MATEMÁTICA

Trigonometria

Livro Eletrônico

GRAN CURSOS ONLINE

SUMÁRIO

Trigonometria 3
1. Ciclo Trigonométrico 3
1.1. Período 5
1.2. Identidade Fundamental da Trigonometria 6
1.3. Seno e Cosseno de Ângulos Notáveis 6
1.4. Reversão ao Primeiro Quadrante 9
1.5. Outras Funções Trigonométricas 12
2. Gráfico das Funções Trigonométricas 20
2.1. Funções Seno e Cosseno Modificadas 23
2.2. Reconhecer Função Seno e Cosseno 27
3. Soma de Arcos 33
3.1. Soma de Seno com Cosseno 34
3.2. Arco Duplo 35
3.3. Arco Metade 36
3.4. Transformação de Soma em Produto 39
4. Equações Trigonométricas 48
4.1. Inequações Trigonométricas 49
Questões de Comentadas em Aula 57
Questões de Concurso 66
Gabarito 79

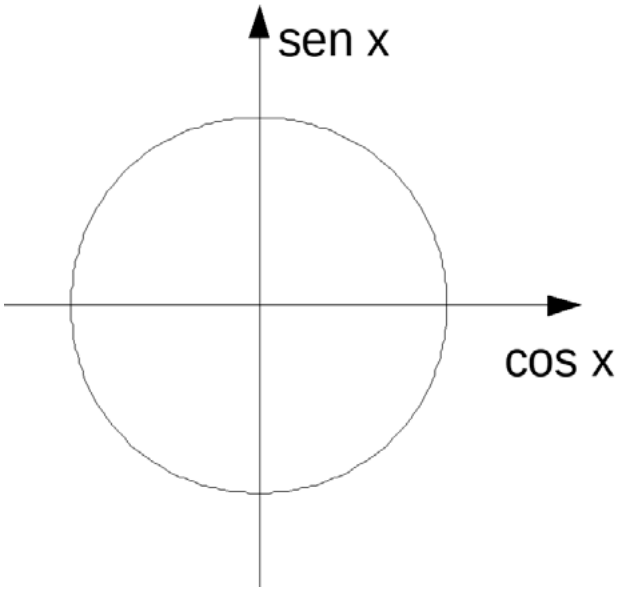
O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

TRIGONOMETRIA

1. Ciclo Trigonométrico

O ciclo trigonométrico é uma circunferência de raio unitário (r = 1) e que **é percorrida no sentido anti-horário.**

É construído em um plano cartesiano, cujo eixo das abscissas é o **eixo dos cossenos** e cujo eixo das ordenadas é o **eixo dos senos.**



A sua grande aplicação é definir as funções trigonométricas, entre as quais se incluem o seno, cosseno e a tangente, dos ângulos.

A origem do ciclo trigonométrico é o seu ponto mais à direita. É nessa posição que se encontra o ângulo $\theta = 0\,rad$. Para se marcar as posições dos demais ângulos, devemos percorrer o ciclo no sentido anti-horário partindo da origem.

Se queremos marcar a posição do ângulo $\theta = 1\,rad$, devemos percorrer o comprimento de uma unidade no ciclo.

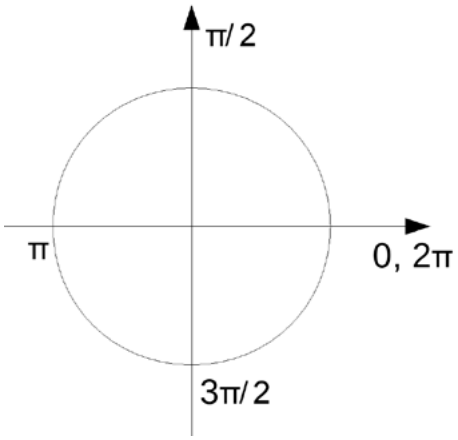
A unidade de medida "rad" é chamada **radiano**. Nessa unidade de medida de ângulos, bastante utilizada em Trigonometria, a medida do arco em radianos corresponde exatamente ao seu comprimento no ciclo trigonométrico.

É interessante observar que o perímetro total do ciclo trigonométrico é dado por:

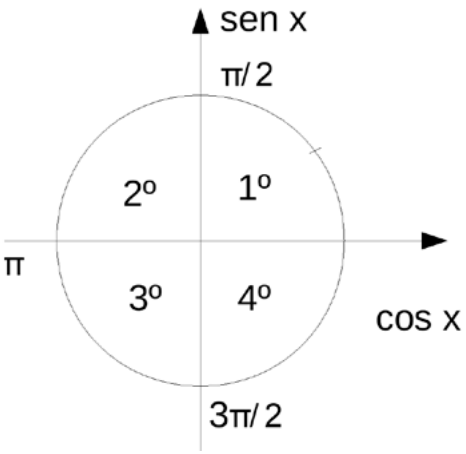
$$L = 2\pi R = 2\pi.1 = 2\pi$$

Dessa forma, ao percorrermos uma volta completa, temos o ângulo de 2π. Com base nisso, podemos também calcular a meia-volta que seria o ângulo de π e um quarto de volta que corresponderia ao ângulo de π/2. Vamos marcar essas posições no ciclo.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.



Esses quatro ângulos notáveis definem quatro regiões no ciclo trigonométrico diferentes, denominadas **quadrantes.** Os quatro quadrantes do ciclo trigonométrico estão explicitados a seguir.



A conversão do ângulo em graus para o ângulo em radianos pode ser feita por uma regra de três. O ângulo de π corresponde a 180º. Portanto, a conversão do ângulo em graus para radianos pode ser feita multiplicando por π/180.

$$x = \theta . \frac{\pi}{180°}$$

Vamos a alguns ângulos bastante conhecidos da Geometria Plana.

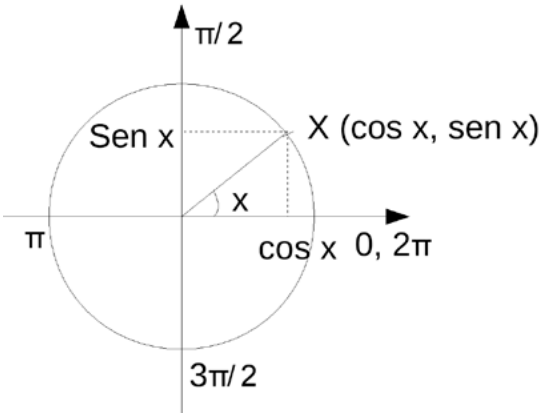
Graus	Radianos
30º	30 π/180 = π/6
45º	45 π/180 = π/4
60º	60 π/180 = π/3
90º	90 π/180 = π/2

Tabela 1: Conversão de Graus para Radianos

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

É importante que não confunda essas duas unidades de medida. A medida em graus é mais utilizada na Geometria Plana. O ângulo de 360º é o ângulo cheio ou uma volta. A medida em radianos é mais utilizada em Trigonometria. Nela, o ângulo cheio de uma volta completa é 2π rad.

Ao marcar a posição X de um ângulo x qualquer, o cosseno do ângulo será a abscissa do ponto X e o seno será a ordenada. Representaremos graficamente:

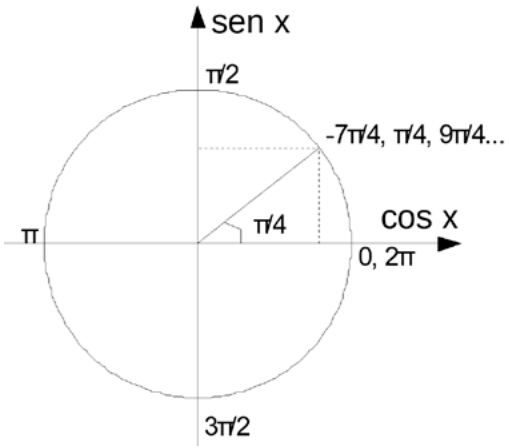


1.1. Período

No ciclo trigonométrico, o arco de 2π corresponde a uma volta completa. Por causa disso, ao se adicionar ou subtrair 2π a um arco qualquer, a sua posição não se altera, apenas o número de voltas.

Por exemplo, consideremos a posição correspondente ao arco π/4. Nessa mesma posição, encontram-se os arcos π/4, 9π/4, 17π/4 ... e os arcos -7π/4, -15π/4...

Em outras palavras, somando ou subtraindo 2π, não modificamos a posição do arco.



Uma das primeiras conclusões a que podemos chegar é que o seno e o cosseno são funções periódicas de período 2π. Ou seja, seus valores se repetem a cada espaço de 2π. Podemos escrever, portanto:

$$sen\,(2\pi + x) = sen\,x$$

$$cos\,(2\pi + x) = cos\,x$$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

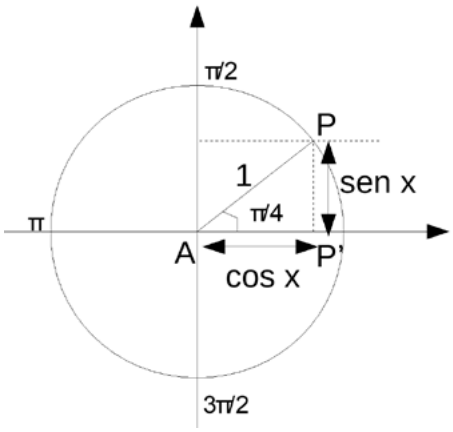
1.2. Identidade Fundamental da Trigonometria

Um célebre professor meu e hoje colega de trabalho sempre dizia: “Essa relação é o pai nosso da Trigonometria”.

Um fato interessante sobre ela é que **é válida para absolutamente todos os ângulos.**

$$sen^2x + \cos^2 x = 1$$

Essa relação é facilmente visualizável. Basta notar que o triângulo APP’ é retângulo.



A hipotenusa do triângulo APP’ é o próprio raio do ciclo trigonométrico que é igual a 1. Aplicando o Teorema de Pitágoras nesse triângulo, teremos diretamente a Identidade Trigonométrica Fundamental.

O mais interessante da Identidade Fundamental da Trigonometria é que **ela é válida para absolutamente qualquer ângulo.** Isso significa que ela é válida para x, para 2x, para y, para x +y enfim, para qualquer coisa que você coloque dentro da expressão.

$$sen^2x + \cos^2 x = 1$$
$$sen^2 2x + \cos^2 2x = 1$$
$$sen^2 y + \cos^2 y = 1$$
$$sen^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$$

Dessa maneira, tenha o seguinte em mente. Qualquer que seja o arco envolvido na expressão, a soma do quadrado do seu seno com o quadrado do seu cosseno é igual a 1.

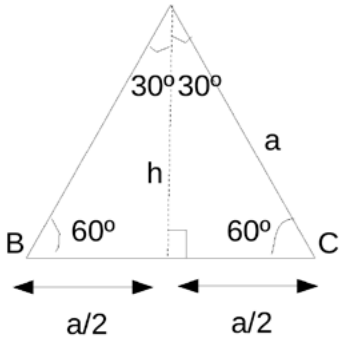
1.3. Seno e Cosseno de Ângulos Notáveis

Na Geometria Plana, os ângulos mais comuns sobre os quais se pede o seno e o cosseno são os ângulos de 30º, 45º e 60º.

Esses valores podem ser calculados facilmente a partir de um triângulo equilátero ou um quadrado.

No caso do triângulo equilátero, podemos traçar o segmento que divide um dos lados ao meio, teremos o seguinte:

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.



A altura pode ser calculada pelo Teorema de Pitágoras.

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$$

$$\therefore h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$\therefore h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Voltemos às definições de seno e cosseno utilizadas na Geometria Plana:

- **Seno:** razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa do triângulo;
- **Cosseno:** razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa do triângulo.

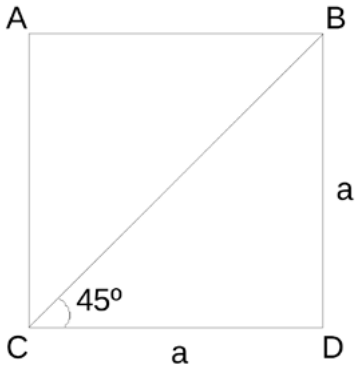
$$sen\ 30° = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2}$$

$$cos\ 30° = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{h}{a} = \frac{a\sqrt{3}/2}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$sen\ 60° = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{h}{a} = \frac{a\sqrt{3}/2}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos\ 60° = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2}$$

Para o ângulo de 45º, os valores de seno e cosseno podem ser calculados a partir do quadrado. Devido à simetria da figura geométrica, a diagonal do quadrado também é bissetriz do ângulo de 90º.



O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

A diagonal pode também ser calculada pelo Teorema de Pitágoras.

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \therefore d = a\sqrt{2}$$

Então, agora podemos calcular o seno e o cosseno do ângulo de 45º pelas definições.

$$sen\ 45° = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos\ 30° = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

É mais fácil guardar os senos e cossenos dos ângulos de 30º, 45º e 60º memorizando a seguinte tabela e a forma como ela é feita. Primeiramente, escrevemos os ângulos na base da tabela.

	30º	**45º**	**60º**
Seno			
Cosseno			
Tangente			

Agora, escrevemos 1-2-3 no seno e 3-2-1 no cosseno.

	30º	**45º**	**60º**
Seno	1	2	3
Cosseno	3	2	1
Tangente			

Agora, tiramos a raiz.

	30º	**45º**	**60º**
Seno	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
Cosseno	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1
Tangente			

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Agora, dividimos tudo por dois.

	30º	45º	60º
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente			

Por fim, a tangente corresponde à razão entre seno e cosseno. Ela é definida como:

$$\tan\theta = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{sen\ \theta}{\cos\theta}$$

	30º	45º	60º
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

1.4. Reversão ao Primeiro Quadrante

Uma técnica muito importante na Trigonometria é trazer todos os ângulos ao primeiro quadrante. Isso permite que as tabelas trigonométricas sejam fornecidas apenas com os ângulos até 90º ou π/2 rad.

Nessa seção, nós mostraremos a Reversão ao Primeiro Quadrante e eu gostaria que você prestasse mais atenção aos sinais do que aos valores numéricos obtidos.

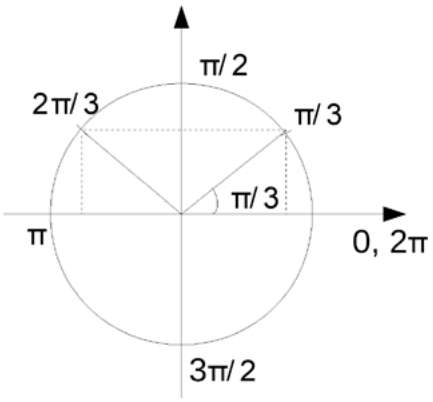
Os sinais que obteremos nessa seção são muito mais importantes, pois permitirão a você decifrar uma quantidade muito maior de ângulos que possam vir a ser fornecidos na prova.

Por exemplo, nós sabemos os valores dos senos e cossenos dos ângulos π/6, π/4 e π/3. Com base nisso, será que podemos conhecer os valores de senos e cossenos de outros ângulos?

Por exemplo, qual o cosseno de 2π/3?

O primeiro ponto a se notar é que 2π/3 está no segundo quadrante, pois é inferior a π, mas superior a π/2. Além disso podemos observar que a soma π/3 + 2π/3 = π, ou seja, uma meia volta. Sendo assim, temos graficamente:

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.



Com base nessa Figura, podemos observar que o ângulo de 2π/3 tem o seno positivo e de mesmo módulo, portanto, é igual ao seno do ângulo π/3. Por outro lado, o cosseno de 2π/3 tem sinal negativo. Dessa maneira, temos que:

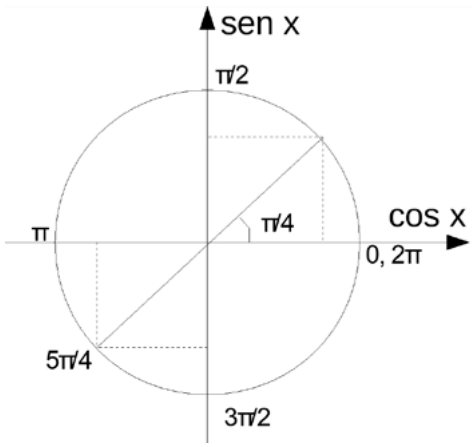
$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = +\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = +\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vejamos outro exemplo agora. E, se precisássemos calcule o seno de 5π/4? Como faríamos?

O primeiro passo é localizar em que quadrante está esse ângulo. Notemos que ele é superior a π, mas é inferior a 3π/2. Portanto, está no terceiro quadrante.

O ângulo de 5π/4 é igual à soma π/4 + π, ou seja, é o ângulo de π/4 mais meia volta.



Com base nessa Figura, o seno e o cosseno do ângulo 5π/4 são negativos, portanto, podemos escrever:

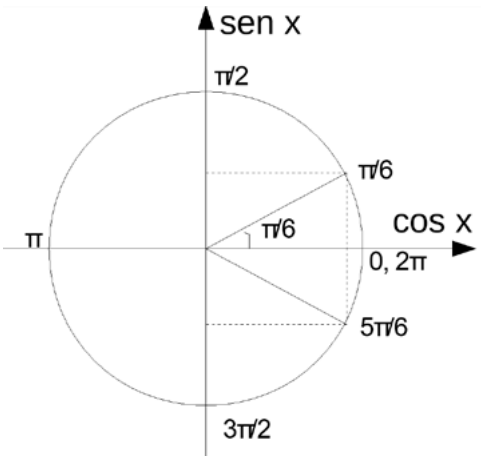
$$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

E, agora, o que faríamos se precisássemos calcular o cosseno de 5π/6?

Novamente, devemos localizar esse ângulo no ciclo trigonométrico. Podemos reparar que 5π/6 = 2π - π/6. Portanto, é exatamente igual a uma volta menos o ângulo de π/6. Portanto, vamos localizar 5π/6 no quarto quadrante. Vejamos:



Com base nessa Figura, o cosseno de 5π/6 é positivo e que o seno desse ângulo é negativo. Portanto, podemos escrever:

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = +\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = +\frac{\sqrt{3}}{2}$$

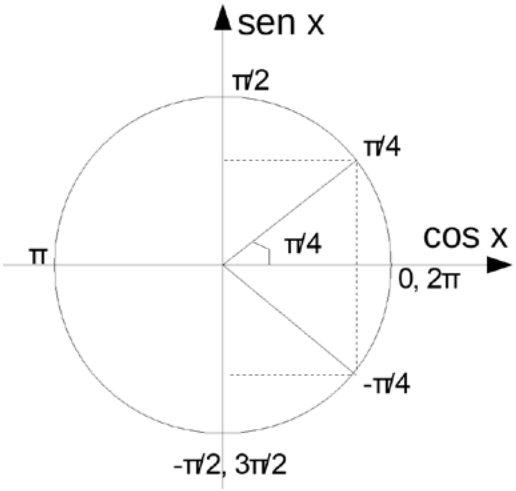
$$\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

Por fim, outro problema com o qual podemos nos deparar diz respeito a obter senos e cossenos de ângulos negativos.

Para o ciclo trigonométrico, não há qualquer problema com isso. Por exemplo, se queremos o ângulo -π/4, basta percorrer o arco π/4, porém, no sentido horário.

Nesse ponto, também gostaria de lembrar que a posição 3π/2 também corresponde ao ponto 3π/2 - 2π = -π/2.

Dessa forma, termos:



O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Podemos resumir a Reversão ao Primeiro Quadrante no conjunto de técnicas:

1.5. Outras Funções Trigonométricas

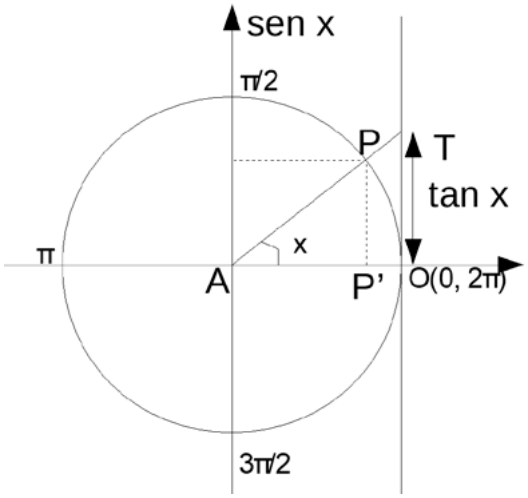
Além do seno e do cosseno que são as principais funções trigonométricas, outras, de vez em quando, são faladas.

A principal delas é a função tangente, que pode ser representada por tan ou tg.

Em um triângulo retângulo, a tangente de um ângulo é igual à razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente.

$$\tan\theta = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{sen\ \theta}{\cos\theta}$$

No ciclo trigonométrico, a tangente é obtida no eixo das tangentes, que é um eixo tangente ao ciclo trigonométrico na origem.

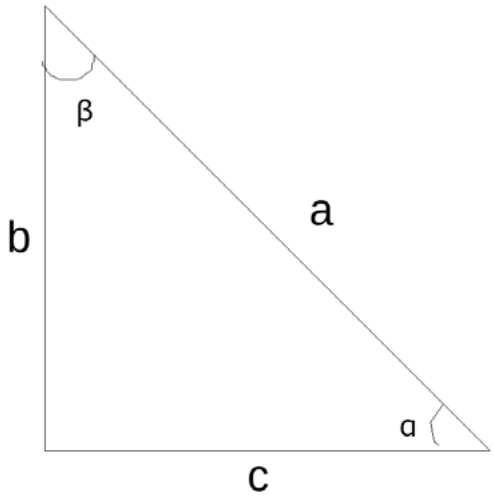


O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

É possível demonstrar a identidade de que a tangente é a ração do seno pelo cosseno aplicando semelhança de triângulos ATO e APP'. Deixamos essa demonstração como exercício para o leitor.

Um fato interessante a respeito de senos e cossenos é que o seno de um ângulo é igual ao cosseno de seu **ângulo complementar**, e vice-versa. Em outras palavras, se dois ângulos somam 90º ou um quarto de volta (Π/2), o seno de um é igual ao cosseno do outro.

Podemos visualizar isso em um triângulo retângulo.



$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{b}{a}$$

$$sen\ \beta = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{b}{a}$$

$$\therefore\ sen\ \alpha = \cos\beta$$

Além da tangente, outras funções de vez em quando são definidas. Para você, será o suficiente apenas saber as definições:

- **Cotangente:** é o inverso da tangente;
- **Secante:** é o inverso do cosseno;
- **Cossecante:** é o inverso do seno.

$$cotg\ x = \frac{1}{\tan x}$$

$$sec\ x = \frac{1}{\cos x}$$

$$cossec\ x = \frac{1}{\text{sen}\ x}$$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Direto do Concurso

001. (FGV/AL-RO/2018/ANALISTA LEGISLATIVO/MATEMÁTICA) Sabe-se que *sen x - cos x* = 0,6. O valor de y = sen *x* · cos *x* é

a) 0,18
b) 0,32
c) 0,36
d) 0,64
e) 0,72

O modo mais simples de resolver esse problema é elevando ao quadrado.

$$(sen\ x - \cos x) = 0{,}6$$

$$(sen\ x - \cos x)^2 = (0{,}6)^2$$

$$sen^2x - 2sen\ x \cos x + \cos^2 x = 0{,}36$$

Utilizando a Relação Trigonométrica Fundamental, temos que $sen^2x + \cos^2 x = 1$

$$1 - 2sen\ xcos\ x = 0{,}36$$

$$\therefore 2sen\ xcos\ x = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$$

$$\therefore sen\ xcos\ x = \frac{0{,}64}{2} = 0{,}32$$

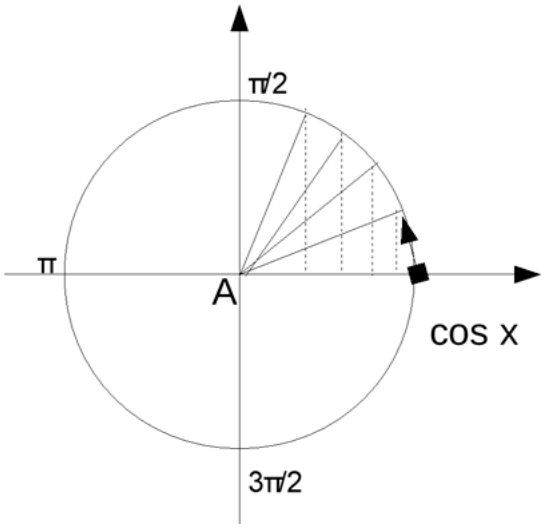
Letra b.

002. (UFOP/2018/ASSISTENTE EM ADMINISTRAÇÃO) Três ângulos agudos têm suas medidas em progressão aritmética crescente.
Assinale a afirmativa correta sobre seus respectivos cossenos.

a) Eles formam uma progressão aritmética.
b) Eles formam uma progressão geométrica.
c) Eles formam uma sequência crescente.
d) Eles formam uma sequência decrescente.

Ângulos agudos são aqueles menores que 90º ou Π/2. No início do ciclo trigonométrico, o cosseno é decrescente. Vejamos.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

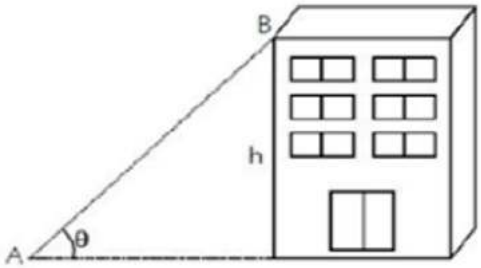


Portanto, os cossenos dos ângulos formam uma sequência decrescente. Essa sequência não pode ser classificada como progressão aritmética ou geométrica. É apenas uma sequência.

Letra d.

---

003. (FAUEL/PROADMUSEP/2017/TÉCNICO DE ENFERMAGEM) Uma escada de 40 m de comprimento está apoiada no alto de um edifício de uma altura h. Sabendo-se que o ângulo formado entre a escada e o plano horizontal é de 30º, a altura h do edifício é de: (sen 30º = 0,50; cos 30º = 0,86 e tg 30º = 0,58)



a) 15m.
b) 20m.
c) 50m.
d) 80m.

O seno de um ângulo é dado pela razão entre o cateto oposto e a hipotenusa.

$$sen\ 30° = \frac{h}{L}$$

$$0{,}5 = \frac{h}{40} \therefore h = 0{,}5.40 = 20$$

Letra b.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

004. (IBADE/SEE-PB/2017/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) A expressão trigonométrica a seguir vale:

$$2.\frac{\cos(60^\circ)}{tg(45^\circ)}.\left|\frac{sen(10^\circ)}{\cos(80^\circ)}\right|^2 - sen(210^\circ)$$

a) 1.
b) 3/2.
c) -3/2.
d) 1/2.
e) -1/2.

Vamos nos lembrar da tabela de valores notáveis usando a técnica do 1-2-3, 3-2-1.

	30º	**45º**	**60º**
Seno			
Cosseno			
Tangente			

Agora, escrevemos 1-2-3 no seno e 3-2-1 no cosseno.

	30º	**45º**	**60º**
Seno	1	2	3
Cosseno	3	2	1
Tangente			

Agora, tiramos a raiz.

	30º	**45º**	**60º**
Seno	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
Cosseno	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1
Tangente			

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Agora, dividimos tudo por dois.

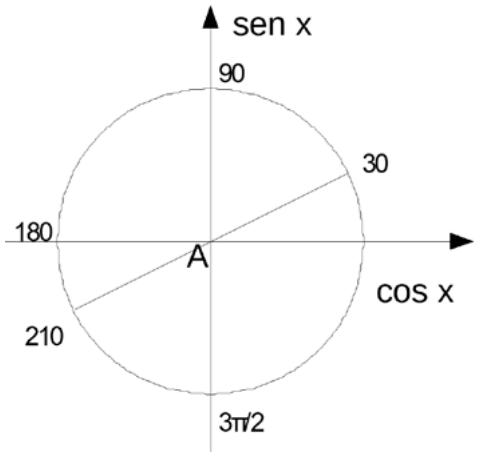
	30º	45º	60º
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente			

Por fim, a tangente corresponde à razão entre seno e cosseno.

	30º	45º	60º
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Além disso, precisamos nos lembrar que o seno de um ângulo é igual ao cosseno do seu complementar. Portanto, $sen\ 10 = \cos 80$.

Também precisamos usar a reversão ao primeiro quadrante.



Como 210º está no terceiro quadrante e corresponde ao ângulo de 30º acrescido de meia-volta, o seu seno terá exatamente o sinal oposto ao seno de 30º.

$$2.\frac{1/2}{2}.[1]^2 + \text{sen}(30) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Letra b.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

005. (MS CONCURSOS/SAP-SP/2017/AGENTE DE SEGURANÇA PENITENCIÁRIA) Seja a expressão

$$\frac{sen^2x}{(1+\cos x)} \cdot \frac{\cos^2 x}{(1-\cos x)}$$

definida em 0< x < π/2. Ao simplificá-la, obteremos:

a) 1

b) sen² *x*

c) cos² *x*

d) 0

Interessante que uma questão tão sofisticada tenha caído para o cargo de Agente de Segurança Penitenciária. Isso mostra que, quando o assunto é provas de concursos públicos, devemos realmente estar preparados para tudo.

Primeiramente, devemos usar o produto notável da soma pela diferença:

$$\frac{sen^2x}{(1+\cos x)} \cdot \frac{\cos^2 x}{(1-\cos x)} = \frac{sen^2x.\cos^2 x}{(1-\cos^2 x)}$$

Agora, podemos usar a Relação Trigonométrica Fundamental para escrever o quadrado do seno em função do cosseno:

$$sen^2x + \cos^2x = 1 \therefore sen^2x = 1 - \cos^2 x$$

Portanto, podemos cortar:

$$\frac{sen^2x.\cos^2 x}{(1-\cos^2 x)} = \cos^2 x$$

Letra b.

006. (FCC/SEDU/ES/2016/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Na função trigonométrica g(x) = sen x, com x ∈ R, g(13π/3) é igual a:

a) g(5π/2).

b) g(π/4).

c) g(2π/3).

d) g(π).

e) g(π/3).

Vamos retirar 2 voltas do ângulo citado:

$$g\left(\frac{13\pi}{3}\right) = g\left(\frac{13\pi}{3} - 4\pi\right) = g\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Mas também podemos aplicar a regressão ao primeiro quadrante, em que temos:

$$g\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = g\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\therefore g\left(\frac{2\pi}{3}\right) = g\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Portanto, encontramos duas respostas possíveis.
Letra c e **Letra e.**

007. (IBFC/MGS/2016/APOIO OPERACIONAL) O valor da expressão 3. sen² α + 3. cos² α, para 0º < α < 360º, é igual a:
a) 1,5
b) 3
c) 2
d) 6

Questão bastante direta. Basta se lembrar que sen² + cos² = 1. Portanto, a expressão citada é o triplo disso.
Letra b.

008. (IBFC/MGS/2015/SERVIÇOS TÉCNICOS EM SEGURANÇA DO TRABALHO) Considere que o ângulo α está no intervalo entre 90º e 180º e senα= 0,5, então o valor do cosα é igual a:
a) -0,5
b) - √3/2
c) √3/2
d) 1/3

O primeiro ponto a se notar é que o ângulo em questão está no segundo quadrante, portanto, o seu cosseno é negativo.
Além disso, podemos utilizar a Relação Trigonométrica Fundamental.

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\frac{1}{4} + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Agora, basta extrair a raiz quadrada, lembrando-nos que, como o ângulo está no segundo quadrado, o seu cosseno é negativo.

$$\therefore cos\ \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Letra b.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

009. (CESPE/SEDU-ES/2010/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Considerando que a e b sejam ângulos expressos em graus, em que $0 < a, b < 90°, sen\ a = \frac{3}{5} e\ sen\ b = \frac{4}{5}$, julgue o seguinte item.

a + b = 90º

Dois ângulos são complementares quando o seno de um é igual ao cosseno do outro. Podemos notar que:

$$sen^2 a + \cos^2 a = 1$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 a = 1$$

$$\therefore \cos^2 a = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \therefore \cos a = \frac{4}{5}$$

Observe que o cosseno de a é exatamente igual ao seno de b. Como a e b são ângulos agudos, então, certamente, são complementares.

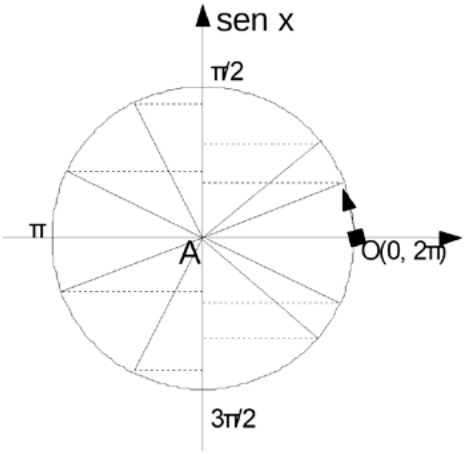
Certo.

2. Gráfico das Funções Trigonométricas

Um assunto rotineiramente cobrado nas provas sobre Trigonometria é o gráfico das funções seno e cosseno, inclusive com suas possíveis variações.

Por variações, entendemos funções como $1 + sen\ (2x)$ que são bastante cobradas em questões de prova. Sugerimos que, para facilitar o seu entendimento, você recorra ao Wolphram Alpha (https://www.wolframalpha.com/) que é um aplicativo disponível na internet muito fácil de usar e que é excelente para desenhar gráficos de funções.

Por hora, vamos nos concentrar no gráfico da função seno. Para traçar o gráfico dessa função, começaremos a da origem e vamos percorrendo no sentido anti-horário.



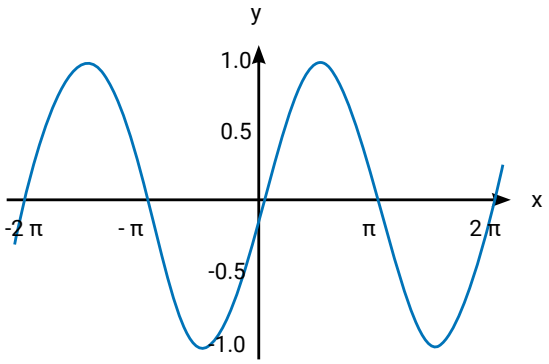
No espaço de 0 a π/2, o seno cresce continuamente de 0 a 1 – basta observar os dois primeiros pontos na figura.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

A seguir, no espaço de π/2 a 3π/2, o seno decresce continuamente de 1 a -1 – observe os quatro pontos seguintes.

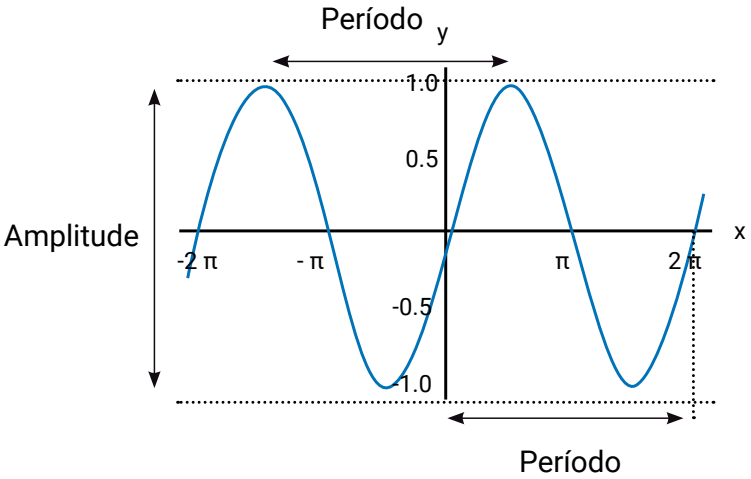
Por fim, no espaço de 3π/2 a 2π, o seno cresce de -1 a 0, completando uma volta.

Com base nessas informações, podemos desenhar a curva conhecida como **senoide.**



Na senoide comum, ou seja, aquela característica da função $f(x) = sen\, x$, podemos notar alguns elementos:

- **Amplitude (A):** é a distância entre os valores máximos e mínimos atingidos pelo seno. No caso, esses valores são -1 e 1, portanto, a amplitude do seno é igual a 2;
- **Centro (C):** corresponde ao valor médio da função, que é a média aritmética dos extremos. No caso da função seno, o centro é igual a 0;
- **Período (T):** é o intervalo de valores para o qual a função começa a se repetir. Um período é também chamado na Física de comprimento de onda, pois se refere ao intervalo necessário para produzir uma figura completa da senoide, ou seja, para fazer todo o ciclo de partir de 0 subir até 1, descer até -1 e voltar a 0 novamente. O período pode ser medido também entre dois topos (parte mais alta da onda) ou entre dois vales (parte mais baixa da onda);
- **Fase (φ):** corresponde ao deslocamento lateral do gráfico. No caso da senoide padrão, a fase é nula.



O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Um conceito frequentemente cobrado em provas é a **imagem** da função seno, que corresponde ao conjunto de todos os valores de **y** que são visualizados nesse gráfico.

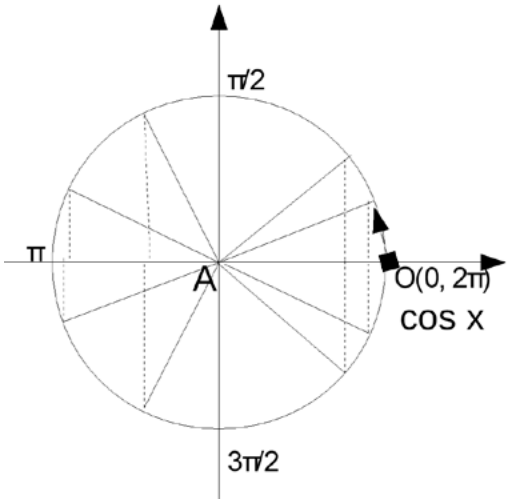
Na seta da amplitude, mostramos que a imagem da função seno vai de -1 a 1 o que pode ser representado como [-1, 1].

Na imagem, podemos visualizar diretamente o ponto médio, que corresponde à média aritmética dos extremos e a amplitude, que corresponde à diferença dos extremos.

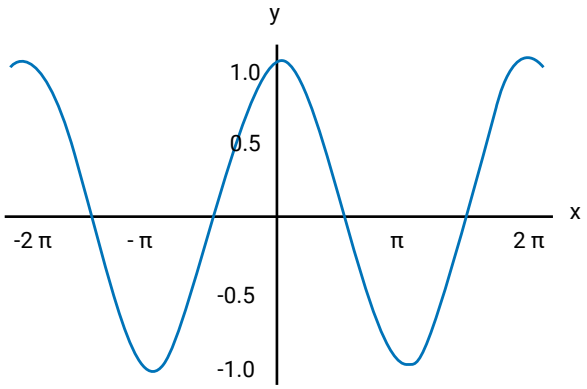
$$VM = \frac{-1+1}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$A = 1 - (-1) = 2$$

Podemos fazer o mesmo desenho para o cosseno.



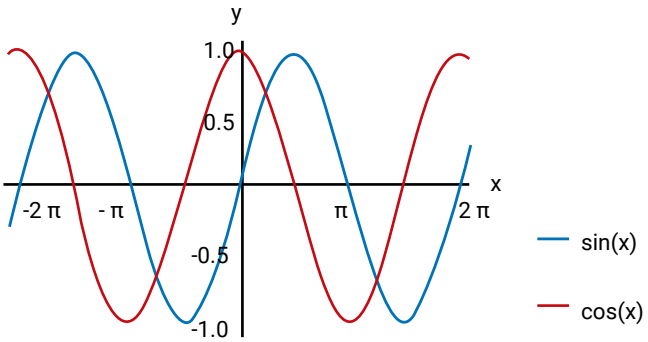
Perceba que, no ângulo de 0, partimos de cosseno igual a 1. O cosseno vai diminuindo até atingir o valor de -1 em π. Depois o cosseno volta a crescer até atingir o valor de 1 em 2π.



No cosseno, também podemos notar o valor médio em 0, a amplitude igual a 2 e o período de 2π.

É interessante observar que o cosseno corresponde a deslocamento de −π/2 do seno. Em outras palavras, se pegarmos a senoide e deslocarmos para a esquerda de π/2, teremos a cossenoide. Vejamos:

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.



Sendo assim, já podemos escrever as seguintes relações.

$$\cos x = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$sen\ x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Outro fato importante a se considerar é que, como já vimos na Reversão ao Primeiro Quadrante, a adição de meia-volta muda o sinal do seno e do cosseno. Portanto, quando falamos na função $y = -sen\ x$, na verdade, podemos considerar um deslocamento para a direita (ou para a esquerda) de meia volta.

$$y = -sen\ x = sen\ (x + \pi)$$

$$y = -cos\ x = cos\ (x + \pi)$$

Compreendidos esses pontos, vamos aprender a traçar o gráfico do seno e do cosseno quando essas funções estiverem modificadas.

2.1. Funções Seno e Cosseno Modificadas

A função seno pode ser escrita genericamente como:

$$y = Asen\ (\omega x + \varphi) + B$$

Nessa expressão, teremos que:

- **Amplitude:** é o próprio valor de A;
- **Valor Médio:** é o próprio valor de B;
- **Período (T):** é a razão;

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

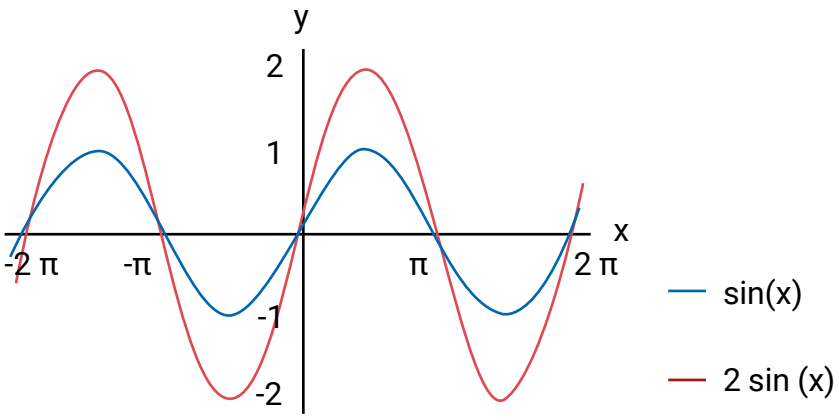
- **Fase (φ):5** é o próprio valor do ângulo φ.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Vamos analisar os efeitos de cada um desses fatores individualmente para facilitar o seu entendimento da matéria.

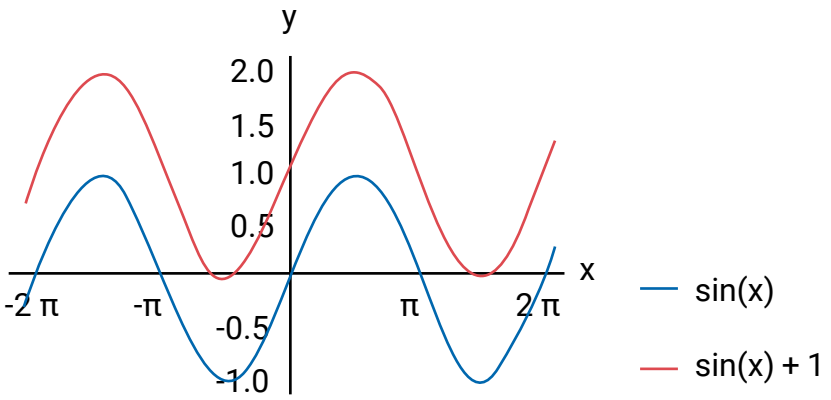
A amplitude provoca um crescimento longitudinal (de baixo para cima) do gráfico. Em vez de ir de -1 a 1, ele passa a ser de –A a A.

Por exemplo, vejamos o gráfico da função $y = 2\,sen\,(x)$



Se a imagem do seno convencional é [-1, 1], a imagem da função 2sen(x) será duplicada [-2, 2].

Por outro lado, o valor médio provoca um deslocamento longitudinal – deslocamento e não crescimento. Vejamos o gráfico da função $y = 1 + sen\,(x)$.



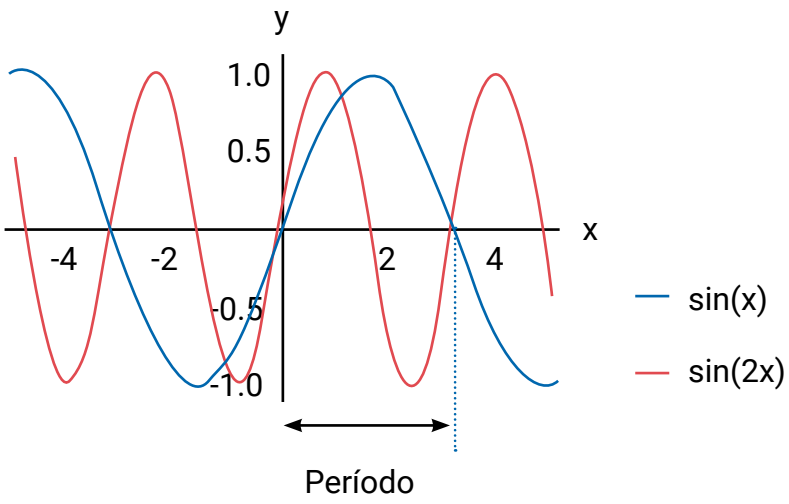
Nesse caso, a imagem da função y = 1 + sen(x) passou de [-1,1] a ser [0,2]. Perceba que não houve nenhuma mudança na amplitude que continua sendo igual a 2. Somente o valor médio foi alterado.

Uma dica que posso dar que acredito que facilita a resolução de questões de prova é **sempre aplicar primeiro a amplitude**, antes de aplicar o valor médio.

O fator ω, por sua vez, provoca mudanças no período. Em outras palavras, a curva fica mais estreita ou mais larga. Ela cresce ou decresce lateralmente.

Vejamos o gráfico da função $y = sen\,(2x)$. Essa curva terá o período reduzido que pode ser calculado como $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

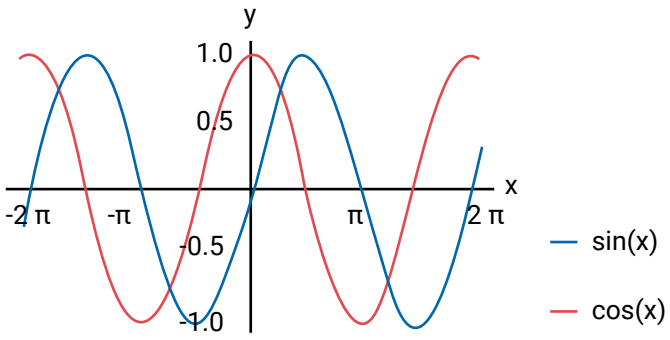


A mudança de período não causa nenhuma alteração na imagem da função seno, que continua sendo [-1, 1].

Observe que o período desse gráfico foi realmente ligeiramente acima de 3, tendo em vista que o valor aproximado de $\pi \cong 3,,14$.

Por fim, a fase φ provoca um deslocamento lateral. Se a fase for negativa, o deslocamento do gráfico será para a direita. Se a fase for positiva, o deslocamento será para a esquerda.

Já havíamos comentado que o cosseno é um simples deslocamento lateral da função seno $y = sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Como a fase empregada é positiva, o deslocamento acontece para a esquerda.



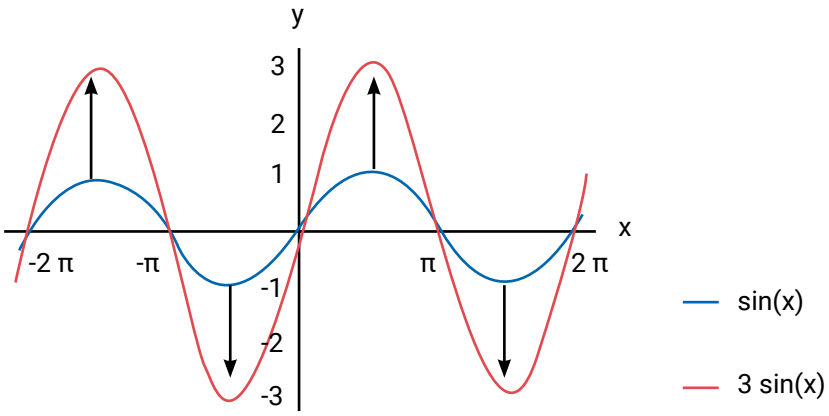
Podemos visualizar também o que acontece com o gráfico da função $y = sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

O mais comum em questões de prova é mesmo misturar tudo de uma vez numa única questão.

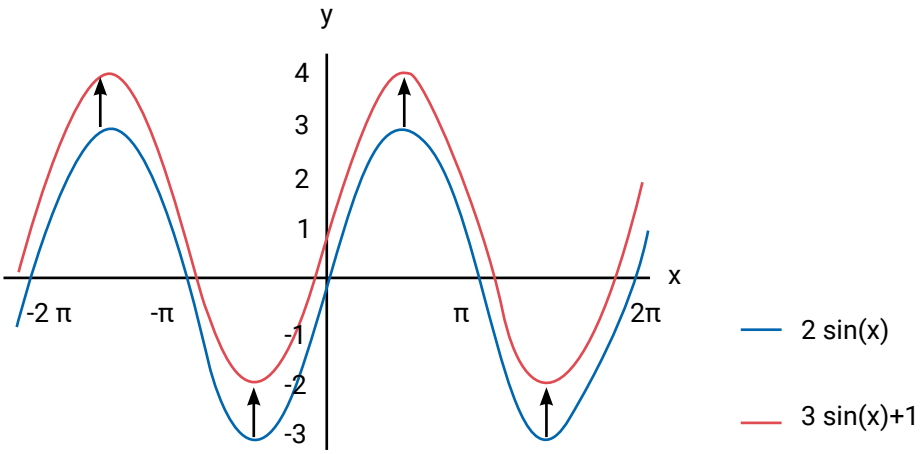
Vejamos, por exemplo, o gráfico da função $y = 1 + 3\,sen\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$. Como construir esse gráfico?

Primeiramente, vamos partir de uma senoide. Agora, vamos aplicar a amplitude. Se a imagem do seno vai de [-1, 1], com a amplitude, ela passará a triplicar, ou seja, vai ser [-3, 3].

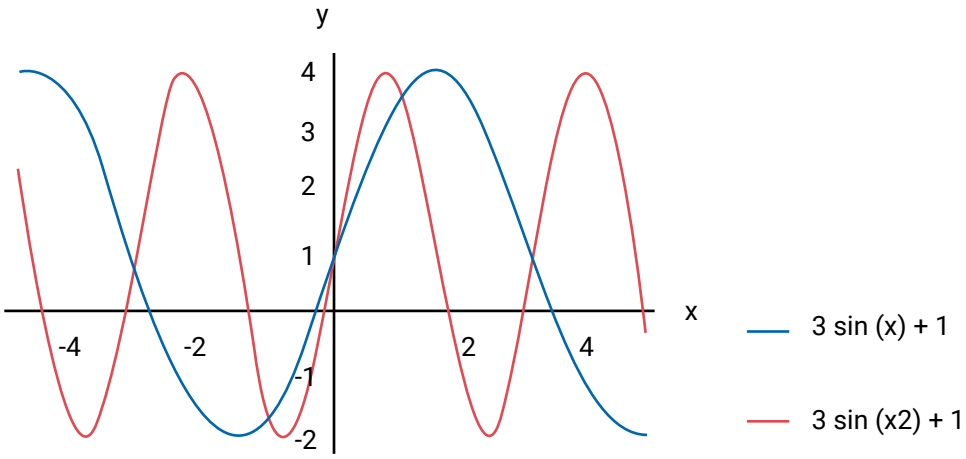
O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.



Agora, vamos aplicar o deslocamento vertical devido ao valor médio (B = 1). Se a imagem era [-3, 3], agora vai passar a ser [-2, 4]. Teremos o seguinte:

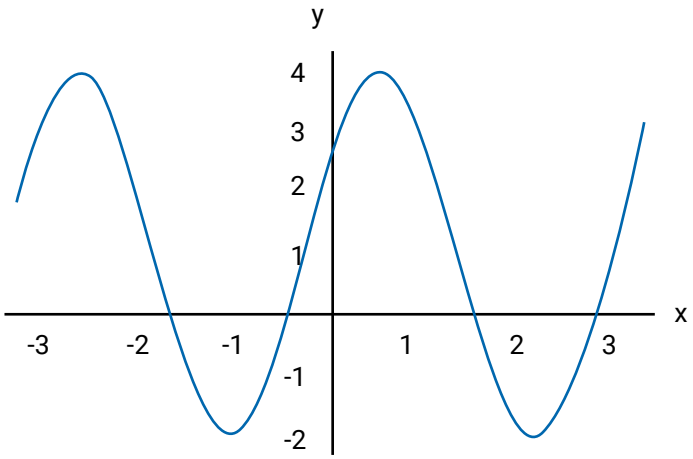


Agora, vejamos o efeito do período. O novo período será $y = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Portanto, a onda ficará mais estreita.

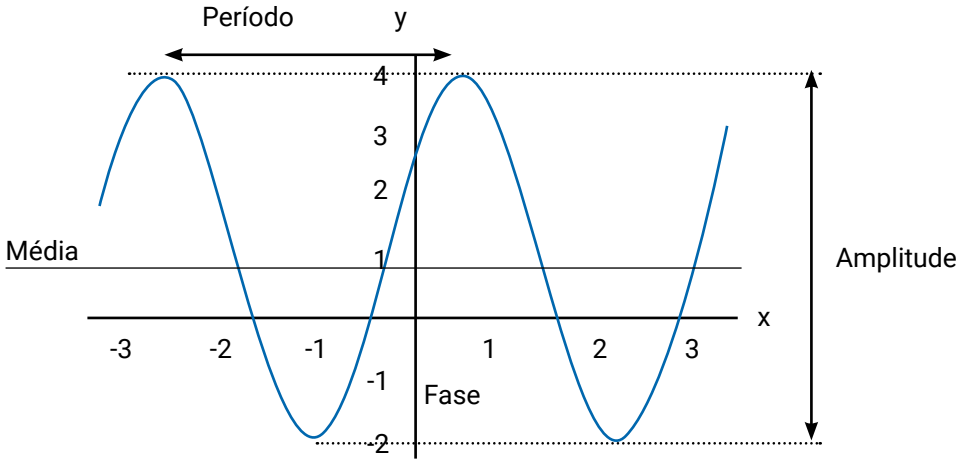


Por fim, vamos aplicar a fase, deslocando a onda de $\frac{\pi}{6}$ para a esquerda. O deslocamento é para a esquerda porque a fase é positiva.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.



Nada impede também que tivéssemos feito diretamente. No gráfico a seguir, podemos visualizar o efeito de todos os fatores que foram colocados.



2.2. Reconhecer Função Seno e Cosseno

Em muitas questões de provas, você será apresentado a um gráfico e o examinador lhe pedirá para determinar qual função é aquela que está representada no gráfico.

Para isso, além de reconhecer média e amplitude, é interessante reconhecer quando o gráfico está mais próximo de um seno ou cosseno.

A principal dica para isso é que a função seno é uma função ímpar, enquanto que a função cosseno é par.

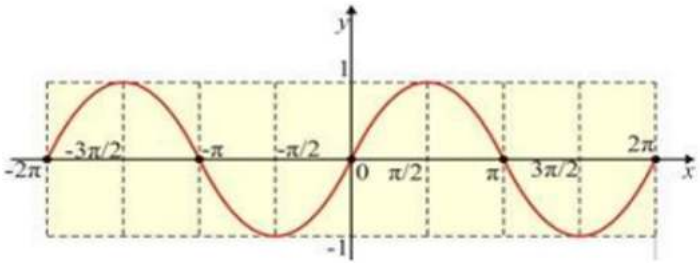
Isso significa que a função cosseno é simétrica em relação à origem. Ou seja, elementos simétricos possuem a mesma imagem. Por exemplo, $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

No caso da função seno, elementos simétricos possuem imagens simétricas. Por exemplo, $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Direto do Concurso

010. (ORHION CONSULTORIA/PREFEITURA DE JAGUARIÚNA-SP/2018/ASSISTENTE DE GESTÃO PÚBLICA) Na área de funções matemáticas, existem diversos tipos de função. Cada função tem suas propriedades e gráficos. Observe o gráfico a seguir:



Qual é o tipo de função que corresponde a imagem acima?

a) Função Exponencial.

b) Função Polinomial.

c) Função Algébrica.

d) Função Seno.

Salta aos olhos a curva periódica, conhecida como senoide.

Letra d.

011. (FRAMINAS/COPASA/2012/AUXILIAR DE SERVIÇOS DE SANEAMENTO) Assinale a alternativa CORRETA, que traz a defasagem angular entre as funções y=sen(x) e y=cos (x):

a) 0º

b) 45º

c) 90º

d) 180º

Devemos nos lembrar que a defasagem entre o seno e o cosseno é de 90º. Podemos inclusive escrever que:

$$\cos x = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Letra v.

012. (IFB/2017/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) As funções senoides por serem periódicas são muito utilizadas nos cálculos de movimentos de marés, movimentos de pêndulos, sinais

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

de ondas sonoras e luminosas etc. A função $y = 3.sen\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$ representa o movimento de maré de uma localidade na região norte do Brasil. Em relação à função dada, assinale as afirmações dadas a seguir como VERDADEIRAS com (V) ou FALSAS com (F).

( ) É uma função periódica e seu período é 2π.
( ) Sua imagem é o intervalo [−1,1].
( ) O domínio é o conjunto dos números reais.
( ) É uma função periódica e seu período é π.
( ) Se anula em infinitos valores para *x*.

Assinale a alternativa que contém a sequência **CORRETA** de cima para baixo.

a) F, V, V, V, F
b) F, F, V, V, V
c) V, F, F, V, V
d) F, V, F, V, V
e) V, F, V, F, V

Compararemos essa expressão com a expressão de uma senoide genérica.

$$y = Asen\,(\omega x + \varphi) + B$$

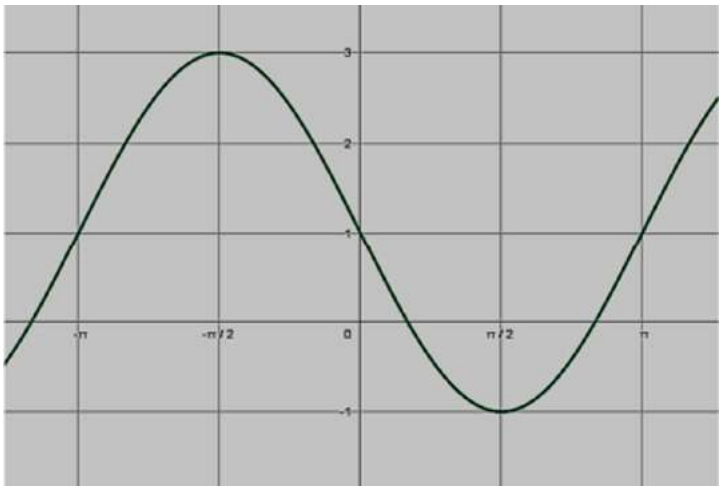
O período da função é dado por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

Portanto, a afirmação I está falsa, mas IV está correta.
Como há uma amplitude, a imagem foi expandida de [-1,1] para [-3,3]. A seguir, adicionamos um deslocamento longitudinal de 1, portanto, a imagem da função é [-2, 4]. Logo, a afirmação II também está falsa.
O domínio da função seno é realmente o conjunto dos números reais. Afirmação III está correta.
Como o seno é periódico, realmente vai se anular infinitas vezes. Logo, a afirmação está V está correta.
Letra b.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

013. (FUMARC/SEE-MG/2018/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) O gráfico abaixo representa uma função trigonométrica.



A lei dessa função pode ser dada por:

a) $f(x) = 2 - sen\ (x)$

b) $f(x) = 1 + 2sen\ (x)$

c) $f(x) = -1 - 2sen\ (x)$

d) $f(x) = 1 - 2sen\ (x)$

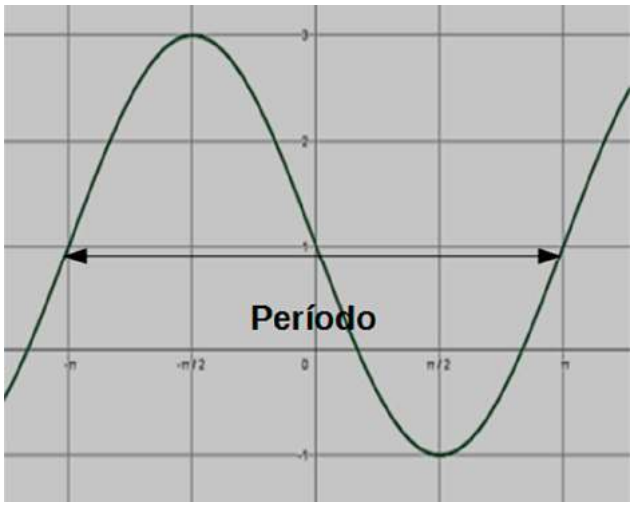
e) $f(x) = -2 - sen\ (x)$

A função fornecida tem imagem [-1, 3]. Dessa forma, ela apresenta um valor médio e uma amplitude. Calcularemos:

$$Média = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$A = \frac{3-(-1)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

O período não foi modificado, continua sendo de 2π, que é o período da senoide convencional.



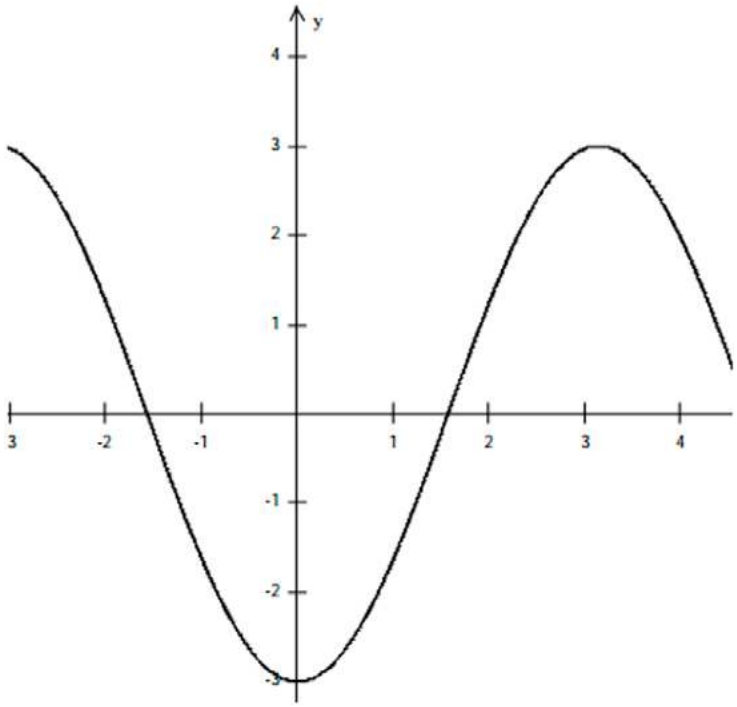
O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Devemos agora analisar se a função é seno ou cosseno. Para isso, podemos observar que ela é uma função ímpar. Ou seja, é antissimétrica em relação à origem, portanto, é uma função seno. Perceba que ela está centrada no zero. No entanto, logo após o zero, a função é decrescente, enquanto que o seno convencional seria crescente. Portanto, houve uma mudança de sinal – ou um deslocamento de fase de π.
Sendo assim, a função pedida é:

$$y = 1 - 2\,sen\,(x)$$

Letra d.

014. (CETRO/FUNDAÇÃO CASA/2014/TÉCNICO EM INFORMÁTICA/REDE) Observe o gráfico abaixo.



Diante do exposto, assinale a alternativa que apresenta a função que **melhor** se adéqua a esta representação gráfica.
a) f (x) = −3 + sen(x)
b) f (x) = −3sen(x)
c) f x = -cos(x)/3
d) f(x) = −3cos(x)
e) f (x) = cos(x) − 3

O gráfico citado lembra bastante o cosseno, pois é par, porém perceba que está negativo, tendo em vista que o cosseno de zero deveria ser o valor máximo da função e está o valor mínimo.
A amplitude da função é de [-3, 3] o que indica que a curva foi multiplicada por 3.
Letra d.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

015. (MS CONCURSOS/PREFEITURA DE ITAPEMA-SC/2016/AGENTE MUNICIPAL DE TRÂNSITO) A temperatura de uma cidade variou, ao longo de um dia, segundo a função f(x) = a + b. sen(nx/12 + π),onde x representa o tempo, em horas (0 ≤ x < 24). Sabendo que, nesse dia, a temperatura máxima foi de 36ºC e a temperatura mínima foi de 20ºC, então o valor de b é:

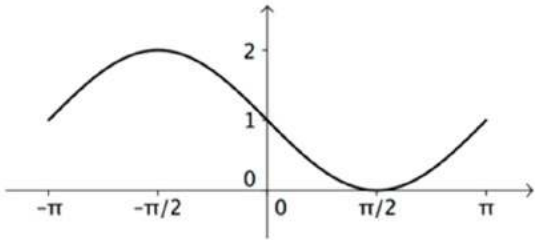
a) 8
b) 20
c) 28
d) 36

O valor de b corresponde à amplitude que é a semidiferença dos valores extremos:

$$b = \frac{36 - 20}{2} = \frac{16}{2} 8$$

Letra a.

016. (FGV/SEE/PE/2016/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Uma função trigonométrica cuja expressão contém apenas seno e/ou cosseno além de alguma constante tem o seguinte gráfico no intervalo [−π, π]:



a) y -1 + sen(x)
b) y = 1 - sen(x)
c) y = 1+ cos(x)
d) y = 1- cos(x)
e) y =sen(x) - cos(x)

Primeiro ponto é que essa função está mais próxima de seno porque não é simétrica em relação à origem. O sinal é negativo, porque a função começa de zero decrescendo, enquanto o seno original começa crescente.
Além disso, o período e a amplitude foram mantidos. Houve apenas um deslocamento para cima, pois a média do gráfico está em 1.
Sendo assim, a função é y = 1 − sen (x)
Letra b.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

3. Soma de Arcos

A expressão chave aqui diz respeito à soma de arcos.

$$sen\ (a+b) = sen\ (a)\cos(b) + sen(b)\cos(a)$$

É uma expressão muito bonita. Até rima.

A soma de arcos é fácil de decorar.

Seno a cosseno b.

Mais seno b cosseno a.

A demonstração dessa propriedade é sofisticada, por isso, está fora do escopo desse material.

Temos também o cosseno da soma de arcos.

$$cos\ (a+b) = cos\ (a)\cos(b) - sen(a)\,\mathrm{sen}(b)$$

Também temos as expressões para os arcos da diferença. Para obtê-las, basta lembrar que o cosseno é uma função par, ou seja, cos (-x) = cos (x) e que o seno é uma função ímpar, ou seja, sen (-x) = - sen (x).

Sendo assim, nas expressões do seno e cosseno, devemos apenas trocar o sinal onde tem o seno.

$$sen\ (a-b) = sen\ (a)\cos(b) - sen(b)\cos(a)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + sen(b)\,\mathrm{sen}(a)$$

Podemos também obter a expressão da tangente da soma.

$$\tan(a+b) = \frac{sen\ (a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{sen\ (a)\cos(b) + sen(b)\cos(a)}{cos\ (a)\cos(b) - sen(a)\,\mathrm{sen}(b)}$$

Dividindo o numerador e o denominador pelo produto cos (a). cos (b), temos:

$$\tan(a+b) = \frac{\dfrac{sen\ (a)\cos(b)}{\cos(a)\cos\ (b)} + \dfrac{sen(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos\ (b)}}{\dfrac{cos\ (a)\cos(b)}{\cos(a)\cos\ (b)} - \dfrac{sen(a)\,\mathrm{sen}(b)}{\cos(a)\cos\ (b)}} = \frac{\tan(a) + \tan\ (b)}{1 - \tan(a)\tan\ (b)}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

A tangente da diferença é calculada mudando-se o sinal da tangente de b.

$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan\ (b)}{1 + \tan(a)\tan\ (b)}$$

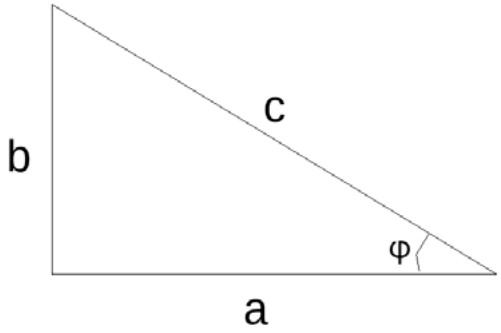
O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

3.1. Soma de Seno com Cosseno

O gráfico mais complicado que uma questão de prova pode pedir envolve a soma de senos com cossenos. São expressões da forma:

$$y = a\,sen\,x + b\cos x$$

O modo mais fácil de resolver esse tipo de questão é tomando o Teorema de Pitágoras utilizando os parâmetros **a** e **b** como catetos de um triângulo retângulo.



$$c^2 = a^2 + b^2 \therefore c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Podemos calcular o seno e o cosseno do ângulo hipotético φ:

$$sen\,\varphi = \frac{b}{c} \therefore b = c.sen\,\varphi$$

$$cos\,\varphi = \frac{a}{c} \therefore a = c.\cos\varphi$$

Essa transformação é muito útil, pois agora podemos escrever:

$$y = a\,sen\,x + b\cos x$$

$$y = c.\cos\varphi\ \ sen\,x + c.sen\,\varphi\cos x$$

$$\therefore y = c.sen(x + \varphi)$$

Dessa forma, conseguimos transformar uma soma de seno e cosseno em uma simples função seno com uma fase.

Vejamos um exemplo. Qual o valor máximo da função: $y = sen\,x + \cos x$?

Temos o seguinte:

$$y = 1.senx + 1.\cos x$$

Devemos tomar:

$$c = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Agora:

$$y = \sqrt{2} sen\,(x + \varphi)$$

Como foi perguntado apenas o valor máximo da função, já sabemos que o coeficiente de amplitude é que determina. Sendo assim, o valor máximo é igual a $\sqrt{2}$.

Porém, para fins didáticos, podemos calcular a fase.

$$\text{sen}\,\varphi = \frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

O arco que possui o seno e o cosseno citados é π/4. Portanto, poderíamos escrever que:

$$y = sen\,x + \cos x = \sqrt{2} sen\,\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Acredito que, caso esse assunto seja cobrado em alguma prova de nível muito avançado, ele se restringirá a perguntar o valor máximo ou amplitude do gráfico da função. No entanto, vale a pena saber como calcular a fase, assim, você estará preparado para tudo o que pode vir a aparecer em Trigonometria.

3.2. Arco Duplo

O arco (2x) pode ter seu seno, cosseno e tangente calculados com a aplicação das fórmulas do item anterior.

Usaremos o seno da soma. "Fácil de decorar – seno a cosseno b mais seno b cosseno a" até rima.

$$sen\,(a + b) = sen\,(a)\cos(b) + sen(b)\cos(a)$$

Basta fazer a = b = x.

$$sen\,(x + x) = sen\,x cos\,x + sen\,x cos\,x$$

$$\therefore sen\,(2x) = 2sen\,x cos\,x$$

Para o cosseno do arco duplo, teremos uma variedade maior de expressões:

$$cos\,(a + b) = cos\,(a)\cos(b) - sen(a)\,\text{sen}(b)$$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Fazendo a = b = x, teremos:

$$cos\,(x+x) = cos\,(x)\cos(x) - sen(x)\,\mathrm{sen}(x)$$
$$\therefore cos\,(2x) = \cos^2(x) - sen^2(x)$$

Utilizando a Relação Trigonométrica Fundamental, teremos:

$$\boldsymbol{\cos(2x) = \cos^2(x) - sen^2(x)} \quad \textbf{(I)}$$
$$\boldsymbol{1 = \cos^2(x) + sen^2(x)} \quad \text{(II)}$$

Somando as duas expressões (I + II) acima, teremos:

$$1 + \cos(2x) = 2\cos^2(x)$$

$$\therefore \cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$$

Subtraindo as expressões (II – I) teremos:

$$1 - \cos(2x) = 2\,\mathrm{sen}^2(x)$$
$$\therefore \cos(2x) = 1 - 2sen^2(x)$$

Sendo assim, temos uma expressão para o seno do arco duplo e três expressões para o cosseno do arco duplo.

$$sen\,(2x) = 2sen\,x cos\,x$$

$$os\,(2x) = \cos^2(x) - sen^2(x)$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$$

$$\cos(2x) = 1 - 2sen^2(x)$$

3.3. Arco Metade

Para o arco metade, podemos pegar as duas últimas expressões do cosseno do arco duplo e fazer uma mudança de variáveis assumindo que y = 2x, portanto, x = y/2:

$$\cos(y) = 2\cos^2(y/2) - 1$$
$$2\cos^2\left(\frac{y}{2}\right) = 1 + \cos(y)$$
$$\cos^2\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{1+\cos(y)}{2}$$
$$\therefore \cos\left(\frac{y}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(y)}{2}}$$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Fazendo a mesma mudança de variáveis para a quarta expressão, teremos:

$$\cos(y) = 1 - 2\,sen^2(y/2)$$

$$2sen^2\left(\frac{y}{2}\right) = 1 - \cos(y)$$

$$sen^2\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{1-\cos(y)}{2}$$

$$\therefore\ sen\left(\frac{y}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(y)}{2}}$$

Duas coisas importantes a se notar sobre essas expressões. Primeiramente é que a única coisa que muda do cosseno para o seno do arco metade é um sinal dentro da raiz quadrada.

$$\cos\left(\frac{y}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(y)}{2}}$$

$$sen\left(\frac{y}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(y)}{2}}$$

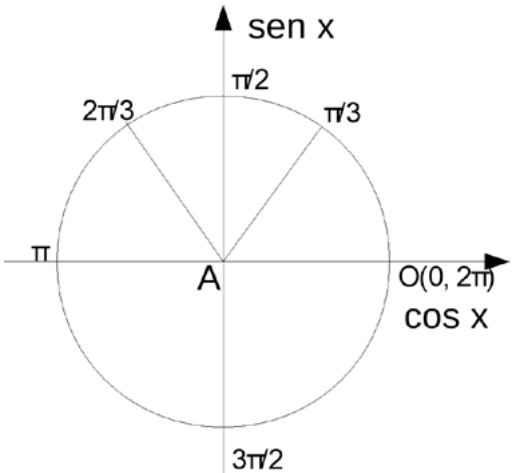
Outro ponto é que as expressões foram obtidas com ±, o que significa que **o sinal não é calculado diretamente** por essas expressões.

Para obter o sinal, precisamos saber o quadrante em que está localizado o arco-metade.

Por exemplo, considere o ângulo $x = \frac{2\pi}{3}$. Como já vimos $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$, teremos que o cosseno do arco metade é:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1/2}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$$

Para descobrir o sinal do cosseno desse ângulo, devemos localizar o quadrante em que está π/3.



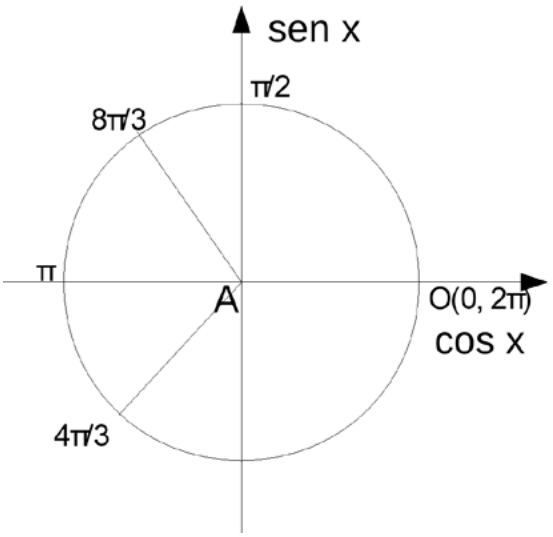
O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

O ângulo π/3 é maior que zero e superior a π/2. Sendo assim, o ângulo π/3 está no primeiro quadrante.

Agora, vejamos o exemplo do ângulo 8π/3. Perceba que esse ângulo é exatamente igual a 2π/3 acrescido de uma volta (2π). Portanto, $\cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$. Dessa forma, podemos calcular o cosseno do arco metade novamente pela expressão.

$$\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{8\pi}{3}\right)}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1/2}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$$

Agora, precisamos notar que o ângulo 4π/3 é superior a π e inferior a 3π/2, portanto, se localiza no terceiro quadrante.



Note, ainda, que o arco 8π/3 ocupa exatamente a posição do arco 2π/3. Porém as suas metades não ocupam a mesma posição.

Por fim, como o arco 4π/3 está no terceiro quadrante, temos que o seu cosseno é negativo. Sendo assim:

$$\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

Dessa maneira, para calcular o cosseno ou seno do arco metade é essencial determinar o quadrante em que estará localizado esse arco.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

3.4. Transformação de Soma em Produto

A transformação de soma em produto é um assunto também bastante frequente.

$$sen\,p + sen\,q = 2\,sen\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$sen\,p - sen\,q = 2\,sen\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2\,sen\left(\frac{p+q}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

O modo mais simples de se lembrar dessas expressões é focar na soma de senos e na soma de cossenos.

Note que essas expressões são muito semelhantes ao primeiro termo obtido para a soma de arcos, só que multiplicado por 2. Vejamos:

$$sen(a+b) = sen\,a\cos b + sen b\cos a$$

$$sen\,p + sen\,q = 2\,sen\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$cos(a+b) = \cos a\cos b - sen\,a\,sen\,b$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Já as expressões para a diferença de senos e diferença de cossenos se parece com o segundo termo obtido para a soma de arcos, só que multiplicada por 2.

$$sen(a+b) = sen\,a\cos b + sen b\cos a$$

$$sen\,p - sen\,q = 2\,sen\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$cos(a+b) = \cos a\cos b - sen\,a\,sen\,b$$

$$\cos p - \cos q = -2\,sen\left(\frac{p+q}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

É bastante provável que, se forem cobradas, essas expressões sejam cobradas literalmente, ou seja, basta você aplicá-las diretamente.

Direto do Concurso

017. (IFRS/2018/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Dada a função f= R → R, tal que f(x)= sen(x) + cos(x), qual dos números abaixo NÃO faz parte do conjunto imagem?

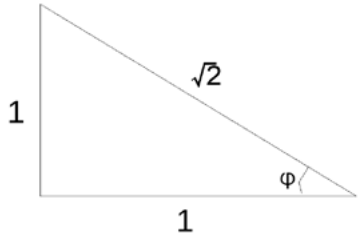
O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

a) -1
b) 0
c) 1
d) √2
e) √3

A função escrita é uma soma de seno e cosseno.

$$y = sen\,x + \cos x = 1.sen\,x + 1.\cos x$$

Ela pode ser transformada somente em seno usando um triângulo retângulo.



$$y = \sqrt{2}sen\,(x + \varphi)$$

A fase não influencia no conjunto imagem portanto, nem precisamos calcular. Como temos somente o fator amplitude, teremos que a imagem será $[-\sqrt{2}, +\sqrt{2}]$. Logo $\sqrt{3}$ está fora dessa imagem.

Letra e.

018. (QUADRIX/SEDUCE-GO/2018/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Assinale a alternativa que apresenta o valor de sem (195º) + sem (75º).

a) √2
b) 1
c) √2/2
d) 1/2
e) √2 – 1

Basta utilizar a expressão da transformação de soma em produto.

$$sen\,(p) + sen(q) = 2sen\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$sen\,(195) + sen(75) = 2sen\left(\frac{195+75}{2}\right)\cos\left(\frac{195-75}{2}\right)$$

$$sen\,(195) + sen(75) = 2sen\left(\frac{270}{2}\right)\cos\left(\frac{120}{2}\right)$$

$$sen\,(195) + sen(75) = 2sen(135)\cos(60) = 2.\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

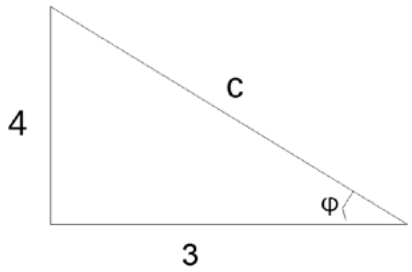
Letra c.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

019. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2018/QUÍMICO DE PETRÓLEO JÚNIOR) O maior valor que a função real, y = f(x), de variável real, definida por y = 3sen(x) + 4cos(x), pode assumir é:

a) 1
b) 4
c) 5
d) 7
e) 7√2/2

Para calcular o maior valor da função, podemos recorrer à técnica do triângulo retângulo, lembrando-nos de que o termo que acompanha o seno deve ser adjacente à fase.



Podemos calcular o valor de c pelo Teorema de Pitágoras:

$$c^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \therefore c = \sqrt{25} = 5$$

Letra c.

020. (FUNCAB/POLITEC/MT/2013/PERITO CRIMINAL/FARMÁCIA) Calcule o valor de t igualdade abaixo.

t = 2. (sen(15º) + cos(75º))

a) √6 - √2
b) √6 + √2
c) √2 + √3
d) √2 - √3
e) √6

Aqui fica difícil utilizar as expressões para a transformação de soma em produto porque não conhecemos nenhuma expressão para somar seno com cosseno.

Porém, podemos converter um cosseno em seno usando os ângulos complementares.

$$t = 2.\left(sen\ (15°) + sen(15°)\right) = 4sen\ 15°$$

O seno desse ângulo, por sua vez, pode ser calculado a partir do arco de 30º usando o arco metade.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

$$sen\ 15° = +\sqrt{\frac{1-cos30°}{2}} = +\sqrt{\frac{1-\sqrt{3}/2}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Vale notar que o seno deve ser positivo, porque o ângulo de 15º está no primeiro quadrante.

$$t = 4sen\ 15° = 2\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{4.2-4.\sqrt{3}} = \sqrt{8-4\sqrt{3}}$$

Note que não encontramos nenhuma das respostas, por enquanto, pois ainda precisamos extrair essa raiz quadrada. Em provas de concursos, o que sugeriria é literalmente testar as alternativas.

$$(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2 = 6-2\sqrt{6}.\sqrt{2}+2 = 8-2\sqrt{12} = 8-4\sqrt{3}$$

Já encontramos o que procurávamos:

$$t = 4sen\ 15° = \sqrt{8-4\sqrt{3}} = \sqrt{6}-\sqrt{2}$$

Letra a.

---

021. (FAFIPA/PREFEITURA DE PARANAGUÁ/PR/2016/ECONOMISTA) Calcule tg³ (α+ β), para tg α = 1 e cot β = - 1/3.

a) -8
b) -2
c) - 1/ 8
d) - 1/ 2

A cotangente é o inverso da tangente, portanto temos:

$$\tan\beta = \frac{1}{-1/3} = -3$$

Agora, vamos proceder o cálculo da tangente da soma:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\ tan\beta} = \frac{1-3}{1-1.(-3)} = \frac{-2}{1+3} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Como a questão pediu a tangente ao cubo, basta aplicar essa potência.

$$\tan^3(\alpha+\beta) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$$

Letra c.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

022. (PREFEITURA DO RIO DE JANEIRO/2016/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Seja *k* um número real tal que *sen10º = k*. O valor de *cos20º* é igual a:

a) $1 - k^2$

b) $2 - k^2$

c) $1 - 2k^2$

d) $2 - 2k^2$

Aplicação direta da expressão do cosseno do arco duplo em função do seno.

$$\cos 2x = 1 - 2sen^2x$$

$$\therefore \cos 20 = 1 - 2sen^2 10 = 1 - 2k^2$$

Letra c.

023. (FUNCERN/IFRN/2015/ASSISTENTE EM ADMINISTRAÇÃO) Considere x um arco tal que π/2 < x < π e sen x = 3/5.

Sobre os referidos dados, assinale a opção correta.

a) cos x < sen 2x < cos 2x

b) sen 2x < cos 2x < cos x

c) cos 2x < cos x < sen x

d) sen 2x < cos x < sen x

Como x é um arco do segundo quadrante, temos que o seu cosseno será negativo. Aplicando a Relação Trigonométrica Fundamental, temos:

$$sen^2x + \cos^2 x = 1$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} = 16/25$$

$$\therefore \cos x = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$$

O seno e o cosseno do arco duplo podem ser calculados pelas expressões conhecidas.

$$sen\ 2x = 2sen\ x \cos x = 2.\left(-\frac{4}{5}\right).\left(\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$

$$\cos 2x = 1 - 2sen^2x = 1 - 2.\left(\frac{9}{25}\right) = 1 - \frac{18}{25} = \frac{7}{25}$$

Dessa maneira, temos que sen 2x < cos x < cos 2x < sen x

Letra d.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

024. (IMA/PREFEITURA DE CANAVIEIRA PI/2015/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Quais valores k pode assumir para tornar possível a igualdade cos $x = 2k + 13$?

a) $\{k \in R / k \leq -13 \text{ e } k \geq -2\}$

b) $\{k \in R / -13 \leq k \leq -2\}$

c) $\{k \in R / k \leq -7 \text{ e } k \geq -6\}$

d) $\{k \in R / -7 \leq k \leq -6\}$

A imagem do cosseno se situa sempre entre [-1, 1]. Sendo assim, devemos ter:

$$-1 \leq 2k + 13 \leq 1$$

$$-1 - 13 \leq 2k \leq 1 - 13$$

$$-14 \leq 2k \leq -12$$

$$-7 \leq k \leq -66$$

Letra d.

025. (ESAF/AFRFB/2014) O cosseno de um ângulo x, com $\pi/2 < x < \pi$, é igual a -7/25. Desse modo, a tangente de x/2 é igual a:

a) -4/3

b) 4/3

c) -3/2

d) 3/23

e) 1

Para calcular o sinal do arco metade, precisamos localizá-lo em termos de quadrantes. De antemão sabemos que:

$$\frac{\pi}{2} < x < \pi$$

$$\therefore \frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$$

Sendo assim, o arco metade está localizado no primeiro quadrante. Portanto, terá o seno e o cosseno ambos positivos. Agora, calculemos:

$$sen\left(\frac{x}{2}\right) = +\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1-(-\frac{7}{25})}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{7}{25}}{2}} = \sqrt{\frac{32}{25.2}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$cos\left(\frac{x}{2}\right) = +\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1+(-\frac{7}{25})}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{7}{25}}{2}} = \sqrt{\frac{18}{25.2}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Por fim, a tangente é simplesmente a razão entre o seno e o cosseno.

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{sen\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{4/5}{3/5} = \frac{4}{3}$$

Letra b.

---

026. (ESAF/AFRFB/2012) Considerando-se a expressão trigonométrica x = 1 + cos 30º, um dos possíveis produtos que a representam é igual a:

a) 2 cos² 15º
b) 4 cos² 15º
c) 2 sen² 30º
d) 2 cos² 30º
e) 4 sen² 15º

A expressão x nos lembra bastante da expressão do cosseno do arco metade que também envolve a soma 1 + cosseno.

$$\cos 15° = \sqrt{\frac{1 + cos30°}{2}}$$

$$\cos^2 15° = \frac{1 + cos30°}{2}$$

$$\therefore 1 + cos30° = 2\cos^2 15°$$

Letra a.

---

027. (IF-RS/2018/IF-RS/MATEMÁTICA) As afirmativas abaixo envolvem os conceitos da Trigonometria no que se referem à relação entre lados e ângulos de um triângulo, relações trigonométricas e a variação dos arcos no ciclo trigonométrico.

I – Em um triângulo ABC são conhecidas as medidas dos lados AC = 45 cm, AB = 40 cm e BC = 34 cm. Nessas condições o ângulo C deve ser agudo.
II – No triângulo DEF o lado DF = 180 cm e o ângulo Ê = 135º. Se o ângulo F = 30º então DE é aproximadamente 127cm.
III – A relação sec x − cos x = sen x. tan x não é uma identidade trigonométrica.
IV – Quando os arcos do ciclo trigonométrico variam entre 270º até 360º, os valores da função secante são decrescentes.

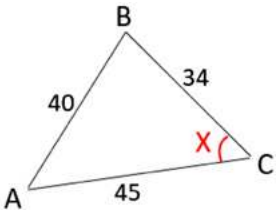
Assinale a alternativa em que todas as afirmativas estão CORRETAS:

a) Apenas I e II.
b) Apenas I e IV.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

c) Apenas I, II e IV.
d) Apenas II, III e IV.
e) I, II, III e IV.

I – Correta. Observe como ficaria uma representação do triângulo.



Utilizando a lei dos cossenos, temos:

$$40^2 = 34^2 + 45^2 - 2 \cdot 34 \cdot 45 \cdot \cos(x)$$

$$1600 = 34^2 + 45^2 - 2 \cdot 34 \cdot 45 \cdot \cos(x)$$

$$1600 = 1156 + 45^2 - 2 \cdot 34 \cdot 45 \cdot \cos(x)$$

$$1600 = 1156 + 2025 - 2 \cdot 34 \cdot 45 \cdot \cos(x)$$

$$1600 = 1156 + 2025 - 3060 \cdot \cos(x)$$

$$3060 \cdot \cos(x) = 1156 + 2025 - 1600$$

$$3060 \cdot \cos(x) = 1156 + 425$$

$$3060 \cdot \cos(x) = 1581$$

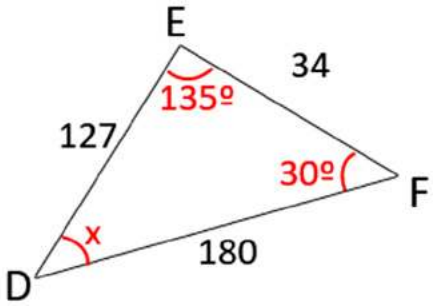
$$\therefore \cos(x) = \frac{1581}{3060} = 0{,}51$$

Assim:

$$arcos(0{,}51) \approx 60º$$

O ângulo será agudo.

II – Correta. Observe como ficaria uma representação do triângulo.



Não é preciso descobrir o valor do outro ângulo. Basta aplicarmos a lei dos senos nos valores já existentes. Assim, temos:

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

$$\frac{Lado\ A}{sen(\alpha)} = \frac{Lado\ B}{sen(\beta)}$$

Com sen(α) e sem(β) representando os ângulos opostos aos lados A e B, respectivamente. Dessa forma, substituindo, obtemos:

$$\frac{180}{sen(135º)} = \frac{127}{sen(30º)}$$

$$\frac{180}{0{,}7071} = \frac{127}{0{,}5}$$

$$254 = 254$$

III – Errada. Primeiramente, precisamos lembrar das seguintes relações:

$$\sec(x) = \frac{1}{cos(x)}$$

$$tan = \frac{sen(x)}{cos(x)}$$

Substituindo esses dados na equação dada pela alternativa, temos:

$$\sec(x) - \cos(x) = sen(x) \cdot \tan(x)$$

$$\frac{1}{cos(x)} - \cos(x) = sen(x) \cdot \frac{sen(x)}{cos(x)}$$

$$\frac{1}{cos(x)} - \cos(x) = \frac{sen(x)^2}{cos(x)}$$

$$\frac{sen(x)^2}{cos(x)} + \cos(x) = \frac{1}{cos(x)}$$

Multiplicando todos os temos por cos(x), temos:

$$\left(\frac{sen(x)^2}{\cos(x)}\right) \cdot cos(x) + \cos(x)^2 = \left(\frac{1}{\cos(x)}\right) \cdot cos(x)$$

$$sen(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$$

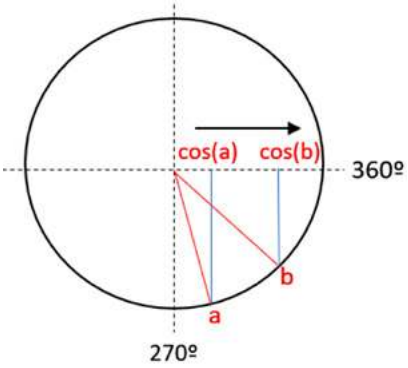
A equação encontrada que representa a identidade trigonométrica fundamental da matemática.
IV – Correta. Primeiro, vamos lembrar a relação da função secante.

$$\sec(x) = \frac{1}{cos(x)}$$

Logo, trata-se de uma função inversamente proporcional a função cosseno. Isso significa que, se a função cosseno for crescente, a função secante será decrescente e vice-versa.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Observe o círculo trigonométrico com a função cosseno a seguir.



Dentro do intervalo 270° a 360°, temos:

- Se a<b, então cos(a)< cos(b). Ou seja, os valores da função cosseno são crescentes;
- Portanto, nesse mesmo intervalo, os valores da função secante serão decrescentes.

Portanto, as únicas alternativas corretas são: I, II e IV.

Letra c.

4. Equações Trigonométricas

As equações trigonométricas são da seguinte forma:

$$sen\ x = p$$

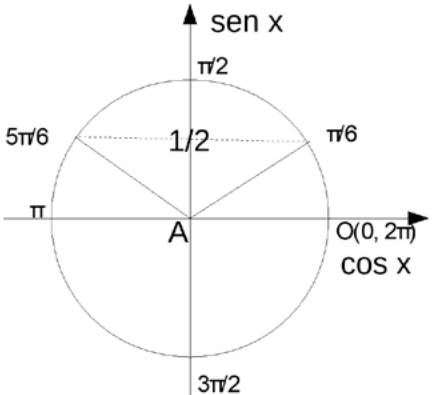
$$cos\ x = q$$

O primeiro passo para resolver esse tipo de questão é encontrar uma solução qualquer da equação. Por exemplo:

$$sen\ x = \frac{1}{2}$$

Já vimos que $sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

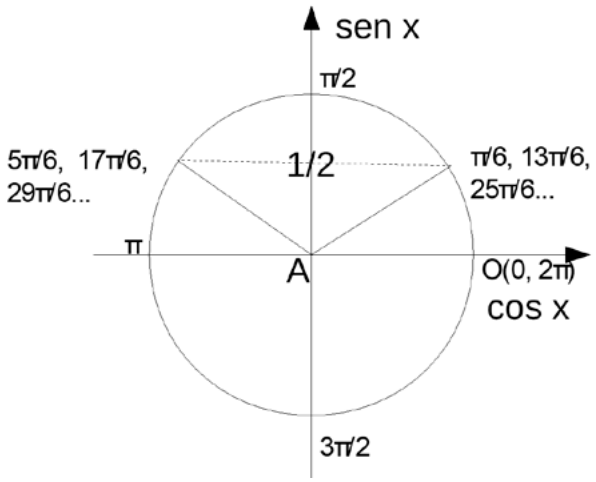
O que vai ser cobrado em provas é justamente o fato de que a equação admitirá outras soluções além dessa. Vamos marcar no ciclo trigonométrico, lembrando-nos de que o seno se encontra no eixo das ordenadas.



O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

O seno do ângulo suplementar a π/6, no caso π – π/6 = 5π/6, é também igual a 1/2. Já vimos isso em Regressão ao Primeiro Quadrante. Temos, portanto, uma solução adicional.

Além disso, é preciso considerar que a cada volta no ciclo trigonométrico (2π), seja para a esquerda, seja para a direita, o arco cai exatamente no mesmo ponto. Sendo assim, ainda precisamos adicionar mais alguns arcos.



Matematicamente, a forma mais rigorosa de se escrever é:

$$S = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in Z\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in Z\right\}$$

Pode ter parecido estranha a expressão obtida, mas fique tranquilo. Vamos desvendá-la. A expressão π/6 + 2kπ se refere ao arco π/6 acrescido de múltiplos de 2π, pois estes representam números inteiros de volta.

Temos, por exemplo, ... -23π/6, -11π/6, π/6, 13π/6, 25π/6, ...

O mesmo é válido para a expressão 5π/6 + 2kπ que se refere ao conjunto de soluções: ..., -19π/6, -7π/6, 5π/6, 13π/6, 25π/6, ...

É mais provável que as provas se restrinjam a pedir as soluções dentro da primeira volta do ciclo trigonométrico. Porém, vale a pena ficar de olho e saber todas as soluções de equação trigonométrica.

4.1. Inequações Trigonométricas

Esse é um assunto que vejo como improvável de ser cobrado. No entanto, para que você não perca nenhum detalhe da matéria, vamos aprender.

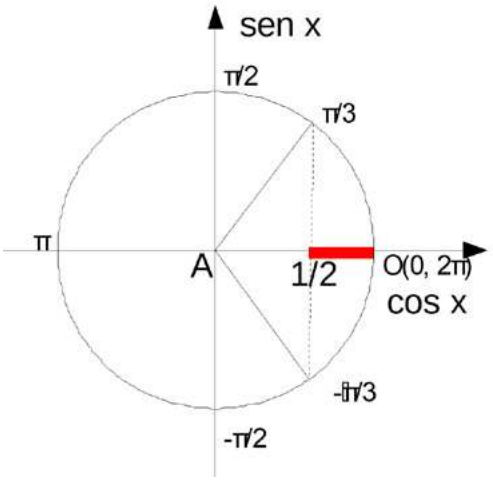
O modo mais simples de resolver é realmente olhando para o ciclo trigonométrico. Por exemplo, considere a inequação:

$$cos\ x > \frac{1}{2}$$

Já aprendemos a identificar no ciclo trigonométrico as duas soluções da equação.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Sabemos que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. Vale dizer que, no caso de equações e inequações envolvendo o cosseno, eu gosto de usar o outro arco como o de sinal negativo, como mostrado na figura a seguir.



O conjunto solução da inequação está marcado em vermelho.

$$S = \left\{-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}\right\}$$

Além disso, devemos incluir as voltas. Basta somar o termo $2k\pi$.

$$S = \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right\}$$

Direto do Concurso

028. (MS CONCURSOS/PREFEITURA DE PIRAÚBA/2017/ASSISTENTE SOCIAL) O conjunto solução da equação cos(2x) = 1, onde 0<x<4π, possui:

a) 2 elementos
b) 3 elementos
c) 4 elementos
d) 5 elementos

Podemos fazer uma mudança de variáveis para facilitar o entendimento do problema y = 2x. Teremos a equação:

$$\cos(y) = 1$$

O conjunto de validade dessa equação é:

$$0 < x < 4\pi$$

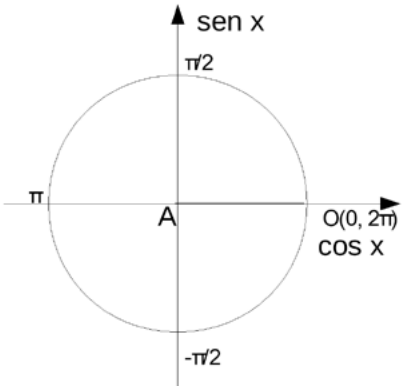
Podemos fazer a substituição inversa $y = 2x \leftrightarrow x = y/2$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

$$0 < \frac{y}{2} < 4\pi$$

$$0 < y < 8\pi$$

Podemos verificar facilmente que só existe um ponto no ciclo trigonométrico que atende a cós (x) = 1.



Como queremos $0 < y < 8\pi$, os únicos valores que nos interessam são:

$$y = 2\pi, 4\pi, 6\pi$$

Dividindo por 2, teríamos os possíveis valores de x que são portanto 3. Perceba que o enunciado não deu a possibilidade de que x fosse igual a 0 ou a 4.
Letra b.

---

029. (FUNCERN/IFRN/2017/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Considerando U= IR, a solução para o sistema $\begin{cases} cossec\, x > 0 \\ \sec x \leq 0 \end{cases}$ é:

a) $S = \left\{x \in IR \mid \pi + 2k\pi < x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) $S = \left\{x \in IR \mid \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

c) $S = \left\{x \in IR \mid \pi + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

d) $S = \left\{x \in IR \mid \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x < \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

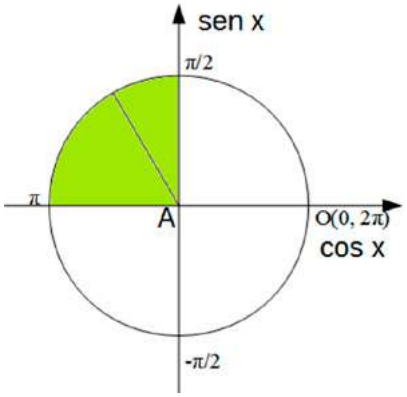
Essa inequação não é nem tão sofisticada, pois o sinal da cossecante e da secante são os mesmos, respectivamente, do seno e do cosseno.
Além disso, vale lembrar que elas não são definidas quando o seno ou o cosseno se anulam.
Portanto, o sistema é equivalente a:

$$sen\, x > 0$$

$$cos\, x < 0$$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Essa região se refere diretamente ao segundo quadrante do ciclo trigonométrico.



Portanto, a solução da inequação é:

$$S = \left\{\frac{\pi}{2} < x < \pi\right\}$$

Além disso, devemos considerar as voltas extras no ciclo trigonométrico. Portanto, teríamos.

$$S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi, k \in Z\right\}$$

Letra b.

---

030. (IBFC/CÂMARA MUNICIPAL DE ARARAQUARA/2016/ASSISTENTE DE TRADUÇÃO E INTERPRETAÇÃO) A solução da inequação 2.sen(x) < -1, para 0 ≤ x ≤ 2 π, é:

a) $\left\{x \in R, \frac{7\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}\right\}$

b) $\left\{x \in R, \frac{5\pi}{6} < x < \frac{7\pi}{6}\right\}$

c) $\left\{x \in R, \frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}\right\}$

d) $\left\{x \in R, \frac{7\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}\right\}$

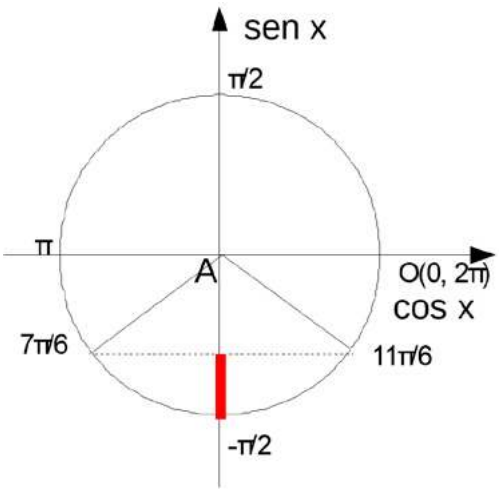
Primeiramente, transformaremos a inequação na forma de seno:

$$sen\ x < -\frac{1}{2}$$

Agora, precisamos encontrar uma solução. No caso, sabemos que $sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, portanto, $sen\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = sen\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Vamos marcar no ciclo trigonométrico.



Notamos que a região que satisfaz à desigualdade é:

$$S =]\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}[$$

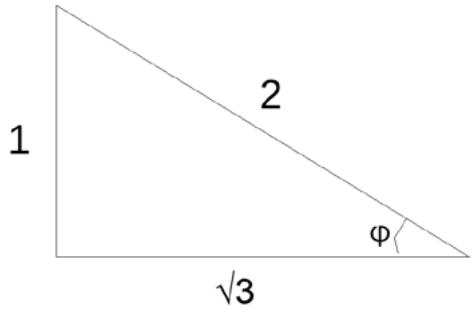
Letra a.

---

031. (IDECAN/COLÉGIO PEDRO II/2015/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Considere a inequação $cosx + \sqrt{3}, senx > \sqrt{2}$. Se $x \in [0,2\pi]$, a solução da inequação corresponde ao intervalo real:

a)] π/4; π/2 [
b)] π/6; 7π/6 [
c)] π/12; 7π/12 [
d)] 0; π/4 [

Uma questão bastante sofisticada. Primeiramente, devemos transformar a soma seno-cosseno em um único seno com o auxílio de um triângulo retângulo. É importante frisar que o termo que acompanha sem x deve estar sempre adjacente ao ângulo φ.



A hipotenusa desse triângulo é calculada pelo Teorema de Pitágoras.

$$c^2 = 1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 1 + 3 = 4 \therefore c = \sqrt{4} = 2$$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Podemos então calcular a fase.

$$sen\ \varphi = \frac{1}{2}, cos\ \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

O ângulo que possui o seno e o cosseno citados é bastante conhecido.

$$\varphi = \frac{\pi}{6}\ (30°)$$

Sendo assim, a expressão de soma de seno e cosseno pode ser escrita como;

$$y = 2sen\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > \sqrt{2}$$

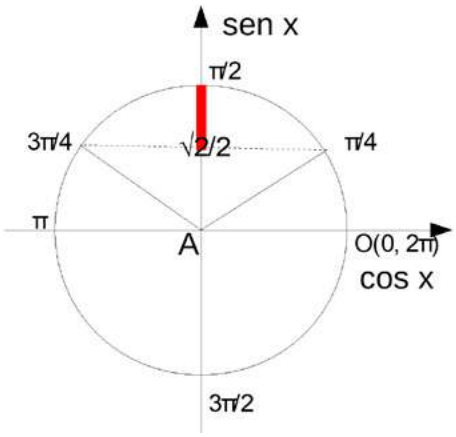
Chegamos, portanto, a uma inequação trigonométrica.

$$sen\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Para facilitar a solução, chamaremos $x + \frac{\pi}{6} = \theta$. Esse passo não é absolutamente necessário, mas facilitará o seu entendimento. Temos, então, que:

$$sen\ (\theta) > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Já sabemos resolver essa inequação trigonométrica.



A solução da inequação é, portanto:

$$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$$

Substituindo a expressão $x + \frac{\pi}{6} = \theta$:

$$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} < x + \frac{\pi}{6} < \frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} < x < \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

$$\therefore \frac{6\pi - 4\pi}{24} < x < \frac{18\pi - 4\pi}{24}$$

$$\frac{2\pi}{24} < x < \frac{14\pi}{24}$$

$$\frac{\pi}{12} < x < \frac{7\pi}{12}$$

Letra c.

032. (QUADRIX/SEDUCE-GO/2018/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Assinale a alternativa que apresenta o valor de sen(195º) + sen(75º).

a) √2
b) 1
c) √2/2
d) 1/2
e) √2 - 1

Basta utilizar a expressão da transformação de soma em produto.

$$sen\,(p) + sen(q) = 2sen\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$sen\,(195) + sen(75) = 2sen\left(\frac{195+75}{2}\right)\cos\left(\frac{195-75}{2}\right)$$

$$sen\,(195) + sen(75) = 2sen\left(\frac{270}{2}\right)\cos\left(\frac{120}{2}\right)$$

$$sen\,(195) + sen(75) = 2sen(135)\cos(60) = 2.\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Letra c.

033. (CEPERJ/SEDUC-RJ/2015/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Resolvendo corretamente a equação trigonométrica 2sen(2x)= sen(x), $x \in [0,2\pi]$, determina-se o conjunto solução com exatamente **t** elementos. O valor de **t** é igual a:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

Aplicando a expressão conhecida para o seno do arco duplo, teremos:

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

$$2.2sen\,x\cos x = sen\,x$$

$$4sen\,x\cos x = sen\,x$$

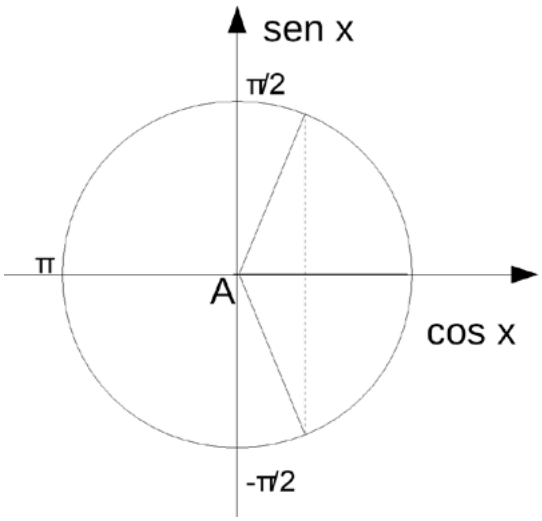
$$sen\,x(4\cos x - 1) = 0$$

Portanto, as soluções da equação envolvem duas possibilidades:

$$sen\,x = 0 \therefore x = \{0, \pi, 2\pi\}$$

$$ou 4\cos x - 1 = 0 \therefore \cos x = \frac{1}{4}$$

Embora não saibamos o arco cujo cosseno vale ¼, sabemos que existem duas soluções no intervalo [0, 2π]. Podemos marcá-las no ciclo trigonométrico.



Sendo assim existe um conjunto de 5 soluções no intervalo [0, 2π].

Letra e.

Chegamos ao final de mais uma aula.

Não se esquece de me seguir no Instagram:

www.instagram.com/thiagofernando.pe

Forte abraço!

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

QUESTÕES DE COMENTADAS EM AULA

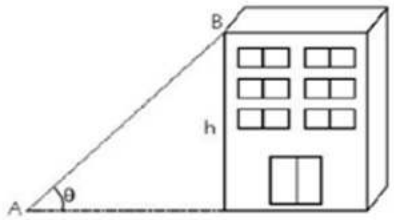
001. (FGV/AL-RO/2018/ANALISTA LEGISLATIVO/MATEMÁTICA) Sabe-se que *sen x - cos x* = 0,6. O valor de y = sen *x* · cos *x* é

a) 0,18
b) 0,32
c) 0,36
d) 0,64
e) 0,72

002. (UFOP/2018/ASSISTENTE EM ADMINISTRAÇÃO) Três ângulos agudos têm suas medidas em progressão aritmética crescente.
Assinale a afirmativa correta sobre seus respectivos cossenos.

a) Eles formam uma progressão aritmética.
b) Eles formam uma progressão geométrica.
c) Eles formam uma sequência crescente.
d) Eles formam uma sequência decrescente.

003. (FAUEL/PROADMUSEP/2017/TÉCNICO DE ENFERMAGEM) Uma escada de 40 m de comprimento está apoiada no alto de um edifício de uma altura h. Sabendo-se que o ângulo formado entre a escada e o plano horizontal é de 30º, a altura h do edifício é de: (sen 30º = 0,50; cos 30º = 0,86 e tg 30º = 0,58)



a) 15m.
b) 20m.
c) 50m.
d) 80m.

004. (IBADE/SEE-PB/2017/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) A expressão trigonométrica a seguir vale:

$$2.\frac{\cos(60^\circ)}{tg(45^\circ)}.\left|\frac{sen(10^\circ)}{\cos(80^\circ)}\right|^2 - sen(210^\circ)$$

a) 1.
b) 3/2.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

c) -3/2.
d) 1/2.
e) -1/2.

005. (MS CONCURSOS/SAP-SP/2017/AGENTE DE SEGURANÇA PENITENCIÁRIA) Seja a expressão

$$\frac{sen^2 x}{(1+\cos x)} \cdot \frac{\cos^2 x}{(1-\cos x)}$$

definida em 0< x < π/2. Ao simplificá-la, obteremos:
a) 1
b) $sen^2\ x$
c) $\cos^2 x$
d) 0

006. (FCC/SEDU-ES/2016/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Na função trigonométrica g(x) = sen x, com x ∈ R, g(13π/3) é igual a:
a) g(5π/2).
b) g(π/4).
c) g(2π/3).
d) g(π).
e) g(π/3).

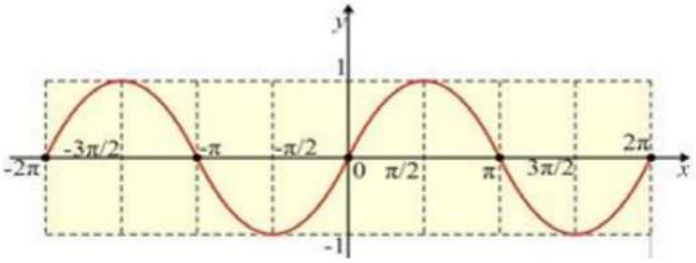
007. (IBFC/MGS/2016/APOIO OPERACIONAL) O valor da expressão 3. sen² α + 3. cos² α , para 0º < α < 360º, é igual a:
a) 1,5
b) 3
c) 2
d) 6

008. (IBFC/MGS/2015/SERVIÇOS TÉCNICOS EM SEGURANÇA DO TRABALHO) Considere que o ângulo α está no intervalo entre 90º e 180º e senα= 0,5, então o valor do cosα é igual a:
a) -0,5
b) - √3/2
c) √3/2
d) 1/3

009. (CESPE/SEDU-ES/2010/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Considerando que a e b sejam ângulos expressos em graus, em que $0 < a, b < 90°, sen\ a = \frac{3}{5} e\ sen\ b = \frac{4}{5}$, julgue o seguinte item.
a + b = 90º

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

010. (ORHION CONSULTORIA/PREFEITURA DE JAGUARIÚNA/SP/2018/ASSISTENTE DE GESTÃO PÚBLICA) Na área de funções matemáticas, existem diversos tipos de função. Cada função tem suas propriedades e gráficos. Observe o gráfico a seguir:



Qual é o tipo de função que corresponde a imagem acima?

a) Função Exponencial.
b) Função Polinomial.
c) Função Algébrica.
d) Função Seno.

011. (FRAMINAS/COPASA/2012/AUXILIAR DE SERVIÇOS DE SANEAMENTO) Assinale a alternativa CORRETA, que traz a defasagem angular entre as funções y=sen(x) e y=cos (x):

a) 0º
b) 45º
c) 90º
d) 180º

012. (IFB/2017/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) As funções senoides por serem periódicas são muito utilizadas nos cálculos de movimentos de marés. movimentos de pêndulos, sinais de ondas sonoras e luminosas etc. A função $y = 3.sen\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ representa o movimento de maré de uma localidade na região norte do Brasil. Em relação à função dada, assinale as afirmações dadas a seguir como VERDADEIRAS com (V) ou FALSAS com (F).

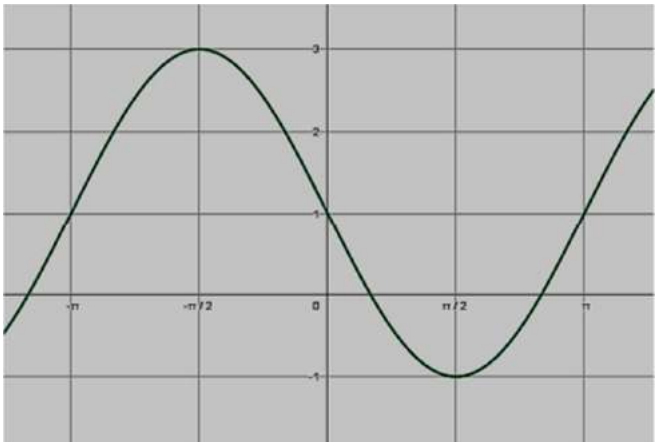
( ) É uma função periódica e seu período é 2π.
( ) Sua imagem é o intervalo [−1,1].
( ) O domínio é o conjunto dos números reais.
( ) É uma função periódica e seu período é π.
( ) Se anula em infinitos valores para *x*.

Assinale a alternativa que contém a sequência **CORRETA** de cima para baixo.

a) F, V, V, V, F
b) F, F, V, V, V
c) V, F, F, V, V
d) F, V, F, V, V
e) V, F, V, F, V

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

013. (FUMARC/SEE-MG/2018/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) O gráfico abaixo representa uma função trigonométrica.



A lei dessa função pode ser dada por:

a) $f(x) = 2 - sen\ (x)$

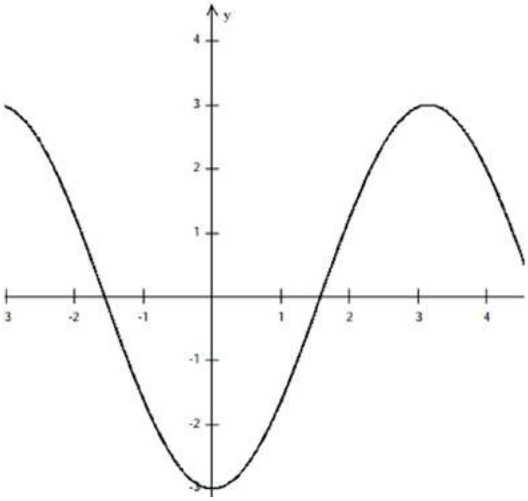
b) $f(x) = 1 + 2sen\ (x)$

c) $f(x) = -1 - 2sen\ (x)$

d) $f(x) = 1 - 2sen\ (x)$

e) $f(x) = - 2 - sen\ (x)$

014. (CETRO/FUNDAÇÃO CASA/2014/TÉCNICO EM INFORMÁTICA/REDE) Observe o gráfico abaixo.



Diante do exposto, assinale a alternativa que apresenta a função que **melhor** se adéqua a esta representação gráfica.

a) f (x) = −3 + sen(x)

b) f (x) = −3sen(x)

c) f x = -cos(x)/3

d) f(x) = −3cos(x)

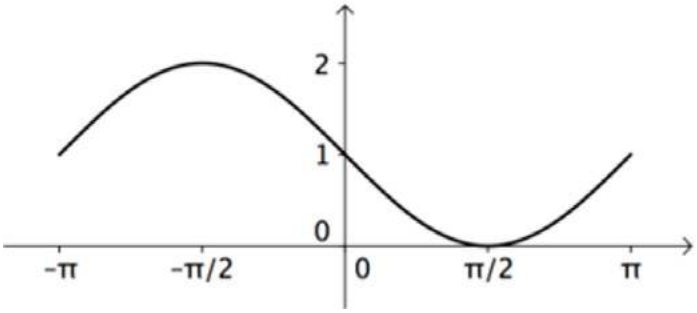
e) f (x) = cos(x) − 3

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

015. (MS CONCURSOS/PREFEITURA DE ITAPEMA-SC/2016/AGENTE MUNICIPAL DE TRÂNSITO) A temperatura de uma cidade variou, ao longo de um dia, segundo a função f(x) = a + b. sen(nx/12 + π),onde x representa o tempo, em horas (0 ≤ x < 24). Sabendo que, nesse dia, a temperatura máxima foi de 36ºC e a temperatura mínima foi de 20ºC, então o valor de b é:

a) 8
b) 20
c) 28
d) 36

016. (FGV/SEE-PE/2016/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Uma função trigonométrica cuja expressão contém apenas seno e/ou cosseno além de alguma constante tem o seguinte gráfico no intervalo [−π, π]:



a) y -1 + sen(x)
b) y = 1 - sen(x)
c) y = 1+ cos(x)
d) y = 1- cos(x)
e) y =sen(x) - cos(x)

017. (IFRS/2018/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Dada a função ƒ= R → R, tal que ƒ(x)= sen(x) + cos(x), qual dos números abaixo NÃO faz parte do conjunto imagem?

a) -1
b) 0
c) 1
d) √2
e) √3

018. (QUADRIX/SEDUCE-GO/2018/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Assinale a alternativa que apresenta o valor de sem (195º) + sem (75º).

a) √2
b) 1
c) √2/2
d) 1/2
e) √2 − 1

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

019. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2018/QUÍMICO DE PETRÓLEO JÚNIOR) O maior valor que a função real, y = f(x), de variável real, definida por y = 3sen(x) + 4cos(x), pode assumir é:

a) 1
b) 4
c) 5
d) 7
e) 7√2/2

020. (FUNCAB/POLITEC/MT/2013/PERITO CRIMINAL/FARMÁCIA) Calcule o valor de t igualdade abaixo.

t = 2. (sen(15º) + cos(75º))

a) √6 - √2
b) √6 + √2
c) √2 + √3
d) √2 - √3
e) √6

021. (FAFIPA/PREFEITURA DE PARANAGUÁ-PR/2016/ECONOMISTA) Calcule tg³ (α+ β), para tg α = 1 e cot β = - 1/3.

a) -8
b) -2
c) - 1/ 8
d) - 1/ 2

022. (PREFEITURA DO RIO DE JANEIRO/2016/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Seja k um número real tal que $sen10^o = k$. O valor de $cos20^o$ é igual a:

a) $1 - k^2$
b) $2 - k^2$
c) $1 - 2k^2$
d) $2 - 2k^2$

023. (FUNCERN/IFRN/2015/ASSISTENTE EM ADMINISTRAÇÃO) Considere x um arco tal que π/2 < x < π e sen x = 3/5.

Sobre os referidos dados, assinale a opção correta.

a) cos x < sen 2x < cos 2x
b) sen 2x < cos 2x < cos x
c) cos 2x < cos x < sen x
d) sen 2x < cos x < sen x

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

024. (IMA/PREFEITURA DE CANAVIEIRA PI/2015/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Quais valores k pode assumir para tornar possível a igualdade cos $x = 2k + 13$?

a) $\{k \in R / k \leq -13 \text{ e } k \geq -2\}$

b) $\{k \in R / -13 \leq k \leq -2\}$

c) $\{k \in R / k \leq -7 \text{ e } k \geq -6\}$

d) $\{k \in R / -7 \leq k \leq -6\}$

025. (ESAF/AFRFB/2014) O cosseno de um ângulo x, com $\pi/2 < x < \pi$, é igual a -7/25. Desse modo, a tangente de x/2 é igual a:

a) -4/3

b) 4/3

c) -3/2

d) 3/23

e) 1

026. (ESAF/AFRFB/2012) Considerando-se a expressão trigonométrica x = 1 + cos 30º, um dos possíveis produtos que a representam é igual a:

a) 2 cos² 15º

b) 4 cos² 15º

c) 2 sen² 30º

d) 2 cos² 30º

e) 4 sen² 15º

027. (IF-RS/2018/IF-RS/MATEMÁTICA) As afirmativas abaixo envolvem os conceitos da Trigonometria no que se referem à relação entre lados e ângulos de um triângulo, relações trigonométricas e a variação dos arcos no ciclo trigonométrico.

I – Em um triângulo ABC são conhecidas as medidas dos lados AC = 45 cm, AB = 40 cm e BC = 34 cm. Nessas condições o ângulo C deve ser agudo.

II – No triângulo DEF o lado DF = 180 cm e o ângulo Ê = 135º. Se o ângulo F = 30º então DE é aproximadamente 127cm.

III – A relação sec x − cos x = sen x. tan x não é uma identidade trigonométrica.

IV – Quando os arcos do ciclo trigonométrico variam entre 270º até 360º, os valores da função secante são decrescentes.

Assinale a alternativa em que todas as afirmativas estão CORRETAS:

a) Apenas I e II.

b) Apenas I e IV.

c) Apenas I, II e IV.

d) Apenas II, III e IV.

e) I, II, III e IV.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

028. (MS CONCURSOS/PREFEITURA DE PIRAÚBA/2017/ASSISTENTE SOCIAL) O conjunto solução da equação cos(2x) = 1, onde 0<x<4π, possui:

a) 2 elementos
b) 3 elementos
c) 4 elementos
d) 5 elementos

029. (FUNCERN/IFRN/2017/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Considerando U= IR, a solução para o sistema $\begin{cases} cossec\ x > 0 \\ \sec x \leq 0 \end{cases}$ é:

a) $S = \left\{x \in IR | \pi + 2k\pi < x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$

b) $S = \left\{x \in IR | \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$

c) $S = \left\{x \in IR | \pi + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$

d) $S = \left\{x \in IR | \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x < \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$

030. (IBFC/CÂMARA MUNICIPAL DE ARARAQUARA/2016/ASSISTENTE DE TRADUÇÃO E INTERPRETAÇÃO) A solução da inequação 2.sen(x) < -1, para 0 ≤ x ≤ 2 π, é:

a) $\left\{x \in R, \frac{7\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}\right\}$

b) $\left\{x \in R, \frac{5\pi}{6} < x < \frac{7\pi}{6}\right\}$

c) $\left\{x \in R, \frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}\right\}$

d) $\left\{x \in R, \frac{7\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}\right\}$

031. (IDECAN/COLÉGIO PEDRO II/2015/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Considere a inequação $cosx + \sqrt{3}, senx > \sqrt{2}$. Se x ∈ [0,2π], a solução da inequação corresponde ao intervalo real:

a)] π/4; π/2 [
b)] π/6; 7π/6 [
c)] π/12; 7π/12 [
d)] 0; π/4 [

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

032. (QUADRIX/SEDUCE-GO/2018/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Assinale a alternativa que apresenta o valor de sen(195º) + sen(75º).

a) √2
b) 1
c) √2/2
d) 1/2
e) √2 - 1

033. (CEPERJ/SEDUC-RJ/2015/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Resolvendo corretamente a equação trigonométrica 2sen(2x)= sen(x), $x \in [0,2\pi]$, determina-se o conjunto solução com exatamente **t** elementos. O valor de **t** é igual a:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

QUESTÕES DE CONCURSO

034. (FCC/SEDU-ES/2018/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) O valor de sen 2π / 3 é igual ao cosseno de:

a) 2π / 3
b) π / 3
c) 7π / 6
d) π / 6
e) 4π / 6

Para este problema, precisamos lembrar da propriedade dos ângulos suplementares, que possuem senos iguais:

$$sen(\pi - x) = sen\ (x)$$

Como é pedido o seno de (2π/3), basta fazermos x = π/3. Usando regra de três:

$$sen\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = sen\ \left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\therefore sen\left(\frac{2\pi}{3}\right) = sen\ \left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Podemos, agora, utilizar a propriedade do cosseno de ângulos complementares:

$$\therefore sen\left(\frac{2\pi}{3}\right) = sen\ \left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$$

Fazendo as contas entre parênteses, temos:

$$\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\pi - 2\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

Assim, temos essa relação:

$$\therefore sen\left(\frac{2\pi}{3}\right) = sen\ \left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Letra d.

035. (CESPE/SEFAZ-RS/2018/TÉCNICO TRIBUTÁRIO DA RECEITA FEDERAL) A largura da faixa de areia de uma praia varia com o tempo devido ao movimento das marés. Em metros, a largura *C* da faixa de areia, em função do tempo *t*, em horas, é expressa por
C(t) = 30 + 20sen πt/12, em que *t* ≥ 0.
Nessa situação, o período de *C* e a largura máxima da faixa de areia são, respectivamente, iguais a

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

a) 24 h e 50 m.
b) 24 h e 10 m.
c) 12 h e 30 m.
d) 12 h e 50 m.
e) 12 h e 20 m.

Lembre-se de que a função seno varia no intervalo fechado de -1 a 1. Assim, o valor máximo da função C ocorrerá quando a função seno for 1. Dessa forma, temos:

$$C(t) = 30 + 20 \cdot sen\left(\frac{\pi t}{12}\right)$$

$$C_{máx}(t) = 30 + 20 \cdot (1)$$

$$C_{máx}(t) = 50$$

Sabendo que o período de uma função do tipo f(x)= a + b · sen(mx) é:

$$T = \frac{2\pi}{|m|}$$

Como m=π/12, temos que o período da função no problema é:

$$T = \frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{12}\right|}$$

$$T = \frac{24\pi}{|\pi|}$$

Como π é um número positivo, podemos retirar do módulo sem fazer alterações:

$$T = \frac{24\pi}{\pi}$$

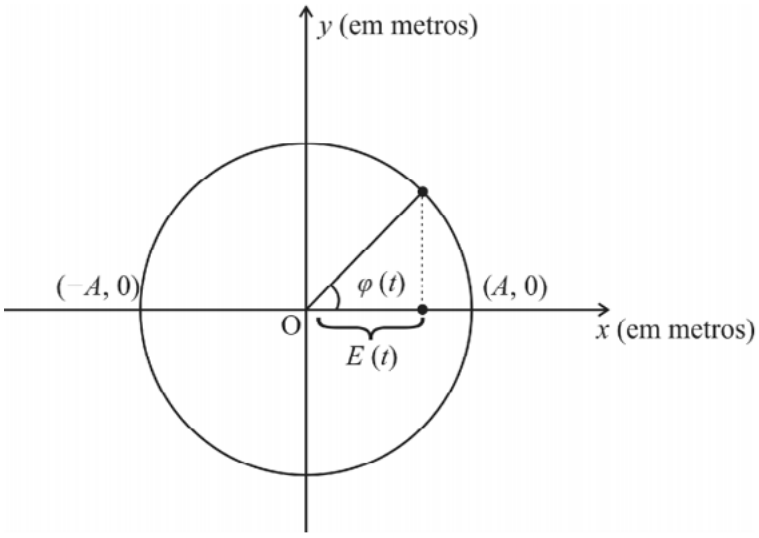
$$\therefore T = 24$$

Assim, o período vale 24 horas e a largura máxima C vale 50m.

Letra a.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

036. (CESPE/SE-DF/2017/PROFESSOR DE MATEMÁTICA)



A figura precedente, no sistema cartesiano de coordenadas ortogonais xOy, representa a trajetória de um móvel em movimento circular uniforme no sentido anti-horário, com velocidade angular constante ω, em radiano por segundo. A posição da projeção, em metros, de um ponto dessa trajetória no eixo x chama-se elongação e descreve um movimento harmônico simples. A máxima elongação (chamada de amplitude) equivale ao raio do círculo do movimento circular. A equação que associa a elongação em função do tempo é expressa por $E(t) = A\cos\varphi(t) = A\cos(\varphi_0 + \omega t)$ em que φ_0 e A são, respectivamente, a fase e a amplitude da elongação.

Tendo como referência essas informações e considerando um móvel cuja equação da elongação seja E(t) = 6 cos (π/2 + πt)„ julgue o item seguinte.

A amplitude da referida elongação é igual a 3 m.

Pela questão, temos que:

$$E(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{cos}\varphi(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{cos}(\varphi_0 + \boldsymbol{\omega} t)$$

Sabemos que A = amplitude da elongação. Pela fórmula dada no enunciado, o termo que multiplica a função cosseno é o 6. Portanto, a amplitude vale 6m, e não 3m.

Errado.

037. (FGV/SEDUC/SP/2013/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Certo satélite científico percorre uma órbita em que sua distância (d), em quilômetros, até a superfície da Terra é dada por:

$$d = \frac{12000}{1 + 0{,}2 \cdot \cos\theta} - 6400,$$

com θ variando, em cada órbita, de 0° a 360°.

A maior distância do satélite até a superfície da Terra é de

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

a) 3600 km.
b) 4800 km.
c) 5600 km.
d) 7200 km.
e) 8600 km.

Precisamos encontrar o menor valor do denominador para maximizarmos o valor da fração. Analisando a equação do denominador e sabendo que a função cosseno varia de -1 a 1 entre 0º e 360º, temos que cos = -1. Ao substituir esse valor, obtemos:

$$d = \frac{12000}{1 + 0{,}2 \cdot \cos(\theta)} - 6400 \quad \rightarrow \quad d = \frac{12000}{1 + 0{,}2 \cdot (-1)} - 6400$$

$$d = \frac{12000}{1 - 0{,}2} - 6400$$

$$d = \frac{12000}{0{,}8} - 6400$$

$$d = 15000 - 6400$$

$$\therefore d = 8600km$$

Letra e.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

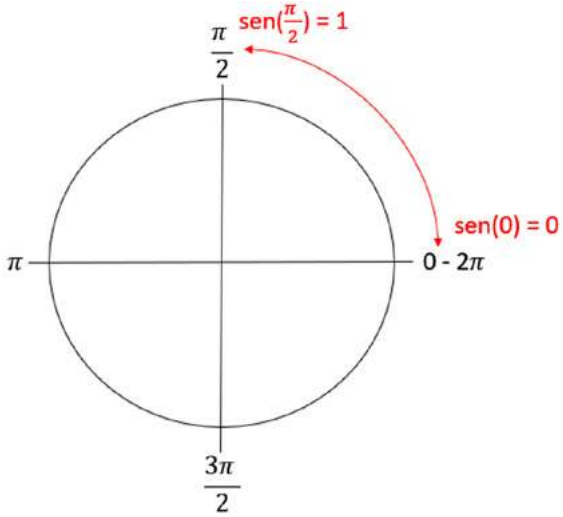
038. (FGV/SEDUC-AM/2014/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Considere a função

$$f(x)=\frac{2-7\text{sen}(x)}{4+\text{sen}(x)}$$

Os valores mínimo e máximo dessa função são, respectivamente,

a) -5/4 e 2/5.
b) -1/2 e 2/5
c) -1/2 e 0
d) - 1 / e 1/2
e) 0 e 1

Observe o círculo trigonométrico a seguir.



Note que a função seno, entre 0 e π/2, varia de 0 a 1.
Note também que o seno = 0 torna o numerador positivo e o seno = -1 o torna negativo.
Sabendo que, em ambos os casos, o denominador se mantém positivo, temos que a função será máxima quando seno = 0 e será mínima quando seno = 1.
Calculando o valor da equação para cada uma dessas situações, temos:

- **Valor mínimo (sen(x)=1)**

$$f(x)=\frac{2-7\cdot sen(x)}{4+sen(x)} \rightarrow f(x)=\frac{2-7\cdot 1}{4+1}$$

$$f(x)=\frac{2-7}{5}$$

$$\therefore f(x)=\frac{-5}{5}=-1$$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

- **Valor máximo (sen(x)=0)**

$$f(x) = \frac{2 - 7 \cdot sen(x)}{4 + sen(x)} \rightarrow f(x) = \frac{2 - 7 \cdot 0}{4 + 0}$$

$$\therefore f(x) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Dessa forma, a função f(x) varia de -1 a ½.

Letra d.

---

039. (FGV/AL-RO/2018/ANALISTA LEGISLATIVO) O valor de $y = \cos(36º) \cdot \cos(72º)$ é:

a) 1/2.

b) 1/4.

c) 1/2 sen 18º.

d) 1/4 cos 18º.

e) 1/8.

Para este problema, precisamos lembrar da equação:

$$sen(2x) = 2 \cdot sen(x) \cdot \cos(x) \quad (I)$$

Para encontrarmos essa identidade dentro da equação dada pelo problema, podemos multiplicar ambos os lados por 2·sen(36º). Temos:

$$[2 \cdot sen(36°)] \cdot y = [2 \cdot sen(36°)] \cdot cos\,(36°) \cdot cos(72°) \quad (II)$$

Fazendo x = 36º na equação I, temos:

$$sen(72°) = 2 \cdot sen(36°) \cdot cos(36°)$$

$$\frac{sen(72°)}{2} = sen(36º) \cdot cos(36º) \quad (III)$$

Substituindo a equação III em II:

$$2 \cdot sen(36°) \cdot y = \frac{sen(72°)}{2} \cdot cos(72°)$$

$$4 \cdot sen(36°) \cdot y = sen(72°) \cdot cos(72°) \quad (IV)$$

Novamente, iremos aplicar a propriedade citada anteriormente. Fazendo x = 72º na equação I, temos:

$$sen(144°) = 2 \cdot sen(72°) \cdot cos(72°)$$

$$\frac{sen(144°)}{2} = sen(72°) \cdot cos(72°) \quad (V)$$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Substituindo a equação V em IV:

$$2 \cdot sen(36°) \cdot y = \frac{sen(144°)}{2}$$

$$4 \cdot sen(36°) \cdot y = sen(144°)$$

Através de mais uma manipulação matemática, podemos substituir 144º por 180 – 36º e obter a seguinte expressão VI:

$$4 \cdot sen(36°) \cdot y = sen(180° - 36°) \ (VI)$$

Agora, usando a seguinte propriedade:

$$sen(180° - b) = sen(b)$$

$$\therefore sen(180º - 36º) = sen(36º)$$

Assim, a expressão VI ficará:

$$4 \cdot \cancel{sen(36º)} \cdot y = \cancel{sen(36º)}$$

$$4 \cdot y = 1$$

$$\therefore y = \frac{1}{4}$$

Letra b.

---

040. (FGV/AL-RO/2018/ANALISTA LEGISLATIVO) Sabe-se que *sen x* - *cos x* = 0,6. O valor de y = sen *x* · cos *x* é

a) 0,18.

b) 0,32.

c) 0,36.

d) 0,64.

e) 0,72.

Pelo enunciado sabemos que:

$$sen(x) - \cos(x) = 0{,}6$$

Elevando os dois lados da igualdade ao quadrado, obtemos:

$$(sen(x) - \cos(x))^2 = 0{,}6^2$$

$$sen^2(x) - 2 \cdot sen(x) \cdot \cos(x) + \cos^2(x) = 0{,}6^2$$

$$sen^2(x) - 2 \cdot sen(x) \cdot \cos(x) + \cos^2(x) = 0{,}36$$

$$[sen^2(x) + \cos^2(x)] - 2 \cdot sen(x) \cdot \cos(x) = 0{,}36$$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVA - 38900408833, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Pela identidade trigonométrica fundamental, sabemos que:

$$sen^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Logo:

$$1 - 2 \cdot sen(x) \cdot \cos(x) = 0{,}36$$

$$\therefore -2 \cdot sen(x) \cdot \cos(x) = 1 - 0{,}36 = -0{,}64$$

$$\therefore 2 \cdot sen(x) \cdot \cos(x) = 0{,}64$$

$$sen(x) \cdot \cos(x) = 0{,}32$$

Letra b.

---

041. (CESPE/SE-DF/2014) Considere a função F(t) = 0,8 sen(24pt), em que t ≥ 0, e, a partir dela, defina P(t) = 10 – 5 F(t + 1/48). Com base nessas informações, julgue o próximo item. Considerando-se que $t_1 \leq t_2$ sejam números positivos, consecutivos, tais que $F(t_1) = F(t_2)$, é correto afirmar que $t_2 - t_1 < 1/12$.

Primeiramente, lembre-se de que:

$$\text{Sen}(0) = \text{Sen}\,(2\pi) = \text{Sen}\,(k\pi) = \text{constante}, com\ k \in \mathbb{Z}.$$

Isto é, a função seno tem seu valor repetido a cada 2π. Para $F(t_1) = F(t_2)$, temos que:

$$sen(24\pi \cdot t_2) = sen(24\pi \cdot t_1)$$

Como t2 ≥ t1, podemos reescrever a equação como:

$$sen(24\pi \cdot t_2) = sen(24\pi \cdot t_1 + 2\pi k), com\ k \geq 1$$

Note que a igualdade se mantém, já que adicionamos apenas um múltiplo de um ciclo à função seno. Isto é, adicionamos apenas 2π vezes uma constante k positiva. Resolvendo:

$$24\pi \cdot t_2 = 24\pi \cdot t_1 + 2\pi k$$

$$24 \cdot t_2 = 24 \cdot t_1 + 2k$$

$$12 \cdot t_2 = 12 \cdot t_1 + k$$

$$12 \cdot (t_2 - t_1) = k$$

$$\therefore (t_2 - t_1) = \frac{k}{12}, com\ k \geq 1$$

Perceba que o k precisa ser no mínimo 1 para garantir a afirmação de que t_2 seja consecutivo de t_1. Isto é, não é possível termos $(t_2 - t_1) < 1/12$, pois isto implicaria k < 1.

Errado.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

042. (CESPE/INMETRO/2010/TÉCNICO EM METROLOGIA) Considerando a equação trigonométrica 2cosx – 3tgx = 0, o valor da expressão 4cos² x – 4senx é igual a:

a) -1.
b) 0.
c) 1.
d) 2.
e) 3.

Lembre-se da igualdade trigonométrica:

$$tg(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$$

Logo, podemos substituir a equação:

$$2 \cdot \cos(x) - 3 \cdot tg(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 2 \cdot \cos(x) - 3 \cdot \left(\frac{sen(x)}{\cos(x)}\right) = 0$$

Multiplicando os dois lados da equação por cos(x), temos:

$$2 \cdot cos^2(x) - 3 \cdot sen(x) = 0 \ (I)$$

Lembre-se da identidade trigonométrica fundamental:

$$cos^2(x) + sen^2(x) = 1$$

$$cos^2(x) = 1 - sen^2(x) \ (II)$$

Substituindo II em I:

$$2 \cdot (1 - sen^2(x)) - 3 \cdot sen(x) = 0$$

$$2 - 2 \cdot sen^2(x) - 3 \cdot sen(x) = 0$$

$$-2 \cdot sen^2(x) - 3 \cdot sen(x) + 2 = 0$$

Fazendo, agora, sen(x) = a:

$$-2a^2 - 3a + 2 = 0$$

Para resolver a equação de 2º grau, podemos usar a técnica da soma e produto. Temos:

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{3}{2}$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{2}{-2} = -1$$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Logo, a'=-2 e a"=1/2. Como a função seno varia de -1 a 1, então:

$$a = sen(x) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = 30º$$

Substituindo o valor de x na expressão pedida, temos:

$$4 \cdot cos^2\,(30º) - 4 \cdot sen(30º)$$

Analisando a tabela, podemos obter os valores do seno e cosseno:

	30º	45º	60º
SEN	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
COS	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
TAN	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Por fim, teremos:

$$4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} =$$

$$4 \cdot \frac{3}{2^2} - 4 \cdot \frac{1}{2} =$$

$$3 - 4 \cdot \frac{1}{2} =$$

$$\therefore 3 - 2 = 1$$

Letra c.

---

043. (CESPE/SEDF/2014) Considere a função F(t) = 0,8 sen(24pt), em que t ≥ 0, e, a partir dela, defina P(t) = 10 − 5 F(t + 1/48). Com base nessas informações, julgue o próximo item.
Para algum $t_0 \geq 0$, tem-se que $P(t_0) \leq 5$.

Primeiro, avaliaremos a função f(t):

$$f\left(t + \frac{1}{48}\right) = 0{,}8 \cdot sen\left(24\pi \cdot \left(t + \frac{1}{48}\right)\right)$$

Sabemos que a função seno varia de −1 a 1. Logo, sen(24π·(t+1/48)) também só varia de -1 a 1. Dessa forma, temos:

- Valor mínimo: f(t + 1/48) = 0,8 · (-1) = -0,8.
- Valor máximo: f(t + 1/48) = 0,8 · (1) = 0,8.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Substituindo os valores da função F em P(t), temos:

- Valor mínimo: P(t) = 10 – 5 · (0,8) = 10 – 4 = 6.
- Valor máximo: P(t) = 10 – 5 · (-0,8) = 10 + 4 = 14.

Portanto, não existe P(t) ≤ 5, para valores de t maiores ou iguais a 0.

Errado.

044. (CESPE/SE-DF/2014) Considere a função F(t) = 0,8 sen(24pt), em que t ≥ 0, e, a partir dela, defina P(t) = 10 – 5 F(t + 1/48). Com base nessas informações, julgue o próximo item.

Para todo *t* ≥ 0, tem-se que *F(t)* ≤ 1.

Sabemos que a função seno varia de –1 a 1. Logo, sen(24·π·t) também só varia de -1 a 1. Dessa forma, temos:

Valor mínimo: f(t) = 0,8 · (-1) = -0,8

Valor máximo: f(t) = 0,8 · (1) = 0,8

Logo, podemos afirmar que F(t) ≤ 1.

Certo.

045. (CESPE/SE-DF/2014) Considere a função F(t) = 0,8 sen(24pt), em que t ≥ 0, e, a partir dela, defina P(t) = 10 – 5 F(t + 1/48). Com base nessas informações, julgue o próximo item.

Nos pontos *t* em que *F(t)* é máximo, *P(t)* é mínimo.

Sabemos que a função seno varia de –1 a 1. Isso é, o valor máximo da função seno é 1. Note que F(t) é máximo, quando seno é máximo.

Um dos pontos em que a função seno será máxima é quando o ângulo vale π/2. Assim, podemos descobrir um dos valores de t que satisfaz essa igualdade:

$$24 \cdot \pi \cdot t = \frac{\pi}{2}$$

$$24 \cdot t = \frac{1}{2}$$

$$\therefore t = \frac{1}{48}$$

Aplicando esse valor de t na função P(t), temos:

$$P(t) = 10 - 5 \cdot F\left(t + \frac{1}{48}\right) \rightarrow P(t) = 10 - 5 \cdot F\left(\frac{1}{48} + \frac{1}{48}\right)$$

$$P(t) = 10 - 5 \cdot F\left(\frac{2}{48}\right)$$

$$P(t) = 10 - 5 \cdot F\left(\frac{1}{24}\right) \quad (I)$$

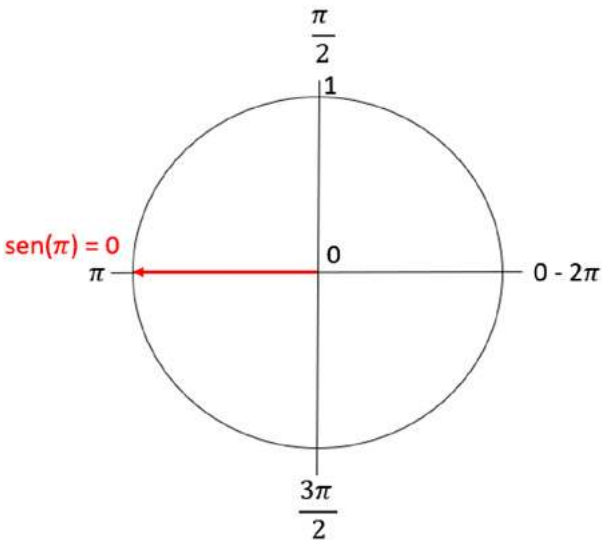
O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Para encontrar o valor da função F(1/24), basta substituir os dados na função F:

$$F\left(\frac{1}{24}\right) = 0{,}8 \cdot sen\left(24\pi \cdot \left(\frac{1}{24}\right)\right)$$

$$F\left(\frac{1}{24}\right) = 0{,}8 \cdot sen(\pi)$$

Pelo círculo trigonométrico, fica fácil perceber que o sen(π)=0:



Logo:

$$F\left(\frac{1}{24}\right) = 0{,}8 \cdot 0$$

$$\therefore F\left(\frac{1}{24}\right) = 0 \quad (II)$$

Substituindo II em I, temos:

$$P(t) = 10 - 5 \cdot 0$$

$$\therefore P(t) = 10$$

Como a função P(t) pode chegar ao valor mínimo de 6, o qual ocorre quando f(t + 1/48) = 0,8, a alternativa está errada.
Errado.

---

046. (CESPE/SE-DF/2014) Considere a função F(t) = 0,8 sen(24pt), em que t ≥ 0, e, a partir dela, defina P(t) = 10 – 5 F(t + 1/48). Com base nessas informações, julgue o próximo item.
No intervalo [0, 1], existem mais de 20 valores de t para os quais F(t) = 0.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Primeiramente, lembre-se de que:

$$\text{Sen}(0) = \text{Sen}\,(\pi) = \text{Sen}\,(2\pi) = \text{Sen}\,(k\pi) = 0, com\ k \in \mathbb{Z}.$$

A única forma da função zerar é quando a função seno = 0, logo:

$$sen(24\pi \cdot t) = 0$$

Para isso ocorrer, obrigatoriamente:

$$24\pi \cdot t = k \cdot \pi$$

$$\therefore t = \frac{k}{24}, com\ k \in \mathbb{N}.$$

Ou seja, t pode assumir os seguintes valores:

$$t = \left\{0, \frac{1}{24}, \frac{2}{24}, \frac{3}{24}, \frac{4}{24}, \frac{5}{24}, \frac{6}{24}, \dots, \frac{24}{24}\right\}, com\ t \in [0,1]$$

Isso significa um total de 25 valores de t para os quais a função se anula. Isto é, um número maior que 20.

Certo.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

GABARITO

1. b
2. d
3. b
4. b
5. b
6. c, e
7. b
8. b
9. C
10. d
11. c
12. b
13. d
14. d
15. a
16. b
17. e
18. c
19. c
20. a
21. c
22. c
23. d
24. d
25. b
26. a
27. c
28. b
29. b
30. a
31. c
32. c
33. e
34. d
35. a
36. E
37. e
38. d
39. b
40. b
41. E
42. c
43. E
44. C
45. E
46. C

Thiago Cardoso

Engenheiro eletrônico formado pelo ITA com distinção em Matemática, analista-chefe da Múltiplos Investimentos, especialista em mercado de ações. Professor desde os 19 anos e, atualmente, leciona todos os ramos da Matemática para concursos públicos.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

NÃO SE ESQUEÇA DE AVALIAR ESTA AULA!

SUA OPINIÃO É MUITO IMPORTANTE PARA MELHORARMOS AINDA MAIS NOSSOS MATERIAIS.

ESPERAMOS QUE TENHA GOSTADO DESTA AULA!

PARA AVALIAR, BASTA CLICAR EM LER A AULA E, DEPOIS, EM AVALIAR AULA.

AVALIAR

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para ALEXSANDRO BEZERRA SILVEIRA - 38904497353, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.