_{\text{primo}}$ esta factorizado sobre $\mathbb{R}$. Tiene 3 factores primos (los tres son lineales).

4. El polinomio $B(x) = \sqrt{5} \underbrace{(x + \sqrt{2})}_{\text{primo}} \underbrace{(x + i)}_{\text{primo}} \underbrace{(x - i)}_{\text{primo}}$ esta factorizado sobre $\mathbb{C}$. Tiene 3 factores primos (los tres son lineales).

Conteo de factores primos

La cantidad de factores primos de un polinomio factorizado se obtiene contando los factores primos que se encuentran como base de una potencia y que contenga al menos una variable del polinomio.

Ejemplo

1. El polinomio

$$P(x) = 3(x + 1)^2(x^2 + 1)(2x - 1)^3$$

esta factorizado sobre $\mathbb{Z}$ y tiene 3 factores primos:

$$x + 1, \quad x^2 + 1 \quad \text{y} \quad 2x - 1$$

(dos lineales y uno cuadrático)

2. El polinomio

$$Q(x) = 5(a^2 + 1)x^3 \left(x + \frac{1}{2}\right) (x + a)^3 (x^2 + x + 1)$$

esta factorizado sobre $\mathbb{Q}$ y tiene 4 factores primos:

$$x, \quad x + \frac{1}{2}, \quad x + a \quad \text{y} \quad x^2 + x + 1$$

(tres lineales y uno cuadrático)

3. El polinomio

$$R(x, y) = -3(x^2 + y^2)(x + 2y)^3(x - \sqrt{5})^2(x^2 - xy + y^2)$$

esta factorizado sobre $\mathbb{R}$ y tiene 4 factores primos:

$$x^2 + y^2, \quad x + 2y, \quad x - \sqrt{5} \quad \text{y} \quad x^2 - xy + y^2$$

(dos lineales y dos cuadráticos)

4. El polinomio

$$S(x) = 7(x - \sqrt{2})^3(x + i)^2(x - i)^2(x^2 - x + 1)^3(x + 2)^4$$

esta factorizado sobre $\mathbb{C}$ y tiene 5 factores primos:

$$x - \sqrt{2}, \quad x + i, \quad x - i, \quad x^2 - x + 1 \quad \text{y} \quad x + 2$$

(cuatro lineales y uno cuadrático)

Conteo de factores algebraicos

La cantidad de factores algebraicos de un polinomio se obtiene de la siguiente manera.

Dado el polinomio factorizado:

$$P(x) = a(P_1(x))^\alpha (P_2(x))^\beta (P_3(x))^\theta \cdots (P_n(x))^\gamma$$

es decir: $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, ..., $P_n(x)$ son polinomios primos diferentes. Entonces:

$$\text{Nº de factores algebraicos} = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\theta + 1) \cdots (\gamma + 1) - 1$$

de los cuales n son factores primos.

Ejemplo En el polinomio factorizado:

$$P(x) = 7(x+1)^2(x^2+1)(2x-1)^3$$

$$\begin{aligned}\text{Nº de factores algebraicos} &= (2+1)(1+1)(3+1) - 1 \\ &= (3)(2)(4) - 1 \\ &= 23\end{aligned}$$

de los cuales 3 son factores primos.

Ejemplo En el polinomio factorizado:

$$S(x) = 7(x-\sqrt{2})^3(x+i)^2(x-i)^2(x^2-x+1)^3(x+2)^4$$

$$\begin{aligned}\text{Nº de fact. algebraicos} &= (3+1)(2+1)(2+1)(3+1)(4+1) - 1 \\ &= (4)(3)(3)(4) - 1 \\ &= 143\end{aligned}$$

de los cuales 5 son factores primos.

Métodos para factorizar polinomios

Existen diversos métodos para factorizar polinomios. A continuación veremos los métodos más utilizados.

Método del factor común

1

Se aplica en polinomios donde todos sus términos tienen una o más variables y/o constantes comunes, que en cada término están como factores.

Ejemplo

En el polinomio $P_{(x,y)} = 8x^2y + 4xy^2 - 12xy$, se observa que sus tres términos tienen en común a las variables x e y (las cuales se deben extraer con su menor exponente) y la constante 4. Es decir,

$$\begin{aligned}
 P_{(x,y)} &= 8x^2y + 4xy^2 - 12xy \\
 &= 4xy(2x + y - 3)
 \end{aligned}$$

con lo cual el polinomio está factorizado sobre $\mathbb{Z}$, (tiene 3 factores primos lineales). Note que 4 es una constante.

Ejemplo

Factorice el polinomio $T_{(x)} = x^5 + x^3$.

Resolución

Extraemos x^3 (que es el factor común de ambos términos):

$$\begin{aligned}
 &= x^3(x^2 + 1)
 \end{aligned}$$

Luego, el polinomio $T_{(x)}$ tiene 2 factores primos (uno lineal y uno cuadrático)

Ejemplo

Factorice el siguiente polinomio.

$$Q_{(x,y)} = 2xy(3y - 1) + y(1 - 3y) + 5(3y - 1)$$

Resolución

Acomodamos convenientemente el 2do término:

$$Q_{(x,y)} = 2x(3y - 1) - y(3y - 1) + 5(3y - 1)$$

Extraemos el factor común $(3y - 1)$:

$$\begin{aligned}
 Q_{(x,y)} &= (3y - 1)(2x - y + 5)
 \end{aligned}$$

Luego, el polinomio $Q_{(x,y)}$ tiene 2 factores primos (ambos lineales).

2

Método de agrupación

Se aplica cuando todos los términos de un polinomio no tienen factor común, entonces agrupamos convenientemente aquellos que si lo tienen para extraer el factor común.

Ejemplo En el polinomio $P_{(x,y)} = 5x^2 + 5x - 3xy - 3y$, agrupamos convenientemente de dos en dos:

$$\begin{aligned} P_{(x,y)} &= \underline{5x^2 + 5x} - \underline{3xy - 3y} \\ &= 5x(x + 1) - 3y(x + 1) \end{aligned}$$

Extraemos el factor común $(x + 1)$:

$$= (x + 1)(5x - 3y)$$

con lo cual el polinomio está factorizado en $\mathbb{Z}$, (tiene dos factores primos lineales).

Ejemplo Factorice el polinomio $T_{(x)} = x^3 - x^2 - 16x + 16$.

Resolución

Agrupamos convenientemente de dos en dos:

$$\begin{aligned} T_{(x)} &= \underline{x^3 - x^2} - \underline{16x + 16} \\ &= x^2(x - 1) - 16(x - 1) \end{aligned}$$

Extraemos el factor común $(x - 1)$:

$$\begin{aligned} &= (x - 1)(x^2 - 16) \\ &= \underbrace{(x - 1)}_{\text{primo}} \underbrace{(x + 4)}_{\text{primo}} \underbrace{(x - 4)}_{\text{primo}} \end{aligned}$$

Diferencia de cuadrados

Luego, el polinomio tiene 3 factores primos lineales.

Ejemplo ¿Cuántos factores primos lineales tiene el siguiente polinomio?

$$T_{(x,y)} = a^5b^3c^3 + a^4b^4c^3 + a^4b^3c^4 + a^3b^4c^4$$

Resolución

Extraemos el factor común $a^3b^3c^3$:

$$\begin{aligned} T_{(x,y)} &= a^3b^3c^3 (\underline{a^2 + ab} + \underline{ac + bc}) \\ T_{(x,y)} &= a^3b^3c^3 (a(a + b) + c(a + b)) \end{aligned}$$

Resolución

Extraemos el factor común $(a + b)$:

$$T_{(x,y)} = a^3 b^3 c^3 (a + b)(a + c)$$

Luego, el polinomio tiene 5 factores primos lineales.

Ejemplo

Factorice el polinomio $Q(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

Resolución

Agrupamos convenientemente de dos en dos:

$$Q(x) = (x^5 + x^4 + x^3) + (x^2 + x + 1)$$

$$Q(x) = x^3(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$$

Extraemos el factor común $(x^2 + x + 1)$:

$$Q(x) = (x^2 + x + 1)(x^3 + 1)$$

Suma de cubos

$$Q(x) = \underbrace{(x^2 + x + 1)}_{\text{primo}} \underbrace{(x + 1)}_{\text{primo}} \underbrace{(x^2 - x + 1)}_{\text{primo}}$$

Luego, el polinomio tiene 3 factores primos (1 lineal y 2 cuadráticos).

3

Método de las identidades

Usaremos las identidades de los productos notables para factorizar polinomios.

Recuerde que:

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Ejemplo

En el polinomio $P(x) = 9x^2 - 1$ se observa una diferencia de cuadrados; es decir,

$$P(x) = 9x^2 - 1$$

Damos forma:

$$= (3x)^2 - 1^2$$

$$= \underbrace{(3x + 1)}_{\text{primo}} \underbrace{(3x - 1)}_{\text{primo}}$$

con lo cual $P(x)$ queda factorizado sobre $\mathbb{Z}$, (tiene dos factores primos lineales).

Ejemplo En el polinomio $P_{(x)} = x^3 - 8$ se observa una diferencia de cubos; es decir,

$$P_{(x)} = x^3 - 8$$

Damos forma:

$$= x^3 - 2^3$$

$$= \underbrace{(x - 2)}_{\text{primo}} \underbrace{(x^2 + 2x + 4)}_{\text{primo}}$$

con lo cual $P_{(x)}$ queda factorizado sobre $\mathbb{Z}$ y sobre $\mathbb{Q}$.

(Tiene dos factores primos: uno lineal y uno cuadrático).

Ejemplo Factorice el polinomio $R_{(x)} = x^4 + x^2 + 1$

Resolución

Aplicamos la identidad de Argand:

$$R_{(x)} = x^4 + x^2 + 1$$

$$R_{(x)} = \underbrace{(x^2 + x + 1)}_{\substack{\text{primo} \\ \text{cuadrático}}} \underbrace{(x^2 - x + 1)}_{\substack{\text{primo} \\ \text{cuadrático}}}$$

Luego, el polinomio tiene 2 factores primos (ambos cuadráticos).

Ejemplo Factorice el polinomio $Q_{(x,y)} = 4x^2 + 4xy + y^2 - 9$

Resolución

Agrupamos términos convenientemente:

$$Q_{(x,y)} = \underbrace{(4x^2 + 4xy + y^2)}_{\substack{\text{trinomio cuadrado} \\ \text{perfecto}}} - 9$$

$$\text{Diferencia de cuadrados: } = (2x + y)^2 - 3^2$$

$$= \underbrace{(2x + y + 3)}_{\text{primo}} \underbrace{(2x + y - 3)}_{\text{primo}}$$

con lo cual $Q_{(x,y)}$ queda factorizado sobre $\mathbb{Z}$, (tiene dos factores primos lineales).

Ejemplo ¿Cuántos factores primos lineales tiene el siguiente polinomio?

$$S_{(x,y)} = (x^2 + y^2 - 1)^2 - 4x^2y^2$$

Acomodamos convenientemente el 2do término:

$$S_{(x,y)} = (x^2 + y^2 - 1)^2 - (2xy)^2$$

Por diferencia de cuadrados:

$$S_{(x,y)} = (x^2 + y^2 - 1 + 2xy)(x^2 + y^2 - 1 - 2xy)$$

Agrupamos convenientemente en cada paréntesis:

$$S_{(x,y)} = \underbrace{\left((x^2 + 2xy + y^2) - 1 \right)}_{\substack{\text{trinomio cuadrado} \\ \text{perfecto}}} \underbrace{\left((x^2 - 2xy + y^2) - 1 \right)}_{\substack{\text{trinomio cuadrado} \\ \text{perfecto}}}$$

$$S_{(x,y)} = ((x + y)^2 - 1^2)((x - y)^2 - 1^2)$$

Nuevamente diferencia de cuadrados en cada paréntesis:

$$S_{(x,y)} = \underbrace{(x + y + 1)}_{\text{primo}} \underbrace{(x + y - 1)}_{\text{primo}} \underbrace{(x - y + 1)}_{\text{primo}} \underbrace{(x - y - 1)}_{\text{primo}}$$

Luego, el polinomio tiene 4 factores primos lineales.

Método de aspas

4

Son métodos particulares; es decir, se utilizan solo para polinomios con ciertas características. Veremos:

- Método de aspa simple.
- Método de aspa doble.
- Método de aspa doble especial.

Método de aspa simple

a

Se aplica para factorizar polinomios de la forma:

$$P_{(x)} = ax^{2n} + bx^n + c$$

$$\text{ó } P_{(x,y)} = ax^{2m} + bx^m y^n + cy^{2n}$$

con $abc \neq 0$.

Procedimiento:

1. Se descompone adecuadamente los términos extremos del trinomio en una multiplicación indicada de factores.
2. Esta descomposición debe ser hecha de tal manera que la suma de los productos en aspa sea igual al término central del trinomio.

3. Una vez hecha la prueba del aspa anterior, el trinomio es expresado como la multiplicación indicada de factores que se toman en forma horizontal.

Ejemplo

En el polinomio $P(x) = 6x^2 + 5x - 6$

$$\begin{array}{rcl} 3x & \nearrow & -2 = -4x \\ 2x & \searrow & 3 = \frac{9x}{5x} \end{array} \quad \begin{array}{l} + \\ - \end{array}$$

Luego, $P(x) = (3x - 2)(2x + 3)$. Tiene 2 factores primos lineales.

Ejemplo

En el polinomio $S(x,y) = 12x^2 - 25xy + 12y^2$

$$\begin{array}{rcl} 4x & \nearrow & -3y = -9xy \\ 3x & \searrow & -4y = -16xy \end{array} \quad \begin{array}{l} + \\ - \end{array}$$

$$\frac{-25xy}{-25xy}$$

Luego, $S(x,y) = (4x - 3y)(3x - 4y)$. (Tiene dos factores primos)

Ejemplo

Factorice el polinomio $U(x) = (x - 1)^4 - 3x(x - 2) - 1$

Resolución

Acomodamos convenientemente los términos:

$$U(x) = ((x - 1)^2)^2 - 3(x^2 - 2x) - 1$$

$$U(x) = (x^2 - 2x + 1)^2 - 3(x^2 - 2x) - 1$$

$$U(x) = (x^2 - 2x + 1)^2 - 3(x^2 - 2x + 1) + 2$$

$$\begin{array}{rcl} (x^2 - 2x + 1) & \nearrow & -1 \\ (x^2 - 2x + 1) & \searrow & -2 \end{array}$$

Es decir, $U(x) = (x^2 - 2x + 1 - 1)(x^2 - 2x + 1 - 2)$

$$U(x) = (x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 1)$$

$$U(x) = x(x - 2)(x^2 - 2x - 1)$$

Luego, $U(x)$ tiene 3 factores primos (2 lineales y 1 cuadrático).

Ejemplo

Factorice el polinomio $F(x) = x^5 + x^4 + 2x^2 - 1$.

El polinomio $F(x)$ no tiene la forma para aplicar el aspa simple pero,

acomodando convenientemente acepta ser factorizado:

$$F(x) = x^5 + x^4 + x^2 + (x^2 - 1)$$

$$F(x) = x^5 + \boxed{x^4 + x^2} + (x+1)(x-1)$$

$$\begin{array}{rcl} x^3 & \nearrow & (x+1) = x^3 + x^2 \quad + \\ x^2 & \searrow & (x-1) = \boxed{x^4 - x^3} \quad \downarrow \\ & & \boxed{x^4 + x^2} \end{array}$$

$$\text{Luego, } F(x) = \underbrace{(x^3 + x + 1)}_{\text{primo cúbico}} \underbrace{(x^2 + x - 1)}_{\text{primo cuadrático}}$$

Es decir, el polinomio tiene 2 factores primos (uno cúbico y uno cuadrático).

Nota. Más adelante (página 28) se muestra cual es la condición para que un polinomio de grado 3 sea primo.

Método de aspa doble

Se aplica para factorizar polinomios en dos variables y de seis términos, que presentan la forma:

$$P(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

Procedimiento:

b

1. Adecuamos el polinomio a la forma general; en caso faltase algún término se colocan ceros por cada término que falte.
2. Se aplica aspa simple a los tres primeros términos, también a los términos 3°, 5° y 6°.
3. Se aplica otro aspa simple (de verificación) a los términos 1°, 4° y 6°.
4. Una vez hecho estos procedimientos, el polinomio es expresado como la multiplicación indicada de factores que se toman en forma horizontal.

Ejemplo

En el polinomio

$$P(x,y) = 3x^2 - 10xy + 8y^2 - 14x + 22y + 15$$

$$\begin{array}{rcl} 3x & \nearrow & -4y & \nearrow & -5 \\ x & \searrow & -2y & \searrow & -3 \end{array}$$

Luego, $P_{(x,y)} = \underbrace{(3x - 4y - 5)}_{\text{primo}} \underbrace{(x - 2y - 3)}_{\text{primo}}$

Ejemplo Factorice el polinomio $Q_{(x,y)} = x^2 + 4xy + 3y^2 + x + 7y - 6$.

Resolución

Aplicamos el método de aspa doble:

$$Q_{(x,y)} = x^2 + 4xy + 3y^2 + x + 7y - 6$$

Luego, $Q_{(x,y)} = \underbrace{(x + 3y - 2)}_{\text{primo}} \underbrace{(x + y + 3)}_{\text{primo}}$.

Ejemplo Dado el esquema de aspa doble:

$$T_{(x,y)} = 3x^2 + 11xy + 6y^2 + ex + 21y + d$$

Determine el valor de $a + b + c + d + e$.

Resolución

1er aspa simple:

$$ab = 3 \quad y \quad 2a = 6 \quad y \quad a^2 + 2b = 11$$

$$a = 3, \text{ entonces } b = 1$$

2do aspa simple:

$$ca^2 = d \quad y \quad 2a^2 + ac = 21$$

$$18 + 3c = 21$$

$$c = 1, \text{ entonces } d = 9$$

3er aspa simple:

$$a^3 + bc = e$$

$$27 + 1 = e$$

$$28 = e$$

Por lo tanto, $a + b + c + d + e = 42$.

Método de aspa doble especial

Se utiliza para factorizar polinomios de cinco términos y generalmente de una variable, que presentan la forma:

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

Procedimiento:

C

1. Adecuamos el polinomio a la forma general, en caso faltase algún término se colocan ceros por cada término que falte.
2. Se descomponen convenientemente los términos extremos, se multiplica en aspa y se suman los productos obtenidos.
3. Se compara el resultado anterior con el término central del polinomio y lo que falta para que sea igual a este, es la expresión a descomponer en las partes centrales de los nuevos factores.
4. Se deben verificar un aspa simple en cada lado. Los factores se toma en forma horizontal; y si estos no son primos, se factorizan por aspa simple.

Ejemplo

En el polinomio

$$P(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 - x - 6$$

Se debe tener (SDT): $3x^2$ —

Se tiene (ST): x^2 ↓

Falta (F): $2x^2$

Se descompone

Luego,

$$P(x) = (x^2 + x - 2)(x^2 + 2x + 3)$$

Es decir, $P(x) = \underbrace{(x + 2)}_{\text{primo}} \underbrace{(x - 1)}_{\text{primo}} \underbrace{(x^2 + 2x + 3)}_{\text{primo}}$.

Ejemplo

Factorice el polinomio $G(x) = 6x^4 - x^3 - 13x^2 - 2x + 8$.

Resolución

Aplicamos aspa doble especial:

$$G(x) = 6x^4 - x^3 + 13x^2 - 2x + 8$$

Se debe tener (SDT): $13x^2 \mid -$ Se tiene (ST): $14x^2 \downarrow$ Falta (F): $-x^2$

Se descompone

$$\text{Luego, } G(x) = \underbrace{(3x^2 + x + 4)}_{\text{primo}} \underbrace{(2x^2 - x + 2)}_{\text{primo}}.$$

Ejemplo

Que relación debe existir entre m y n para que el polinomio

$P(x) = mx^4 + (n + 3m)x^3 + (2 + m + 3n)x^2 + (n + 6)x + 2$
 presente un solo factor primo lineal.

Resolución

Lo factorizamos por aspa doble especial:

$$P(x) = mx^4 + (n + 3m)x^3 + (2 + m + 3n)x^2 + (n + 6)x + 2$$

SDT: $(2 + m + 3n)x^2 \mid -$ ST: $(m + 2)x^2 \downarrow$

Falta:

$$3nx^2$$

Se descompone

$$\text{Luego, } P(x) = (mx^2 + nx + 2) \underbrace{(x^2 + 3x + 1)}_{\text{primo cuadrático}}$$

Como el polinomio $P(x)$ debe tener un solo factor primo lineal, entonces el factor $(mx^2 + nx + 2)$ debe ser un trinomio cuadrado perfecto. Es decir su discriminante debe ser cero:

$$\Delta = 0$$

$$n^2 - 4m(2) = 0$$

$$n^2 = 8m$$

Por lo tanto, la relación entre m y n es: $n^2 = 8m$.

Método de los divisores binómicos

5

Este método se utiliza para factorizar polinomios de grado $n \geq 3$, generalmente de una variable y que admitan factores lineales.

Antes de aplicar este método, veamos algunos conceptos previos.

Raíz de un polinomio

Sea $P_{(x)}$ un polinomio de grado $n \geq 1$. El número α es raíz de $P_{(x)}$ (o un **cero del polinomio** $P_{(x)}$) si y solo si $P_{(\alpha)} = 0$.

Ejemplo Para el polinomio $P_{(x)} = x - 3$, se observa que $P_{(3)} = 0$, entonces 3 es raíz del polinomio $P_{(x)}$.

Ejemplo Para el polinomio $P_{(x)} = x^2 - 3x + 2$, se observa que:

$$P_{(1)} = 0 \quad \text{y} \quad P_{(2)} = 0$$

entonces 1 y 2 son raíces (o ceros) del polinomio $P_{(x)}$.

Teorema

Sea $P_{(x)} = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$; $a_0a_n \neq 0$ un polinomio sobre $\mathbb{Z}$. Si $\frac{p}{q}$ es un número racional (con p y q PESI) que es una raíz de $P_{(x)}$, entonces p es un divisor entero de a_n y q es un divisor entero de a_0 .

En la práctica, lo que más se utiliza es el siguiente corolario.

Corolario (Posibles raíces racionales: PRR)

Las **posibles raíces racionales (PRR)** del polinomio

$$P_{(x)} = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \quad \text{con} \quad a_0a_n \neq 0$$

con coeficientes enteros están dadas por:

$$\text{PRR} = \pm \left\{ \frac{\text{divisores de } |a_n|}{\text{divisores de } |a_0|} \right\}$$

Ejemplo Para el polinomio $P(x) = 2x^5 - x^4 - x^3 + 3x^2 - 8x + 4$ se tiene:

$$PRR = \pm \left\{ \frac{\text{divisores de 4}}{\text{divisores de 2}} \right\} = \pm \left\{ \frac{1; 2; 4}{1; 2} \right\} = \pm \left\{ 1; \frac{1}{2}; 2; 4 \right\}$$

Es decir,

$$PRR = \left\{ 1; -1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 2; -2; 4; -4 \right\}$$

Luego, si el polinomio $P(x)$ tiene alguna raíz racional, entonces debe ser uno de los 8 elementos que pertenecen al conjunto PRR.

Teorema del factor

Sea $P(x)$ un polinomio de grado $n \geq 2$. El número α es una raíz de $P(x)$ si y solo si $(x - \alpha)$ es un factor de $P(x)$.

Corolario

Si $(x - \alpha)$ es factor de $P(x)$, entonces existe $q(x)$ tal que:

$$P(x) = (x - \alpha)q(x)$$

Ejemplo En el polinomio $P(x) = x^3 - 7x + 6$ notamos que $P(1) = 0$, entonces 1 es raíz del polinomio $P(x)$. Por el teorema del factor, $(x - 1)$ es un factor de $P(x)$. Luego,

$$P(x) = (x - 1)q(x) \dots (*)$$

donde $q(x) = \frac{P(x)}{x - 1}$ se halla aplicando la Regla de Ruffini:

Raíz de $P(x)$	1	1	0	-7	6
	1	↓	1	1	-6
		1	1	-6	0

Recuerde que al dividir un polinomio entre uno de sus factores, el resto siempre es cero

de donde, $q(x) = x^2 + x - 6$. Lo reemplazamos en (*):

$$P(x) = (x - 1)(x^2 + x - 6)$$

$$\begin{array}{r} x \quad \quad \quad 3 \\ x \quad \quad \quad -2 \end{array}$$

$$P(x) = (x-1)(x+3)(x-2)$$

Esta factorizado sobre $\mathbb{Q}$ (tiene 3 factores primos lineales).

El procedimiento que hemos seguido para factorizar el polinomio $P(x) = x^3 - 7x + 6$ sobre $\mathbb{Q}$, se llama el **método de los divisores binómicos**.

Procedimiento:

1. Se halla una raíz racional (es decir una raíz entera o fraccionaria).

Nota. Se recomienda probar para 1; -1, 2 y -2. Si ninguno de estos cuatro números es raíz, entonces aplicar el corolario de las posibles raíces racionales (página 24).

2. Se aplica el teorema del factor. Es decir si α es una raíz del polinomio $P(x)$, entonces $(x - \alpha)$ es un factor de $P(x)$.
3. Se descompone el polinomio a factorizar de la siguiente manera:

$$P(x) = (x - \alpha)q(x)$$

4. Se halla $q(x)$ aplicando la regla de Ruffini:

$$q(x) = \frac{P(x)}{x - \alpha}$$

5. Se reemplaza $q(x)$ en $P(x)$:

$$P(x) = (x - \alpha) \underbrace{(\dots \dots \dots)}_{q(x)}$$

Si $q(x)$ es primo termina el proceso. En caso contrario se factoriza $q(x)$ utilizando un método adecuado.

Ejemplo

Factorice el polinomio $N(x) = 2x^3 + x^2 - 5x - 4$.

Resolución

Aplicamos el método de los divisores binómicos de forma directa:

Una raíz del polinomio $N(x)$ es -1, pues:

$$N_{(-1)} = 2(-1)^3 + (-1)^2 - 5(-1) - 4 = 0$$

Efectuamos la división para halla el cociente:

		2	1	-5	-4
-1		↓	-2	1	4
		2	-1	-4	0

Raíz de $N(x)$

Recuerde que al dividir un polinomio entre uno de sus factores, el resto siempre es cero

Resolución

El cociente es: $q(x) = 2x^2 - x - 4$. Luego:

$$N(x) = \underbrace{(x - (-1))}_{\text{factor}} \underbrace{(2x^2 - x - 4)}_{q(x)}$$

$$N(x) = \underbrace{(x + 1)}_{\text{primo}} \underbrace{(2x^2 - x - 4)}_{\text{primo}}$$

Por lo tanto, $N(x)$ tiene 2 factores primos (uno lineal y uno cuadrático)

Ejemplo

Si el polinomio $P(x) = 2x^3 + x^2 + 3x - 2$ se descompone como $P(x) = (ax + b)(cx^2 + x + d)$, determine el valor de $ab + cd$. Considere: $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{Z}$ y $a \neq 0$.

Resolución

Aplicamos el método de los divisores binómicos.

Vemos que:

$$P(1) = 4; \quad P(-1) = -9; \quad P(2) = 24; \quad P(-2) = -20$$

Es decir, 1; -1; 2 y -2 no son raíces del polinomio $P(x)$. Entonces aplicamos el corolario de las posibles raíces racionales:

$$\begin{aligned} \text{PRR} &= \pm \left\{ \frac{\text{divisores de } 2}{\text{divisores de } 2} \right\} \\ &= \pm \left\{ \frac{1; 2}{1; 2} \right\} \\ &= \pm \left\{ 1; \frac{1}{2}; 2 \right\} \end{aligned}$$

Si el polinomio $P(x)$ tiene raíz racional, necesariamente debe ser uno de estos 6 valores. Tomemos $\frac{1}{2}$:

Raíz de $P(x)$	→	$\frac{1}{2}$	2	1	3	-2
		$\downarrow$	↓	1	1	2
			2	2	4	0

Como el resto es cero, entonces $\frac{1}{2}$ si es raíz del polinomio $P(x)$. Luego:

$$P(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 2x + 4)$$

$$P(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(2)(x^2 + x + 2)$$

Resolución

$$P_{(x)} = \underbrace{(2x - 1)}_{\text{primo}} \underbrace{(x^2 + x + 2)}_{\text{primo}}$$

Por dato:

$$P_{(x)} = (ax + b)(cx^2 + x + d)$$

Por simple comparación:

$$a = 2; \quad b = -1; \quad c = 1 \quad \text{y} \quad d = 2$$

Por lo tanto, $ab + cd = -2 + 2 = 0$ **Teorema**

Todo polinomio cúbico: $P_{(x)} = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $a \neq 0$, sobre $\mathbb{Q}$ que no admite raíz racional, es irreducible sobre $\mathbb{Q}$.

EjemploEl polinomio $P_{(x)} = x^3 - x + 1$ es primo sobre $\mathbb{Q}$.

En efecto:

Las únicas posibles raíces racionales de $P_{(x)}$ son 1 y -1. Luego,

$$P_{(1)} = 1 \neq 0 \quad \text{y} \quad P_{(-1)} = 1 \neq 0$$

Entonces 1 y -1 no son raíces de $P_{(x)}$. Como el polinomio $P_{(x)}$ no tiene raíz racional, entonces el polinomio es irreducible sobre $\mathbb{Q}$. Además es mónico, por lo tanto, $P_{(x)}$ es primo sobre $\mathbb{Q}$.

EjemploFactorice el polinomio $T_{(x)} = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 7x + 2$ sobre $\mathbb{Q}$.

Resolución

Si aplicamos el aspa doble especial, observamos que $T_{(x)}$ no se puede factorizar por dicho método, entonces vamos a aplicar el método de los divisores binómicos.

$$\text{Como } T_{(-2)} = (-2)^4 + 2(-2)^3 + 3(-2)^2 + 7(-2) + 2 = 0,$$

entonces -2 es una raíz de $T_{(x)}$ y por lo tanto, $(x + 2)$ es un factor de $T_{(x)}$. Luego,

$$T_{(x)} = (x + 2) \cdot q_{(x)} \quad \dots (*)$$

Halleemos el polinomio $q_{(x)}$ por la regla de Ruffini:

Resolución

	1	2	3	7	2
-2	↓	-2	0	-6	-2
	1	0	3	1	0

Entonces, $q(x) = x^3 + 3x + 1$. Lo reemplazando en (*):

$$T(x) = (x + 2)(x^3 + 3x + 1)$$

No admite raíces racionales,
entonces es primo sobre $\mathbb{Q}$.

Por lo tanto, $T(x)$ tiene 2 factores primos (uno lineal y uno cúbico)

Teorema

Dado el polinomio cuártico:

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e; a \neq 0$$

definido sobre $\mathbb{Q}$. Si $P(x)$ no se factoriza por aspa doble especial, y tampoco por divisores binómicos, entonces $P(x)$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}$.

Ejemplo

El polinomio $P(x) = x^4 - 3x + 1$ no admite el aspa doble ni divisores binómicos (verifíquelo). Entonces $P(x) = x^4 - 3x + 1$ es irreducible sobre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$.

Teorema

Todo polinomio cuadrático $P(x) = ax^2 + bx + c$ definido sobre $\mathbb{R}$, es irreducible si y solo si su discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ es negativo.

Ejemplo

El polinomio $P(x) = 3x^2 - x + 1$ es irreducible sobre $\mathbb{R}$.

En efecto:

$$\Delta = (-1)^2 - 4(3)(1) = -11 \text{ (discriminante negativo)}$$

Por el teorema anterior, $P(x)$ es irreducible sobre $\mathbb{R}$.

Ejemplo

El polinomio $T(x) = x^2 + (1 - \sqrt{2})x - \sqrt{2}$ no es reductible sobre $\mathbb{R}$.

En efecto:

$$\Delta = (1 - \sqrt{2})^2 - 4(1)(-\sqrt{2}) = (1 + \sqrt{2})^2 > 0$$

Se obtiene discriminante no negativo, entonces no cumple el teorema anterior.

El polinomio es reductible (es decir, se puede factorizar) de la siguiente manera:

$$T_{(x)} = (x - \sqrt{2})(x + 1)$$

6

Artificios diversos

Veremos a continuación algunos artificios para factorizar polinomios que no han podido ser factorizados por los métodos anteriores.

Ejemplo Factorice el polinomio $P_{(x)} = x^5 + x + 1$

Resolución

En este caso, agregamos y quitamos x^2 . Es decir:

$$P_{(x)} = x^5 + x + 1 + x^2 - x^2$$

Agrupamos convenientemente:

$$P_{(x)} = (x^5 - x^2) + (x^2 + x + 1)$$

$$P_{(x)} = x^2 \underbrace{(x^3 - 1)}_{\text{diferencia de cubos}} + (x^2 + x + 1)$$

$$P_{(x)} = x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$$

Extraemos el factor común $(x^2 + x + 1)$:

$$P_{(x)} = (x^2 + x + 1)(x^2(x - 1) + 1)$$

$$P_{(x)} = \underbrace{(x^2 + x + 1)}_{\text{primo cuadrático}} \underbrace{(x^3 - x^2 + 1)}_{\text{primo cúbico}}$$

Luego, $P_{(x)}$ tiene dos factores primos.

Ejemplo Factorice el polinomio $L_{(x)} = x^4 + 4$.

En este caso, agregamos y quitamos $4x^2$. Es decir:

$$L_{(x)} = x^4 + 4 + 4x^2 - 4x^2$$

Agrupamos convenientemente:

Resolución	Trinomio cuadrado perfecto $L(x) = \overline{(x^4 + 4x^2 + 4)} - 4x^2$ $L(x) = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2$ Por diferencia de cuadrados: $L(x) = (x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x)$ Ordenamos los términos en cada paréntesis: $L(x) = \underbrace{(x^2 + 2x + 2)}_{\text{primo}} \underbrace{(x^2 - 2x + 2)}_{\text{primo}}$
-------------------	--

Ejemplo Factorice el polinomio $J(x) = x^7 + 2x^4 + 1$.

Resolución	En este caso, agregamos y quitamos x^3. Es decir: $J(x) = x^7 + 2x^4 + 1 + x^3 - x^3$ Agrupamos convenientemente: $J(x) = (x^7 + 2x^4 + x^3) - (x^3 - 1)$ Diferencia de cubos $J(x) = x^7 + 2x^4 + x^3 - (x - 1)(x^2 + x + 1)$ x^4 x^3 $\swarrow$ $\searrow$ $(x^2 + x + 1)$ $-(x - 1)$ $= x^5 + x^4 + x^3 +$ $= -x^5 + x^4$ $\quad \quad \quad \downarrow$ $\quad \quad \quad \boxed{2x^4 + x^3}$ Vemos que el polinomio $J(x)$ acepta ser factorizado por aspa simple. Es decir: $J(x) = \underbrace{(x^4 + x^2 + x + 1)}_{\text{primo cuártico}} \underbrace{(x^3 - x + 1)}_{\text{primo cúbico}}$ (Verifíquelo) Luego, $J(x)$ tiene dos factores primos.
-------------------	--

Ejemplo Factorice el polinomio $H(x) = x^6 - 5x^4 - 4$.

Resolución	En este caso, agregamos y quitamos $4x^2$. Es decir: $H(x) = x^6 - 5x^4 - 4 + 4x^2 - 4x^2$ $\quad \quad \quad -4x^4 - x^4$ Agrupamos convenientemente:
-------------------	---

Resolución

$$H(x) = \frac{(x^6 - 4x^4 + 4x^2)}{\text{trinomio cuadrado perfecto}} - \frac{(x^4 + 4x^2 + 4)}{\text{trinomio cuadrado perfecto}}$$

$$H(x) = (x^3 - 2x)^2 - (x^2 + 2)^2$$

Por diferencia de cuadrados:

$$H(x) = (x^3 - 2x + (x^2 + 2))(x^3 - 2x - (x^2 + 2))$$

Ordenamos los términos en cada paréntesis:

$$H(x) = \frac{(x^3 + x^2 - 2x + 2)}{\text{primo cúbico}} \frac{(x^3 - x^2 - 2x - 2)}{\text{primo cúbico}}$$

(Verifiquela)

Problemas resueltos

1.

Se descompone el polinomio $P_{(a,b)} = a^3 - ab^2 + a^2b - b^3 + a^2 - b^2$ en factores lineales. Halle la suma de dichos factores.

A) $2a + b - 1$

B) $2a - b + 1$

C) $3a + b + 1$

D) $3a - b + 1$

E) $a + b + 11$

Resolución

Se tiene el polinomio

$$P_{(a,b)} = \underline{a^3 - ab^2} + \underline{a^2b - b^3} + \underline{a^2 - b^2}$$

Agrupamos: $= a(a^2 - b^2) + b(a^2 - b^2) + (a^2 - b^2)$

$$= (a^2 - b^2)(a + b + 1)$$

$$= \underline{(a + b)} \underline{(a - b)} \underline{(a + b + 1)}$$

primo primo primo

Por lo tanto, la suma de los factores primos lineales es:

$$a + b + a - b + a + b + 1 = 3a + b + 1$$

Rpta: C

2.

Al factorizar el polinomio $P(x) = (x - 5)(x - 7)(x + 6)(x + 4) - 504$, uno de los factores lineales es

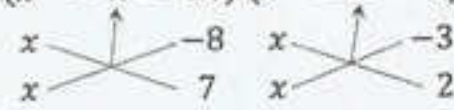
A) $x - 5$

B) $x + 7$

C) $x + 6$

D) $x + 3$

E) $x - 2$

Resolución	Se tiene el polinomio $P(x) = (x-5)(x-7)(x+6)(x+4) - 504$ Multiplicamos convenientemente: $= (x^2 - x - 20)(x^2 - x - 42) - 504$ Hacemos el cambio de variable: $x^2 - x = t$ Lo reemplazamos en el polinomio: $= (t-20)(t-42) - 504$ $= t^2 - 62t + 840 - 504$
Resolución	$= t^2 - 62t + 336$  $= (t-56)(t-6)$ Reemplazamos la variable original: $P(x) = (x^2 - x - 56)(x^2 - x - 6)$  $P(x) = (x-8)(x+7)(x-3)(x+2)$ Por lo tanto, uno de los factores lineales es $x+7$.

Rpta: B

3.

Al factorizar el polinomio: $x^4 + 2x^3 - 2x - 1$, la suma de sus factores primos es

- A) 2 B) $2x$ C) -2 D) $-2x$ E) $2(x-1)$

Resolución	Se tiene el polinomio $x^4 + 2x^3 - 2x - 1$ Agrupamos convenientemente: $= (x^4 - 1) + (2x^3 - 2x)$ $= (x^2 + 1)(x^2 - 1) + 2x(x^2 - 1)$ $= (x^2 - 1)(x^2 + 1 + 2x)$
------------	--

Resolución

$$= (x + 1)(x - 1)(x + 1)^2$$

$$= (x + 1)^3(x - 1)$$

Por lo tanto, la suma de factores primos es: $x + 1 + x - 1 = 2x$

Rpta: B

twitter.com/calapenshko

4.

Halle la suma de los términos independientes de los factores primos del polinomio $P(x) = x^3 - 13x + 12$

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Resolución

Se tiene el polinomio:

$$P(x) = x^3 - 13x + 12$$

Vemos que $P(1) = 0$, entonces 1 es raíz de $P(x)$. Luego $(x - 1)$ es factor de $P(x)$. Es decir,

$$P(x) = (x - 1)q(x) \dots (*)$$

donde $q(x) = \frac{P(x)}{x - 1}$ lo hallamos aplicando la Regla de Ruffini:

	1	0	-13	12
1	↓	1	1	-12
	1	1	-12	0

De donde, $q(x) = x^2 + x - 12$. Lo reemplazamos en (*):

$$P(x) = (x - 1)(x^2 + x - 12)$$

$$\begin{array}{ccc} x & & 4 \\ & \nearrow & \searrow \\ & x & -3 \end{array}$$

$$P(x) = \frac{(x - 1)}{-1} \frac{(x + 4)}{4} \frac{(x - 3)}{-3}$$

Término independiente:

$\therefore$ La suma de los términos independientes de los factores primos es 0.

Rpta: A

5.

Factorice el siguiente polinomio.

$$13(a + 1)^3(a - 1) - (a - 1)^3(a + 1) - 4a^2 + 4$$

- A) $4(a+1)(a-1)(3a-1)(a+2)$ B) $4(a+1)(a-1)(3a-1)(a-2)$
 C) $4(a+1)(a-1)(3a+1)(a+2)$
 D) $3(a+1)(a-1)(3a+1)(a+2)$ E) $4(a-1)^2(3a+1)(a-2)$

Resolución

Se tiene el polinomio

$$\begin{aligned} & 13(a+1)^3(a-1) - (a-1)^3(a+1) - 4a^2 + 4 \\ &= 13(a+1)^3(a-1) - (a-1)^3(a+1) - 4(a^2 - 1) \\ &= 13(a+1)^3(a-1) - (a-1)^3(a+1) - 4(a+1)(a-1) \end{aligned}$$

Factorizamos $(a+1)(a-1)$:

Resolución

$$\begin{aligned} &= (a+1)(a-1)[13(a+1)^2 - (a-1)^2 - 4] \\ &= (a+1)(a-1)[13(a^2 + 2a + 1) - (a^2 - 2a + 1) - 4] \\ &= (a+1)(a-1)[12a^2 + 28a + 8] \\ &= (a+1)(a-1)4[3a^2 + 7a + 2] \end{aligned}$$
$$= 4(a+1)(a-1)(3a+1)(a+2)$$

Rpta: C

6.

Halle el MCD de los siguientes polinomios.

$$x^2 - 3xy - 4y^2; \quad x^2 - 16y^2 \quad \text{y} \quad x^3 - 64y^3$$

- A) $x - 4y$ B) $2x + 3y$ C) $y - 4x$ D) $x - 3y$ E) $(x - 4y)^2$

Resolución

Factorizamos cada uno de los polinomios:

$$x^2 - 3xy - 4y^2 = (x - 4y)(x + y)$$

$$x^2 - 16y^2 = \underbrace{x^2 - (4y)^2}_{\text{diferencia de cuadrados}} = (x + 4y)(x - 4y)$$

$$x^3 - 64y^3 = \underbrace{x^3 - (4y)^3}_{\text{diferencia de cubos}} = (x - 4y)(x^2 + 4xy + 16y^2)$$

Resolución

Recuerde que el MCD es el polinomio de mayor grado que divide exactamente a los tres.

Por lo tanto, el MCD es el polinomio: $x - 4y$.

Rpta: A

7.

Halle el MCD de los siguientes polinomios.

$$P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 1$$

$$Q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$$

A) $x + 2$ B) $2x - 1$ C) $x^2 - 2x - 1$ D) $x - 2$ E) $x + 1$

Resolución

Factorizamos los polinomios por el método de los divisores binómicos:

- $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 1$

$$\text{PRR} = \pm \left\{ \frac{\text{divisores de 1}}{\text{divisores de 2}} \right\} = \pm \left\{ \frac{1}{1; 2} \right\} = \pm \left\{ 1; \frac{1}{2} \right\}$$

Tomamos $x = \frac{1}{2}$ y aplicamos la regla de Ruffini:

	2	-5	0	1
$\frac{1}{2}$	↓	1	-2	-1
	2	-4	-2	0

Entonces $P(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 4x - 2) = (2x - 1) \underbrace{(x^2 - 2x - 1)}_{\text{primo cuadrático}}$

- $Q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$

$$\text{PRR} = \pm \left\{ \frac{\text{divisores de 1}}{\text{divisores de 2}} \right\} = \pm \left\{ \frac{1}{1; 2} \right\} = \pm \left\{ 1; \frac{1}{2} \right\}$$

Tomamos $x = \frac{1}{2}$ y aplicamos la regla de Ruffini:

	2	3	0	-1
$\frac{1}{2}$	↓	1	2	1
	2	4	2	0

Entonces $P(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 4x + 2) = (2x - 1) \underbrace{(x^2 + 2x + 1)}$

Resolución

$$= (2x - 1)(x + 1)^2$$

Por lo tanto, $\text{MCD}(P; Q) = 2x - 1$.

Rpta: B

8.

Halle el factor cuadrático primo del siguiente polinomio.

$$P(x) = 15a^2x^2 - 30a^2x^3 + 90a^2x^4 - 75a^2x^5$$

A) $x^2 + 5x + 1$

B) $6x^2 + 2x - 1$

C) $5x^2 - x - 1$

D) $-5x^2 + x - 1$

E) $-5x^2 - x + 1$

Resolución

Se tiene el polinomio

$$\begin{aligned} P(x) &= 15a^2x^2 - 30a^2x^3 + 90a^2x^4 - 75a^2x^5 \\ &= 15a^2x^2(1 - 2x + 6x^2 - 5x^3) \\ &= 15a^2x^2(-1)(5x^3 - 6x^2 + 2x - 1) \dots (*) \end{aligned}$$

Lo factorizamos por divisores binómicos

Vemos que se anula para $x = 1$, entonces aplicamos Ruffini:

	5	-6	2	-1
1	↓	5	-1	1
	5	-1	1	0

Luego, $5x^3 - 6x^2 + 2x - 1 = (x - 1)(5x^2 - x + 1)$.

Lo reemplazamos en (*):

$$P(x) = 15a^2x^2(-1)(x - 1)(5x^2 - x + 1)$$

$$P(x) = 15a^2x^2(x - 1)(-5x^2 + x - 1)$$

Por lo tanto, el factor primo cuadrático es $-5x^2 + x - 1$.

Rpta: D



Universidad Nacional del Callao (UNAC)

9.

Un factor del polinomio $ax^2 + bx - a^2x - ab$ es

- A) $x - ab$ B) $ax + b$ C) $ab + x$ D) $abx + 1$ E) $bx + a$

UNAC 2001 - I

Resolución

Se tiene el polinomio: $ax^2 + bx - a^2x - ab$

$$\begin{aligned}\text{Agrupamos:} \quad &= x(ax + b) - a(ax + b) \\ &= (ax + b)(x - a)\end{aligned}$$

Por lo tanto, un factor del polinomio es $ax + b$.

Rpta: B

10.

Luego de factorizar la expresión $M_{(x)} = (x - 3)^5 + 81x$, uno de los factores es

- A) $x + 1$ B) $x^2 + 3x + 9$ C) $x^2 - 3x + 9$
D) $x^2 + 6x + 1$ E) $x^2 + 3x - 9$

UNAC 2009 - I

Resolución

Se tiene el polinomio

$$M_{(x)} = (x - 3)^5 + 81x$$

$$\text{Agregamos y quitamos 243:} \quad = (x - 3)^5 + \underline{81x - 243} + 243$$

$$= (x - 3)^5 + 81(x - 3) + 243$$

$$\text{Sea } x - 3 = t; \quad = t^5 + 81t + 243$$

$$= 243 \left(\left(\frac{t}{3} \right)^5 + \frac{t}{3} + 1 \right)$$

$$\text{Sea } \frac{t}{3} = a; \quad = 243(a^5 + a + 1)$$

$$\text{Agregamos y quitamos } a^2: \quad = 243((a^5 - a^2) + a^2 + a + 1)$$

$$= 243(a^2(a^3 - 1) + (a^2 + a + 1))$$

$$= 243(a^2(a - 1)(a^2 + a + 1) + (a^2 + a + 1))$$

Resolución

$$\begin{aligned}
 &= 243(a^2 + a + 1)(a^3 - a^2 + 1) \\
 &= 243\left(\left(\frac{t}{3}\right)^2 + \frac{t}{3} + 1\right)\left(\left(\frac{t}{3}\right)^3 - \left(\frac{t}{3}\right)^2 + 1\right) \\
 &= 9\left(\left(\frac{t}{3}\right)^2 + \frac{t}{3} + 1\right)(27)\left(\left(\frac{t}{3}\right)^3 - \left(\frac{t}{3}\right)^2 + 1\right) \\
 &= ((x-3)^2 + 3(x-3) + 9)((x-3)^3 - 3(x-3)^2 + 27) \\
 &= \underbrace{(x^2 - 3x + 9)}_{\text{primo cuadrático}} \underbrace{(x^3 - 12x^2 + 45x - 27)}_{\text{primo cúbico}}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, un factor del polinomio es: $x^2 - 3x + 9$.

Rpta: C

11.

Al factorizar el polinomio $P_{(x,y)} = 4x^4 + 625y^4$ en $\mathbb{Z}_{[x,y]}$, la suma de los coeficientes de uno de sus factores primos es

A) 25

B) 18

C) 29

D) 35

E) 37

UNAC 2009 - II

Resolución

Se tiene el polinomio:

$$\begin{aligned}
 P_{(x,y)} &= 4x^4 + 625y^4 \\
 &= (2x^2)^2 + (25y^2)^2
 \end{aligned}$$

Completemos el cuadrado:

$$\begin{aligned}
 &= \underbrace{(2x^2)^2 + 2(2x^2)(25y^2) + (25y^2)^2}_{(2x^2 + 25y^2)^2} - 2(2x^2)(25y^2) \\
 &= (2x^2 + 25y^2)^2 - 100x^2y^2 \\
 &= (2x^2 + 25y^2)^2 - (10xy)^2
 \end{aligned}$$

Diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned}
 &= (2x^2 + 25y^2 + 10xy)(2x^2 + 25y^2 - 10xy) \\
 &= \underbrace{(2x^2 + 10xy + 25y^2)}_{\text{primo sobre } \mathbb{Z}} \underbrace{(2x^2 - 10xy + 25y^2)}_{\text{primo sobre } \mathbb{Z}}
 \end{aligned}$$

Suma de coeficientes: $2 + 10 + 25 = 37$ ó $2 - 10 + 25 = 17$

∴ la suma de coeficientes de uno de los factores primos es 37.

Rpta: E

12.

Factorizando en $\mathbb{R}$ el polinomio $P(x) = (x^2 - 5x + 4)^2 - 3x^2 + 15x - 22$, el número de factores primos es

- A) 1 B) 5 C) 3 D) 2 E) 4

UNAC 2010 - I

Resolución

Se tiene el polinomio

$$P(x) = (x^2 - 5x + 4)^2 - 3x^2 + 15x - 22$$

$$= (x^2 - 5x + 4)^2 - \underline{3x^2 + 15x - 12} - 10$$

Aspa simple:

$$= (x^2 - 5x + 4)^2 - 3(x^2 - 5x + 4) - 10$$

$$\begin{array}{rcl} (x^2 - 5x + 4) & \swarrow & -5 \\ (x^2 - 5x + 4) & \searrow & 2 \end{array}$$

$$= (x^2 - 5x + 4 - 5)(x^2 - 5x + 4 + 2)$$

$$= (x^2 - 5x - 1)(x^2 - 5x + 6)$$

$$\begin{array}{rcl} x & \swarrow & -2 \\ x & \searrow & -3 \end{array}$$

$$= (x^2 - 5x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

$\Delta > 0$, entonces

tiene 2 raíces reales: x_1 y x_2

$$= (x - x_1)(x - x_2)(x - 2)(x - 3)$$

Por lo tanto, $P(x)$ tiene 4 factores primos sobre $\mathbb{R}$

Rpta: E

13.

Al factorizar $P(x) = x^6 + x^5 + x^3 + x - 1$ en $\mathbb{R}$, la suma de coeficientes de los factores primos es

- A) 4 B) 6 C) 7 D) 5 E) 8

UNAC 2010 - II

Resolución

Se tiene el polinomio

$$P(x) = x^6 + x^5 + x^3 + x - 1$$

$$= x^6 + x^5 + x + x^3 - 1$$

$$= x(x^5 + x^4 + 1) + (x - 1)(x^2 + x + 1)$$



Resolución

Agregamos y quitamos

$$\begin{aligned}
 &= x((x^5 - x^2) + (x^4 + x^2 + 1)) + (x - 1)(x^2 + x + 1) \\
 &= x \left(x^2 \underbrace{(x^3 - 1)}_{(x-1)(x^2+x+1)} + (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \right) + (x - 1)(x^2 + x + 1) \\
 &= x(x^2 + x + 1)((x^2(x - 1) + x^2 - x + 1)) + (x - 1)(x^2 + x + 1) \\
 &= x(x^2 + x + 1)((x^3 - x + 1)) + (x - 1)(x^2 + x + 1) \\
 &= (x^2 + x + 1)(x^4 - x^2 + x + x - 1) \\
 &= (x^2 + x + 1)(x^4 - x^2 + 2x - 1) \\
 &= (x^2 + x + 1)(x^4 - (x^2 - 2x + 1)) \\
 &= (x^2 + x + 1)((x^2)^2 - (x - 1)^2) \\
 &= \underbrace{(x^2 + x + 1)}_{\text{primo sobre } \mathbb{R}} \underbrace{(x^2 + x - 1)}_{\Delta > 0} \underbrace{(x^2 - x + 1)}_{\text{primo sobre } \mathbb{R}} \\
 &= (x^2 + x + 1) \underbrace{(x - x_1)(x - x_2)}_{\text{donde } x_1 + x_2 = -1} (x^2 - x + 1)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la suma de los coeficientes:

$$1 + 1 + 1 + 1 - x_1 + 1 - x_2 + 1 - 1 + 1 = 6 - (x_1 + x_2) = 7$$

Rpta: C

14.

Uno de los factores en $\mathbb{R}$ del polinomio $P_{(x)} = x^5 + x^4 + 1$ es

- A) $x^2 + x + 1$ B) $x^2 - x - 1$ C) $x^3 + x + 1$
 D) $x^3 + x - 1$ E) $x^2 - x + 1$

UNAC 2012 - II

Resolución

Se tiene el polinomio

$$P_{(x)} = x^5 + x^4 + 1$$

Agregamos y quitamos x^3 convenientemente:

$$\begin{aligned}
 &= \underbrace{x^5 + x^4 + x^3}_{x^3(x^2 + x + 1)} - x^3 + 1 \\
 &= x^3(x^2 + x + 1) - \underbrace{(x^3 - 1)}_{(x-1)(x^2+x+1)} \\
 &= x^3(x^2 + x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1)
 \end{aligned}$$

Resolución

$$= \underbrace{(x^2 + x + 1)}_{\text{primo cuadrático}} \underbrace{(x^3 - x + 1)}_{\text{primo cúbico}}$$

Por lo tanto, uno de los factores de $P(x)$ es $x^2 + x + 1$.

Rpta: A

15.

¿Cuántos factores primos tiene el siguiente polinomio?

$$P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{80}$$

A) 80

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

Se tiene el polinomio:

$$P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{80}$$

Utilizando cocientes notables se expresa como:

$$P(x) = \frac{x^{81} - 1}{x - 1}$$

Acomodamos convenientemente en el numerador para formar diferencia de cubos:

$$P(x) = \frac{(x^{27})^3 - 1}{x - 1}$$

$$P(x) = \frac{(x^{27} - 1)((x^{27})^2 + x^{27} + 1)}{x - 1}$$

$$P(x) = \frac{((x^9)^3 - 1)(x^{54} + x^{27} + 1)}{x - 1}$$

$$P(x) = \frac{(x^9 - 1)((x^9)^2 + x^9 + 1)(x^{54} + x^{27} + 1)}{x - 1}$$

$$P(x) = \frac{(x^9 - 1)((x^9)^2 + x^9 + 1)(x^{54} + x^{27} + 1)}{x - 1}$$

$$P(x) = \frac{((x^3)^3 - 1)(x^{18} + x^9 + 1)(x^{54} + x^{27} + 1)}{x - 1}$$

$$P(x) = \frac{(x^3 - 1)((x^3)^2 + x^3 + 1)(x^{18} + x^9 + 1)(x^{54} + x^{27} + 1)}{x - 1}$$

$$= \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^6 + x^3 + 2)(x^{18} + x^9 + 1)(x^{54} + x^{27} + 1)}{x - 1}$$

Cancelamos $(x - 1)$:

twitter.com/calapenshko

Resolución

PNHO
WORK

Resolución

$$P(x) = \underbrace{(x^2 + x + 1)}_{\text{primo}} \underbrace{(x^6 + x^3 + 2)}_{\text{primo}} \underbrace{(x^{18} + x^9 + 1)}_{\text{primo}} \underbrace{(x^{54} + x^{27} + 1)}_{\text{primo}}$$

(Verifíquelo)

Por lo tanto $P(x)$ tiene 4 factores primos.

Rpta: D

Problemas propuestos

1.

Halle el valor de m si se sabe que el polinomio $f(x) = x^2 + 2x - 2$ es un factor del polinomio $P(x) = 3x^4 + mx^3 - 9x^2 + nx + 2$.

- A) 5 B) 8 C) 1/4 D) 1/9 E) 1

2.

Determine verdadero (V) o falso (F) según corresponda, con respecto al polinomio $P(a,b) = ab(2ab - 1)^3(ab - 1)^2(a^2b^2 - 1)$.

- I) ab es un factor primo.
 II) Tiene cuatro factores primos.
 III) Tiene factores primos de segundo grado.

- A) VFV B) FVV C) VVF D) FVF E) FFV

3.

Si $f(x) = x^2 + x$ es factor algebraico del polinomio $P(x) = ax^4 - bx^3 - cx - 3$, entonces determine el valor numérico de $a + b + c$.

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 2 E) 6

4.

Halle el número de factores primos del polinomio P .

$$P(x) = x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1.$$

- A) 5 B) 4 C) 2 D) 3 E) 1

5.

Indique el número de factores lineales que presenta el polinomio

$$M(x,y) = x^8y + 3x^7y + 2x^6y + 6x^5y$$

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

6.

Determine la suma $(S_{(a,b)})$ de los factores primos que presenta el polinomio $P_{(a,b)} = ab(a^2 - 6a - b^2 + 9)(a^2 - 169)$.

- A) $S_{(a,b)} = ab + 4a - 6$ B) $S_{(a,b)} = ab + 3a - 7$ C) $S_{(a,b)} = 5a + b - 6$
 D) $S_{(a,b)} = 4a + b - 1$ E) $S_{(a,b)} = 5a + b - 2$

7.

Factorice el polinomio $P_{(a,b,c)} = 1 + a + b + c + ab + ac + cb + abc$ e indique la suma de los factores primos.

- A) $a + b + c - 3$ B) $a + b - c + 3$ C) $a + b + c + 3$
 D) $a - b + c + 3$ E) $a + b + c + 1$

8.

Dado el esquema del aspa simple $P_{(x)} = 6x^2 + ax + 2(b+2)$



determine el valor de $a - b$.

- A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

9.

Determine uno de los factores primos del siguiente polinomio.

$$P_{(x)} = x^4 + 4abx^2 - (a^2 - b^2)^2$$

- A) $x^2 + (a - b)^2$ B) $x - a + b$ C) $x^2 + a + b$
 D) $x + a + b$ E) $x - a - b$

10.

Indique el número de factores primos del polinomio

$$P_{(x)} = (x^2 + 5x)^2 - 4 + x(15 + 3x)$$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

11.

Halle la mayor suma de coeficientes de uno de los factores primos del polinomio

$$P_{(x)} = (x - 2)(x + 1)(x - 3)(x + 2) + 3$$

- A) -5 B) -6 C) -4 D) -3 E) 7

12.

Determine la suma de los factores primos del polinomio

$$M_{(x,y)} = (x^2 + y^2 - 4)^2 - (x^2 + y^2)^2 + (x^2 - y^2)^2$$

- A) $4x$ B) $2x - 2y$ C) $4x - 4y$ D) $4y$ E) $x + y$

13.

Determine el factor primo de mayor grado que presenta el polinomio

$$F(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 13x + 6$$

- A) $f(x) = x^2 + 4x + 1$ B) $f(x) = x^2 - 3x + 1$ C) $f(x) = x^2 + 2x - 1$
 D) $f(x) = x^2 - 2x - 1$ E) $f(x) = x^2 - 3x - 1$

14.

Determine el número de factores primos que presenta el polinomio

$$P(a,b) = a^6 + 4ab^3 - 4a^4 - a^3b^3$$

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

15.

Halle la suma de los factores primos del polinomio

$$P(x,y) = (a^2 - b^2)x^2 + 4abxy - (a^2 - b^2)y^2$$

- A) $2ax + 2by$ B) $2ax - 2by$ C) $2bx + 2ay$
 D) $2bx - 2ay$ E) $2abx + 2y$

16.

Luego de factorizar el polinomio $P(x,y,z) = [x^2 + (x+y)(x+z)]^2 + x^2(y-z)^2$ sobre $\mathbb{Z}$ indique la suma de coeficientes de un factor primo.

- A) 4 B) 3 C) 2 D) 7 E) 5

17.

Luego de factorizar el polinomio $P(x,y,z) = (x+y)^2 + (x-z)^2 - 5(y+z)^2$ indique la suma de los cuadrados de los coeficientes de un factor primo.

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

18.

Indique la cantidad de factores primos que tiene el polinomio P .

$$P(x) = (x+2)^2(x+1)(x+3) - 5x(x+4) - 27$$

- A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

19.

Halle uno de los factores primos del siguiente polinomio.

$$T(x,y) = x^2y + xy^2 + (a+b)xy + ab(x+y) + ay^2 + bx^2$$

- A) $x + y + a$ B) $x + y$ C) $xy + 1$ D) $x + b$ E) $y + a$

20.

Cuántos de los siguientes polinomios son primos sobre $\mathbb{Z}$

I) $P(x) = x^2 - 6x + 24$

III) $R(x) = x^4 + x^2 + 1$

II) $Q(x) = x^4 + 4$

IV) $L(x) = x^4 + 1$

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) ninguno

21.

Si 2 es raíz del polinomio $P(x) = x^3 - 5x + a$, entonces determine su factor primo de mayor término independiente.

A) $f(x) = x - 2$

B) $f(x) = x - 4$

C) $f(x) = x^2 - 2$

D) $f(x) = x^2 - 2x - 1$

E) $f(x) = x^2 + 2x - 1$

22.

Luego de factorizar el polinomio $L(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x - 3$ indique verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

I) $L(x)$ tiene cuatro factores primos.II) $L(x)$ tiene un factor cuadrático.III) $L(x)$ solo tiene dos factores primos.

A) VFV

B) FVV

C) VVF

D) FVF

E) FFV

23.

Si n representa el número de factores primos que posee el polinomio

$$Q(x) = 2x^5 + x^4 - 10x^3 - 5x^2 + 8x + 4$$

Entonces determine el valor de $1 + 2 + 3 + \dots + 2n$

A) 55

B) 66

C) 36

D) 10

E) 24

24.

De los siguientes polinomios, ¿cuántos son primos?

I) $A(x) = x^3 + x - 1$

II) $B(x) = x^3 + 2x - 2$

III) $C(x) = 2x^3 + x^2 + 1$

IV) $D(x) = 3x^3 + 2x^2 - 6x + 1$

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

25.

Halle $f(x)$ si es un factor primo de $M(x) = x^4 - (a^2 - 1)x^2 - a^2$; $a \in \mathbb{Z}$ tal que $f(x) \in \mathbb{R}^+$, para cualquier valor real de x .

A) $f(x) = x^2 + a^2$

B) $f(x) = x^2 + 2a^2$

C) $f(x) = x^2 + 2$

D) $f(x) = x^2 + a$

E) $f(x) = x^2 + 1$

26.

Factorice el polinomio $P(x) = x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 5x + 6$. Luego determine la suma de coeficientes del factor primo de mayor término independiente.

A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 6

27.

Indique un factor primo del polinomio $P(x)$ sobre $\mathbb{Z}$.

$$P(x) = 12x^4 - x^3 + 29x^2 - 22x + 8$$

A) $f(x) = 4x^2 + 3x + 1$

B) $f(x) = 3x^2 + x + 4$

C) $f(x) = 4x^2 + 2x + 1$

D) $f(x) = 3x^2 + 2x + 6$

E) $f(x) = 4x^2 - 3x + 1$

28.

Factorice el polinomio $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.

A) $P(x) = (x - 1)(x - 2)^2$

B) $P(x) = (x - 2)(x - 1)^2$

C) $P(x) = (x - 2)(x + 1)^2$

D) $P(x) = (x + 2)(x + 1)^2$

E) $P(x) = (x + 2)(x - 1)^2$

29.

¿Cuántos factores primos tiene el siguiente polinomio?

$$P(x) = x^5 - 2x^4 - 13x^3 + 26x^2 + 36x - 72$$

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

30.

Calcule el valor de $abcd$ si se sabe que uno de los factores del polinomio $P(x) = (x + 1)^5 - 3(x + 1)^3 + 4x + 6$ es de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

A) -1

B) 1

C) 2

D) -2

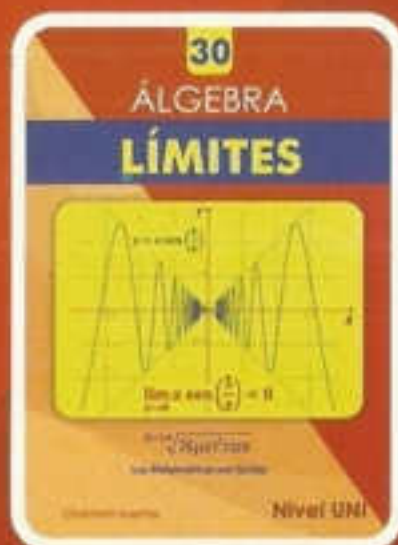
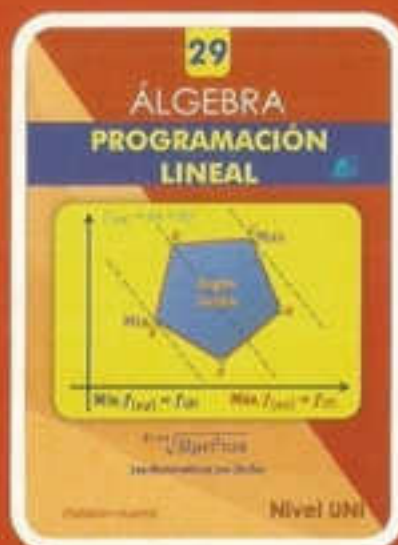
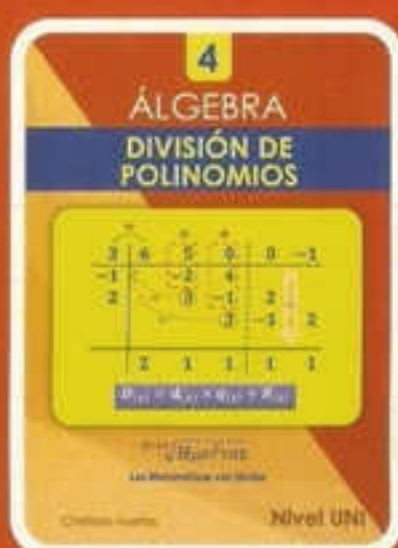
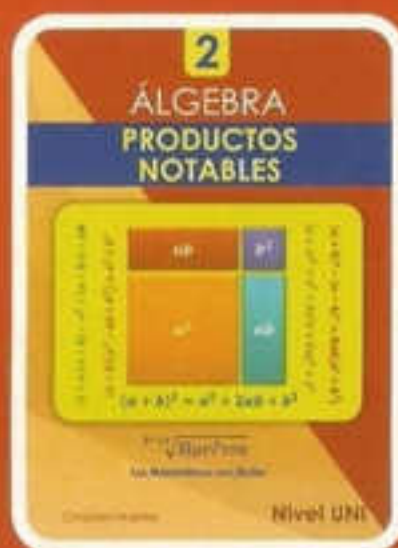
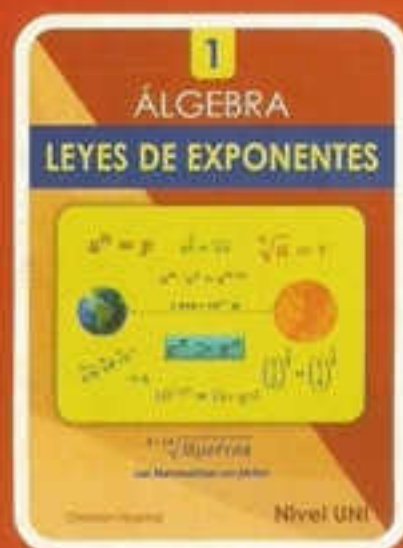
E) 3

Claves

01 A	02 E	03 A	04 C	05 B	06 C	07 C	08 B	09 B	10 C
11 D	12 A	13 D	14 C	15 A	16 E	17 C	18 D	19 B	20 B
21 E	22 E	23 A	24 B	25 E	26 D	27 E	28 B	29 D	30 A



OTRAS PUBLICACIONES



$\bar{x} - 14 \sqrt{\text{H}\mu\epsilon\vec{r}\tau\alpha\varsigma}$

16.11.20

twitter.com/calapenshko

Christiam Huertas

993 473 766

chr1614@hotmail.com



ALGEBRAPRE

