

2ª Edição

Livro de Preparação para Exames de Admissão



GATILHO DE MATEMÁTICA

Direto ao Ponto para vencer o exame!

- ◆ Resumo de todas unidades
- ◆ Exames e Exercícios resolvidos
- ◆ Exercícios propostos
- ◆ Exercícios resolvidos para todos os casos possíveis



Hwang Jorge

Maputo 2024

GATILHO DE MATEMÁTICA

PREPARAÇÃO PARA O ENSINO SUPERIOR

2ª Edição

Índice

1	INTRODUÇÃO	6
2	CONJUNTOS NUMÉRICOS.....	7
2.1	Números Naturais	7
2.2	Números Inteiros Relativos	7
2.3	Números Racionais	8
2.4	Números Irracionais.....	8
2.5	Números Reais.....	9
2.6	Operações de Relação	10
3	TEOREMA DE CONJUNTOS	13
3.1	Representação De Conjuntos	13
3.2	Conjunto Unitário	14
3.3	Conjunto Vazio	14
3.4	Subconjunto	14
3.5	Conjunto Universo.....	14
3.6	Igualdade Conjuntos.....	15
3.7.	Complementar de um conjunto	15
3.7	Diferença De Conjuntos	16
3.8	Diferença Simétrica	17
3.9	Reunião De Conjuntos	18
3.10	Intersecção De Conjuntos	18
3.11	Cardinal de um conjunto	18

4	INTERVALOS REAIS.....	22
5	NÚMEROS COMPLEXOS.....	29
5.1	Igualdade De Números Complexos -----	30
5.2	Operações Com Números Complexos -----	31
6	LOGICA MATEMÁTICA	42
6.1	Elementos da lógica -----	42
6.2	Princípios da logica matemática-----	43
6.3	Classificação das proposições-----	44
6.4	Conectivos e valor logico-----	44
6.5	Tabelas verdade-----	45
6.6	NEGAÇÃO DE UMA PROPORÇÃO ($\sim$)-----	46
6.7	Quantificadores -----	46
6.8	Negação de proposições-----	48
6.9	Simplificação de Expressões Proposicionais -----	49
7	ARITMÉTICA	52
7.1	Tipos de fracções-----	52
7.2	MDC -----	52
7.3	Proporções-----	53
7.4	Razão-----	53
7.5	Regra De Tres-----	54
7.6	Porcentagem -----	55
7.7	Aumentos E Descontos Percentuais -----	55

8	POTENCIAÇÃO	60
8.1	Propriedades De Potências-----	61
8.2	Notação Científica-----	62
9	RADICIAÇÃO	67
9.1	Classificação de radicais -----	67
9.2	Operações entre radicais-----	68
9.3	Racionalizacao De Denominador -----	69
10	EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU (EQUAÇÕES LINEARES)	75
11	EQUAÇÕES QUADRATICAS	76
11.1	Soma e produto duma expressão polinomial-----	77
11.2	. Equações paramétricas -----	79
11.3	Equações quadráticas incompletas -----	81
12	ALGÉBRA	85
12.1	. Classificação das expressões -----	85
12.2	. POLINÓMIOS-----	85
	Polinómio racional inteiro homogéneo -----	86
12.3	Operações com polinómios -----	87
12.4	Divisibilidade de polinómios-----	89
12.5	Método De Briot-Ruffini -----	89
12.6	Teorema do resto-----	89
12.7	. Classificação das expressões algébricas-----	95

13	EQUACÕES DO 3° GRAU	99
13.1	. Equações cúbicas sem uma constante	101
14	EQUACÕES DO 4° ,6° ,8°... GRAUS	101
14.1	Equação “tipo produto”	103
15		103
15.1	Equação “tipo quociente ”	104
16	EQUACÕES IRRACIONAIS	106
16.1	. Equações do tipo.....	107
16.2	. Equações do tipo.....	108
17. EQUAÇÃO EXPONENCIAL		
18. LOGARITMOS		
19. INEQUAÇÕES		
20. MÓDULOS		
21. CÁLCULO COMBINATÓRIA		
22. PROBABILIDADE		
23. FUNÇÃO REAL DE VARIÁVEL REAL		
24. SUCESSÕES		
25. LIMITES		
26. CONTINUIDADE		
27. DERIVADAS		
28. INTEGRAL		

1 Introdução

Com o objetivo de garantir a sua admissão em qualquer universidade, este manual foi elaborado de forma completa, abrangendo todos os conteúdos avaliados nos exames de admissão. O manual é estruturado em capítulos, incluindo um dedicado à matriz do exame de Matemática. Cada capítulo traz uma explicação teórica e uma série de exercícios resolvidos para expandir o seu nível de compreensão. Ao final de cada capítulo, são propostos exercícios para avaliar o seu nível de assimilação. Recomenda-se concluir esses exercícios antes de avançar para o próximo capítulo. Embora este manual cubra toda a matéria dos exames, é aconselhável complementar com conteúdos adicionais.

Esta segunda edição é uma melhoria da primeira, eliminando conteúdos irrelevantes para tornar o livro mais assertivo e direto ao ponto. Foram feitas melhorias em diversos tópicos para aumentar a qualidade do material, além do acréscimo de novos conteúdos cobrados recentemente nos exames dos últimos anos. Como o livro ainda está em atualização para alguns capítulos e os exames estão próximos, inclui um anexo de outro autor, com tópicos complementares relevantes para os estudantes. Estude todo o conteúdo deste livro, pois é de grande importância para a sua preparação.

2 CONJUNTOS NUMÉRICOS

2.1 Números Naturais

Chama-se conjunto dos números naturais símbolo $\mathbb{N}$ Formado pelos números 0;1;2;3...



Note que $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

$$\mathbb{N} = \{0;1;2;3;\dots\}$$

Subconjunto de conjunto $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N}^* = \{1,2,3,\dots\}$$

2.2 Números Inteiros Relativos

Chama-se conjunto dos números inteiros relativos ($\mathbb{Z}$). Conjunto

$$\mathbb{Z} = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$



Note que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ e além disso:

Subconjuntos dos Inteiros relativos ($\mathbb{Z}$)

$$\mathbb{Z}^+ \text{ ou } \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \text{ Conjunto dos inteiros não negativos por isso } \mathbb{N} = \mathbb{Z}^+$$

$$\mathbb{Z}^- \text{ ou } \mathbb{Z}_- = \{\dots -3, -2, -1, 0\} \text{ Conjunto dos inteiros não positivos}$$

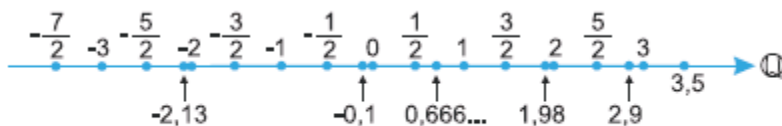
$$\mathbb{Z}_-^* = \{\dots -3, -2, -1\} \text{ Conjunto dos inteiros negativos}$$

$$\mathbb{Z}^* = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\} \text{ Conjunto dos inteiros não nulos}$$

$$\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, \dots\} \text{ Conjunto dos inteiros positivos}$$

2.3 Números Racionais

Chama-se conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$) o conjunto dos pares ordenados ou (fracções) $\frac{x}{y}$ onde $x \in \mathbb{Z}$ e $y \in \mathbb{Z}^*$ ($y \neq 0$)



Note que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

O conjunto de números racionais inclui os números inteiros acrescentados agora com números decimais os que possuem dizima finita ou infinita periódica.

Subconjuntos dos números racionais:

$\mathbb{Q}^+$ ou $\mathbb{Q}_+$ Conjuntos dos racionais positivos (não negativos)

$\mathbb{Q}^-$ ou $\mathbb{Q}_-$ Conjuntos dos racionais negativos

(não positivos)

$\mathbb{Q}^*$ Conjuntos dos racionais não nulos

2.4 Números Irracionais

Chama-se conjunto dos números irracionais aqueles cuja representação decimal é uma dízima infinita não periódica, ou seja, possuem uma sequência decimal infinita que nunca se repete em um padrão fixo.

Ex.: de números irracional $\sqrt{2} = 1,4142136\dots$; $\pi = 3,1415926\dots$

Diferente dos números racionais, que podem ser expressos como frações e têm dízimas periódicas ou terminações finitas, os irracionais não podem ser representados como fração de dois números inteiros.

O número de Euler ($e \approx 2,7182818\dots$) é um número irracional, pois suas casas decimais seguem infinitamente sem um padrão repetitivo. Ele não termina em 8 nem possui um ciclo que se repete nos dígitos, o que o caracteriza como uma dízima infinita não periódica.

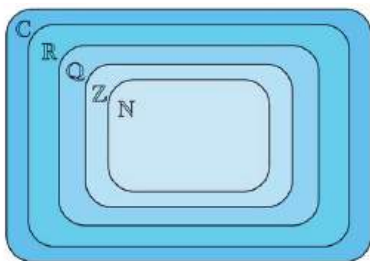
Exemplo de outros números irracionais: $\{\sqrt{2}, \sqrt{11}, 5e, \pi + 1, \frac{\sqrt{3}}{2}\}$

Não existe um símbolo oficial para os números irracionais, mas podemos adotar (I) para facilitar as nossas operações com este conjunto de números.

2.5 Números Reais

Chama-se **conjunto dos números reais (R)** o conjunto de todos números decimais exactas ou periódicas (racionais) e conjunto de números decimais não exactas e não periódicas (chamados irracionais)

Assim, todos os números listados anteriormente são números reais, desde os naturais, inteiros, racionais e números irracionais.



Subconjuntos dos números reais

R^+ ou R_+ **Conjunto dos números reais positivos**

R^- ou R_- **Conjunto dos números reais negativos**

R^* **Conjunto dos números reais não nulos**

2.6 Operações de Relação

As operações de relação entre números e conjuntos ajudam a descrever a ligação entre um elemento (número) e um conjunto ou entre diferentes conjuntos.

2.6.1. Relações entre um elemento e um conjunto

Para relacionar um número com um conjunto, usamos os símbolos pertence ($\in$) e não pertence ($\notin$). Por exemplo, podemos afirmar que 34 pertence ao conjunto dos números inteiros usando a notação: $34 \in \mathbb{Z}$

NOTA: $\mathbb{Z}$ representa o conjunto dos inteiros. Caso o número não faça parte do conjunto, utilizamos o símbolo não pertence ($\notin$).

Exemplo Adicional: $-4 \notin \mathbb{N}$ e $\sqrt{3} \in \mathbb{I}$

2.6.2. Relações entre conjuntos

As relações entre conjuntos utilizam os símbolos contém ($\supset$), não contém ($\not\supset$), está contido ($\subset$) e não está contido ($\not\subset$). Por exemplo, o conjunto dos números naturais (representado por $\mathbb{N}$) está contido no conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$), já que todos os números naturais também são inteiros. Escrevemos essa relação como: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Exemplo Adicional: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ & $\mathbb{Q}_0^- \not\supset \mathbb{N}$

Essas operações de relação ajudam a estruturar e a organizar matematicamente a inclusão e a pertença de elementos e conjuntos, tornando claro como os números se relacionam entre si em diferentes grupos.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01) Faz a relação entre cada elemento para cada conjunto use os símbolos $\in$ ou $\notin$

a) $23,1 \text{ } ______ N$

f) $3,5 \text{ } ______ Z^-$

b) $-2,45 \text{ } ______ Q$

g) $-9876 \text{ } ______ Q_0^-$

c) $\pi \text{ } ______ R$

h) $-5 \text{ } ______ R_0^+$

d) $\sqrt{31} \text{ } ______ I$

i) $\sqrt{16} \text{ } ______ Q_0^+$

e) $\frac{5}{3} \text{ } ______ Z$

j) $51,23 \text{ } ______ I$

02) Faz a relação entre os conjuntos

a) $R \text{ } ______ N$

f) $Z \text{ } ______ Z^-$

b) $Z \text{ } ______ Q$

g) $Q \text{ } ______ Q_0^+$

c) $Q \text{ } ______ R$

h) $R_0^+ \text{ } ______ N$

d) $R \text{ } ______ I$

i) $Z^- \text{ } ______ Q_0^+$

e) $N \text{ } ______ Z$

j) $Z^+ \text{ } ______ R$

03) Mostre que $\sqrt{5}$ é um número irracional.

RESOLUÇÃO

01. Faz a relação entre cada elemento para cada conjunto use os símbolos $\in$ ou $\notin$

Resolução:

a) $23,1 \notin N$

f) $3,5 \notin Z^-$

b) $-2,45 \in Q$

g) $-9876 \in Q_0^-$

c) $\pi \in R$

h) $-5 \notin R_0^+$

d) $\sqrt{31} \in I$

i) $\sqrt{16} \in Q_0^+$

e) $\frac{5}{3} \notin Z$

j) $51,23 \notin I$

02. Faz a relação entre os conjuntos

Resolução:

a) $R \supset N$

f) $Z \supset Z^-$

b) $Z \subset Q$

g) $Q \subset Q_0^+$

c) $Q \subset R$

h) $R_0^+ \supset N$

d) $R \supset I$

i) $Z^- \not\subset Q_0^+$

e) $N \subset Z$

j) $Z^+ \subset R$

03. Mostre que $\sqrt{5}$ é um número irracional.

Resolução:

$\sqrt{5}$ é raiz do polinómio. $p(x) = x^2 - 5$ Pelo teorema, suas possíveis raízes racionais são $-5, -1, 1$ ou 5 , Vamos verificar:

$$p(1) = 1^2 - 5 = -4 \neq 0 \quad p(-1) = (-1)^2 - 5 = -4 \neq 0; \quad p(5) = 5^2 - 5 = 20 \neq 0 \quad p(-5) = (-5)^2 - 5 = 20 \neq 0$$

Logo, esse polinómio não admite raízes racionais. Como $\sqrt{5}$ é raiz, deve ser irracional

3 TEOREMA DE CONJUNTOS

Definições:

- Conjunto representa uma colecção de objectos
- Elemento é um dos componentes de um conjunto
- Pertinência é a característica associada a um elemento que faz parte de um conjunto

Geralmente indicamos um conjunto com uma letra maiúscula **A, B, C, D...** e um elemento com uma letra minúscula **a,b,c,d,x, y**.

3.1 Representação De Conjuntos

A representação de conjuntos pode ser feita de três maneiras:

- Por Extensão

Ex. $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ Conjuntos dos números pares positivos

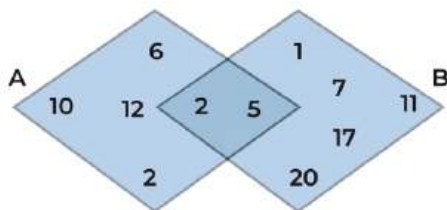
$B = \{a, e, i, o, u\}$ Conjuntos das vogais

- Por compreensão

Quando é enunciada uma propriedade característica dos seus elementos

Ex. $A = \{\text{os meus CDs de hinos}\}$ $B = \{x \in R : x \text{ é primo}\}$

- Diagrama de Euler-Venn



$\in$	$\rightarrow$	pertence
$\notin$	$\rightarrow$	não pertence
$\forall$	$\rightarrow$	para todo e qualquer
$A \subset B$	$\rightarrow$	A está contido em B
$A \not\subset B$	$\rightarrow$	A não está contido em B
$B \supset A$	$\rightarrow$	B contem A

Nota que o diagrama de venn **pode representado por** quadriláteros ou círculos

3.2 Conjunto Unitário

Chama-se conjunto unitário aquele que possui um único elemento.

Ex1: $A = \{\pi\}$

Ex2: Conjunto das soluções da equação $5x-1=19$ $\{4\}$

3.3 Conjunto Vazio

Chama-se conjunto vazio aquele que não possui elemento algum o símbolo usual para conjunto vazio é $\emptyset$.

Exemplos:

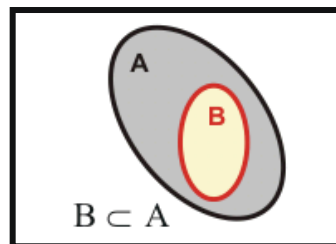
$$1) \{x : x \neq x\} = \emptyset$$

$$2) \{x : x > 0 \text{ e } x < 0\} = \emptyset$$

3.4 Subconjunto

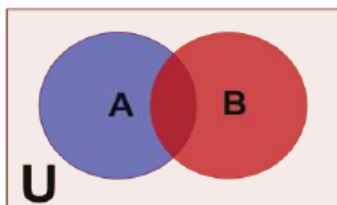
Um conjunto B é subconjunto de conjunto A se todo elemento do conjunto A pertencer também a B

$$B \subset A \Leftrightarrow (\forall x) x \in B \Rightarrow x \in A$$



Ex: $A = \{2, 3\}$ é subconjunto de $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

3.5 Conjunto Universo



Chama-se conjunto universo o conjunto dos quais todos conjuntos em estudo são subconjuntos símbolo U

3.6 Igualdade Conjuntos

Dois conjuntos A e B são iguais quando todo elemento de A pertence a B e, reciprocamente, todo elemento de B pertence a A

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x) x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

Ex:

1. $\{a, b, c, d\} = \{d, c, b, a\}$
2. $\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\} = \{x: x \text{ é inteiro positivo e ímpar}\}$
3. $\{x: 2x + 1 = 5\} = \{2\}$

Observa:

- Que na definição de igualdade entre conjuntos não intervém a noção de ordem entre os elementos no entanto:
 $\{a, b, c, d\} = \{d, c, b, a\} = \{b, a, c, d\}$
- Nota que a repetição de um elemento na descrição de um conjunto é algo totalmente inútil por exemplo:
-
- $\{a, b, c, d\} = \{a, d, c, b, b, a, c, d, d\} = \{b, a, c, d\}$ para evitar de confundir basta usar a definição.

3.7. Complementar de um conjunto

Chama-se complementar de A em relação a um dado conjunto B ao conjunto de todos elementos de B que não pertencem a A.

$$C_A^B = A \setminus B = \overline{A}$$

Em outras palavras, é o conjunto dos elementos que não estão no conjunto que estamos considerando.

Seja A um conjunto dentro de um conjunto universal U. O complemento de A é geralmente representado por:

$$A', \overline{A} \text{ ou } A^c$$

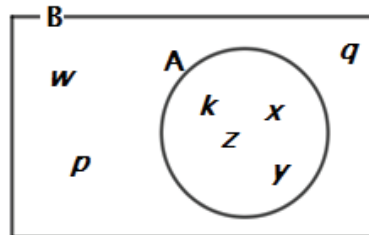
Exemplo

Se o conjunto universal $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $A = \{2, 4, 6\}$, então o complemento de A , seria o conjunto $\bar{A}$ dos elementos que estão em U , mas não estão em A :

$$\bar{A} = \{1, 3, 5\}$$

Exemplos:

Ex.: $\bar{A} = \{p, q, w\}$



Leis de Morgan

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

3.7 Diferença De Conjuntos

Dados dois conjuntos A e B chama-se diferença entre A e B o conjunto formados pelos elementos de A que não pertencem a B

$$A - B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Em outras palavras a diferença entre os conjuntos A e B (representada como $A - B$ ou $A \setminus B$) é o conjunto de todos os elementos que pertencem a A e que não pertencem a B .

Exemplo

Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{3, 4, 6\}$

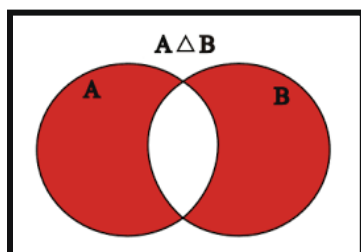
$A \setminus B$ será o conjunto de elementos que estão em A , mas não estão em B :

$$A \setminus B = \{1, 2, 5\}$$

Já a diferença $B \setminus A$ seria o conjunto dos elementos que estão em B , mas não estão em A :

$$B \setminus A = \{6\}$$

3.8 Diferença Simétrica



Dados dois conjuntos de A e B chama-se diferença simétrica de A e B a condição:

$$A \Delta B = A \setminus B \cup B \setminus A \text{ ou } A \Delta B = A - B \cup B - A$$

Em outras palavras, A diferença simétrica entre dois conjuntos A e B, denotada por $A \Delta B$, é o conjunto dos elementos que estão em um dos conjuntos ou no outro, mas não em ambos ao mesmo tempo. A diferença simétrica exclui os elementos que são comuns aos dois conjuntos.

Definição Matemática

A diferença simétrica entre A e B pode ser definida como:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

Isso significa que $A \Delta B$ é a união dos elementos que estão apenas em A e dos elementos que estão apenas em B.

Exemplo:

Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{3, 4, 5, 6\}$

Primeiro, encontramos $A - B = \{1, 2\}$.

Em seguida, encontramos $B - A = \{5, 6\}$.

Agora, a diferença simétrica

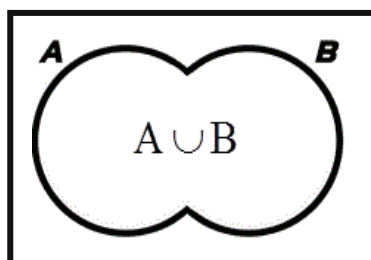
$A \Delta B$ é a união desses dois conjuntos:

$$A \Delta B = \{1, 2\} \cup \{5, 6\} = \{1, 2, 5, 6\}$$

3.9 Reunião De Conjuntos

Seja dois conjuntos A e B chama-se reunião de A com B ao conjunto de todos elementos de conjunto A e do conjunto B

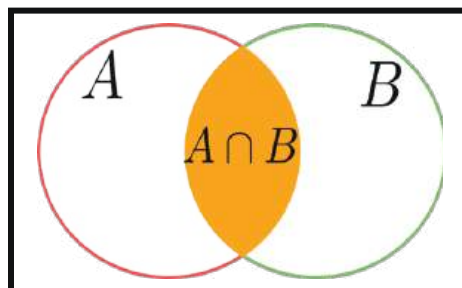
Propriedades de reunião



$A \cup A = A$ (idempotente)
 $A \cup \emptyset = A$ (elemento neutro)
 $A \cup B = B \cup A$ (comutativa)
 $(A \cup B) \cup C = A \cup (A \cup C)$ (associativa)

3.10 Intersecção De Conjuntos

Chama-se intersecção de A com B ao conjunto de elementos que pertencem simultaneamente ao conjunto A e ao conjunto B



Propriedades de intersecção

$A \cap A = A$ (idempotente)
 $A \cap U = A$ (elemento neutro)
 $A \cap B = B \cap A$ (comutativa)
 $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (associativa)

3.11 Cardinal de um conjunto

Cardinal de um conjunto finito A é o número de elementos deste conjunto.
Representa-se $\#A$ e lê-se cardinal do conjunto A

Ex: $A = \{a, e, i, o, u\} \Rightarrow \#A = 5$

PRODUTO CARTESIANO

O produto cartesiano de dois conjuntos A e B é o conjunto de todos pares ordenados que se podem formar, indicando primeiro um elemento de A e depois de B , e representa-se por $A \times B$

Exemplos

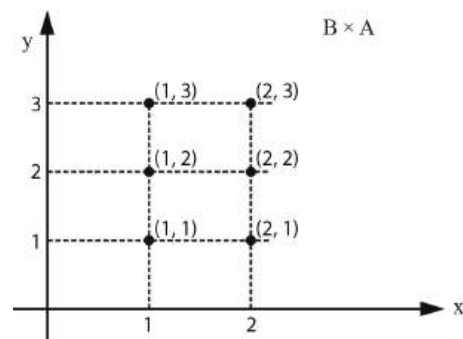
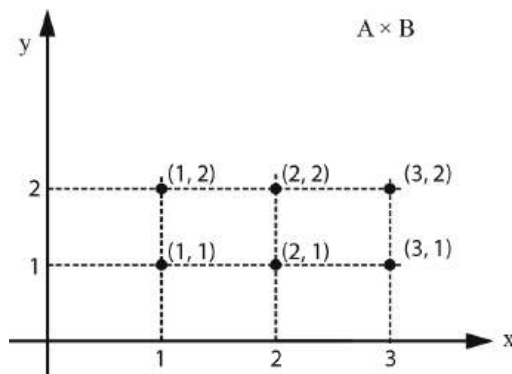
1º Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2\}$ temos:

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$$

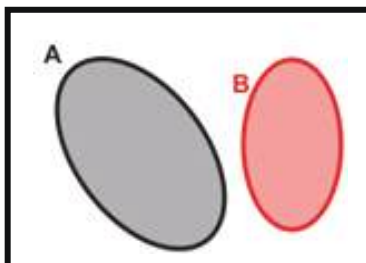
e

$$B \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

e as apresentações no plano cartesiano são as seguintes:



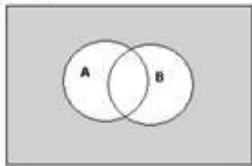
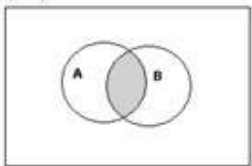
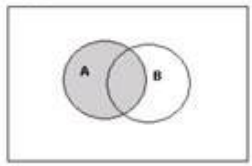
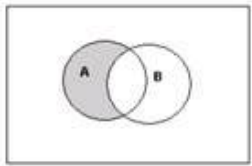
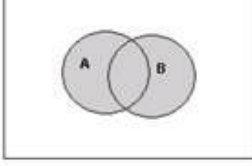
CONJUNTOS DISJUNTOS



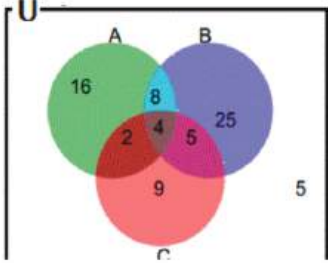
Chama-se conjuntos disjuntos a dois conjuntos cuja intersecção é um conjunto vazio.

$$A \cap B = \emptyset$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01	Num prédio, foi efectuada uma pesquisa sobre os frequentadores das lanchonetes A, B e C e constatou-se que 30, 40 e 20 indivíduos frequentavam A, B e C, respectivamente; 12 frequentavam A e B; 9 frequentavam B e C; 6 frequentavam A e C; 4 frequentavam A, B e C; 5 não frequentavam nenhuma lanchonete. O número de moradores do prédio é: A. 90 B. 80 C. 72 D. 92 E. 62
02	Sejam m e n o número de elementos de $M = \{-3, -2, 4, 6\}$ e $N = \{2, 3\}$, respectivamente. Considere a relação dada pela lei $m > n$. Os pares ordenados que constituem a relação são: a) $(-3; 2), (-2; 3), (4; 2), (6; 3)$ b) $(-3; 3), (-2; 3), (6; 2), (6; 3)$ c) $(4; 2), (4; 3), (6; 2), (6; 3)$ d) $(-3; 2), (4; 3), (6; 2), (6; 3)$ e) $(4; 2), (4; 3), (-3; 2), (6; 3)$
03	A intersecção do conjunto de todos os números naturais múltiplos de 10 com o conjunto de todos os números naturais múltiplos de 15 é o conjunto de todos os números naturais múltiplos de: a) 2 b) 30 c) 5 d) 30 e) 150
04	As figuras abaixo representam diagramas de Venn de dois conjuntos arbitrários A e B. Assinale a alternativa que representa o diagrama de Venn no qual $A \cap \bar{B}$ está sombreado (A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Resolução

01	Para resolver esse problema de forma mais fácil, podemos usar um diagrama de Venn. Começamos preenchendo as intersecções, começando pela maior intersecção (as pessoas que frequentam todas as lanchonetes) e, em seguida, preenchendo as intersecções menores. É importante garantir que, ao final, a soma dos números em cada círculo correspondente a uma lanchonete seja exatamente igual ao número total de frequentadores daquela lanchonete. Depois de completar o diagrama, somamos todos os números visíveis para encontrar o total de frequentadores. Por fim, adicionamos aqueles que não frequentam nenhuma lanchonete para obter o número total de moradores do prédio. $16+8+25+2+4+5+9+5=72$	
02	Na realidade o que nos é pedido neste exercício é um conjunto de pares ordenados em que o primeiro elemento do par pertença a m e que seja maior que o segundo, sendo que este pertença a n. Assim, os pares ordenados são: $\{(4;2), (4;3), (6;2), (6;3)\}$	
03	Seja: $A = \{\text{conjunto de todos os números naturais múltiplos de } 10\}$ $A = \{10; 20; 30; 40; 50; 60; 70; 80; 90; 100; 110; 120 \dots\}$ Seja: $B = \{\text{conjunto de todos os números naturais múltiplos de } 15\}$ $B = \{15; 30; 45; 60; 75; 90; 105; 120; 135; 150 \dots\}$ Fazendo a intersecção $A \cap B = \{30; 60; 90; 120; 150 \dots\}$ Entretanto, podemos ver que a intersecção dos dois conjuntos é um conjunto de todos os números naturais múltiplos de: 30	
04	O conjunto complementar de B, onde U é o conjunto universal que contem os objectos. Desta forma, a área achatando em cada alternativa é representada por: A) $\overline{A \cap B}$ B) $A \cap B$ C) A D) $\overline{A \cap B}$ E) $\overline{A \cup B}$	

4 INTERVALOS REAIS

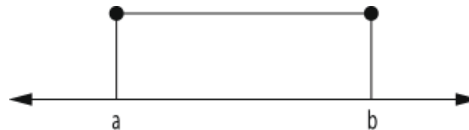
Alguns subconjuntos de $\mathbb{R}$ podem ser representados de maneira mais simplificada. São os chamados intervalos reais.

Intervalo aberto nas duas extremidades



Que será $]a, b[$ ou ainda (a, b) ou através de conjunto $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

Intervalo fechado nas duas extremidades



Que será $[a, b]$ ou através de conjuntos $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

Intervalo aberto em a e fechado em b.



Que será $]a, b]$ ou ainda $(a, b]$ ou através de conjuntos $\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

Intervalo fechado em a e aberto em b



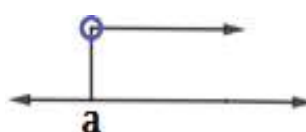
Que será $[a, b[$ ou ainda $[a, b)$ ou através de conjunto $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

Intervalo fechado em a



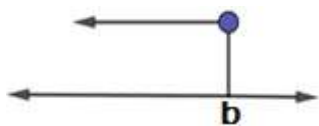
Que será $[a, +\infty[$ ou ainda $[a, +\infty)$ ou através de conjuntos $\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$

Intervalo aberto em a



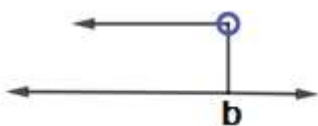
Que será $]a, +\infty[$ ou ainda $(a, +\infty)$ ou através de conjuntos $\{x \in \mathbb{R} : x > a\}$

Intervalo fechado em b



Que será $]-\infty, b]$ ou ainda $(-\infty, b]$ ou através de conjuntos $\{x \in R : x \leq b\}$

Intervalo aberto em b



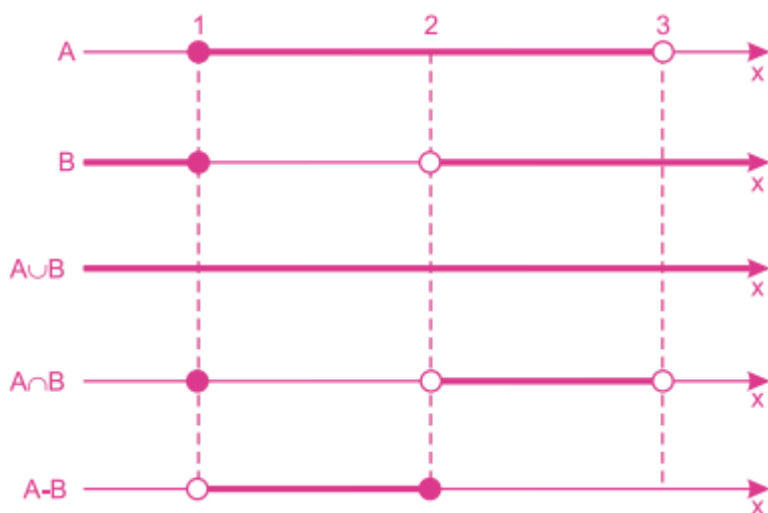
Que será $]-\infty, a[$ ou ainda $(-\infty, b)$ ou através de conjuntos $\{x \in R : x < b\}$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. Dados conjuntos numéricos em $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1 \text{ ou } x > 2\}$ Determine

- a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $A - B$

Resolução



02. Se $A = \{x \in \mathbb{Z}^*, x^2 < 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}, x < 2\}$ então o número de elementos da relação

$R = \{(a, b) \in A \times B, b < a^2\}$ **é:**

- a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 10

Resolução:

se $A = \{x \in \mathbb{Z}^*, x^2 < 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}, x < 2\}$, então o numero de elementos da relação

$R = \{(a, b) \in A \times B, b < a^2\}$ **é:**

- a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 10

Do enunciado temos:

- x pode assumir os valores $-2, -1, 1$ e $A = \{-2, -1, 1, 2\}$
- x pode assumir os valores 0 e $1 \rightarrow B = \{0, 1\}$

$$A \times B = \{(-2, 0) \cdot (-2, 1) \cdot (-1, 0) \cdot (-1, 1) \cdot (1, 0) \cdot (1, 1) \cdot (2, 0) \cdot (2, 1)\}$$

$$R = \{(-2, 0) \cdot (-2, 1) \cdot (-1, 0) \cdot (1, 0) \cdot (2, 0) \cdot (2, 1)\}$$

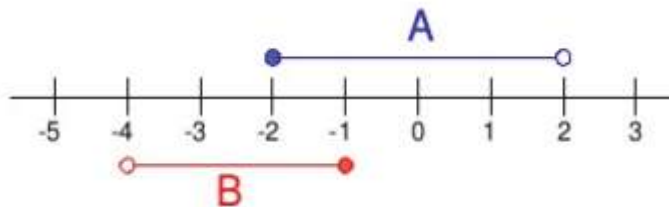
A relação R possui 6 elementos

Determine $A \cup B$ e $A \cap B$

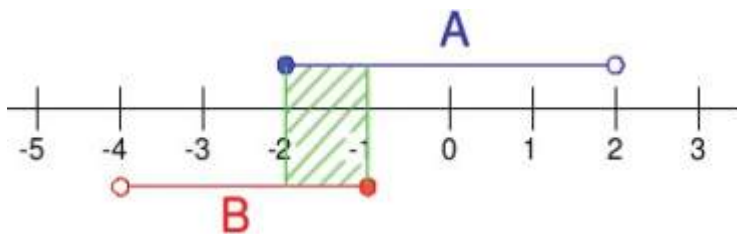
Resolução

Como o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x < 2\}$ $A = [-2; 2[$ o conjunto

$B = \{x \in \mathbb{R} / -4 < x \leq -1\}$ $A =]-4, -1]$ Representando temos:



Entretendo $A \cup B = [-2; 2[\cap]-4, -1] = [-2, -1]$. $A \cup B = [-2; 2[\cup]-4, -1] =]-4, 2]$



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Dados os conjuntos: $A = \{x \in \mathbb{R} : x = 3n\}$ e $B = \left\{x \in \mathbb{R} - \{0\} : \frac{18}{x} = n\right\}$ Tem-se que $A \cap B$ é igual ao conjunto:

- a) $[3, 18]$ b) $\{ \}$ c) $\{x \in \mathbb{R} : 3 \leq x \leq 18\}$ d) $\{3, 6, 9, 18\}$

2. Dados $A =]-2, 4]$ $B = [1, 4]$ e $C = (0, 2]$ correcto afirmar que $A \cup B \cup C$ é:

- a) $(-2, 2]$ b) $[-2, 2]$ c) $(-2, 2)$ d) $(0, 2]$ e) $(-2, 4]$

3. O número x não pertence ao intervalo aberto de extremos -1 e 2 . Sabe-se que $x < 0$ ou $x > 3$ Pode-se concluir que:

- a) $x \leq -1$ ou $x < 3$ b) $x \geq 2$ ou $x < 0$ c) $x \geq 2$ ou $x \leq -1$ d) $x > 3$ e) Nenhuma das alternativas anteriores

4. Dados conjuntos numéricos em $A =]-14, 11]$, $B = \{x : 3 \leq x < 17\}$ e o universo $U =]-18, 18]$ o conjunto complementar da reunião de A com B.

- a) $\overline{A \cup B} =]-18, 14] \cup [17, 18]$ b) $\overline{A \cup B} =]-18, -14] \cup [17, 18]$ d) $\overline{A \cup B} =]-18, 18]$
 e) $\overline{A \cup B} = [-18, 18]$ c) $\overline{A \cup B} = \emptyset$

5. Sejam os conjuntos: $A = \{x \in R : 0 < x < 2\}$ e $B = \{x \in R : -3 \leq x \leq 1\}$ Nestas condições, o conjunto $(A \cup B) - (A \cap B)$ é:

- a) $[-3, 0] \cup]1, 2[$ b) $[-3, 0[\cup [1, 2[$ c) $] -\infty, -3[\cup [2, +\infty[$ d) $]0, 1]$

6. Sejam os conjuntos: $A = \{x \in R : -4 \leq x \leq 3\}$ e $B = \{x \in R : -2 \leq x < 5\}$ $A - B$ é igual a:

- a) $\{x \in R : -4 \leq x < -2\}$ b) $\{x \in R : -4 \leq x \leq -2\}$ c) $\{x \in R : 3 < x < 5\}$
 d) $\{x \in R : 3 < x \leq 5\}$ e) $\{x \in R : -2 \leq x < 5\}$

7. Um conjunto A contém os cinco primeiros números naturais, os cinco primeiros números pares e os cinco primeiros números ímpares. Então, o número de elementos do conjunto A é:

- a) 10 b) 11 c) 12 d) 15

8. Dados os conjuntos $A = \{1, 3, 4, 7, 8\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ e $C = \{2, 3, 5, 7, 8\}$, o conjunto $\#(A \cup B) \cup B$ têm:

- a) 5 Elementos b) 6 Elementos c) 4 Elementos d) Não tem elementos

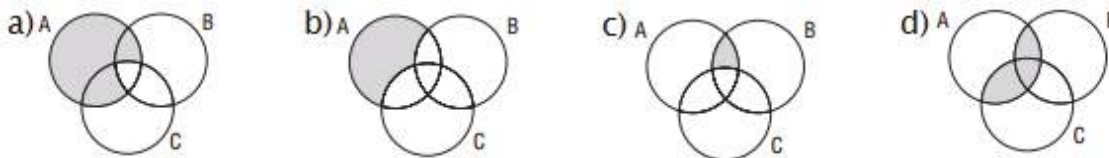
9. Numa escola de Línguas Estrangeiras, estudam 300 alunos. O número de estudantes matriculados apenas em Espanhol corresponde à metade dos que estudam Inglês, e a quantidade dos que cursam apenas Inglês é igual à dos que estudam Espanhol. O número de alunos que cursa Inglês e Espanhol é

- a) 40 b) 50 c) 60 d) 80

10. Quantos são os elementos do conjunto $\{x \in \mathbb{R} : 10\pi < x < \pi + 30\}$?

- a) 2 b) 1 c) 3 d) Infinito e) o conjunto é vazio

11. A parte colorida no diagrama que melhor representa o conjunto $D = A - (A \cup B)$ é:



12. Sendo $A = \{x \in \mathbb{N}, x \text{ é divisor de } 18\}$ e $C = \{x \in \mathbb{N}, x \text{ é múltiplo de } 3\}$, então

$(B - A) \cap C$ é:

- a) $\{6, 9, 18\}$ b) $\{6, 18\}$ c) $\{6, 9\}$ d) $\{6\}$ e) $\emptyset$

13. Dados: $A = \{1, 3, 4, 5, 7, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 6, 9\}$, $C = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ temos que $A \cap (B \cap C)$ resulta:

- a) $\{5, 6, 9\}$ b) $\{5\}$ c) $\{1, 3\}$ d) $\{1, 3, 4, 7, 8\}$ e) $\{7, 8\}$

14. Dados os conjuntos $A = \{1, 3, 4, 7, 8\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ e $C = \{2, 3, 5, 7, 8\}$, o conjunto $\#(A \cup B) \cup B$ têm:

- a) 5 Elementos b) 6 Elementos c) 4 Elementos d) Não tem elementos

15. Chama-se conjunto dos números racionais o conjunto:

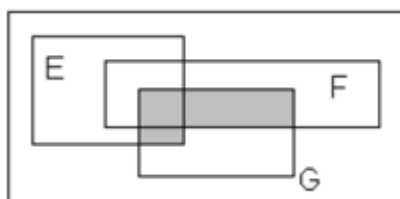
- a) $\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$ b) $\left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, \text{ com } b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0 \right\}$ c) $\left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{N}, \text{ com } b \in \mathbb{N} \text{ e } b \neq 0 \right\}$
- d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = \sqrt{a} \text{ e } a \in \mathbb{Q}\}$ e) $\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, \text{ com } b \in \mathbb{Z}$

16. Assinale a afirmação verdadeira:

- a) $(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)$ é irracional e $0,999\ldots$ é racional.
- b) $(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)$ é racional e $0,999\ldots$ é racional.
- c) $(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)$ é racional e $0,999\ldots$ é irracional.
- d) $(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)$ é irracional e $0,999\ldots$ é irracional.
- e) $(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)$ e $0,999\ldots$ não são números reais.

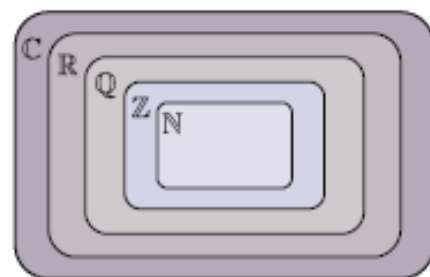
17. No diagrama, a parte hachurada representa:

- a) $(E \cap F) \cap G$
- b) $(E \cap G)$
- c) $G \cap (E \cup F)$
- d) $(E \cap F) \cup (F \cap G)$
- e) $(E \cup F) \cup G$



5 NÚMEROS COMPLEXOS

Conjunto dos números complexos Com a criação da unidade imaginária i , surgiu um novo conjunto numérico $\mathbb{C}$, o conjunto dos números complexos, que engloba o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Assim, por meio de um diagrama Euler-Venn,



O surgimento desse novo conjunto numérico foi de grande utilidade para a superação de alguns obstáculos na matemática e, por conseguinte, nas aplicações directamente ligadas a ela.

Definição: Chamamos de **número complexo** na forma algébrica, todo número na forma $a + bi$, em que a e b são números reais e i é unidade imaginária.

Da mesma forma que, quando nos referimos a um número natural, usamos a letra N para representá-lo, a letra z será usada para representarmos um número complexo.

Assim, no número complexo $z = a + bi$, dizemos que:

- a é a parte real de z [Representamos: $a = \text{Re}(z)$]
- b é a parte imaginária de z . [Representamos: $b = \text{Im}(z)$]

Exemplo: $z = 5 + 9i$

Em particular, temos:

1º) Se $\text{Im}(z) = 0$, dizemos que z é um número real.

Exemplos: $-5 = -5 + 0i$; $\sqrt{2} = \sqrt{2} + 0i$

2º) Se $\text{Re}(z) = 0$ e $\text{Im}(z) \neq 0$, dizemos que z é um imaginário puro.

Exemplos: $2i = 0 + 2i$; $\sqrt{3} \times i = 0 + \sqrt{3} \times i$

5.1 Igualdade De Números Complexos

Dois números complexos, na forma algébrica, são iguais quando suas partes reais e imaginárias forem respectivamente iguais. Assim, sendo $z_1 = a_1 + b_1i$ e $z_2 = a_2 + b_2i$, com a_1, b_1, a_2 e b_2 reais, dizemos:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \text{ e } b_1 = b_2$$

Exemplo

Calcular a e b de modo que:

$$(2a - b) + 3i = -2 + (-a + b)i$$

Resolução

$$\text{Devemos ter: } \begin{cases} 2a - b = -2 \\ 3 = -a + b \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$\begin{cases} 2a - b = -2 \\ -a + b = 3 \\ \hline a = 1 \end{cases}$$

Substituindo $a = 1$ na equação $-a + b = 3$, temos: $-1 + b = 3 \Rightarrow b = 4$

Assim: $a = 1$ e $b = 4$

5.2 Operações Com Números Complexos

A. Adição

Dados os complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com a, b, c e d reais, a soma $z_1 + z_2$ será um complexo tal que:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Exemplo:

Sendo $z_1 = -3 + 4i$ e $z_2 = 2 - i$, calcular $z_1 + z_2$.

Resolução $z_1 + z_2 = (-3 + 4i) + (2 - i) = (-3 + 2) + (4 - 1)i$ Assim: $z_1 + z_2 = -1 + 3i$

B. Subtração

Dados os complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com a, b, c e d reais, a diferença $z_1 - z_2$ será um complexo, tal que:

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Exemplo:

Sendo $z_1 = 5 + 3i$ e $z_2 = 3 + 2i$, calcular $z_1 - z_2$.

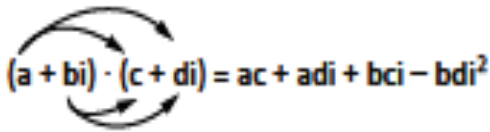
Resolução $z_1 - z_2 = (5 + 3i) - (3 + 2i) = (5 - 3) + (3 - 2)i$ Assim: $z_1 - z_2 = 2 + i$

C. Multiplicação

Dados os complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com a, b, c e d reais, o produto $z_1 \times z_2$ será um complexo, tal que:

$$z_1 \times z_2 = (a + bi) \times (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

De fato, usando a propriedade distributiva, temos:



$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci - bdi^2$$

Como $i^2 = -1$, temos:

$(a + bi) \times (c + di) = ac + adi + bci - bd$ Agrupando a parte real e a parte imaginária, temos:

$$z_1 \times z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Exemplo:

Sendo $z_1 = 3 + 2i$ e $z_2 = 2 + 4i$, calcule $z_1 \times z_2$.

Resolução

$$z_1 \times z_2 = (3 + 2i) \times (2 + 4i)$$

$$z_1 \times z_2 = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4i + 2i \cdot 2 + 2i \cdot 4i \quad z_1 \times z_2 = 6 + 12i + 4i + 8i^2$$

$$z_1 \times z_2 = 6 + 12i + 4i - 8 \quad \text{dai que } z_1 \times z_2 = -2 + 16i$$

Observação – As propriedades da adição, subtração e multiplicação válidas para os números reais continuam válidas para os números complexos.

D. CONJUGADO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Chamamos de conjugado do número complexo $z = a + bi$, com a e b reais, o número complexo $\bar{z} = a - bi$.

Exemplos

$$1^{\circ}) z_1 = 2 - 3i \Rightarrow \overline{z_1} = 2 + 3i \quad 2^{\circ}) z_2 = -1 - 4i \Rightarrow \overline{z_2} = -1 + 4i \quad 3^{\circ}) z_3 = -3i \Rightarrow \overline{z_3} = 3i$$

$$4^{\circ}) z_4 = 2 \Rightarrow \overline{z_4} = 2$$

Propriedade

O produto de um número complexo pelo seu conjugado é sempre um número real.

$$Z \times \overline{Z} \in R$$

Demonstração

Sendo $z = a + bi$ e $\overline{z} = a - bi$ ($a \in R$), temos:

$$z \times \overline{z} = (a + bi) \times (a - bi)$$

$$z \times \overline{z} = a^2 - \cancel{abi} + \cancel{abi} - b^2 i^2$$

$$z \times \overline{z} = a^2 + b^2$$

Como a e b são reais, $Z \times \overline{Z} \in R$

E. Divisão

Dados dois números complexos, z_1 e z_2 , com $z_2 \neq 0$, efectuar a divisão de z_1 por z_2 é encontrar um terceiro número complexo z_3 tal que $z_1 = z_2 \times z_3$, ou seja:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_3$$

Exemplo

Efectuar a divisão de $z_1 = 2 - 3i$ por $z_2 = 1 + 2i$.

Resolução

Devemos encontrar um número complexo $z_3 = a + bi$ tal que $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$. Assim,

$$\frac{2-3i}{1+2i} = a + bi$$

$$2 - 3i = (a + bi) \times (1 + 2i) \quad 2 - 3i = a + 2ai + bi + 2bi^2 \quad 2 - 3i = a + 2ai + bi - 2b$$

$$2 - 3i = (a - 2b) + (2a + b)i$$

$$\begin{cases} a - 2b = 2 \\ 2a + b = -3 \dots \dots \times 2 \end{cases} + \begin{cases} a - 2b = 2 \\ 4a + 2b = -6 \end{cases}$$

$$5a = -4 \Rightarrow a = -\frac{4}{5}$$

Substituindo em $a - 2b = 2$, temos:

$$-\frac{4}{5} - 2b = 2 \Rightarrow -\frac{4}{5} - 2 = 2b \Rightarrow b = -\frac{7}{5}$$

Assim:

$$a = -\frac{4}{5} \text{ e } b = -\frac{7}{5} \quad \text{Então: } \frac{2-3i}{1+2i} = -\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i$$

Regra prática

Dados os complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, a, b, c e d reais e $z_2 \neq 0$, para efectuarmos a divisão de z_1 por z_2 , basta multiplicarmos o numerador e o denominador da fracção $\frac{z_1}{z_2}$

Pelo conjugado do denominador ($\overline{z_2}$).

Assim, temos:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)}$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - cdi + dic - d^2i^2} \quad \text{Dessa forma: } \frac{a + bi}{c + di} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right) + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)i$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

Exemplo

Efectuar a divisão de $z_1 = 2 - 3i$ por $z_2 = 1 + 2i$.

Resolução

$$\begin{aligned}\frac{2-3i}{1+2i} &= \frac{(2-3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} \\ \frac{2-3i}{1+2i} &= \frac{2-4i-3i+6i^2}{1-4i^2} \\ \frac{2-3i}{1+2i} &= \frac{-4-7i}{1+4} \\ \frac{2-3i}{1+2i} &= -\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i\end{aligned}$$

Potências de i

Calculemos algumas potências de i com expoente natural:

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \times i = (-1) \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^2 \times i^2 = (-1) \times (-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \times i = 1 \times i = i$$

$$i^6 = i^4 \times i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$$

$$i^7 = i^4 \times i^3 = 1 \times (-i) = -i$$

Notamos que, a partir de i^4 , as potências de i vão repetindo os quatro primeiros resultados; assim, de um modo mais geral, com $n \in \mathbb{N}$, podemos afirmar que:

$$i^{4n} = (i^4)^n = 1^n = 1$$

$$i^{4n+1} = i^{4n} \times i^1 = 1 \times i = i$$

$$i^{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2 = 1 \times (-1) = -1$$

$$i^{4n+3} = i^{4n} \times i^3 = 1 \times (-i) = -i$$

Esta conclusão sugere-nos o seguinte:

Exemplos:

1º) Calcular i^{359}

Resolução

$$359 \div 4 \Rightarrow i^{359} = i^3 = -i$$

$$39 \quad 89$$

$$3$$

2º) Calcular i^{130}

Resolução

$$130 \div 4 \Rightarrow i^{130} = i^2 = -1$$

$$10 \quad 32$$

$$2$$

3º) Resolva a equação: $x^2 - 2x + 10 = 0$

Resolução

$$\Delta (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -36$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-36} = \sqrt{36 \cdot (-1)} = 6 \cdot \sqrt{-1} = 6i$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 6i}{2}$$

$$x = 1 \pm 3i$$

$$s = \{1 - 3i, 1 + 3i\}$$

4º) Se $Z = 4 + 2i$ e $W = 3 - 5i$, então, calcular:

a. $Z + W$

b. $Z - W$

c. $Z \cdot W$

Resolução

$$Z + W = (4 + 2i) + (3 - 5i) = 4 + 2i + 3 - 5i = 7 - 3i$$

$$Z - W = (4 + 2i) - (3 - 5i) = 4 + 2i - 3 + 5i = 1 + 7i$$

$$Z \cdot W = (4 + 2i)(3 - 5i) = 12 - 20i + 6i - 10i^2 =$$

$$12 - 14i + 10 = 22 - 14i$$

Resposta

a. $7 - 3i$; b. $1 + 7i$; c. $22 - 14i$.

O número complexo $1 - i$ é raiz da equação $x^2 + kx + t = 0$ ($k, t \in \mathbb{R}$) se, e somente se:

a. $k = t = -2$

d. $k = 2$ e $t = -2$

b. $k = t = 2$

e. $k + t = 1$

c. $k = -2$ e $t = 2$

Resolução

Se $(1 - i)$ é raiz, temos:

$$(1 - i)^2 + k(1 - i) + t = 0$$

$$1 - 2i - 1 + k - ki + t = 0$$

$$(k + t) + (-2 - k)i = 0 + 0i$$

Logo:
$$\begin{cases} k + t = 0 \\ -2 - k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} t = 2 \\ k = -2 \end{matrix}$$

Resposta C

O número complexo z , tal que $5z + \bar{z} = 12 + 16i$, é igual a:

- a. $-2 + 2i$ d. $2 + 4i$
b. $2 - 3i$ e. $3 + i$
c. $1 + 2i$

Resolução

Fazendo $z = a + bi$ e $\bar{z} = a - bi$, temos:

$$5z + \bar{z} = 12 + 16i \Rightarrow 5(a + bi) + a - bi = 12 + 16i$$

$$5a + 5bi + a - bi = 12 + 16i$$

$$6a + 4bi = 12 + 16i$$

$$\begin{cases} 6a = 12 \Rightarrow a = 2 \\ 4b = 16 \Rightarrow b = 4 \end{cases}$$

Logo: $z = 2 + 4i$

Resposta D

Determine o inverso do número complexo $z = 3 - 2i$.

Resolução

O inverso de z será z^{-1} , tal que $z \times z^{-1} = 1$, ou seja, $z^{-1} = \frac{1}{z}$. Assim:

$$z^{-1} = \frac{1}{3-2i} = \frac{1 \times (3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{3+2i}{9-4i^2} = \frac{3+2i}{9+4}$$

Assim, $z^{-1} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$

Resposta $z^{-1} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$

07. Determinar $m \in \mathbb{R}$ para que $z = \frac{2+3i}{2+mi}$ seja um imaginário puro.

Resolução

$$z = \frac{2+3i}{2+mi} = \frac{(2+3i)(2-mi)}{(2+mi)(2-mi)}$$

$$z = \frac{2+3i}{2+mi} = \frac{4-2mi+6i-3mi^2}{4-m^2i^2}$$

$$z = \frac{2+3i}{2+mi} = \frac{(4+3m)}{4+m^2} + \frac{(6-2m)}{4+m^2}i$$

Para que z seja imaginário puro, devemos ter:

Re (z) = 0

Assim:

$$\frac{4+3m}{4+m^2} = 0 \Rightarrow 4+3m = 0 \Rightarrow m = -\frac{4}{3}$$

Resposta

$$m = -\frac{4}{3}$$

08. Calcular: $i^{14} - 3i^{-9} + 2i^{26}$

Resolução

$$\begin{array}{ccc} 14 \div 4 & 9 \div 4 & 26 \div 4 \\ 2 \quad 3 & 1 \quad 2 & 2 \quad 6 \end{array}$$

$$i^2 - 3 \times \frac{1}{i} + 2i^2 = -1 + 3i - 2 = -3 + 3i$$

Resposta **-3 + 3i**

09. Calcular $i^{4n} - 2$.

Resolução

$$i^{4n-2} = \frac{i^{4n}}{i^2} = \frac{(i^4)^n}{-1} = \frac{1^n}{-1} = -1$$

Resposta

-1

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. O valor do número real x para que o conjugado do número complexo $(x + 3i)(1 + xi)$ seja igual a $2 - 4i$ é:

- a) -2 b) $\sqrt{-1}$ c) $-\frac{1}{2}$ d) 2 e) 3

2. Considere o número complexo $z = (1 + i)(3 - i)$. Assinale a opção na qual consta o menor inteiro positivo n , tal que z^n seja um número real positivo.

- a) 6 b) 12 c) 18 d) $\sqrt{24}$ e) 30

8. Sendo $a = 2 + 4i$ e $b = 1 - 3i$, o valor de $\left|\frac{a}{b}\right|$ é:

- a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{5}$ d) $2\sqrt{2}$ e) $1 + \sqrt{2}$

11. Sendo a um número real e sabendo que a parte imaginária do complexo $\frac{2+2i}{a+i}$ é zero, então a vale:

- a) -1 b) -2 c) -4 d) 2 e) Nenhuma das opções

12. Seja a equação $x^3 - x^2 + mx + n = 0$ com m e n reais. Se o número complexo $1 - i$ é uma das raízes dessa equação, então:

- a) $m - n = 2$ b) $m + n = 0$ c) $m - n = 0$ d) $m + n = 2$ e) $m n = 1$

13. Para que a equação $2x^2 + px + q = 0$, com p e q reais, admita o número complexo $z = 3 - 2i$ como raiz, o valor de q deverá ser:

- a) 10 b) 12 c) 13 d) 28 e) Nenhuma

14. Sabendo-se que o complexo $z = a + bi$ satisfaz à expressão $z + 2z = 2i - 11$,

Então z^2 é igual a:

- a) $16 - 9i$ b) $17 - 24i$ c) $25 - 24i$ d) $25 + 24i$ e) $7 - 24i$

25. Seja o número complexo $z = 1 + i$. O argumento principal de z^2 é:

- a) 30° d) $90^\circ \sqrt{}$ b) 45° e) 120° c) 60°

16. O complexo $1 - i$ é raiz da equação $x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 8x - 8 = 0$. As outras raízes são:

- a) $-2, 2$ e i b) $2, 3$ e $1 + i$ c) $-2, 2$ e $1 + i$ d) $0, 2$ e $1 + i$ e) $-i, i$ e $1 + i$

17. Uma das raízes da equação $x^2 - 2x + c = 0$, onde c é um número real, é o número complexo $z_0 = 1 + 2i$. É válido afirmar-se que:

- a) $c = 0$ b) $c = 1$ c) $c = 3$ d) $c = 5\sqrt{}$ e) $c = 7$

18. Uma equação do 2º grau que tem por raízes os números complexos $2 + i^{109}$ e $2 - i^{425}$ é:

- a) $x^2 + 4x + 5 = 0$ b) $x^2 + 4x - 5 = 0$ c) $x^2 + 5x + 4 = 0$ d) $x^2 - 4x - 5 = 0$

6 LÓGICA MATEMÁTICA

A **Lógica Matemática** trata do estudo das sentenças declarativas também conhecidas como **proposições** e tem por objetivo elaborar procedimentos que permitam obter um raciocínio correto na investigação da verdade, distinguindo os argumentos válidos daqueles que não o são.

6.1 Elementos da lógica

6.1.1. Designação

É qualquer símbolo que represente um objeto matemático fixo, isto é, constante, que não possa ter mais do que um valor.

Exemplo: -1 e $\sqrt{5}$ → são designações

6.1.2. Expressão Designatória

É qualquer expressão envolvendo uma ou mais variáveis (pertencentes a universos previamente fixados) que se transforme numa designação de cada vez que as variáveis sejam concretizadas com valores nesses universos.

Exemplos: x e $x^2 - x$ → são expressões designatórias

NB: Veja que ao substituir o x por um valor como 3, as expressões dadas passam a ser designações:

3 e $3^2 - 3$ que é na verdade 3 e 6

6.1.3. Proposição

É qualquer frase exprimindo uma ideia que se possa classificar como verdadeira ou como falsa. Por exemplo, " $1 = 2$ " e " $3 \in \{-5, 4, 7\}$ " são proposições falsas, enquanto " $1 = 3 - 2$ " e " $3 \in \{-5, 3, 4, 7\}$ " são proposições verdadeiras.

Aplicando esta definição à linguagem natural, teremos também, por exemplo, "*O Pedro é irmão da Sofia*" é uma proposição, desde que se refira a um Pedro e a uma Sofia específicos.

Toda preposição apresenta três características obrigatórias:

1. Sendo oração tem sujeito e predicado
2. É declarativa (não e exclamativa nem interrogativa)
3. Tem um somente um dos dois valor lógico ou é verdadeiro ou falso

São preposições

- $8 > 7$ (oito e maior que sete)
- $8 \neq 7$ (oito e diferente que sete)
- $5 \in \mathbb{Z}$ (cinco e um número inteiro)

6.1.4. Expressão Proposicional Ou Condição

É qualquer frase envolvendo uma ou mais variáveis que se transforme em proposição de cada vez que se concretizem as variáveis. Por exemplo, " $2x = x$ " para x a variar em $\mathbb{R}$, é uma condição. Quando $x = 0$, transforma-se em uma proposição verdadeira " $2 \times 0 = 0$ "

Exemplo: $x^2 - 4 = 0 \rightarrow$ é uma expressão proposicional

6.2 Princípios da lógica matemática

A lógica matemática se assenta em dois princípios fundamentais:

6.2.1. Princípio da não contradição:

- Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.
- Duas proposições contrárias não podem ser ambas verdadeiras.

6.2.1. Princípio do terceiro excluído:

- Toda proposição ou é verdadeira ou falsa, excluindo-se a terceira possibilidade.

6.3 Classificação das proposições

As proposições classificam-se em simples ou atômicas e compostas ou moleculares

Proposição simples — É um pensamento singular sem integrar qualquer outra proposição.

Exemplos:

- *Hwang Jorge é professor*
- $\sqrt{7} + 1 > 2$

Proposição composta — É formada pela combinação de duas ou mais proposições simples.

Exemplos:

- *Hwang Jorge é professor e Jaime é mecânico*
- $\sqrt{7} + 1 > 2$ **ou** $1 + \sqrt{7} \geq 2$

Para se formar as proposições compostas usa-se **conectivos** para ligar duas ou mais proposições simples.

6.4 Conectivos e valor lógico

Conectivos são termos usados para formar novas proposições a partir de outras existentes. ("e", "ou", "não", "se... então...", "se e somente se...")

Designação	Leitura	Símbolo
Conjunção	e	$\wedge$
Disjunção	ou	$\vee$
Implicação	Se... então	$\rightarrow$
Equivalência	Se e somente se	$\leftrightarrow$

Valores lógicos das proposições: Verdade (V) e Falsidade (F).

Valor lógico	Símbolo
Verdadeiro	V
Falso	F

6.5 Tabelas verdade

Conjunção ($\wedge$)

A conjunção $p \wedge q$ é verdadeira se p e q são ambas verdadeiras se pelo menos uma delas for falsa, então $p \wedge q$ é falsa. Lê-se E

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disjunção ($\vee$)

A Disjunção $p \vee q$ é verdadeira se pelo menos uma das proposições p ou q é verdadeira

Lê-se OU

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Implicação ($\rightarrow$)

$p \rightarrow q$ É falso somente quando p é verdadeira e o q falso. Se lê:

Se p então q

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Equivalência ($\leftrightarrow$)

$p \leftrightarrow q$ É verdadeira se ambas tiverem o mesmo valor lógico, isto é, quando o p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas. Lê-se: *se e somente se*.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

6.6 NEGAÇÃO DE UMA PROPORÇÃO ($\sim$)

A proporção $\sim P$ tem sempre um valor oposto de P, isto é,

$\sim P$ é verdade quando P for falsa.

$\sim P$ falsa quando P for verdadeira.

P	$\sim p$
V	F
F	V

Nota

As condições contem e pertence não tem negação

6.7 Quantificadores

Quantificadores são símbolos que são capazes de quantificar elementos. São empregados tanto no estudo da álgebra quanto no estudo da lógica matemática.

Os quantificadores possuem a função de nos informar a respeito de determinada quantidade de elementos em uma situação. Esses quantificadores podem ser classificados em dois tipos “Quantificador Universal” ou “Quantificador Existencial”.

Te recordas das expressões proposicionais que vimos no ponto 6.1.4?

Quando escrevemos $x + 6 = 9$, não podemos classificar tal enunciado aberto como proposição verdadeira (v) ou falsa (f), ao menos que sejam atribuídos valores à variável x .

Uma situação bem diferente acontece quando afirmamos que:

“Para todo valor x , temos $x + 6 = 9$ ”.

Esta sentença é uma proposição evidentemente falsa, porém tornou possível classifica-la como proposição falsa. Por outro lado, se afirmamos:

“Existe um valor x , tal que $x+6 = 9$ ”.

neste caso a sentença é verdadeira.

Por tanto, os quantificadores tem o poder de ajudar-nos a atribuir o valor lógico em diferentes expressões proposicionais.

6.6.1. Quantificador Universal

O quantificador universal é utilizado quando queremos nos referir a todos os elementos de um conjunto. Por exemplo, se afirmamos que “*Todo número natural é positivo*”, podemos reescrever essa afirmação de outra forma, veja:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > 0$$

6.6.2. Quantificador Existencial

O quantificador existencial diferencia-se do universal porque não se refere a todos os elementos de um conjunto. Ele faz referência a pelo menos um elemento pertencente ao conjunto. Por exemplo, “*Existe um número inteiro cujo seu dobro é menor que dois*”.

$$\exists x \in \mathbb{Z}: 2x < 2$$

Quantificador	Símbolo	Leitura
Universal	$\forall$	• Todo • Qualquer Que Seja • Para Cada
Existencial	$\exists$	• Existe um • Existe Pelo Menos Um • Algum

Veja os exemplos e suas leituras:

$\exists x \in \mathbb{Z}: x^2 = 9$	Existe um número inteiro que o seu quadrado é igual a nove
$\forall x \in \mathbb{N}: x + 2 > 0$	Todo número natural a sua soma com dois é maior que zero

6.8 Negação de proposições

Recapitulando, a negação de uma proposição p qualquer é uma outra proposição cujo valor lógico é contrário a anterior.

Use a seguinte tabela para a negação de proposições em geral.

p	$\sim p$
$>$	$\leq$
$<$	$\geq$
$\geq$	$<$
$\leq$	$>$
$=$	$\neq$
$\forall$	$\exists$
$\exists$	$\forall$

Exemplos:

Proposição	Negação da proposição
<i>O Hwang Jorge é inteligente</i>	<i>O Hwang Jorge não é inteligente</i>
$5 + 4 < 2$	$5 + 4 \geq 2$
$3 \neq 4$	$3 = 4$
$\forall x \in \mathbb{N}: x + 2 > 0$	$\exists x \in \mathbb{N}: x + 2 \leq 0$
$\exists x \in \mathbb{Z}: x^2 = 9$	$\forall x \in \mathbb{Z}: x^2 \neq 9$

Descrição	Proposição	Negação
Negação de uma proposição conjuntiva	$\sim (P \wedge Q)$	$\sim P \vee \sim Q$
Negação de uma proposição disjuntiva	$\sim (P \vee Q)$	$\sim P \wedge \sim Q$
Negação de uma proposição condicional	$\sim (P \rightarrow Q)$	$P \wedge \sim Q$
Negação de uma proposição incondicional	$\sim (P \leftrightarrow Q)$	$P \vee \sim Q$
$\sim (P \wedge Q) \wedge (\sim Q \vee \sim P) = (P \vee \sim Q)$		

6.9 Simplificação de Expressões Proposicionais

Propriedades das operações lógicas

Comutatividade	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	$p \vee q \equiv q \vee p$
Associatividade	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
Distributividade	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Identidade	$p \wedge t \equiv p$	$p \vee c \equiv p$
Negação	$p \vee \neg p \equiv t$	$p \wedge \neg p \equiv c$
Dupla negação	$\neg(\neg p) \equiv p$	
Idempotência	$p \wedge p \equiv p$	$p \vee p \equiv p$
De Morgan	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
Limite universal	$p \vee t \equiv t$	$p \wedge c \equiv c$
Absorção	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$
Negações	$\neg t \equiv c$	$\neg c \equiv t$

a) $\sim (\sim p \rightarrow \sim q)$ $\sim (p \vee \sim q)$ $\sim p \wedge q$ b) $\sim (p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$ $(\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$ $\sim p \wedge (\sim q \vee q)$ $\sim p \wedge t$ $\sim p$ d) $\sim (\sim p \wedge q)$ $p \vee \sim q$ e) $\sim (\sim p \vee \sim q)$ $p \wedge q$ f) $(p \vee q) \wedge \sim p$ $(p \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim p)$ $c \vee (q \wedge \sim p)$ $(q \wedge \sim p)$ g) $(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow q)$ $(\sim p \vee q) \wedge (p \vee q)$ $q \vee (\sim p \wedge p)$ $q \vee c$ q h) $p \wedge (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q)$ $p \wedge (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$ $p \wedge (\sim p \vee (q \wedge \sim q))$ $p \wedge (\sim p \vee c)$ $p \wedge \sim p$ c	j) $(p \wedge q) \rightarrow (\sim r \rightarrow \sim q)$ $\sim (p \wedge q) \vee (\sim r \vee \sim q)$ $\sim p \vee \sim q \vee r \vee \sim q$ $\sim p \vee \sim q \vee r$ k) $p \rightarrow (p \vee q)$ $\sim p \vee \sim p \vee q$ $\sim p \vee q$ l) $p \leftrightarrow q$ $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ $(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$ $((\sim p \vee q) \wedge \sim q) \vee ((\sim p \vee q) \wedge p)$ $((\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q)) \vee ((\sim p \wedge p) \vee (q \wedge p))$ $((\sim p \wedge \sim q) \vee c) \vee (c \vee (q \wedge p))$ $(\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge p)$ a) $p \wedge \sim p \Rightarrow p$ $(p \wedge \sim p) \rightarrow p$ $\sim(p \wedge \sim p) \vee p$ $\sim p \vee p \vee p$ $t \vee p$ t b) $\sim p \rightarrow p \Leftrightarrow p$ $p \vee p \Leftrightarrow p$ $p \Leftrightarrow p$
---	--

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01). Considere $p \Rightarrow q$ uma proposição falsa. Qual é o valor lógico das proposições iniciais.

a) Ambas são falsas

b) Ambas são verdadeiras

c) p é verdadeira e q é falsa 1 e 0

d) p é falsa e q é verdadeira

Resolução:

$p \rightarrow q$ É falso somente quando p é verdadeira e q é falso.

Entretanto a opção correcta é c) p é verdadeira e q é falsa 1 e 0

02) A negação da sentença $\forall x, x + a \neq b$ é:

a) $\exists x, x + a \neq b$

b) $\exists x, x + a = b$

c) $\exists x, x - a \neq b$

d) $\forall x, x + a \neq b$

e) $\forall x, x + a = b$

Resolução:

a negação: $\exists x, x + a = b$

a) $\forall x \in R, |x| < 1$

b) $\forall x \in R, |x| \leq 1$

c) $\exists x \in R, |x| \leq 1$

d) $\forall x \in R, |x| \neq 1$

e)

Nenhuma das alternativas

Resolução:

Aplicando as propriedades de negação temos: $\forall x \in R, |x| > 1$ é $\exists x \in R, |x| \leq 1$

04) Aplicando as propriedades simplifica as seguintes operações

a) $p \vee (p \vee \sim q)$

b) $(\sim p \vee q) \wedge q$

c) $(a \wedge \sim b) \vee (a \wedge b)$

Resolução:

a) $p \vee (p \vee \sim q) = (p \vee p) \vee \sim q = p \vee \sim q$

c) $(a \wedge \sim b) \vee (a \wedge b) = a \wedge (\sim b \vee b) = a \wedge V = V$

b) $(\sim p \vee q) \wedge q = (q \wedge \sim p) \vee (q \wedge q) = (q \wedge \sim p) \vee q$

7 ARITMÉTICA

Fracções

Notação

$$\frac{a}{b} \Rightarrow \begin{cases} a \rightarrow \text{numerador:} \\ \text{indica quantas partes do todo foram tom} \\ b \rightarrow \text{denominador:} \\ \text{indica total de partes iguais que o inteiro} \end{cases}$$

7.1 Tipos de fracções

- Fracção própria

São aquelas em que o numerador é menor que o denominador

$$\text{Ex.: } \frac{1}{2}; \frac{4}{9}; \frac{11}{32}$$

- Fracção imprópria

São aquelas em que o numerador é maior ou igual que o denominador

$$\text{Ex.: } \frac{8}{3}; \frac{5}{5}; \frac{23}{2}$$

- Fracção mista

Chama-se numero misto a notação do tipo

$$k \frac{a}{b} \text{ (com } b \neq 0)$$

$$\text{Ex: } 1\frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

- Fração aparente
Quando o numerador é múltiplo do denominador

$$\text{Ex. } \frac{3}{3}; \frac{4}{2}; \frac{16}{8}$$

- Fracção aparente
São aquelas que se escrevem de diferentes mas representam a mesma quantidade

$$\text{Ex: } \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12}$$

7.2 MDC

Para calcular o mdc de dois números pelo processo de decomposição em factores primos deve-se:

- Decompor os números dados em factores primos;
- Calcular o produto dos factores primos comuns com menor expoente.

Exemplo:

Calcular o m d c (18,27)

$$\begin{array}{l|l}
 18 & 2 \\
 9 & 3 \\
 3 & 3 \\
 1 & 3
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l|l}
 27 & 3 \\
 9 & 3 \\
 3 & 3 \\
 1 & 3
 \end{array}
 \quad
 \left. \begin{array}{l}
 18 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^2 \\
 27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3
 \end{array} \right\} mdc(18, 27) = 3^2 = 9$$

7.3 Proporções

Se uma razão $\frac{a}{b}$ for igual a uma razão $\frac{c}{d}$ ambas formam uma sentença denominada proporção.

Definicao

Proporção é uma igualdade entre duas razões. Dizemos que os números a, b, c, d com $b \neq 0$ e $d \neq 0$ estão em proporção, na ordem dada, se, e somente, a razão entre a e b for igual à razão entre c e d

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Ex.: $\frac{2}{6} = \frac{15}{45} \rightarrow$ É uma proporção, pois as razões são iguais, isto é, valem $\frac{1}{3}$.

Indicamos as proporções assim:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ou $a:b=c:d$ Onde a e d são chamados extremos da proporção e b e c são chamados meios da proporção.

Propriedade fundamental das proporções

Em qualquer proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

Demonstrando: $\frac{2}{6} = \frac{15}{45} \rightarrow \overbrace{2 \cdot 45}^{\text{EXTREMOS}} = \overbrace{6 \cdot 15}^{\text{MEIOS}} = 90$

Meu amigo este é um tópico muito importante porque nos exames de admissão caem exercícios que atrapalham muita gente. Vamos perceber totalmente sobre as razões, proporções e Percentagens.

7.4 Razão

Chama-se **razão** de um número a e um número b o **quociente** de $\frac{a}{b}$, (com $b \neq 0$) que também se indica $a \div b$ lê-se "razão entre a e b " ou "razão de a para b " ou simplesmente " a está para b "

Onde a denomina-se **antecedente** e b **consequente**

- Razões inversa **duas razões são inversas quando o produto entre delas valem 1**

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = 1 \quad (b \neq 0 \text{ e } d \neq 0)$$

Fração irredutível $\frac{x}{y}$ é aquela que não é possível simplificar. Isto se x e y são **primos entre si**, $[mdc(x, y) = 1]$

7.5 Regra De Tres

Grandezas Directamente proporcionais

Duas grandezas são directamente proporcionais quando, aumentando uma delas, a outra aumenta na mesma razão da primeira.

Exemplo:

Um veículo que percorre:

- 80km em 1 hora.
- 160km em 2 horas.
- 240km em 3 horas.

Enquanto o tempo aumenta, a distância percorrida também aumenta. Dizemos então, que o tempo e a distância são grandezas directamente proporcionais

Grandezas inversamente proporcionais

Duas grandezas são inversamente proporcionais quando, aumentando uma delas, a outra diminui na mesma razão da primeira.

Exemplo:

Um veículo faz um percurso em:

- 1 hora com velocidade de 120km/h.

- 2 horas com velocidade de 60km/h.
- 3 horas com velocidade de 40km/h.

Enquanto o tempo aumenta, a velocidade diminui. Dizemos, então, que o tempo e a velocidade são grandezas inversamente proporcionais.

7.6 Percentagem

Uma percentagem representa uma comparação entre um numero e o numero 100, o símbolo de percentagem é % lê-se “por cento”.

Uma fracção em que o denominador é 100 chama-se percentagem, qualquer fracção de denominador 100 pode ser substituída por um dado numero em percentagem.

Exemplo:

$$\frac{32}{100} = 32\% \quad \frac{3}{4} = 0,75 = \frac{75}{100} = 75\%$$

Qualquer dado expresso em percentagem pode ser substituído por um numero decimal.

$$85\% = \frac{85}{100} = 85 \div 100 = 0,85 \quad 7,4\% = 7,4 \div 100 = 0,074$$

7.7 Aumentos E Descontos Percentuais

Muitos problemas práticos envolvem aumentos ou descontos usando percentagem. Isso ocorre especialmente em Matemática Financeira.

Reparo que algumas pessoas acabam trabalhando com muitos cálculos em cima de uma conta simples que envolve percentagem. É um bom exemplo disto a obtenção do valor final do acumulo (ou desacumulo) de um valor acrescido (ou decrescido) de um percentual deste mesmo valor.

Aumento e percentual

Aumentando-se X% de um valor `A`

Simplesmente se faz: $= \frac{x - A}{A} \times 100\%$

Exemplo 2, Aumente 30% o valor 200.

Resolução

Sendo 30% de 200 o mesmo que $0,30 \cdot 200 = 60$, o resultado final é a soma $200 + 60 = 260$.

Repare que $200 + 0,30 \cdot 200 = 200 \cdot (1 + 0,30) = 200 \cdot 1,30$. Portanto, aumentar 30% o valor 200, basta multiplicar `200` por `1,30`.

Exemplo: 1 No caso da cidade que teve sua população aumentada de 1000 para 1100 habitantes, o aumento percentual é:

$$\frac{1100-1000}{1000} \times 100\% = 10\%$$

Reduções percentuais

Para reduzir x % a usamos a fórmula:

$$\text{Redução percentual} = \frac{A - x}{A} \times 100\%$$

Uma loja reduziu o preço de um produto de Mt 100,00 para Mt 90,00. A redução neste exemplo foi de 10%.

$$\frac{100 - 90}{100} \times 100\% = 10\%$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

03) Calcule 3% de 60%.

a) 18%

b) 12%

c) 6%

d) 1,8%

e) 1,2%

Resolução:

Neste caso, temos uma questão sobre percentagem de percentagem. Para calcular uma percentagem de outra percentagem, basta multiplicar a primeira pela segunda.

3% de 60% é a mesma coisa que $\frac{3}{100}$ de $\frac{60}{100}$. Devemos transformar 0,018 para taxa percentual. Para isso, multiplicamos por 100.

$0,018 \times 100 = 1,8\%$. Portanto, 3% de 60% é igual a 1,8%.

04) Uma loja de CD`s realizará uma liquidação e, para isso, o gerente pediu para Ana multiplicar todos os preços dos CD`s por 0,68. Nessa liquidação, a loja está oferecendo um desconto de:

- a) 68% b) 6,8% c) 0,68% d) 3,2% e)
32%

Resolução:

Ao multiplicar os preços por 0,68 = 68% a loja oferece um desconto $100\% - 68\% =$

05) Num colégio 38% dos alunos são meninos e as meninas são 155. Qual o total de alunos desse colégio?

- a) 105 b) 145 c) 210 d) 250

Resolução

Na escola, 38% dos alunos são meninos. Isso quer dizer que o percentual restante é formado de meninas.

$100\% - 38\% = 62\%$ Dos alunos são meninas. O enunciado diz que a quantidade de meninas é de 155.

Então, 62% do total de alunos equivale a 155 meninas.

Desse modo, por uma regra de três simples podemos determinar a quantidade total de alunos, o equivalente a 100%. Representaremos pela letra y

$$\begin{array}{lcl} 155 \text{ meninas} & \Rightarrow & 62\% \\ y \text{ alunos} & \Rightarrow & 100\% \end{array} \quad \frac{155}{y} = \frac{62}{100} \Leftrightarrow 62y = 15500 \Leftrightarrow y = 250$$

Portanto, o total de alunos da escola é de 250.

- a) 5 b) -10 c) 12 d) 18 e) 23

Resolução:

Preste atenção! O número deve ser somado aos dois termos:

Da fracção $\frac{7+x}{17+x} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4(7+x) = 3(17+x) \Rightarrow 28+4x = 51+3x \Rightarrow 4x-3x = 51-28 \Rightarrow x = 23$

Exercícios Propostos

01. Uma loja instrui seus vendedores para calcular o preço de uma mercadoria, nas compras com cartão de crédito, dividindo o preço à vista por 0,80. Dessa forma, pode-se concluir que o valor da compra com cartão de crédito, em relação ao preço à vista, apresenta:

a) Um desconto de 20% d) um aumento de 25% b) Um aumento de 20% e) um aumento de 80% c) Um desconto de 25% Opção correcta: d)

02. Um comerciante deu um desconto de 20% sobre o preço de venda de uma mercadoria e, mesmo assim, conseguiu um lucro de 20% sobre o preço que pagou pela mesma. Se o desconto não fosse dado, seu lucro, em percentagem, seria:

a) 40% b) 45% c) 50% d) 55% e) 60% Opção correcta: c)

03. Numa festa, a razão entre o número de moças e o de rapazes é $\frac{13}{12}$. A percentagem de rapazes na festa é:

a) 44% b) 45% c) 40% d) 48% e) 46% Opção correcta: d)

04. Seja $W = \frac{wy}{z}$. Se x sofre um aumento de 25% e y sofre um aumento de 40%, a alteração que sofre z para que W não se altere é:

a) Aumentar de 65% d) Diminuir de 75% b) Diminuir de 65%
e) z não deve sofrer nenhuma alteração c) Aumentar de 75% Opção correcta: c)

05. Para todo número real x , tal que $0 < x < 1$, pode-se considerar $2 - x$ como uma boa aproximação para o valor de $\frac{4}{2+x}$. Nessas condições, a razão positiva entre o erro cometido ao se fazer essa aproximação e o valor correcto da expressão, nessa ordem, é:

- a) $\frac{x^2}{4}$ b) $\frac{x^2}{2}$ c) x^2 d) $\frac{x^2}{2+x}$ e) $\frac{x^2}{2-x}$ Opção correcta:
- a)

06. Duas grandezas a e b foram divididas, respectivamente, em partes directamente proporcionais a 3 e 4 na razão 1,2. O valor de $3a + 2b$ é:

- a) 6,0 b) 8,2 c) 8,4 d) 14,4 e) 20,4 Opção correcta:
- e)

07. As medidas dos lados de um triângulo são números pares consecutivos, e a medida do menor lado é um terço da soma das medidas dos outros dois lados. O perímetro desse triângulo é

- a) 8 b) 10 c) 12 d) 20 e) 24 Opção
- correcta: e)

08. A idade de um pai está para a idade de seu filho assim como 3 está para 1. Qual é a idade de cada um, sabendo que a diferença entre elas é de 24 anos?

- a) 10 e 34 b) 12 e 36 c) 15 e 39 d) 6 e 30 e) 18 e 42 Opção
- correcta: b)

09. Com 210 sacos de farinha, de 60 kg cada um, podem-se fazer 180 sacos de pães com 40 kg cada um. Quantos quilogramas de farinha serão necessários para produzir 120 sacos de pães, pesando 80 kg cada um?

- a) 9450 b) 9600 c) 16800 d) 20800 e) 21600 Opção
- correcta: c)

10. As idades de duas pessoas há 8 anos estavam na razão de 8 para 11; agora estão na razão de 4 para 5. qual é a idade da mais velha actualmente?

- a) 15 b) 20 c) 25 d) 30 e) 35 Opção
- correcta: d)

11. Uma engrenagem de 36 dentes movimenta outra de 48 dentes. Quantas voltas dá a maior, enquanto a menor dá 100 voltas?

- a) 133. b) 86. c) 75. d) 65. Opção correcta: c)

12. Sabe-se que 4 máquinas operando 4 horas por dia, durante 4 dias, produzem 4 toneladas de certo produto. Quantas toneladas do mesmo produto seriam produzidas por 6 máquinas daquele tipo, operando 6 horas por dia, durante 6 dias?

a) 8. b) 15. c) 10,5. d) 13,5. Opção
correcta: d)

13. 15000 Candidatos inscreveram-se na UEM e foram aprovados 9600. Qual a percentagem de reprovação?

a) 24. b) 30. c) 32. d) 36. e) Nenhuma. Opção
correcta: d)

15. Num grupo de 400 pessoas, 70% são do sexo masculino. Se nesse grupo 10% dos homens são casados e 20% das mulheres são casadas. Então, o número de pessoas casadas é:

a) 50. b) 46. c) 52. d) 48. e) 54. Opção
correcta: c)

16. Se $\frac{2}{5}$ de um trabalho foram feitos em 10 dias por 24 operários que trabalhavam em 7 horas por dia; então, quantos dias serão necessários para terminar o trabalho, sabendo que 4 operários foram dispensados e que o restante agora trabalha 6 horas por dia?

a) 18. b) 19. c) 20. d) 21. e) 22. Opção
correcta: d)

8 POTENCIAÇÃO

$3^2 = 9$

base expoente potência

Sejam a (um número real) e n (um número natural). Chama-se potência de número a de

expoente n ao produto de n factores iguais ao número a e designa-se por a^n .

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times a \dots}_{n \rightarrow \text{factores}}$$

Exemplos:

- $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$
- $\left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{81}$

Para melhor desempenho o estudante é obrigado a decorar essas potências. Para não sofrer nos cálculos.

Potência de 2		Potência de 3	Potência de 4
$1^2 = 1$	$11^2 = 121$	$1^3 = 1$	$1^4 = 1$
$2^2 = 4$	$12^2 = 144$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$
$3^2 = 9$	$13^2 = 169$	$3^3 = 27$	$3^4 = 81$
$4^2 = 16$	$14^2 = 196$	$4^3 = 64$	$4^4 = 256$
$5^2 = 25$	$15^2 = 225$	$5^3 = 125$	$5^4 = 625$
$6^2 = 36$	$16^2 = 256$	$6^3 = 216$	
$7^2 = 49$	$17^2 = 289$	$7^3 = 343$	
$8^2 = 64$	$18^2 = 324$	$8^3 = 512$	
$9^2 = 81$	$19^2 = 361$	$9^3 = 729$	
$10^2 = 100$	$20^2 = 400$	$10^3 = 1000$	

8.1 Propriedades De Potências

Potencias de expoente negativa

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \quad \frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$$

Potência de expoente fracionário

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Multiplicação de potências com a mesma base $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

Multiplicação de potências com mesmo expoente $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

Divisão de potências com a mesma

Divisão de potências com mesmo expoente

base $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Potência de expoente nulo

Potência de expoente nulo

$$a^0 = 1, (\text{com } a \neq 0)$$

$$0^n = 0, (\text{com } n \neq 0)$$

Expoente par e ímpar

Potência de uma potência

$$(-a)^n = a^n, \text{ se } n \text{ for par}$$

$$(a^n)^m = a^{n \times m}$$

$$(-a)^n = -a^n, \text{ se } n \text{ for ímpar}$$

8.2 Notação Científica

Notação científica também conhecida como potência da base 10, uma matéria bastante fácil observa a tabela.

$10^0 = 1$	
$10^1 = 10$	$10^{-1} = 0,1$
$10^2 = 100$	$10^{-2} = 0,01$
$10^3 = 1000$	$10^{-3} = 0,001$
$10^4 = 10000$	$10^{-4} = 0,0001$
$10^5 = 100000$	$10^{-5} = 0,00001$
$10^6 = 1000000$	$10^{-6} = 0,000001$
$10^7 = 10000000$	$10^{-7} = 0,0000001$

A **notação científica** serve para expressar números muito grandes ou muito pequenos. O segredo é multiplicar um número pequeno por uma potência de 10.

Dizemos que um número está em notação científica quando ele está escrito na forma $a \cdot 10^b$, onde a é um número real maior ou igual a 1 e menor

que 10 e b é um número inteiro.

Número grande desloca-se a vírgula para a esquerda até o primeiro algarismo significativo. A ordem de grandeza será o número de posições deslocadas.

Ex:

$$200.000.00 = 2 \cdot 10^8$$

$$560.000 = 5,6 \cdot 10^5$$

$$602.000.000.000.000 = 6,02 \cdot 10^{14}$$

Números pequenos **desloca-se a vírgula para a direita, e a cada casa avançada diminui-se uma ordem de grandeza (a ordem de grandeza será simétrico do número de posições deslocadas, será portanto negativo).**

Ex:

$$0,00125 = 1,25 \cdot 10^{-3}$$

$$0,000\ 000\ 001 = 1 \cdot 10^{-9}$$

$$0,000\ 000\ 000\ 000\ 016 = 1,6 \cdot 10^{-14}$$

Mudando a posição da vírgula e ajustando o expoente

Como em um número escrito em notação científica a vírgula sempre deve ser posicionada à direita do primeiro algarismo diferente de zero, se não for este o caso o procedimento a ser realizado é o seguinte:

- **Se deslocarmos a vírgula n posições para a direita, devemos subtrair n unidades do expoente.**
- **Ao deslocarmos a vírgula n posições para a esquerda, devemos somar n unidades ao expoente.**

Ex:

$$12,5 \cdot 10^{-1} = 1,25 \cdot 10^0 = 1,25$$

$$640 \cdot 10^{-6} = 6,40 \cdot 10^0$$

$$0,0078 \cdot 10^5 = 7,8 \cdot 10^2$$

Comparação de números em notação científica

Independentemente da mantissa, o número que possuir a maior ordem de grandeza será o número maior:

Ex

$$1,5 \cdot 10^4 > 3,2 \cdot 10^2$$

$1,5 \cdot 10^4$ é maior que $3,2 \cdot 10^2$, mesmo sendo a sua mantissa 1,5 menor que a mantissa 3,2, pois a sua ordem de grandeza 4 é maior que a ordem de grandeza 2.

$$8,7 \cdot 10^{-3} < 5,3 \cdot 10^{-2}$$

$8,7 \cdot 10^{-3}$ é menor que $5,3 \cdot 10^{-2}$, ainda que a sua mantissa 8,7 seja maior que a mantissa 5,3, isto porque a sua ordem de grandeza -3 é menor que a ordem de grandeza -2.

Quando dois números possuem a mesma ordem de grandeza o maior será o que possuir a maior mantissa:

$$3,25 \cdot 10^5 < 3,45 \cdot 10^5$$

Como ambos os números possuem a mesma ordem de grandeza, $3,25 \cdot 10^5$ é o menor deles, pois é o que possui a menor mantissa.

$$4,5456 \cdot 10^3 > 4,23 \cdot 10^3$$

Visto que os dois números têm a mesma ordem de grandeza, $4,5456 \cdot 10^3$ é o maior dos dois, pois é o que tem a maior mantissa.

$$6,24 \cdot 10^7 = 6,24 \cdot 10^7$$

Os números acima são iguais, já que suas mantissas e as suas ordens de grandeza são iguais.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01) O valor de é: $\left(\frac{1}{3}\right)^{-10} \times 27^{-3} + (0,2)^{-4} \times 25^{-2} + \left(64^{\frac{1}{9}}\right)^{-3}$

a) 6

b) 7

c) 9

d) 8

e) 5

Resolução

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-10} \times 27^{-3} + (0,2)^{-4} \times 25^{-2} + \left(4^{\frac{1}{9}}\right)^{-3}$$

$$= 3^{10} \times 3^{-9} + \left(\frac{1}{5}\right)^{-4} \times 5^{-4} + 4 = 3^{10+(-9)} + 1 + 4 = 3 + 1 + 4 = 8$$

Demonstração veja as propriedades e sua aplicação

$$3^{10} \Rightarrow \text{Para } \left(\frac{1}{3}\right)^{-10} = 3^{10} \Rightarrow \boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}};$$

$$3^{-9} \Rightarrow \text{Para } 27^{-3} = (3^3)^{-3} \Rightarrow \boxed{(a^n)^m}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^4 \Rightarrow \text{Para } 25^{-2} = (5^2)^{-2} \Rightarrow \boxed{(a^n)^m}; 25^{-4} = \left(\frac{1}{5}\right)^4 \Rightarrow \boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

$$4^{\frac{9}{9}} = \left((4^3)^{\frac{1}{9}}\right)^{-3} = \left(4^{\frac{3}{9}}\right)^9 = \left(4^{\frac{9}{9}}\right) \Rightarrow \boxed{(a^n)^m}$$

02) Qual é o valor da expressão $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{3}{2}}$?

a) 2

b) $\frac{1}{2}$

c) -2

d) $\sqrt{2}$

e) 1

Resolução

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{3}{2}} = \text{escrevendo } \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ na base 2, temos } 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{a^n = \left(\frac{1}{a}\right)^{-n}}$$

$$\Rightarrow 2^{-\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{3}{2}} = 2^{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = 2^{\frac{2}{2}} = 2 \Rightarrow \boxed{(a^n \times a^m = a^{n+m})}$$

b) $3^5 + 3 \cdot 2^2$ c) $6(3^5 + 6)$ d) $3(3^3 + 2^2)$ e) $3^5 + 6^2$ **Resolução:**

$$\frac{3^5 + 3 \cdot 2^2}{3} = \frac{\cancel{3}(3^5 + 2^2)}{\cancel{3}} = 3^5 + 2^2$$

A regra mais útil na soma de potências é evidenciar o termo que se repete, isso facilita simplificações.

04) A metade do número $\frac{2^{21} + 4^{12}}{2}$ é:

a) $2^{20} + 2^{22}$

b) $2^{12} + 4^6$

c) $2^{12} + 2^{21}$

d) $2^{20} + 4^6$

e) $2^{22} + 2^{13}$

Resolução: metade de um número n é $\frac{n}{2}$

$$\frac{2^{21} + 4^{12}}{2} = \frac{2^{21}}{2} + \frac{4^{12}}{2} = \frac{2^{21}}{2} + \frac{(2^2)^{12}}{2} = \frac{2^{21}}{2} + \frac{2^{24}}{2} = 2^{21-1} + 2^{23-1} = 2^{20} + 2^{22} \text{ alternativa a}$$

05) O valor da soma $\frac{2^{2003} \cdot 9^{1001}}{4^{1001} \cdot 3^{2003}} + \frac{2^{2002} \cdot 9^{1001}}{4^{1001} \cdot 3^{2003}}$ é:

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{2}{3}$

c) 1

d) $\frac{4}{3}$

e) 2

Resolução:

$$\begin{aligned} \frac{2^{2003} \cdot 9^{1001}}{4^{1001} \cdot 3^{2003}} + \frac{2^{2002} \cdot 9^{1001}}{4^{1001} \cdot 3^{2003}} &= \frac{2^{2003} \cdot (3^2)^{1001}}{(2^2)^{1001} \cdot 3^{2003}} + \frac{2^{2002} \cdot (3^2)^{1001}}{(2^2)^{1001} \cdot 3^{2003}} \\ &= \frac{2^{2003} \cdot 3^{2002}}{2^{2002} \cdot 3^{2003}} + \frac{2^{2002} \cdot 3^{2002}}{2^{2002} \cdot 3^{2003}} = \frac{2^{2003-2002}}{3^{2003-2002}} + \frac{2^{2002-2002}}{3^{2003-2002}} \\ &\Rightarrow \left(\text{A regra usada } \boxed{\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}} \right), \text{ logo: } \frac{2^1}{3^1} + \frac{2^0}{3^1} = \frac{2+1}{3} = \frac{3}{3} = 1 \end{aligned}$$

06) A expressão $\frac{10^{10} + 10^{20} + 10^{30}}{10^{20} + 10^{30} + 10^{40}}$ é equivalente a:

a) $1 + 10^{10}$

b) $\frac{10^{10}}{2}$

c) 10^{-10}

d) 10^{10}

e) $\frac{10^{10} - 1}{2}$

Resolução: $\frac{10^{10} + 10^{20} + 10^{30}}{10^{20} + 10^{30} + 10^{40}} = \frac{10^{10}(1 + 10^{10} + 10^{20})}{10^{20}(1 + 10^{10} + 10^{20})} = \frac{10^{10}}{10^{20}} = 10^{10-20} = 10^{-10}$ **Observe: esta**

resolução o exercício parece difícil, mas evidenciando o menor expoente de numerador (10^{10})

07) O número 0,0004 usando notação científica pode ser escrito na forma

a) $4 \cdot 10^{-3}$

b) $4 \cdot 10^{-5}$

c) $4 \cdot 10^6$

d) $4 \cdot 10^{-6}$

e) $4 \cdot 10^{-4}$

Resolução

Logo avista pode notar que a nuca opção que tem 4 casas decimais é e) ou melhor $0,0004 = 4 \cdot 10^{-4}$

9 RADICIAÇÃO

Definição

Chama-se raiz enésima de a todo numero positivo b , tal que $b^n = a$ Em geral:

$$\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow b^n = a$$

- Se n for par resultado
- Se n for par e a solução em R
- $\sqrt[n]{-a} =$ não tem
- Se n for impar e a expressão terá solução em R

Expoente racional

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Base

Índice da raiz

Expoente do radicando

Radicando

$\sqrt[n]{a} = |b|$, isto é, o sempre será positivo negativo não tem

solução em R

9.1 Classificação de radicais

- Radicais homogêneos

São aqueles radicais que têm o mesmo índice

a) $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[3]{81}$, $\sqrt[3]{78}$ e $\sqrt[3]{97}$; b) $\sqrt[5]{x-y}$, e $\sqrt[5]{x^3+y}$

- Radicais semelhantes

São aqueles radicais que tem o mesmo índice e o mesmo radicando

9.2 Operações entre radicais

- Adição e subtração de radicais

Só podemos adicionar radicais semelhantes, isto é, radicais que possuam o mesmo índice e mesmo radicando.

$$c\sqrt[n]{a} \pm b\sqrt[n]{a} = (c \pm b)\sqrt[n]{a}$$

- Multiplicação de radicais

Só podemos multiplicar radicais homogêneos, radicais que possuam o mesmo índice par tal mantem-se os índices e multiplicasse o radicando

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$$

Se os radicais não possuírem o mesmo índice diferentes devemos reduzi-los ao mesmo índice dessa forma efetuarmos a multiplicação ou a divisão mmc dos índices

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[p]{b} = \sqrt[np]{a^p} \times \sqrt[pn]{b^n} \quad (mmc)$$

- Divisão de radicais

Só podemos multiplicar radicais homogêneos, radicais que possuam o mesmo índice par tal mantem-se os índices e multiplicasse o radicando

$$\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (com \ b \neq 0)$$

$$\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[p \cdot n]{a}$$

- Radical duplo

Radical duplo chama-se radical duplo a fórmula fácil de calcula exercícios como $\sqrt{3+\sqrt{8}}$ na forma mais simples

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}, \quad c = \sqrt{a^2 - b}$$

Atenção: a diferença precisa ser além de positiva quadrado perfeito, só assim é possível transformar um radical duplo numa soma o diferença de radicais simples

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{n}{m}}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, n$ um numero par e $a \in \mathbb{R}$

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{|a|}\right)^m = |a|^{\frac{n}{m}}$$

Passagem a factor do radicando um coeficiente do radical

9.3 Racionalizacao De Denominador

Racionalização de denominadores consiste em se obter uma fração equivalente com denominador racional, para substituir uma outra com denominador irracional em outras palavras, esse procedimento consiste em transformar um denominador irracional em um número racional, porém sem alterar o valor numérico de uma fração.

Factor racionalizante

Fator racionalizante de uma expressão irracional é uma outra expressão, também irracional, em que o produto entre elas resulta em uma expressão sem radical, ou seja, que a torne uma expressão racional

Factor racionalizante

$\sqrt[n]{a^n}$ É o fator racionalizante de $\sqrt[n]{a^{m-n}}$

$\sqrt{a}-\sqrt{b}$ É o fator racionalizante de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$

$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ É o fator racionalizante de $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

$\sqrt{a}+b$ É o fator racionalizante de $\sqrt{a}-b$

$\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}$ É o fator racionalizante de $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$

$\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ É o fator racionalizante de $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$

Para resolver exercícios de radicares temos que aplicar as seguintes propriedades de potências.

Numa primeira fase é necessário saber que $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, e que

$$\sqrt[n]{a^{m+k}} = \sqrt[n]{a^m \times a^k} = \sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[n]{a^k}, \text{ e } \sqrt[n]{a^{m-k}} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{a^k}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{a^k}} \text{ e depois iremos aplicar}$$

$$\begin{aligned} a^m \times a^n &= a^{m+n} \\ a^m \div a^n &= \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \end{aligned}$$

propriedades de bases iguais e expoentes diferentes

Exemplo: Simplifique a Expressão $\frac{\sqrt{a} \times \sqrt[3]{a}}{a^4 \sqrt[3]{a}}$ aplicando $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ teremos

$$\begin{aligned} \frac{a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{3}}}{a^4 \times a^{\frac{1}{3}}} &= \frac{a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}}{a^{4 + \frac{1}{3}}} \text{ achando mmc nos expoentes e aplicando } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ teremos:} \\ \frac{a^{\frac{15-10}{12}}}{a^{\frac{5}{12}}} &= a^{\frac{5}{12}} = \sqrt[12]{a^5} \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{a\sqrt{a^3}}}{\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[4]{a}}$$

Exemplo

$$= \frac{\sqrt{a \times a^{\frac{3}{2}}}}{a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{1}{4}}} = \frac{\sqrt{a^{1+\frac{3}{2}}}}{a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}}} = \frac{\sqrt{a^{\frac{5}{2}}}}{a^{\frac{11}{12}}} = \frac{a^{\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2}}}{a^{\frac{11}{12}}} = \frac{a^{\frac{5}{4}}}{a^{\frac{11}{12}}} = a^{\frac{5}{4}-\frac{11}{12}} = a^{\frac{1}{3}} \text{ ou } = \sqrt[3]{a}$$

usando outra via

$$\frac{\sqrt{a \times a^{\frac{3}{2}}}}{a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{1}{4}}} = \frac{a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}}} = \frac{a^{\frac{5}{4}}}{a^{\frac{11}{12}}} = a^{\frac{5}{4}-\frac{11}{12}} = a^{\frac{4}{12}} = a^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{x-27}{\sqrt[3]{x}-3}$$

$$\frac{x-27}{\sqrt[3]{x}-3} \times \frac{(\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + 3^2)}{(\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + 3^2)}$$

$$\frac{(x-27)(\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + 9)}{\sqrt[3]{x^3} - 3^2}$$

$$\frac{(x-27)(\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + 9)}{x-27} = \sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + 9$$

$$\frac{x-9}{\sqrt{x}-3} \times \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$$

$$\frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$\frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x^2}-3^2}$$

$$\frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{x-9} = \sqrt{x}+3$$

01) O número $\sqrt[4]{0,2} \cdot \sqrt{0,001 \cdot 400000} \cdot \sqrt[4]{0,008}$ é:

a) 8

b) 4

c) 0,5

d) 40

e) 0,4

Resolução:

$$\sqrt[4]{0,2 \cdot 0,008} \cdot \sqrt{0,001 \cdot 400000} \quad \boxed{\text{regra usada} \rightarrow \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}}$$

02) (UEM) A expressão $(\sqrt{5}-3)^2(14+6\sqrt{5})$ é igual a:

a) 8

b) 9

c) 256

d) 4

e) 16

Resolução:

$$(\sqrt{5}-3)^2(14+6\sqrt{5}) \Rightarrow (\sqrt{5}-3)^2 = \left[(\sqrt{5})^2 - 6\sqrt{5} + 3^2 \right] (14+6\sqrt{5})$$

$$\text{lembrando que para } (\sqrt{5}-3)^2 \rightarrow \boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

$$\left[(\sqrt{5})^2 - 6\sqrt{5} + 3^2 \right] (14+6\sqrt{5}) = (5 - 6\sqrt{5} + 9)(14+6\sqrt{5}) = (14 - 6\sqrt{5})(14+6\sqrt{5})$$

$$\text{para } (14 - 6\sqrt{5})(14+6\sqrt{5}) \text{ usamos } \rightarrow \boxed{a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)}$$

$$14^2 - (6\sqrt{5})^2 = 196 - 36 \cdot 5 = 196 - 180 = 16$$

03) Efectuando $\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$ obtém-se:

Resolução

$$\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} \text{ seja: } \boxed{2+\sqrt{3}} = y; \text{ e } \boxed{2-\sqrt{3}} = x$$

$$\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{\frac{x}{y}}, \text{ certo vamos escrever na forma } \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

“Good!” agora mmc dos denominadores $\sqrt{y} \cdot \sqrt{x}$ logo:

$$\frac{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}{\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}} = \frac{2+2+\sqrt{3}-\sqrt{3}}{\sqrt{(2^2-\sqrt{3}^2)}} = \frac{4}{\sqrt{4-3}} = \frac{4}{1} = 4$$

- a) 0,045 b) 0,125 c) 0,315 d) 0,085 e) 0,25

“Vamos matar o leão” $-0,75 = -\frac{75 \div 25}{100 \div 25} = -\frac{3}{4}$

$4,333... = 4 + 0,333... = 4 + \frac{3}{9}(mmc) = \frac{36+3}{9} = \frac{39 \div 3}{9 \div 3} = \frac{13}{3}$ **a notação científica de**

$0.00243 = 243 \cdot 10^{-5}; (243 = 3^5)$ **agora pode tirar foto o “leão esta morto” substituindo**

temos:

$$\frac{16^{-\frac{3}{4}} + \sqrt[5]{3^5 \cdot 10^{-5}}}{\frac{2}{3} + \frac{13}{2}} = \frac{\frac{1}{16^{\frac{3}{4}}} + 3 \cdot 10^{-1}}{\frac{15}{3}} = \frac{\frac{1}{\sqrt[4]{16^3}} + \frac{3}{10}}{\frac{5}{5}} = \frac{\frac{1}{\sqrt[4]{(2^3)^4}} + \frac{3}{10}}{5}$$

$$= \frac{\frac{1}{2^3} + \frac{3}{10}}{5} = \frac{\frac{1}{8} + \frac{3}{10}}{5} = \frac{\frac{17}{40}}{5} = \frac{17}{200} = 0,085$$

07) O número $\left[(7\sqrt{7})^{-\frac{1}{3}} + \left(3^{\frac{1}{10}} \right)^{-5} \right] \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{7}} - \sqrt{\frac{1}{3}} \right)$ é igual a:

- a) $\frac{2}{21}$ b) $-\frac{2}{21}$ c) $\frac{4}{21}$ d) $-\frac{10}{21}$ e) $-\frac{4}{21}$

Resolução:

$$\left[(7\sqrt{7})^{-\frac{1}{3}} + \left(3^{\frac{1}{10}} \right)^{-5} \right] \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{7}} - \sqrt{\frac{1}{3}} \right) = \left[\left(\frac{1}{7\sqrt{7}} \right)^{\frac{1}{3}} + 3^{-\frac{5}{10}} \right] \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) =$$

$$\left[\left(\frac{1}{\sqrt[3]{7\sqrt{7}}} \right) + 3^{-\frac{1}{2}} \right] \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \left[\left(\frac{1}{\sqrt[3]{7\sqrt{7}}} \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \right] \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \left[\frac{1}{\sqrt[6]{7^2 \cdot 7}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right] \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt[6]{7^3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right] \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \left[\frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right] \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{7}} \right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{1}{7} - \frac{1}{3} = \frac{3-7}{21} = -\frac{4}{21}$$

08) Racionalize o denominador da expressão $\frac{6x}{\sqrt[7]{9x^4y^5}}$

Resolução:

$$\frac{6x}{\sqrt[3]{9x^4y^5}} = \frac{6x}{\sqrt[3]{3^2 \cdot \sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt[3]{y^5}}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3^5} \cdot \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{3^5} \cdot \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{y^2}} = \frac{6x\sqrt[3]{3^5} \cdot \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{3^7} \cdot \sqrt[3]{x^7} \cdot \sqrt[3]{y^7}} = \frac{6x\sqrt[3]{3^5} \cdot \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{y^2}}{3xy}$$

$$= \frac{6x\sqrt[3]{3^5} \cdot \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{y^2}}{3xy}$$

09) Racionalizando o denominador da expressão $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$ temos:

- a) Não é possível b) $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{2} + 4\sqrt{3}}{7}$ c) $\frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - \sqrt{30}}{12}$
- d) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{5}$ e) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5}}{5}$

Resolução:

Observa: que esta expressão é do tipo $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ E o fator racionalizante é $\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}$ ou melhor, para $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$ o fator racionalizante é $\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}$.

Resolvendo temos:

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}$$

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})} \text{ aplicando a propriedade distributiva}$$

do denominador $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})$ temos: $2\sqrt{6}$

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}{2\sqrt{6}} \text{ o fator racionalizante } \sqrt{6}$$

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})\sqrt{6} = \sqrt{12} + \sqrt{18} - \sqrt{30} = \sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{3^2 \cdot 2} - \sqrt{30} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - \sqrt{30}$$

Resolução:

Não quero perder tempo. Qual o fator racionalizante para expressão deste tipo? És ai

$\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}$ É o fator racionalizante de $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$

Então vamos resolver:

$$\begin{aligned}\frac{10}{\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{a+b}} &= \frac{10}{\left[(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - \sqrt{a+b}\right]} \cdot \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{a+b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{a+b})} \\ &= \frac{10(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{a+b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (\sqrt{a+b})^2} = \frac{10(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{a+b})}{2\sqrt{ab}} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} = \frac{5(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{a+b})}{ab}\end{aligned}$$

10 EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU (EQUAÇÕES LINEARES)

Uma equação que pode ser escrita na forma $ax + b = 0$ onde a e b são números reais conhecidos, com $a \neq 0$, x representa uma incógnita e o expoente de x é 1, é chamada de equação do 1º grau a uma incógnita

Analisando a equação $ax + b = 0$, com a e $b \in \mathbb{R}$, temos as seguintes hipóteses:

- Para $a \neq 0$, a equação $ax + b = 0$ admite uma única solução, pois é do primeiro grau.
- Para $a = 0$ e $b \neq 0$, a equação $ax + b = 0$ não tem solução, pois a sentença é sempre falsa.
- Para $a = 0$ e $b = 0$, a equação $ax + b = 0$ admite todos os números reais como solução, pois a sentença $0 \cdot x + 0 = 0$ é sempre verdadeira. Neste caso

Uma equação linear do tipo: $ax + b = cx + d$ resolve se passando para o primeiro termo todos termos com variável e para o segundo membro todos sem a variável.

Exemplo: $2x - 3 = 1 + x$

$$2x - 3 = 1 + x$$

$$2x - x = 1 + 3$$

$$x = 4$$

Exemplo 2: a soma de um numero desconhecido e 2 é igual a 5, qual é esse numero?

$$X + 2 = 5$$

$$X = 5 - 2$$

$$X = 3$$

Exemplo3: a soma da quantidade de copos disponiveis para festa e 100, é igual ao dobro do numero de copos menos 300

$$x + 1000 = 2x - 300$$

$$x - 2x = -300 - 1000$$

$$-x = -1300 \rightarrow x = 1300$$

11 EQUAÇÕES QUADRATICAS

Uma equação pode ser escrita na forma $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b e c são números reais conhecidos, com $a \neq 0$ e x representa uma incógnita, é chamada de equação do 2º grau a uma incógnita. Os números conhecidos são chamados coeficientes

Uma equação do 2º grau pode ser resolvida segundo a fórmula resolvente ou Bhaskara.

Primeiro deve se achar o $\Delta = b^2 - 4ac$

Neste caso, Δ é chamado de discriminante, pois discrimina quantas soluções terá a equação.

- Se $\Delta > 0$, a equação terá duas raízes diferente.
- Se $\Delta < 0$, a equação não terá raízes reais

- Se $\Delta = 0$ a equação terá uma única raiz.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}; \Delta = b^2 - 4ac$$

Por vezes analisando os coeficientes podemos resolver mentalmente através de soma e produto.

Exemplo: Ache as raízes da equação $2x^2 - 10x + 12 = 0$

Nesta equação $2x^2 - 10x + 12 = 0$ temos: $a = 2, b = -10, c = 12$

Discriminante: $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-10)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12 = 100 - 96 = 4$

Raízes: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 2} = \frac{10 \pm 2}{4} \rightarrow x_1 = \frac{12}{4} \wedge x_2 = \frac{8}{4} \rightarrow x_1 = 3 \wedge x_2 = 2$

Soma e produto

A soma e produto das raízes de equação do 2º grau na forma $ax^2 + bx + c$ é dada por:

$$\text{Soma: } S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x^2 - Sx + P \quad \text{Produto } P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

O método da tentativa

O método da tentativa consiste em obter as raízes de uma equação do 2º grau utilizando estas propriedades de soma e produto, sem o uso da fórmula resolvente (Baskara).

11.1 Soma e produto numa expressão polinomial

Em um polinómio da forma: $Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \dots$ a soma de suas raízes são dadas pelo quociente $-B/A$. E o produto é dada pelo quociente C/A

A soma de raízes: $S = -\frac{B}{A}$

O produto das raízes: $P = \frac{C}{A}$

Exemplo1:

Determine pelo método de tentativas de soma e produto as raízes da equação:

$$-x^2 + 7x - 10 = 0$$

Resolução:

A **soma** das raízes é $S = \frac{-b}{a} = \frac{-7}{-1} = 7$

O **produto** das raízes é $P = \frac{c}{a} = \frac{-10}{-1} = 10$

Agora quais são os números que somados resultam em 7 e multiplicando obtém-se 10?

Resposta: números que somam dão 7 e multiplicados dão 10, são 2 e 5. Então as raízes são: $x_1 = 2$ e $x_2 = 5$

Exemplo2:

Resolva a equação: $x^2 - 6x + 8 = 0$

Resolução:

É fácil verificar que o valor da soma das raízes desta equação é 6 e o produto das raízes deve ser igual a 8. Agora só temos que pensar em números cujo produto dá 8 e a soma resulta em 6.

Esses números são claramente, 2 e 4, então são soluções da equação:

$$x_1=2 \text{ e } x_2=4.$$

Podemos usar a técnica da soma e produto também para resolver vários problemas que envolvem a soma e produto das raízes, tais como:

EX1: Calcule $x_1 \cdot x_2 + 3(x_1 + x_2)$ sabendo que x_1 e x_2 são raízes da equação $2x^2 - 22x + 12$

a. 57

b. 9

c. 27

d. 42

EX2: Calcule $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ sabendo de x_1 e x_2 são raízes da equação $x^2 - 8x + 24$

a. $\frac{8}{63}$

b. $\frac{1}{3}$

c. $\frac{20}{8}$

d.

Resolução:

EX1: Na equação $2x^2 - 22x + 12$

Temos: $p = x_1 \cdot x_2$ $s = x_1 + x_2$

Soma

$$s = \frac{-b}{a} = \frac{-(-22)}{2} = 11$$

Produto:

$$p = \frac{c}{a} = \frac{12}{2} = 6$$

Depois só substituir na expressão,

$$\begin{aligned} & x_1 \cdot x_2 + 3(x_1 + x_2) \\ & 6 + 3 \cdot 11 = 6 + 33 = 39 \end{aligned}$$

EX2: Na equação $x^2 - 8x + 24$

Conseguimos ver facilmente que a soma é 8 e o produto é 24. Só temos que substituir isso no arranjo ao lado depois do mmc.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \\ & \frac{1}{\underset{(x_2)}{x_1}} + \frac{1}{\underset{(x_1)}{x_2}} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{s}{p} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

11.2. Equações paramétricas

Chama-se **equações paramétrica** todas equações em para além da variável x contem uma outra variável ($k; m; t \dots$) denominada **parâmetro**

Exemplo: Determine k do modo que a equação paramétrica $x^2 - 4x + k = 0$ tenha uma única solução.

Resolução: como já sabemos que uma equação quadrática só terá uma única solução ou solução dupla se o $\Delta = 0$, então temos:

$$\Delta = 0$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot k = 0$$

$$16 - 4k = 0$$

$$-4k = -16$$

$$k = \frac{16}{4} = 4$$

Por tanto, a equação dada só terá uma e única solução se o valor de k for 4.

Outras condições paramétricas

Além das condições de delta abordadas anteriormente, podemos encontrar diversas outras condições dependendo do problema. A tabela abaixo apresenta algumas dicas para o estudante resolver certas situações paramétricas.

▪ Para que a soma das raízes sejam iguais a um número dado (n)	$\frac{-b}{a} = n$
▪ Para que o produto das raízes seja iguais a um número dado (n)	$\frac{c}{a} = n$
▪ Para que uma das raízes seja igual a zero	$x = 0$
▪ Para que as raízes sejam reais do mesmo sinal	$\Delta \geq 0 \text{ e } P > 0$
▪ Para que as raízes sejam reais e de sinais contrários	$\Delta \geq 0 \text{ e } P < 0$
▪ Para que as raízes sejam nulos	$\Delta = 0 \text{ e } P = 0$

11.3 Equações quadráticas incompletas

Equações quadráticas incompletas são aquelas que não possuem pelo menos um dos coeficientes, exceto o coeficiente a . Podem não conter o valor de b e/ou c

Exemplos: $x^2 - 5 = 0$; $3x^2 - 7x = 0$; $9x^2 = 0$

11.3.1. Equação quadrática incompleta do tipo: $ax^2 = 0$

$$ax^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{0}{a}$$

$$x = \pm\sqrt{0}$$

$$x = 0$$

Com isso da para concluir que este tipo de equação terá como solução sempre $x = 0$.

Porque 0 dividido por qualquer número dará sempre zero, e raiz de zero é zero.

$$\text{EX: } 9x^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{0}{9}$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

11.3.2. Equação quadrática incompleta do tipo: $ax^2 + c = 0$

$$ax^2 + c = 0$$

$$ax^2 = 0 - c$$

$$ax^2 = -c$$

$$x^2 = \frac{-c}{a}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Este tipo de equação terá como solução sempre a raiz quadrática de $-c/a$

Porém só terá solução se a e c tiverem sinais contrários.

EX1: $2x^2 - 18 = 0$

$$2x^2 = 0 + 18$$

$$2x^2 = 18$$

$$x^2 = \frac{18}{2}$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm\sqrt{9}$$

$$x = \pm 3$$

EX2:

$$-4x^2 + 16 = 0$$

Pela fórmula:

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Temos:

$$x = \pm\sqrt{\frac{-16}{-4}}$$

$$x = \pm 2$$

11.3.3. Equação quadrática incompleta do tipo: $ax^2 + bx = 0$

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0$$

$$x = 0 \vee x = \frac{-b}{a}$$

Esse tipo de equação terá sempre solução igual o zero e outra igual a $-b/a$

EX1: $2x^2 - 6x = 0$

$$x(2x - 6) = 0$$

$$x = 0 \vee 2x - 6 = 0$$

$$x = 0 \vee 2x = 6$$

$$x = 0 \vee x = \frac{6}{2}$$

$$x = 0 \vee x = 3$$

EX2: $-4x^2 - 8x = 0$

Pela fórmula:

$$x = 0 \vee x = \frac{-b}{a}$$

Temos:

$$x = 0 \vee x = \frac{-(-8)}{-4}$$

$$x = 0 \vee x = 2$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01) O trinómio do segundo grau, $y = (2m+1)x^2 + 4mx + m$ em que m é um número real, é sempre positivo, se e somente se:

- a) $m > \frac{1}{2}$ b) $0 < m < \frac{1}{2}$ c) $m < \frac{1}{2}$ d) $-\frac{1}{2} < m < 0$

Resolução:

- a) O discriminante (deve ser negativo (se o delta é negativo a equação não tem raízes.
b) O a (coeficiente de x^2) deve ser maior que zero. Isso será mais bem visto em funções

Assim, sendo temos:

$$\begin{cases} 2m+1 > 0 \Rightarrow 2m > -1 \Rightarrow m > -\frac{1}{2} \\ b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow (4m)^2 - 4(2m+1) \cdot m < 0 \Rightarrow (4m)^2 - 4(2m+1) \cdot m < 0 \\ \Rightarrow 16m^2 - 8m^2 - 4m < 0 \Rightarrow 8m^2 - 4m < 0 \Rightarrow 4m(2m-1) < 0 \Rightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m < \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

02) Se a e b são raízes diferentes da equação $x^2 - 5x - 1 = 0$ então a grandeza $a^{-1} + b^{-1}$ é igual a :

- a) -8 b) 8 c) -5 d) 5 e) 4,5

Resolução:

Como ai temos raízes elevados ao expoente negativo e lembrando que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

então $a^{-1} + b^{-1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ (achando mmc) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{a \cdot b}$ observa que no numerador temos a soma de raízes e no denominador o produto então:

$$\frac{a+b}{a \cdot b} = \frac{S}{P} \begin{cases} S = -\frac{b}{a} = -\frac{-5}{1} = 5 \\ P = \frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1 \end{cases} \Rightarrow \frac{S}{P} = \frac{5}{-1} = -5$$

03) Para que valores de k , a equação $x^2 - kx + 9 = 0$ tem uma raiz dupla?

a) $k = \pm 9$

b) $k = \pm 6$

c) $k = \pm 2$

d) $k = \pm 3$

e) $k = 5$

Resolução:

Para que tenha uma raiz dupla

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 \quad \left| \begin{array}{l} a = 1 \\ x^2 - kx + 9 = 0 \\ b = -k \\ c = 9 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow k^2 = 36 \Rightarrow k = \pm \sqrt{36} \Rightarrow k = \pm 6$$

04) Considere a equação $x^2 - kx + k = 1$. Se uma das raízes for nula desta equação qual será a outra

Resolução:

$x^2 - kx + k = 1 \Rightarrow x^2 - kx + k - 1 = 0$ Para uma das raízes da equação quadrática ($ax^2 + bx + c$) seja nula o $c = 0$ (o termo independente) $k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1$

05) Se uma raiz da equação $x^2 + ax + 1 = 0$ é quatro vezes maior do que outra, então o parâmetro a da equação é igual a:

a) ± 1

b) 0

c) ± 4

d) ± 2

e) $\pm 2,5$

Resolução:

Para este tipo de exercícios calculamos em primeiro lugar a soma de raízes

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{a}{1} = -a \text{ em seguida calculamos o produto } P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{1} = 1$$

Veja que na questão, uma raiz é quatro vezes maior que a outra, $x_1 = 4x_2$ e

$$x_1 \cdot x_2 = 1 \Rightarrow 4x_2 \cdot x_2 = 1 \Rightarrow 4x_2^2 = 1 \Rightarrow x_2 = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow x_2 = \pm \frac{1}{2} \text{ então temos que:}$$

$$x_1 + x_2 = -a \Rightarrow 4x_2 + x_2 = -a \Rightarrow 5x_2 = -a \Rightarrow a = -5x_2 \begin{cases} x_2 = \pm \frac{1}{2} \\ a = -5x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -5\left(\pm \frac{1}{2}\right) \\ a = \pm \frac{5}{2} = \pm 2,5 \end{cases}$$

12 ALGÉBRA

Uma expressão diz-se algébrica se sobre a variável (letra) incide a operação adição subtração, multiplicação divisão e extracção da raiz.

12.1. Classificação das expressões

Uma expressão algébrica será um monómio quando apresentar apenas 1 termo algébrico.

Ex.: $2xy$; $\frac{1}{3}xyz$

Constituição dum monómio **cada monómio é constituído por um coeficiente** (ou parte numérica), **um termo ou mais** (a parte literal ou variável) **e o grau** (expoente máximo da variável ou duma das variáveis)

Grau de um monómio racional inteiro

O grau de um termo algébrico ou monómio racional é a soma dos expoentes das variáveis desse monómio.

Ex.: $3b^2c^3$ é do 5º grau já que a soma dos expoentes de b e c é $2+3=5$

Ex.: $5mn^3p^6$ é do 10º grau já que a soma dos expoentes de m, n, p é $1+3+6=10$

Grau relativos de um monómio racional inteiro

O grau relativo de um termo algébrico ou monómio racional é os expoentes de uma determinada variável desse monómio

Ex.: O monómio $3b^2c^3$ é do 2º grau em relação a b e do 3º grau em relação a c.

Ex.: O monómio $5mn^3p^6$ do 1º grau em relação a m e do 3º grau em relação a n do 6º grau em relação a p.

12.2. POLINÓMIOS

Uma expressão diz-se algébrica será um polinómio quando apresentar 2 ou mais termos algébricos

- Quando um polinómio apresentar apenas dois 2 termos ele será um **binómio**
Ex: $x^2 + 3x$
- Quando um polinómio apresentar apenas 3 termos ele será um **trinómio**.
Ex.: $x^2 - 5x + 2$

FÓRMULA GERAL DE UM POLINOMIO

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n \mid a_0 \neq 0$$

Grau de um polinómio racional inteiro

Grau de um polinómio racional inteiro é o maior dos graus dos seus termos não nulos

Ex: polinómio $2x^3y^2 - 7x^4y + 3x^5y^3 - x^5y^6$ é do 11º graus já que o termo (monómio) de maior dos graus é 11, o $-x^5y^6$

Grau de um polinómio racional inteiro em relação de uma variável

É o grau do monómio de maior grau do polinómio

Ex.: O monómio $2x^3y^2 - 7x^4y + 3x^5y^3 - x^5y^6$ é do 5º graus em relação a variável x e do 6º em relação a variável y

Polinómio racional inteiro homogéneo

Um polinómio racional inteiro é homogéneo quando todos os seus termos algébricos é do mesmo grau.

Ex: $2x^3y^4 - x^2y^5 + x^6y - x^7$ é polinómio racional inteiro homogéneo do 7º graus pois todos os termos algébricos são do 7º graus.

Polinómio racional inteira ordenado

Um polinómio racional inteiro esta ordenado em relação a uma variável quando todos expoentes dessa variável estão ordenados de forma crescente ou decrescente.

Ex: O polinómio $2x^3y^2 - x^2y^4 + xy^5 - y^6$ é polinómio racional inteiro ordenado decrescentemente em relação x pois os expoentes de x decrescem de 3 até 0.

Polinómio racional inteiro completa

Um polinómio racional inteiro é completo em relação a uma variável quando todos expoentes dessa variável estão presentes nesse polinómio.

Polinómio nulo

Um polinómio será nulo quando todos coeficientes são iguais a zero.

Polinómios idênticos

Polinómios idênticos dois polinómios são idênticos se e só se são iguais os coeficientes dos termos do mesmo grau

12.3 Operações com polinómios

Adição e subtracção

Adiciona-se ou subtrai-se os termos do mesmo grau

- Obs: observe que, se não houver termos semelhante para operar, ele apenas será repetido.

Exemplo:

Dados os polinómios $A(x) = x^3 + 4xy + y^2 - 2$ e $B(x) = 2x^2 - 2xy + 4y^2 + x$
Determine:

- i) $A(x) + B(x)$
- ii) $A(x) - B(x)$

Resolução:

$$A(x) + B(x) = (x^3 + 4xy + y^2 - 2) + (2x^2 - 2xy + 4y^2 + x)$$

$$A(x) + B(x) = x^3 + 4xy + y^2 - 2 + 2x^2 - 2xy + 4y^2 + x$$

$$A(x) + B(x) = x^3 + 2xy + 5y^2 - 2 + x$$

$$A(x) - B(x) = (x^3 + 4xy + y^2 - 2) - (2x^2 - 2xy + 4y^2 + x)$$

$$A(x) - B(x) = x^3 + 4xy + y^2 - 2 - 2x^2 + 2xy - 4y^2 - x$$

$$A(x) + B(x) = x^3 + 6xy - 3y^2 - 2 - x$$

Multiplicação

A multiplicação deverá ser feita multiplicando-se primeiro os coeficientes, depois a parte literal obedecendo as regras de potenciação e a regra da distributividade e, por fim, adicionando-se os termos semelhantes.

Exemplo: Dados polinómios: $A(x) = 3x^2$ e $B(x) = x^2 - 3x$

$$A(x) \cdot B(x) = 3x^2 \cdot (x^2 - 3x)$$

$$A(x) \cdot B(x) = 3x^4 - 9x^3$$

Divisão

Método da chave:

Divide-se como se estivesse a dividir um número por outro.

- 1º Organiza-se os termos dos polinómios em ordem decrescente dos graus dos seus termos.
- 2º Coloca-se, no quociente, um termo que o seu produto com o divisor anula o termo com maior grau no dividendo.
- O processo termina quando o grau do resto parcial for menor do que o grau do divisor.

Ex.:

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 6x^2 - x + 12 \quad | \quad x - 2 \\
 \underline{-x^3 + 2x^2} \\
 -4x^2 - x + 12 \\
 \underline{+4x^2 - 8x} \\
 -9x + 12 \\
 \underline{+9x - 18} \\
 -6
 \end{array}$$

Teorema d'alembert

Um polinómio $P(x)$ é divisível por $(x - a)$ se e somente se $P(a) = 0$ ou seja, se a for a raiz do polinómio.

$$\begin{array}{l} P(x) \\ 0 \end{array} \begin{array}{l} | \\ x - a \\ \hline Q(x) \end{array} \longrightarrow \boxed{P(a) = 0}$$

12.4 Divisibilidade de polinómios

Um polinómio $B(x)$ é divisível por $(x-a)$ só e só se $B(a) = 0$. Neste caso, diz-se que a é a raiz do polinómio. Se um polinómio f é divisível por $x-a$ e por $x-b$, com $a \neq b$, então f é divisível pelo produto $(x-a)(x-b)$

12.5 Método De Briot-Ruffini

Regra de Ruffini

- O coeficiente do primeiro termo do quociente é igual ao coeficiente do primeiro termo do dividendo;
- Cada um dos restantes coeficientes do quociente obtém-se multiplicando o coeficiente anterior do quociente por a e adicionando o coeficiente correspondente de $P(a)$;
- O resto é a soma do último termo do dividendo com o produto do último termo do quociente por a .

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 3 & -7 & 6 & 5 \\ & 3 & -1 & 4 & 13 \end{array}$$

$P(x) = 3x^3 - 7x^2 + 6x + 5$ $D(x) = -x + 2$
 $x_1 = 2$

Resto: 13
 Coeficientes do polinómio $a \cdot Q(x)$
 Grau do polinómio $Q(x)$ é uma unidade menor que o grau do polinómio $P(x)$

$quociente \rightarrow a \cdot Q(x)$
 $(-1) \cdot Q(x) = 3x^2 - x + 4$
 $Q(x) = -3x^2 + x - 4$
 $resto \rightarrow R = 13$

12.6 Teorema do resto

O Resto da divisão do polinómio $P(x)$ pelo binómio $x-a$, é igual ao valor do polinómio $P(x)$ para $x=a$, ou seja, o resto R vai ser igual ao $P(a)$

$$\boxed{R = P(a)}$$

Teorema do resto (**divisor de 1º grau** $d = ax + b$)

$$\begin{array}{l}
 \text{P(x)} \overline{) \begin{array}{c} ax + b \\ \text{Q(x)} \end{array}} \longrightarrow \text{P(x)} = (ax + b) \cdot \text{Q(x)} + \text{R} \\
 \text{R}
 \end{array}$$

$\downarrow$
Raiz do divisor $x_1 = -\frac{b}{a}$

$$P\left(-\frac{b}{a}\right) = 0 \cdot Q(x) + R$$

$$P\left(-\frac{b}{a}\right) = R$$

Teorema da decomposição de um polinômio

O teorema da decomposição de um polinômio, o qual garante que qualquer polinômio pode ser decomposto em factores de primeiros graus

De maneira geral, todo polinômio:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Pode se escrito na forma fatorada $P(x) = a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$ Em que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ são as raízes de $P(x)$, daí podemos anunciar o seguinte teorema:

Toda equação polinomial $P(x) = 0$ de graus $n, n \geq 0$ tem exatamente n raízes reais ou

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01) Um polinómio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ satisfaz as seguintes condições:

$P(1) = 0$; $P(-x) + P(x) = 0$ qualquer que seja x real. Qual o valor de $P(2)$?

a) 2

b) 3

c) 4

d) 5

Resolução:

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \Rightarrow P(1) = 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \Rightarrow a + b + c = -1$$

$$P(-x) = P(x) = 0 \Rightarrow -x^3 + ax^2 - bx + c + x^3 + ax^2 + bx + c \Rightarrow 2ax^2 + 2c = 0 \Rightarrow ax^2 + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \end{cases}; b = -1$$

$$P(2) = 8 - 2 = 6$$

e) 6

02) Os valores dos números reais m e n , para os quais o polinómio

$P(x) = x^3 + mx^2 + 6x + 2n$ seja divisível por $x^2 - x - 2$, são, respectivamente:

a) 9 e -8

b) 7 e -10

c) 10 e -7

d) -9 e 8

Resolução:

1º Passo. Vamos achar os zeros de $x^2 - x - 2$

$$x^2 - x - 2 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 1) \Rightarrow x_1 = 2 \wedge x_2 = -1$$

Pelo teorema de divisibilidade

Para $x_1 = 2$ temos: $P(2) = 0 \Rightarrow 2^3 + m \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 + 2n = 0 \Rightarrow 8 + 4m + 12 + 2n = 0$

Para $x_1 = -1$ temos: $P(-1) = 0 \Rightarrow (-1)^3 + m \cdot (-1)^2 + 6(-1) + 2n = 0 \Rightarrow -1 + m - 6 + 2n = 0$ **Veja que aí temos duas equações e duas incógnitas**

$$\begin{cases} 8 + 4m + 12 + 2n = 0 \\ -1 + m - 6 + 2n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4m + 2n = -20 \\ m + 2n = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4(7 - 2n) + 2n = -20 \\ m = 7 - 2n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 28 - 8n + 2n = -20 \\ m = 7 - 2n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -6n = -20 - 28 \\ m = 7 - 2n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6n = -48 \\ m = 7 - 2n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = \frac{-48}{-6} \\ m = 7 - 2n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 8 \\ m = 7 - 2 \cdot 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 8 \\ m = 7 - 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 8 \\ m = -9 \end{cases}$$

03) O polinômio P é tal que $P(x) + xP(2-x) = x^2 + 3$ para todo x real. Determine $P(0)$, $P(2)$

Resolução:

$$P(x) + 0 \cdot P(2-0) = 0^2 + 3 \Rightarrow P(0) = 3$$

$$P(2) + 2 \cdot P(2-2) = 2^2 + 3 \Rightarrow P(2) + 2 \cdot P(0) = 7 \Rightarrow P(2) = 1$$

04) Dados os polinômios $P(x) = x^2$, $Q(x) = x^4 + x^2$ e $R(x) = 5x^4 + 3x^2$, determine os números “ a ” e “ b ” reais tais que $R(x) = a \cdot P(x) + b \cdot Q(x)$

Resolução:

$$5x^4 + 3x^2 = a(x^2) + b(x^4 + x^2) \Rightarrow 5x^4 + 3x^2 = ax^2 + bx^4 + bx^2 \begin{cases} b = 5 \\ a + 5 = 3 \Rightarrow a = -2 \end{cases}$$

05) O resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por $(x+1)$ é 7 e o resto da divisão de $P(x)$ por $(x+1)(x-2)$ é 3. Determine o resto da divisão de $P(x)$ por $(x+1)(x-2)$.

Resolução:

$$P(x) = Q_1(x) \cdot (x+1) + 7 \Rightarrow P(-1) = Q_1(-1) \cdot 0 + 7 \Rightarrow P(-1) = 7$$

$$P(x) = Q_2(x) \cdot (x-2) + 3 \Rightarrow P(2) = Q_2(2) \cdot 0 + 3 \Rightarrow P(2) = 3$$

$$P(x) = Q_2(x) \cdot (x+1)(x-2) + R(x) \begin{cases} P(-1) = R(-1) = 7 \\ P(2) = R(2) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2a + 2b = 3 \\ 2a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow 3b = 17 \Rightarrow b = \frac{17}{3}$$

$$2a + \frac{17}{3} = 3 \Rightarrow 2a = \frac{9-17}{3} \Rightarrow a = -\frac{4}{3} \text{ Logo: } \boxed{R(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{17}{3}}$$

Exercícios Propostos

1. Se $P(x)$ é um polinómio do segundo grau com coeficientes reais, tais que então: $P(0)=1$ e $P(x-1)-P(x)=-8x+2$

a) $P(x)=2x^2+4x+1$ b) $P(x)=4x^2+2x+1$ c) $P(x)=4x^2-2$ c) $P(x)=-2x^2+4x+1$ e) $P(x)=4x^2-2x+1$

2 O polinómio $A(x)$ representa a área de um quadrado de lado $a+1$ e o polinómio $V(x)$ representa o volume de um cubo de aresta $a+1$. O grau de $A(x)+V(x)$ é:

a) 3 b) 6 c) 5 d) 4 e) 1

3. O volume de um paralelepípedo é dado por $V(x)=x^2-6x+11x-6$ e sua altura é 3. A soma das outras dimensões desse paralelepípedo é:

a) 3 b) 2 c) 6 d) 4 e) 7

4. Se o volume de um paralelepípedo é dado por $V(x)=x^3+mx^2+nx+p$ e suas arestas são 1, 2 e 3, então o quociente (área da base) de $V(x)$ por $x-3$ é:

a) x^2+3x-2 b) x^2+3x+2 c) x^2-3x-2 d) x^2-3x+2

4. O volume de um paralelepípedo é dado por $V(x)=x^2-6x+11x-6$ e sua altura é 3. A soma das outras dimensões desse paralelepípedo é:

a) 3 b) 2 c) 6 d) 4 e) 7

5. A soma dos coeficientes do polinómio do 3º grau que se anula para $x=1$ e que, ao ser dividido por, $x+1$, $x-2$ e $x+2$ apresenta restos iguais a 6, é:

a) 2 b) 0 c) 4 d) 6 e) 3

6. O resto da divisão do polinómio $x^{12}+16$ por $x+\sqrt[3]{2}$ é igual a:

a) $16\sqrt[3]{2}$ b) $8\sqrt[3]{2}$ c) 32 d) 16 e) 8

7. Seja $2x^{2n+1}+3x^{2n}+3$ $n \in \mathbb{N}$. Dividindo esse polinómio por $x+1$, obtém-se o resto:

a) 0 b) 4 c) -2 d) 5 e) 3

8. Se $P(x) = x^3 - 2mx^2 + (-m+6)x + 2m+n$ é divisível por $x-1$ e por $x+1$, então $m+n$ é igual a:

a) 7 b) -7 c) 6 d) -6 e) 0

9. A divisão de $P(x)$ por $x^2 + 1$ tem quociente $x-2$ e resto igual a 1. O polinómio $P(x)$ é:

a) $x^2 + x - 1$ b) $x^2 + x + 1$ c) $x^2 - 2x^2 + x - 2$ d) $x^2 - 2x^2 + x - 1$

10. Numa divisão de polinómios em que o dividendo é de grau n e o quociente é de grau $n-4$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 4$, o grau do resto pode ser, no máximo, igual a:

a) 3 b) $n-4$ c) 4 d) $n-5$ e) 5

11. O resto da divisão de $P(x) = x^3 - x + 1$ por $D(x) = x^2 + x + 1$ é:

a) 0 b) $x+2$ c) $x-2$ d) $-x+2$ e) $-x-2$

12. O quociente da divisão de $x^3 + px + q$ por $x^2 + x + 1$ é igual a:

a) $-x+1$ b) $x-1$ c) x^2-1 d) x^2+1 e) $x+1$

13. Se na divisão de $12x^4 + 5x^3 + 5x + 12$, por $3x^2 + 2x - 1$, o quociente é $Q(x)$, então $Q(3)$ é igual a:

a) 33 b) 34 c) 35 d) 36

14. O polinómio $P(x) = 2x^3 - ax^2 + bx + 2$ é divisível por $2x^2 + 5x - 2$. Então $a+b$ é igual a:

a) -7 b) -3 c) 0 d) 7 e) -10

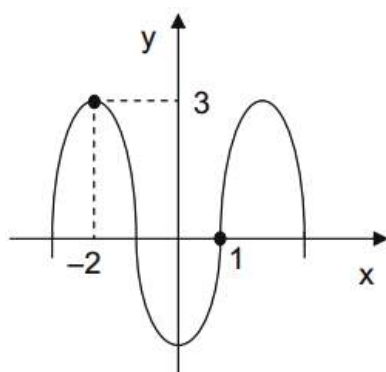
15. O resto da divisão de $x^4 + x^3 + x^2ax + b$ por $x^2 + 1$ é 3. O valor de $a+b$ é:

a) 5 b) 4 c) 2 d) -4 e) -2

16. O resto da divisão de $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 5x + 1$ por $x-2$ é:

a) 1 b) 20 c) 0 d) 19 e) 2

17. O gráfico da função polinomial $y = P(x)$ é:



Nestas condições, qual o resto da divisão de $P(x)$ por $(x+2)(x-1)$?

18. Se $\frac{ax}{x^2-1} + \frac{b}{x-1} = \frac{2x-1}{x^2-1}$, Para todo x , $x \neq \pm 1$ então $a - b$ vale:

- a) 4 b) -2 c) 3 d) 0 e) -1

12.7. Classificação das expressões algébricas

Expressões algébricas classificam-se em racional e irracional

RACIONAL $\begin{cases} \text{INTEIRA} \\ \text{FRACCIONARIA} \end{cases}$

IRRACIONAL $\begin{cases} \text{PAR} \\ \text{IMPAR} \end{cases}$

EXPRESSÕES RACIONAL

Uma expressão algébrica será racional inteira quando apresentar apenas termos algébricos racionais inteiras

Ex.: $2ab$, $-6x^3y^2$, $4m^5m^2p^3$, $-\frac{\sqrt{5}m^3p^2}{11}$

Dica: é só verificar se não existe nenhuma incógnita ou parte literal dentro de uma radical e no denominador

Expressão algébrica será racional fraccionária

Uma expressão algébrica será racional fracionária quando apresentar pelo menos 1 termos algébricos racional fracionaria. (incógnita se encontra em denominador)

$$\frac{M(x)}{N(x)} = 0 \Leftrightarrow M(x) = 0 \wedge N(x) \neq 0 \quad \text{Onde } M(x) \wedge N(x) \text{ são polinómios.}$$

Ex.: $\frac{ab}{c}; -\frac{3y^2}{x}; \frac{10m^2p^4}{n^5q^4}; -\sqrt{3}x^5y^8w^{-2}$

EXPRESSÃO ALGÉBRICA IRRACIONAL

Uma expressão algébrica será irracional quando a variável figura na radical ou quando a variável tem expoente fraccionário

Ex: $zx^{\frac{1}{2}}; \sqrt{x}; (yx)^{\frac{2}{3}}$

IDENTIDADES NOTÁVEIS

São ditas notáveis por serem as identidades mais usadas. É muito importante memorizá-las e estar sempre atento para a possibilidade de usá-las, mesmo que as aparências escondam isso.

- **Quadrado da soma de dois termos**

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- **Quadrado da diferença de 2 termos.**

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

- **Diferença de quadrados de dois termos**

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

- **Cubo da soma de dois termos;**

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

- **Cubo da diferença de dois termos;**

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

- **Soma de cubos de dois termos;**

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - 2ab + b^2)$$

- **Diferença de cubos de dois termos;**

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

- **Cubo da soma e diferença com um**

$$(a^3 + 1) = (a+1)(a^2 - a + 1)$$

$$(a^3 - 1) = (a-1)(a^2 + a + 1)$$

Identidade fracionárias

$$\frac{1}{a} \pm \frac{1}{b} = \frac{b \pm a}{ab}$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n-1}{n(n+1)}$$

Quadrado da soma de três termos

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Distributiva

$$a \cdot (b+c) = ab + ac$$

Identidade de Diophantos

Sempre que dois números inteiros, m e n , forem, cada um, a soma de dois quadrados,

Então seu produto mn também será a soma de dois quadrados.

$$26 = 2 \cdot 13 = (1^2 + 1^2) \cdot (2^2 + 3^2) = (1 \cdot 3 + 1 \cdot 2)^2 + (1 \cdot 2 - 1 \cdot 3)^2 = 5^2 + 1^2 = 26$$

$$16 = 2 \cdot 8 = (1^2 + 1^2) \cdot (2^2 + 2^2) = \text{etc.}$$

$$116 = 4 \cdot 29 = 2 \cdot 58 = (1^2 + 1^2) \cdot (7^2 + 3^2) = \text{etc.}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01) Simplificando a expressão $\frac{p^2 + 2p}{(p+1)(p-1) + (p+1)}$ obtém-se

a) $\frac{p+2}{p(p+1)}$ b) $\frac{p}{p+1}$ c) $\frac{p}{(p+1)(p-1)}$ d) $\frac{p+2}{p+1}$ e) $\frac{p(p+2)}{(p+1)(p-2)}$

Resolução:

$$\frac{p^2+2p}{(p+1)(p-1)+(p+1)} = \frac{p^2+2p}{(p^2-1^2)(p+1)} = \frac{p^2+2p}{p^2-1+p+1} = \frac{p^2+2p}{p^2+p} = \frac{p(p+2)}{p(p+1)} = \frac{p+2}{p+1}$$

02) A expressão equivalente $\frac{a^3-5a^2+6a}{a^3-8} \div \frac{a^3-9}{a^2+2a+4}$ é:

a) $\frac{a+3}{a-2}$ b) $\frac{a-2}{a+3}$ c) $\frac{a+3}{a}$ d) $\frac{a}{a+2}$ e) $\frac{a}{a+2}$

Resolução:

$$\begin{aligned} \frac{a^3-5a^2+6a}{a^3-8} \div \frac{a^3-9}{a^2+2a+4} &= \frac{a^3-5a^2+6a}{a^3-8} \times \frac{a^2+2a+4}{a^3-9} = \\ \frac{a(a^2-5a+4)}{a^3-2^3} \times \frac{a^2+2a+4}{a^2-3^2} &= \frac{a(a-2)(a-3)}{(a-2)(a^2+2a+4)} \times \frac{a^2+2a+4}{(a-3)(a+3)} = \frac{a}{a+3} \end{aligned}$$

03) Os valores A, B, C da expressão $\frac{8}{x^3-4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}$ são

respectivamente:

a) -2, 2, -1 b) -1, 2, 1, c) -2, 1, -1 d) -1, -1, 2 e) -2, 1, 1

Resolução:

$$\frac{8}{x^3-4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} \Rightarrow \frac{8}{x^3-4x} = \frac{(x-2)(x+2) \cdot A + B \cdot x \cdot C \cdot x \cdot (x-2)}{x(x-2)(x+2)}$$

$$8 = Ax^2 - 4A + Bx^2 + 2Bx + Cx^2 - 2Cx \Rightarrow \begin{cases} A+B+C=0 \\ 2B-2C=0 \\ -4A=8 \Rightarrow A=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B+C=0 \\ 2B-2C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2+B+C=0 \\ 2B-2C=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B+C=2 \\ 2B-2C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=2-B \\ 2(2-B)-2C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=2-B \\ 2B-2(2-B)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=2-B \Rightarrow C=2-1=1 \\ 2B-4+2B=0 \Rightarrow B=1 \end{cases}$$

$$A=-2; \quad B=1; \quad C=1$$

04) Usando as identidades notáveis e calculando inteligentemente, mostre que

$$(a+b+c)^2 - (a-b+c)^2 = 4b(a+c)$$

seja: $x = a + b$ e $y = a - b$

$$(x+c)^2 - (y+c)^2 = x^2 + 2xc + c^2 - (y^2 + 2yc + c^2) \rightarrow x^2 + 2xc + c^2 - y^2 - 2yc - c^2$$

$$\rightarrow a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c - a^2 + 2ab - b^2 + 2(a-b)c \rightarrow a^2 + 2ac + 2bc - a^2 + 4ab + 2ac - 2bc$$

$$(x+c)^2 - (y+c)^2 \rightarrow 4ba + 4bc = 4b(a+c)$$

05) Sabendo que $x + y = 9$ e que $xy = 13$ podemos determinar o valor de $x^3 + y^3$?

Partindo de $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ obtemos

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 9^3 - 3 \cdot 13 \cdot 9 = 729 - 351 = 378$$

06) Calcule

a) 5003^2

$$5003 = (5000 + 3)^2 = 5000^2 + 6 \times 5000 + 3^2 = 25000.000 + 30.000 + 9 = 25030009.$$

13 EQUACÕES DO 3º GRAU

Uma equação pode ser escrita na forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, onde a, b, c e d são números reais conhecidos, com $a \neq 0$

Na forma mais comum, para resolver uma equação do terceiro grau, aplica-se a regra de Ruffini.

Exemplo: Determine as raízes da equação $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

Passo 1: Encontrar a primeira solução válida

Para encontrar a primeira solução válida temos que sempre tentar os divisores do termo independente e seus simétricos. Neste caso concreto o 6.

Divisores de 6 = {1,2,3}, todos valores por testar {1,-1,2,-2,3,-3},

$$x = 1: 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 0$$

Como o resultado deu zero, então $x = 1$ é a primeira solução válida.

Passo 2: Aplicar o método de Ruffini

Vamos organizar o polinómio no dispositivo de Ruffini colocando a primeira solução válida $x=1$.

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

1		1	-6	11	-6
			1	-5	6
		1	-5	6	0

Assim, o resto é 0 e o polinómio reduzido é: $x^2 - 5x + 6 = 0$

Passo 3: Resolver a equação reduzida

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Pelo método da soma e produto:

A soma é $s = \frac{-b}{a} = \frac{-(-5)}{1} = 5$ e produto é $p = \frac{c}{a} = \frac{6}{1} = 6$, assim os números que somados resultam em 5 e multiplicados resultam em 6 são 2 e 3. Por tanto: $x = 2 \wedge x = 3$

Conclusão

As raízes da equação original: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ são {1, 2, 3}

Casos particulares

13.1. Equações cúbicas sem uma constante

- $d = 0$, $ax^3 + bx^2 + cx = 0$

Evidencia-se o termo o termo de menor expoente neste caso o c

$$ax^3 + bx^2 + cx = 0$$

$$\Rightarrow x(ax^2 + bx + c) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \wedge ax^2 + bx + c = 0$$

Exemplo:

$$x^3 - 7x^2 + 12x = 0$$

$$x(x^2 - 7x + 12) = 0$$

$$x = 0 \wedge x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$x = 0 \wedge (x - 3)(x - 4) = 0$$

$$x = 0 \wedge x = 3 \wedge x = 4$$

14 EQUACÕES DO 4º, 6º, 8º... GRAUS

Para resolver qualquer equação do tipo $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ **aplica-se a troca de variáveis.** Que consiste em Substituir x^n por y ou (outra variável) obtendo-se y resolvendo a equação do 2º. grau. Em seguida desfaz-se a troca, determinando-se a incógnita inicial.

Exemplo 1:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

$$(x^2)^2 - 13(x^2) + 36 = 0$$

Seja $x^2 = y$ teremos:

$$(y)^2 - 13(y) + 36 = 0$$

$$y^2 - 13y + 36 = 0$$

Usando a técnica de **soma e produto**, temos soma 13 e produto 36, os números que somados resultam em 13 e multiplicados resultam em 36 são 4 e 9. Por tanto:

$$y_1 = 4 \text{ e } y_2 = 9$$

Agora temos que recuperar o nosso x , pela expressão que colocamos no seja.

$$x^2 = y$$

$$x = \pm\sqrt{y}$$

$$x = \pm\sqrt{y_1} \wedge x = \pm\sqrt{y_2}$$

$$x = \pm\sqrt{4} \wedge x = \pm\sqrt{9}$$

$$x = \pm 2 \wedge x = \pm 3$$

$$\text{Sol: } \{-3, -2, 2, 3\}$$

Exemplo 2:

$$x^8 - 18x^4 + 32 = 0$$

$$(x^4)^2 - 18(x^4) + 32 = 0$$

Seja: $x^4 = t$ teremos:

$$(t)^2 - 18(t) + 32 = 0$$

$$t^2 - 18t + 32 = 0$$

$$(t - 2)(t - 16) = 0$$

$$t_1 = 2 \wedge t_2 = 16$$

Voltando para o seja: $x^4 = t$ teremos:

$$x^4 = t$$

$$x = \pm \sqrt[4]{t}$$

$$x = \pm \sqrt[4]{t_1} \wedge x = \pm \sqrt[4]{t_1}$$

$$x = \pm \sqrt[4]{2} \wedge x = \pm \sqrt[4]{16}$$

$$x = \pm \sqrt[4]{2} \wedge x = \pm 2$$

$$\text{Soluções: } \{-\sqrt[4]{2}, -2, \sqrt[4]{2}, 2\}$$

14.1 Equação “tipo produto”

Lembrando que $A \cdot B = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$ pode-se resolver uma equação de grau maior que dois se for possível transformá-la num produto de factores do 1°. e 2°. graus

Exemplo 1:

$$(x^2 - 4)(3x^2 - 6x) = 0$$

$$x^2 - 4 = 0 \vee 3x^2 - 6x = 0$$

$$x^2 = 4 \vee x(3x - 6) = 0$$

$$x = \pm \sqrt{4} \vee 3x = 6$$

$$x = \pm 2 \vee x = \frac{6}{3} = 2$$

$$\text{Soluções: } \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\}$$

Exemplo 2: Soma das soluções inteiras da equação $(x^2 + 1)(x^2 - 25)(x^2 - 5x + 6) = 0$

a) 1

b) 3

c) 5

d) 7

e) 11

Resolução:

$$(x^2 + 1)(x^2 - 25)(x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$x^2 + 1 = 0 \vee x^2 - 25 \vee x^2 - 5x + 6 = 0$$

- Para $x^2 + 1 = 0$ como teremos: $x = \pm\sqrt{-1}$ **não tem solução**
- Para $x^2 - 25 = 0$ teremos: $x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$
- Para $x^2 - 5x + 6 = 0$ teremos soma 5 e produto 6, assim $x = 2$ e $x = 3$

O total de soluções obtidas é $\{-5, 2, 3, 5\}$

A soma de todas essas soluções inteiras é $-5 + 2 + 3 + 5 = 5$

15.1 Equação “tipo quociente”

Chama-se **equação do tipo quociente** ou simplesmente equação fracionária se a incógnita se encontra em denominador.

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \Rightarrow A(x) = 0 \text{ e } B(x) \neq 0$$

As raízes da equação deste tipo são as do numerador por não ser definida quanto $B(x) = 0$

Exemplo:

$$\frac{2x^2 - 8x}{7x - 4} = 0$$

O denominador **não deve** ser igual zero, por tanto: $2x^2 - 8x = 0 \wedge 7x - 4 \neq 0$

$$2x^2 - 8x = 0 \wedge 7x - 4 \neq 0$$

$$x(2x - 8) = 0 \wedge 7x \neq 4$$

$$x = 0 \vee 2x - 8 = 0 \wedge x = \frac{4}{7}$$

$$x = 0 \vee x = 4 = 0 \wedge x = \frac{4}{7}$$

Exercícios propostos

1. Para qual valor de "a" na equação $(x-2)(2ax-3) + (x-2)(-ax+1) = 0$ tem duas raízes reais e iguais?

- a) -1 b) 0 c) 1 d) 2 e) 3

2. Considere a equação $\frac{a}{1-x^2} - \frac{b}{x-\frac{1}{2}} = 5$ com a e b números inteiros positivos.

Das afirmações:

I. Se $a = 1$ e $b = 2$ então $x = 0$ é uma solução da equação.

II. Se x é solução da equação, então $x \neq \frac{1}{2}, x \neq -1$ e $x \neq 1$

III. $x = \frac{2}{3}$ não pode ser solução da equação. É (são) verdadeira (s)

- a) Apenas II. b) Apenas I e II. c) Apenas I e III. d) Apenas II e III.

3. Sendo 15 e 7, respetivamente, a soma e o produto das raízes da equação $3x^2 + bx - c = 0$ O valor de $b - c$

- a) -68 b) -45 c) -24 d) -16

4. Se a equação $3x^2 - 6x + (2k-1) = 0$ tem duas raízes reais e diferentes, então:

- a) $k < 2$ b) $k = 0$ c) $k > 2$ d) $k \notin \mathbb{R}$

5. A função quadrática $y = (m^2 - 4)x^2 - (m + 2)x - 1$ está definida quando:

- a) $m = 4$ b) $m \neq 4$ c) $m \neq \pm 2$ d) $m = \pm 2$

6. Parábola da equação $y = ax^2 + bx + c$ passa pelo ponto (1,0). Então $a + b + c$ é igual a:

- a) 0 b) 2 c) 3 d) 5 e) Nenhuma das alternativas

16 EQUAÇÕES IRRACIONAIS

Equação irracional é uma equação em que a incógnita aparece sob um ou mais radicais qualquer equação irracional pode ser reduzida a uma equação algébrica

Resolução:

Para resolver uma equação irracional, devemos transformá-la eliminando os radicais. Para isso, elevamos ambos os membros da equação a expoentes convenientes.

16.1. Equações do tipo

$$\sqrt{A} \pm B = 0$$

Como se resolve?

- Passa-se o 2º termo (o B) para o 2º membro (depois do símbolo igual);
- Eleva-se ao quadrado ambos os membros;
- Resolver a equação obtida e verificar as soluções.

Exemplo: Ache as raízes de: $\sqrt{4x + 24} - 2x = 0$

Calculando:

$$\sqrt{4x + 24} - 2x = 0$$

Passo 1: Isolar a raiz quadrada

$$\sqrt{4x + 24} = 2x$$

Passo 2: Elevar ambos os lados ao quadrado

$$(\sqrt{4x + 24})^2 = (2x)^2$$

$$4x + 24 = 4x^2$$

$$4x^2 - 4x - 24 = 0$$

Passo 3: Resolver a equação

$$4x^2 - 4x - 24 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-24)}}{2 \cdot 4}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{400}}{8} = \frac{4 \pm 20}{8}$$

$$x = 3 \text{ e } x = -2$$

Passo 6: Verificar as soluções

Como a equação original envolve uma raiz quadrada, precisamos verificar se essas soluções satisfazem a equação inicial.

Neste caso o $x = 3$ é a única solução válida.

Já que o domínio exige que: $4x + 24 \geq 0 \wedge 2x \geq 0$ neste caso $x \geq 0$

16.2. Equações do tipo

$$\sqrt{A} \pm \sqrt{B} = 0$$

Como se resolve:

Passa-se o 2º termo para o 2º membro e eleva-se ao quadrado ambos os membros. Resolver a equação obtida e verificar as soluções. Tal como foi feito no exemplo anterior.

16.3. Equações do tipo

$$\sqrt{A} \pm \sqrt{B} = D$$

Como se resolve

Eleva-se ao quadrado ambos os membros. Resolver a equação obtida e verificar as soluções. (caso notável)

Exemplo 1: A equação $\sqrt{5-x} \cdot \sqrt{5+x} = -2x$ tem raiz(es):

- a) $-\sqrt{5}$ b) -5 c) $\sqrt{5}$ d) $\emptyset$ e) $\pm\sqrt{5}$

Primeiro vamos achar o domínio de existência: $x \in]-5, 0[$ (veja na unidade de domínio de expressões irracional como calcular domínio)

$$\begin{aligned}\sqrt{5-x} \cdot \sqrt{5+x} &= -2x \Rightarrow \sqrt{(5-x)(5+x)} = -2x \\ \Rightarrow \left(\sqrt{(5-x)(5+x)} \right)^2 &= (-2x)^2 \Rightarrow (5-x)(5+x) = 4x^2 \Rightarrow 25 - x^2 = 4x^2 \\ \Rightarrow 5x^2 &= 25 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5} \text{ logo: } \boxed{x = -\sqrt{5}}. x = \sqrt{5} \notin]-5, 0[\end{aligned}$$

Exemplo 2: Os inteiros positivos x e y satisfazem a equação

$\sqrt{x + \frac{1}{2}\sqrt{y}} - \sqrt{x - \frac{1}{2}\sqrt{y}} = 1$. Qual das alternativas apresenta um possível valor de y ?

a) 5

b) 6

c) 7

d) 8

e) 9

Resolução:

$$\sqrt{x + \frac{1}{2}\sqrt{y}} - \sqrt{x - \frac{1}{2}\sqrt{y}} = 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x + \frac{1}{2}\sqrt{y}} - \sqrt{x - \frac{1}{2}\sqrt{y}} \right)^2 = 1^2$$

lembrando que $\rightarrow (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ vem:

$$\Leftrightarrow x + \frac{1}{2}\sqrt{y} - 2\sqrt{x + \frac{1}{2}\sqrt{y}} \cdot \sqrt{x - \frac{1}{2}\sqrt{y}} + x - \frac{1}{2}\sqrt{y} = 1 \Leftrightarrow 2x - 1 = 2\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}y}$$

Nota: Aí temos uma nova equação irracional, vamos elevar os dois lados da igualdade ao quadrado novamente.

$\Leftrightarrow (2x - 1)^2 = \left(2\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}y} \right)^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 4x^2 - y \Leftrightarrow y = 4x - 1$ A única alternativa que contém um número da forma $4x - 1$ é a alternativa C. veja que:

$$\text{Se } x = 0 \Rightarrow y = 4 \cdot 0 - 1 = -1$$

$$\text{Se } x = 2 \Rightarrow y = 4 \cdot 2 - 1 = \boxed{7}$$

$$\text{Se } x = 1 \Rightarrow y = 4 \cdot 1 - 1 = 3$$

$$\text{Se } x = 0 \Rightarrow y = 4 \cdot 3 - 1 = 11$$

Conclusão:

Para calcular as raízes de qualquer equação irracional basta primeiro calcular o domínio em seguida resolver a equação seguindo os passos do respectivo caso e verificar a solução obtida se pertence ao domínio.

17 EQUAÇÃO EXPONENCIAL

Chama-se expressões exponenciais aquelas em que a variável figura no esponte

$$a^x = b, \forall x \in R, a > 0$$

Para resolver uma equação exponencial temos de igual sempre as bases e cortar, para trabalharmos com os expoentes.

As Regras das expressões exponenciais seguem as mesmas regras da potenciação que vimos anteriormente neste livro. Vamos rever alguns.

$a^{x+y} = a^x \times a^y$	$(a \times b)^x = a^x \times b^x$	$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$	$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
$(a^x)^y = a^{xy}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$\bullet a^{-x} = \frac{1}{a^x}$	$\bullet a^0 = 1$

Exemplo 1:	Exemplo 2:
$4^{2+x} = 2^{4x+2}$ $(2^2)^{2+x} = 2^{4x+2}$ $2^{4+2x} = 2^{4x+2}$ Como já temos bases igual, agora trabalhamos apenas com os expoentes $4 + 2x = 4x + 2$ $2x - 4x = 2 - 4$ $-2x = -2$ $x = 1$ Sol {1}	$\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^{6x-10}} = \left(\frac{9}{16}\right)^{x-1}$ $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{6x-10}{2}} = \left[\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]^{x-1}$ $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{6x-10}{2}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{2x-2}$ $\frac{6x-10}{2} = 2x-2$ $6x-10 = 4x-4$ $6x-4x = -4+10$ $2x = 6$ $x = 3$

17.1 Inequações Exponenciais

Inequações que envolvem termos em que a incógnita aparece no expoente são chamadas de inequações exponenciais

Para resolver uma inequação exponencial procedemos do mesmo modo como na equação exponencial, porém, devemos sempre observar os seguintes aspetos:

- **Base maior que 1:** mantemos o mesmo sinal de desigualdade

$$b^{ax} \leq b^{cx}, \text{ se } b > 1 \text{ temos: } ax \leq cx$$

- **Base entre 0 e 1:** mudamos para o contrário o sinal de desigualdade

$$b^{ax} \leq b^{cx}, \text{ se } 0 < b < 1 \text{ temos: } ax \geq cx$$

Exemplo 1: $2^{x+2} < 16$ $2^{x+2} < 2^4$ Aqui cortamos as bases e o sinal não altera $x + 2 < 4$ $x < 4 - 2$ $x < 2$ $x \in]-\infty; 2[$	Exemplo 2: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} \leq \frac{1}{16}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^4$ Aqui cortamos as bases e o sinal deve alterar de $\leq$ para $\geq$, pois $\frac{1}{2}$ está entre 0 e 1 $x + 2 \geq 4$ $x \geq 4 - 2$ $x \geq 2$ $x \in [2; +\infty[$
---	---

18 LOGARITMOS

Definição:

Sendo a e b números reais positivos, chama-se logaritmo de b na base a , o expoente em que a deve ser elevado de modo que a potência obtida de base a seja igual a b isto é

$$\log_a b = x \Rightarrow a^x = b \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ a > 0 \wedge a \neq 1 \end{cases}$$

Exemplos:

- $\log_2 16 = 4$ porque $2^4 = 16$
- $\log_3 27 = 3$ porque $3^3 = 27$
- $\log_9 81 = 2$ porque $9^2 = 81$

Cologaritmo

O inverso de um número é igual ao oposto do logaritmo dessa mesma base chama-se cologaritmo

$$\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b = \text{colog}_a b$$

Exemplo: $\log_3 \left(\frac{1}{9}\right) = -\log_3 9 = -2$

Antilogaritmo

E o número que corresponde a um logaritmo é o inverso do cálculo de um logaritmo de um número

$$\log_a b = x \Rightarrow \text{antilog}_a x = b$$

Logaritmo natural

O logaritmo natural de um número a , $a > 0$ é o logaritmo desse número a , na base e . Representamos o logaritmo natural por $\ln$. Assim:

$$\ln b = \log_e b$$

18.1 Propriedades de logaritmos

$$\log_a 1 = 0; \quad \log_a a = 1; \quad a^{\log_a b} = b \quad \log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \log_a b = \frac{\log_a b}{n}$$

$$\log_a (b \times c) = \log_a b + \log_a c \quad \log_a (b \div c) = \log_a b - \log_a c \quad \log_a b = \log_a c \Rightarrow b = c$$

$$\log_a b^n = n \log_a b \quad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \cdot \log_a b = \frac{\log_a b}{n} \quad \log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a} \quad \log_a b \cdot \log_b a = 1$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01) Sendo x e y números reais tais que $\frac{4^x}{2^{x+y}} = 8$ e $\frac{9^{x+y}}{3^{5y}} = 243$ então $x \cdot y$ é igual

a:

a) -4

b) $\frac{12}{5}$

c) 4

d) 6

e) 12

Resolução

$$\frac{4^x}{2^{x+y}} = 8 \text{ e } \frac{9^{x+y}}{3^{5y}} = 243$$

$$\Rightarrow \frac{2^{2x}}{2^{x+y}} = 2^3 \Rightarrow 2^{2x-(x+y)} = 2^3 \Rightarrow 2x - (x+y) = 3 \Rightarrow 2x - x - y = 3 \Rightarrow x - y = 3$$

$$\frac{9^{x+y}}{3^{5y}} = 243 \Rightarrow \frac{(3^2)^{x+y}}{3^{5y}} = 3^5 \Rightarrow 3^{2x+2y-5y} = 3^5 \Rightarrow 2x+2y-5y = 5 \Rightarrow 2x-3y = 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + y \\ 2(3 + y) - 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{-----} \\ 6 + 2y - 3y = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{-----} \\ 6 - y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{-----} \\ -y = 5 - 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{-----} \\ -y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + 1 \Rightarrow x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \text{ .logo : } x \cdot y = 4 \cdot 1 = 4$$

02) O número real x que satisfaz a sentença $3^{x+1} = \frac{9^x}{81}$

a) Negativo.
Irracional.

b) Par

c) Primo

d) não inteiro

e)

Resolução

$$3^{x+1} = \frac{9^x}{81} \Rightarrow 3^{x+1} = \frac{3^{2x}}{3^4} \Rightarrow 3^{x+1} = 3^{2x-4} \Rightarrow x+1 = 2x-4 \Rightarrow x-2x = -4 \Rightarrow -x = -4 \Rightarrow x = 4 \text{ sol: b) Par}$$

03) Se $2^x = 4^{y+1}$ e $27^y = 3^{x-9}$ então $x - y$ é:

a) 5

b) 4

c) 2

d) -3

e) -1

07)

Resolução

$$\begin{cases} 2^x = 4^{y+1} \\ 27^y = 3^{x-9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x = 2^{2y+2} \\ 3^{3y} = 3^{x-9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y + 2 \\ 3y = x - 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{-----} \\ 3y - x + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{-----} \\ 3y - (2y + 2) + 9 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \text{-----} \\ 3y - 2y - 2 + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{-----} \\ y - 2 + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \cdot (-7) + 2 \Rightarrow x = -12 \\ y = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = -12 + 7 = -5 \end{cases}$$

04) $2^{x^2+12} \cdot 5^{x^2+12} \geq 0,0001 \cdot (10^{2-x})^5$

a) $]-\infty, -3]$

b) $[-2 + \infty[$

c) $[-3, -2]$

d) $\emptyset$

e) $]-\infty, -3] \cup [-2, +\infty[$

Resolução

$$2^{x^2+12} \cdot 5^{x^2+12} \geq 0,0001 \cdot (10^{2-x})^5 \Rightarrow 10^{x^2+12} \geq 10^{-4} \cdot 10^{10-5x} \Rightarrow 10^{x^2+12} \geq 10^{10-5x-4}$$
$$\Rightarrow x^2 + 12 \geq 10 - 5x - 4 \Rightarrow x^2 + 12 - 6 - 5x \geq 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 \geq 0 \Rightarrow (x-2)(x-3) \geq 0$$

A função é positiva no intervalo $]-\infty, -3] \cup [-2, +\infty[$

5) O número $\frac{\log_2 3}{\log_4 27}$ é igual

a) $\frac{1}{9}$

b) $\frac{1}{12}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{2}{9}$

e) $\frac{1}{4}$

Resolução

$$\frac{\log_2 3}{\log_4 27} = \frac{\log_2 3}{\log_{2^2} 3^3} = \frac{\log_2 3}{\frac{3}{2} \log_2 3} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \log_{2^2} 3^3 \rightarrow \text{lembrando que: } \log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_a b$$

Exercícios propostos

01) O conjunto solução da inequação $(0,04)^{\frac{x^2-2x}{2}} > 0,008$

- a)** $S = \{x \in R \mid x < 3\}$ **b)** $S = \{x \in R \mid x > -1 \text{ ou } x < 3\}$ **c)** $S = \{x \in R \mid x > 1 \text{ ou } x < 3\}$
d) $S = \{x \in R \mid x > -1 \text{ e } x < 3\}$ **e)** $S = \{x \in R \mid -1 < x < 3\}$

1. Se $\log_2 b - \log_2 a = 5$, o quociente $\frac{b}{a}$ vale

- a)** 10 **b)** 25 **c)** 32 **d)** 64 **e)** 125 **Opção correcta: d)**

2. Se $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, escrevendo $\log\left(\frac{32}{27}\right)$ em função de a e b obtemos:

- a)** $2a + b$ **b)** $2a - b$ **c)** $2ab$ **d)** $2a \cdot b$ **e)** $5a - 3b$ **Opção correcta: e)**

3. Se $\log E = 2\log a + 3\log b - \log c - \log d$, então E é igual a

- a)** $a^2 + b^2 - c - d$ **b)** $a^2 b^3 - cd$ **c)** $\frac{a^2 b^3}{cd}$ **d)** $\frac{a^2 b^3 d}{c}$ **e)** $a^2 b^3 cd$ **Opção correcta: c)**

4. Se $\log_{20} 4 = A$ e $\log_{20} 6 = B$ então o valor de $\log_{20} 5$ é:

- a)** $\sqrt{A \cdot B}$ **b)** $\frac{A+B}{2}$ **c)** $\frac{A \cdot B}{2}$ **d)** $1 - A$ **e)** $1 - B$ **Opção correcta: d)**

5. O valor da expressão $\frac{\log_3 1 + \log_3 0,01}{\log_2 \left(\frac{1}{64}\right) \cdot \log_4 \sqrt{8}}$ é igual a:

a) $\frac{4}{15}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{4}{9}$ d) $\frac{3}{5}$ e) $\frac{2}{3}$ **Opção correcta: c)**

6. O valor da expressão $3^{(\log_3 5) \cdot (\log_5 3)}$ é:

a) -1 b) 0 c) 3 d) 5 e) 8 **Opção correcta: e)**

7. O número real a é o menor dentre os valores de x que satisfazem a equação

$2 \cdot \log_2 (1 + \sqrt{2x}) = 3$ Então, $\log_2 \left(\frac{2a+4}{3} \right)$ é igual a:

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) $\frac{3}{2}$ e) 2 **Opção correcta: b)**

8. O produto $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \dots \cdot \log_{62} 63 \cdot \log_{63} 64$ é igual a:

a) $\log_3 64$ b) $\log_2 63$ c) 2 d) 4 e) 6

9). Se x é um número real, $x > 2$ e $\log_2 (x-2) - \log_4 x = 1$, então o valor de x é:

a) $4 - 2\sqrt{3}$ b) $4 - \sqrt{3}$ c) $2 + 2\sqrt{3}$ d) $4 + 2\sqrt{3}$ e) $2 + 4\sqrt{3}$ **Opção correcta: d)**

10). Se m e n são números inteiros tais que $\log_3 m - \log_3 n = 4$ e $800 \leq m \leq 890$, então o valor de n é:

a) 10 b) 8 c) 6 d) 4 e) 2 **Opção correcta: a)**

12. Tendo em vista as aproximações $\log_{10} 2 \leq 0.30$ e $\log_{10} 3 \geq 0.48$, então o maior número inteiro n satisfazendo $10^n \leq 12^{418}$ é igual a:

a) 424 b) 437 c) 443 d) 451 e) 460 **Opção correcta: d)**

13. Resolva o sistema
$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 4 \\ x \cdot y = 8 \end{cases}$$

Correcção: $x = 32$, $y = \frac{1}{4}$

14. O valor de x que satisfaz a equação $2\log x + \log b - \log 3 = \log\left(\frac{9b}{x^4}\right)$ pertence ao intervalo:

- a) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ b) $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ c) $[1, 2]$ d) $[2, 3]$ e) $[3, 4]$ **Opção correcta: c)**

15. O valor da expressão $\frac{-(-3)^2 - \sqrt[3]{-125}}{(-3 + 5^2)^0 - \log_3 27}$ é:

- a) 1 b) -2 c) -4 d) 2 e) 4 **Opção correcta: d)**

16. Se x e y são números reais positivos tais que $y = 16^{\log_2 x}$, então x é igual a:

- a) $4y$ b) $2y$ c) $\sqrt[4]{y}$ d) $\frac{\sqrt[4]{y}}{2}$ e) $\sqrt{y}$ **Opção correcta: c)**

7. Considere $p = \log_3 2$, $q = \log_{\sqrt{3}} 4$ e $r = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2}$. É correcto afirmar que:

- a) $p < q < r$ b) $r < q < p$ c) $q < r < p$ d) $p < r < q$. **Opção correcta: e)**

18. Para valores reais de x , $3^x < 2^x$ se e só se:

- a) $x < 0$ b) $0 < x < 1$ c) $x < 1$ d) $x < -1$ e) $2 < x < 3$ **Opção correcta: a)**

19. Sabe-se que $\log_m 10 = 1,6610$ e que $\log_m 160 = 3,6610$, $m \neq 1$. Assim, o valor correcto de m corresponde a:

- a) 4 b) 2 c) 3 d) 9 e) 5 **Opção correcta: a)**

20. São dados os números reais positivos a , b e x tais que $a \neq 1$ e $b \neq 1$. Sabe-se que $\log_a x = 2$ e $\log_b x = 4$. Calcule $\log_{ab} a\sqrt{x}$.

Resultado final $\log_{ab} a\sqrt{x} = \frac{4}{3}$

21 Se $f(x) = \log x$, então $f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x)$ é igual a:

a) 10 b) $f(x^2)$ c) $-f(x)$ d) 1 e) 0 **Opção correcta:**

e) 22. A solução real para a equação $a^{x+1} = \frac{b}{a}$, com $a > 0$, $a \neq 1$ e $b > 0$, é dada por:

a) $\log_a(b)$ b) $\log_a(b+1)$ c) $\log_a(b)+1$ d) $\log_a(b)+2$ e) $\log_a(b)-2$

Opção correcta: e)

23. Sendo $V = \{x \in \mathbb{R} / 81^x \log x^3 - 3^x \log x^9 = 0\}$, tem-se:

a) $V \in \left\{\frac{1}{2}, 1, 3, 4\right\}$ b) $V \in \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 4\right\}$ c) $V \in \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2, 5\right\}$ d) $V \in \left\{\frac{1}{3}, 2, 3, 5\right\}$

Opção correcta: b)

24. A intensidade de um terremoto na escala Richter é definida por $I =$

$\frac{2}{3} \log_{10} \left(\frac{E}{E_0} \right)$, em que E é a energia liberada pelo terremoto, em quilowatt-hora (kwh), e $E_0 = 10^{-3}$ kwh.

A cada aumento de uma unidade no valor de I , o valor de E fica multiplicado por:

a) 10 b) $\frac{20}{3}$ c) $10^{\frac{3}{2}}$ d) $10^{\frac{1}{2}}$ **Opção correcta: d)**

25. Se o par (x_1, y_1) é solução do sistema de equações $\begin{cases} 2^x - 16 \cdot \log y = 0 \\ 3 \cdot 2^x - 10 \cdot \log y = 19 \end{cases}$ então

$\frac{x_1}{y_1}$ é igual a:

a) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ b) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ c) $3\sqrt{10}$ d) $5\sqrt{3}$ e) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

Opção correcta: a)

19 INEQUAÇÕES

19.1 Inequação Produto

Inequação-produto é toda inequação na qual há um produto de termos. Note que o produto deve ser comparado à zero, para que seja possível avaliar os sinais dos fatores. Uma das formas de avaliar o sinal é o uso da tabela de sinais ou o gráfico

$$f(x) \cdot g(x) > 0$$

Pela tabela:

$$(x - 2)(x + 3) > 0$$

Temos que achar os valores que anulam cada parte:

- $x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$
- $x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$

Vamos na tabela avaliar os sinais

	$] -\infty; -3[$	-3	$] -3; 2[$	2	$] 2; +\infty[$
$x - 2$	$-$		$-$	0	$+$
$x + 3$	$-$	0	$+$		$+$
$(x - 2)(x + 3)$	$+$		$-$		$+$

Solução: como o sinal é $>$ a solução é retirada onde temos sinal positivo (+)

Solução: $x \in] -\infty; -3[\cup] 2; +\infty[$

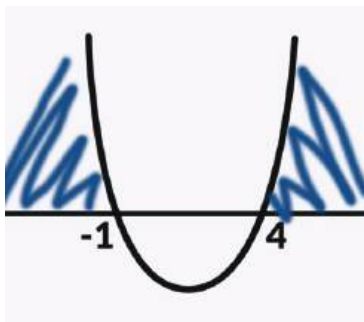
Pelo gráfico:

$$(2x + 2)(x - 4) > 0$$

Temos que achar os valores que anulam cada parte:

- $2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1$
- $x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$

Vamos desenhar o gráfico e vamos achar a parte onde o gráfico se encontra acima do eixo das abscissas já que o sinal é $>$



Neste gráfico a parte pintada a azul é a parte do gráfico positiva que corresponde a parte maior que zero.

$$x \in]-\infty; -1[\cup]4; +\infty[$$

19.2 Inequações Quociente

Inequação-quociente é toda inequação na qual há um quociente de termos. Note que o quociente deve ser comparado à zero, para que seja possível avaliar os sinais dos fatores. Por ser quociente, os termos do denominador não podem assumir o

valor de zero. A inequação é da forma: $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ · Onde: $f(x)$ e $g(x)$ são polinômios

Observando a tabela ao lado podemos concluir que:

Toda inequação do “tipo quociente” pode ser transformada numa inequação equivalente do “tipo produto”

- Lembrando que a “regra de sinais” **para a multiplicação e para a divisão é a mesma**

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) > 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) \geq 0 \text{ e } g(x) \neq 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) > 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) \leq 0 \text{ e } g(x) \neq 0$$

(UEM 2013) O conjunto das soluções da desigualdade $\frac{x^{49}(2-x)^{51}}{(x^2-3x+2)^{100}} \geq 0$ é:

- a) $[0; 1[\cup]1; 2[\cup]2; +\infty[$ b) $[0; 2[\cup]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[$ d) $[0; 1[\cup]1; 2[$ e) $\emptyset$

Resolução:

Na desigualdade o segundo membro já é nulo, e o primeiro é uma fracção única. Agora vamos factorizar e achar os zeros do denominador e numerador.

$$\frac{x^{49}(2-x)^{51}}{(x^2-3x+2)^{100}} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^{49}(2-x)^{51}}{[(x-1)(x-2)]^{100}} \geq 0 \text{ resolvendo temos: } \Rightarrow \begin{cases} x^{49} = 0, \\ (2-x)^{51} = 0 \Rightarrow x = 2, \\ x-1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ x-2 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

Depois elaboramos a tabela de sinais.

x	$] -\infty; 0[$	0	$] 0; 1[$	1	$] 1; 2[$	2	$] 2; +\infty[$
x^{49}	-	0	+	1	+	2^{49}	+
$(2-x)^{51}$	+	2^{51}	+	1	+	0	-
$(x-1)^{100}$	+	1	+	0	+	1	+
$(x-2)^{100}$	+	2^{100}	+	1	+	0	+
$\frac{x^{49}(2-x)^{51}}{(x^2-3x+2)^2}$	-	0	+	ND	+	ND	-

(UEM 2013) A inequação $\frac{x-1}{(2x+4)(3-x)} \geq 0$ tem solução:

- a) $\{x \in \mathbb{R} : x < -2 \vee 1 < x < 3\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} : x > 3 \vee -2 \leq x < 1\}$ c) $\{x \in \mathbb{R} : x \leq -2 \vee 1 < x < 3\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} : x < -2 \vee 1 < x \leq 3\}$ e) $\{x \in \mathbb{R} : x < -2 \vee 1 \leq x < 3\}$

Resolução

Como sempre, para resolver uma inequação devemos garantir que o segundo membro seja zero. Como a inequação nos é dada uma inequação nula no segundo membro, vamos para o passo seguinte, determinar os zeros do denominador e numerador.

Assim,

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ g(x) = 2x + 4 \Rightarrow 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ h(x) = 3 - x \Rightarrow 3 - x = 0 \Rightarrow -x = -3 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

Em seguida elabora-se a tabela de variação de sinais de modo a encontrar a solução da inequação.

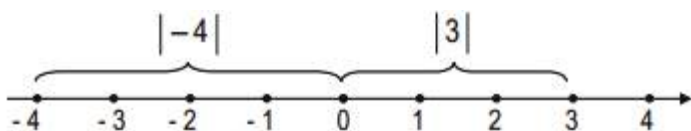
x	$] -\infty; -2[$	-2	$] -2; 1[$	1	$] 1; 3[$	3	$] 3; +\infty[$
$x - 1$	-	-3	-	0	+	2	+
$2x + 4$	-	0	+	6	+	10	+
$3 - x$	+	5	+	2	+	0	-
$\frac{x-1}{(2x+4)(3-x)}$	+	ND	-	0	+	ND	-

Entretanto, $x \in] -\infty; -2[\cup] 1; 3[$

20 MÓDULO DE UM NÚMERO REAL

Dado um número real qualquer, o módulo desse número é uma operação que o torna positivo (excepto o zero).

Geometricamente



O módulo possui um significado geométrico que é a distância desse número até o zero na recta real

De maneira geral temos

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Aplicado directamente temos:

$$|-3| = \begin{cases} -3 & \text{se } -3 \geq 0 \\ -(-3) & \text{se } -3 < 0 \end{cases}$$

BS: Note que a sentença acima indica que o módulo de um número qualquer será igual ao próprio número, se este número não for negativo e será igual ao seu simétrico, se o número for negativo.

Analisando essas condições a única que faz sentido é $-3 < 0$ logo $|-3| = -(-3) = 3$

$ -4 = 4$	$ -e = e$	$ 37 = 37$
$ +7 = 7$	$ -122 = 122$	$ -ln2 = ln2$

Propriedades de módulos

1	$\sqrt{x} = x $	4	$\left \frac{x}{y}\right = \frac{ x }{ y }$
2	$ x ^2 = x^2 = x^2$	5	$ x \cdot y = x \cdot y $

3	$ x + y \leq x + y $ $ x - y \geq x - y $	6	$ x \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ $ x \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \text{ ou } x \geq a$
---	--	---	--

Para calcular analiticamente o módulo $|x - y|$, podemos fazer:

$$|x - y| = x - y \text{ ou } |x - y| = y - x$$

tendo em atenção que o módulo de um número real é sempre um valor não negativo.

Exemplos

1. $|-5 + 4| = -4 - (-5) = -4 + 5 = 1$
2. $|3 - 5| = 5 - 3 = 2$
3. $|8 - 4| = 8 - 4 = 4$

NB: É sempre importante verificar se o valor que esta dentro do modulo é positivo ou negativo, caso seja negativo devemos multiplicar toda expressão pelo sinal negativo. No sentido de tornar o valor positivo. Porque o modulo de um número deve ser sempre positivo ou nulo.

Exemplos

1. $|1 + \sqrt{2}| = 1 + \sqrt{2} \rightarrow$ porque $1 + \sqrt{2}$ é um número positivo
2. $|1 - \sqrt{5}| = -1 + \sqrt{5} \rightarrow$ porque $1 - \sqrt{2}$ é um número negativo
3. $|\sqrt{2} - 2| = -\sqrt{2} + 2 \rightarrow$ porque $\sqrt{2} - 2$ é um número negativo

Exemplo: (UEM) O valor de $A = |1 - \sqrt{2}|$ é:

a) $A = 1 - \sqrt{2}$ b) $A = 1 + \sqrt{2}$ c) $A = \sqrt{2} - 1$ d) $\sqrt{2}$ e) Nenhuma das alternativas

Resolução

$$A = |1 - \sqrt{2}|$$

Por definição de módulos temos:

$$A = |1 - \sqrt{2}| = \begin{cases} 1 - \sqrt{2}, & \text{se } 1 - \sqrt{2} > 0 \\ -(1 - \sqrt{2}), & \text{se } 1 - \sqrt{2} < 0 \end{cases}$$

Veja que se $1 - \sqrt{2} < 0 \Rightarrow A = -(1 - \sqrt{2})$

então podemos concluir que $A = -1 + \sqrt{2}$

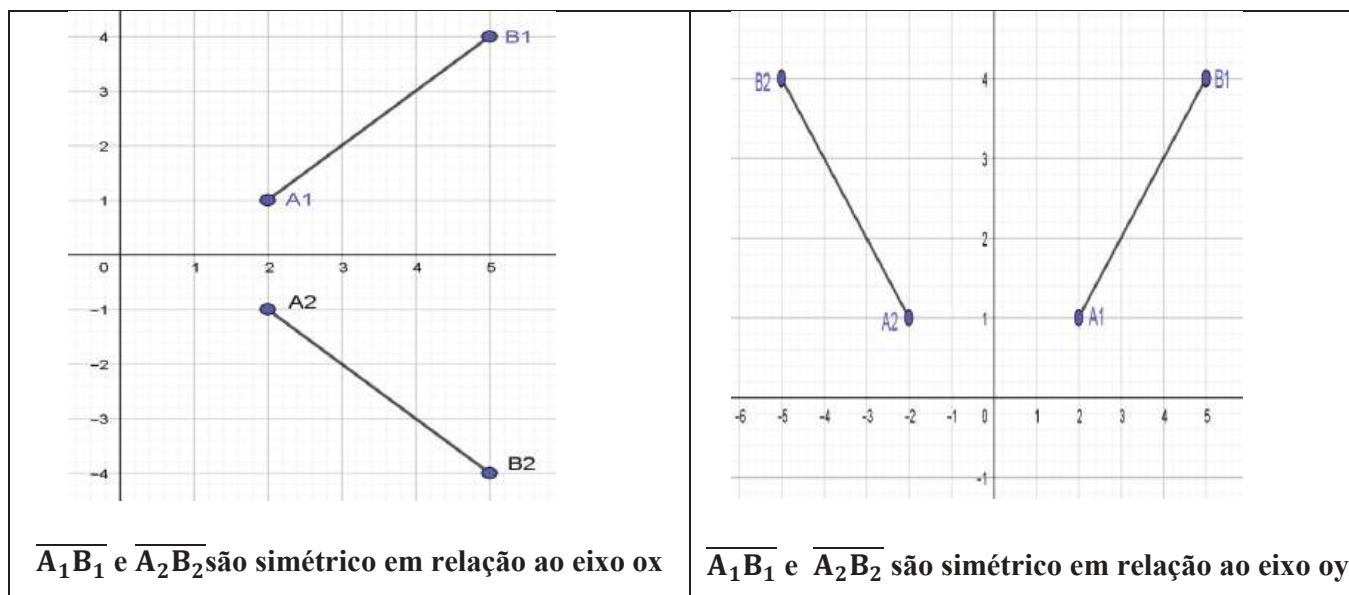
Vamos continuar o nosso estudo com o manual de Manuel Mambuque Zimundo, licenciado em Ensino de Matemática com habilitações em Ensino de Física. Ele nos apresenta uma abordagem valiosa que merece ser considerada e aplicada em nosso aprendizado.

1.5. FUNÇÃO MÓDULO

Definição: Uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de função módulo ou modular quando a cada elemento x associa o elemento $|x|$, isto é, $f(x) = |x|$. De acordo com a definição do módulo de número real pode-se escrever $f(x) = \begin{cases} x; & \text{se } x \geq 0 \\ -x; & \text{se } x < 0 \end{cases}$. A função modular é uma função definida por sentença ou por troços ou por ramos ou por partições.

Nos itens a seguir vamos representar graficamente uma função modular apresentando passos de esboço e pela leitura do gráfico apresentar o estudo nos seguintes pontos: **Domínio, Contradomínio, Zeros, Variação da monotonia e Variação do sinal**. Para construir o gráfico da função modular requer conhecer dois métodos: **Pela definição e pela Simetria**. Porém neste manual vai apresentar a construção dos gráficos modulares pela simetria.

Para construir o gráfico da função pela simetria, veja a figura a seguir, onde os segmentos $\overline{A_1B_1}$ e $\overline{A_2B_2}$ são simétricos em relação aos eixos das abscissas (ox) e ordenadas (oy).

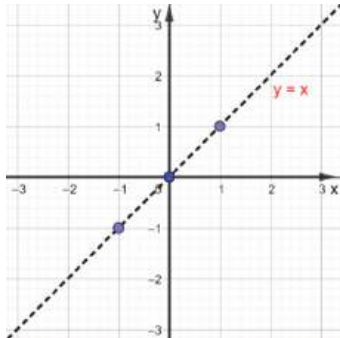


1.5.1. FUNÇÃO MÓDULO DO TIPO: $y = |f(x)|$

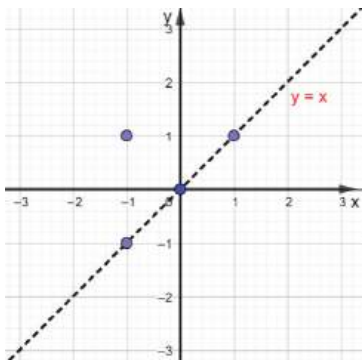
Exemplo 1: $f(x) = |x|$

1º Passo: Traçar o gráfico da função $y = x$;

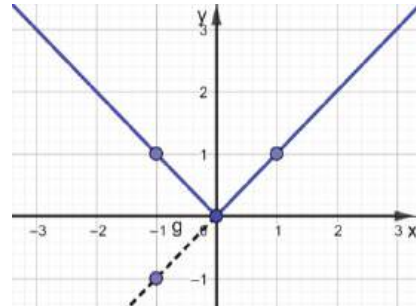
x	-1	0	1
y	1	0	1



2º Passo: Achar uma simetria em relação ao eixo dos ox para os pontos de ordenadas negativa, isto é: $(-1; -1) \rightarrow (-1; 1)$;



3º Passo: Constrói o gráfico de $f(x) = |x|$;



Estudo do gráfico da função $f(x) = |x|$

- Domínio(Df):** $x] -\infty, +\infty[$ ou $x \in \mathbb{R}$;
- Contradomínio(D'f):** $y [0, +\infty[$ ou $y \in \mathbb{R}_0^+$;
- Zeros da função ($y = 0$):** $x = 0$;
- Ordenada na origem($x = 0$):** $y = 0$;
- Variação da monotonia:**

x	$] -\infty; 0[$	$] 0; +\infty[$
f(x)	$\searrow$	$\nearrow$

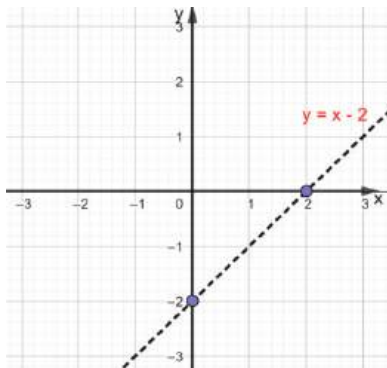
6. Variação do sinal:

x	$] -\infty; 0[$	0	$] 0; +\infty[$
f(x)	+		+

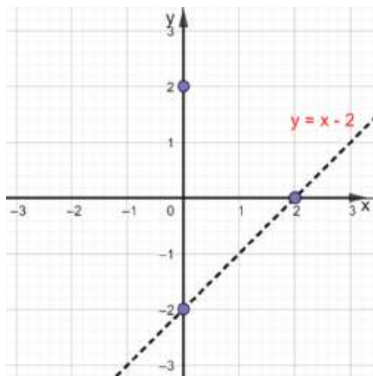
Exemplo 2: $f(x) = |x - 2|$

1º Passo: Traçar o gráfico da função $y = x - 2$;

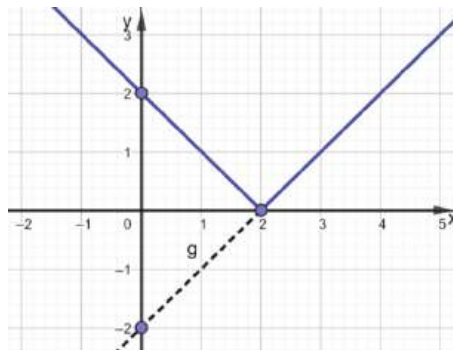
x	0	2
y	-2	0



2º Passo: Achar uma simetria em relação ao eixo dos ox para os pontos de ordenadas negativa, isto é: $(0; -2) \rightarrow (0; 2)$;



3º Passo: Constrói o gráfico de $f(x) = |x - 2|$



Estudo do gráfico da função $f(x) = |x - 2|$

- Domínio(Df):** $x] - \infty, +\infty[$ ou $x \in \mathbb{R}$;
- Contradomínio(D'f):** $y [0, +\infty[$ ou $y \in \mathbb{R}_0^+$;
- Zeros da função ($y = 0$):** $x = 2$;
- Ordenada na origem($x = 0$):** $y = 2$;
- Variação da monotonia:**

x	$] - \infty; 2[$	$] 2; +\infty[$
f(x)	$\searrow$	$\nearrow$

6. Variação do sinal:

x	$] - \infty; 2[$	2	$] 2; +\infty[$
f(x)	+		+

Exemplo 3: $f(x) = |x^2 - 2x|$

1º Passo: Traçar o gráfico da função $y = x^2 - 2x$;

(Para traçar gráfico da função quadrática é necessário conhecer: **Sentido da parábola, zeros da função se existirem, ordenada na origem coordenadas do vértice**)

(i) Sentido da parábola: Parábola virada para cima;

(ii) Zeros da função: $y = 0: x^2 - 2x = 0$

$$x(x - 2) = 0$$

$$x = 0 \vee x - 2 = 0$$

$$x_1 = 0 \vee x_2 = 2$$

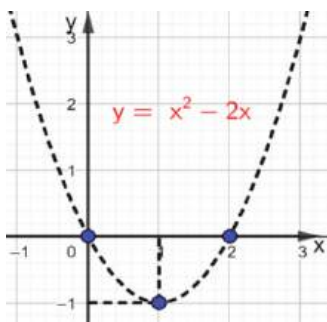
(iii) Ordenada na origem: $x = 0: y = 0^2 - 2 \cdot 0 = 0$;

(iv) Coordenadas do vértice $V(x_v, y_v)$:

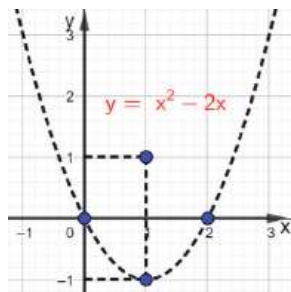
$$\bullet x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0 + 2}{2} = \frac{2}{2} = 1;$$

$$\bullet y_v = f(x_v) = f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1;$$

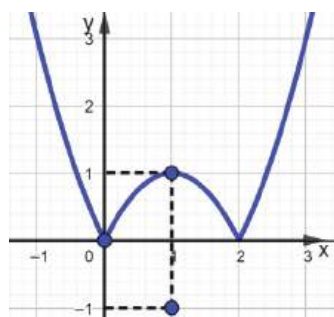
Logo temos, $V(x_v, y_v) = V(1, -1)$;



2º Passo: Achar uma simetria em relação ao eixo dos ox para os pontos de ordenadas negativa, isto é: $(1, -1) \rightarrow (1, 1)$;



3º Passo: Constrói o gráfico de $f(x) = |x^2 - 2x|$;



Estudo do gráfico da função $f(x) = |x^2 - 2x|$

1. **Domínio(Df):** $x] -\infty, +\infty[$ ou $x \in \mathbb{R}$;

2. **Contradomínio(D'f):** $y [0, +\infty[$ ou $y \in IR_0^+$;

3. **Zeros da função ($y = 0$):** $x = 0$ e $x = 2$;

4. **Ordenada na origem($x = 0$):** $y = 0$;

5. **Variação da monotonia:**

x	$] -\infty; 0[$	$] 0; 1[$	$] 1; 2[$	$] 2; +\infty[$
f(x)				

6. **Variação do sinal:**

x	$] -\infty; 0[$	0	$] 0; 2[$	2	$] 2; +\infty[$
f(x)	+		+		+

Exemplo 4: $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$

1º Passo: Traçar o gráfico da função: $y = x^2 - 2x - 3$;

(i) **Sentido da parábola:** Parábola virada para cima;

(ii) **Zeros da função:** $y = 0$: $x^2 - 2x - 3 = 0$

$$a = 1; b = -2; c = -3$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{2-4}{2} \vee x_2 = \frac{2+4}{2}$$

$$x_1 = -1 \vee x_2 = 3$$

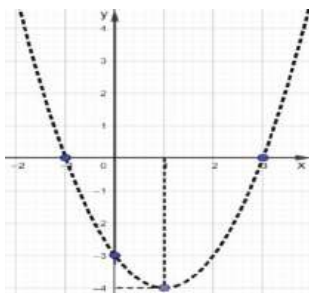
(iii) **Ordenada na origem:** $x = 0$: $y = 0^2 - 2 \cdot 0 - 3 = -3$;

(iv) **Coordenadas do vértice** $V(x_v, y_v)$:

$$\bullet x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1 + 3}{2} = \frac{2}{2} = 1;$$

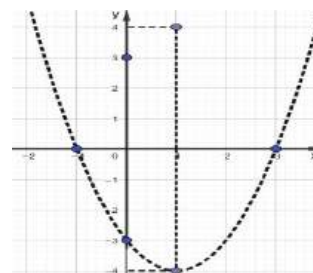
$$\bullet y_v = f(x_v) = f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4;$$

Logo temos, $V(x_v, y_v) = V(1, -4)$;

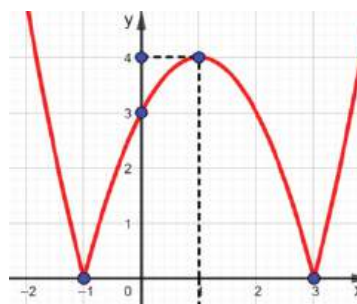


2º Passo: Achar uma simetria em relação ao eixo dos ox para os pontos de ordenadas negativa, isto é:

$(0; -3) \rightarrow (0; 3)$ e $(1; -4) \rightarrow (1; 4)$;



3º Passo: Constrói o gráfico de $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$;



Estudo do gráfico da função $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$

1. **Domínio(Df):** $x] -\infty, +\infty[$ ou $x \in \mathbb{R}$;

2. **Contradomínio(D'f):** $y [0, +\infty[$ ou $y \in \mathbb{R}_0^+$;

3. **Zeros da função ($y = 0$):** $x = -1$ e $x = 3$;

4. **Ordenada na origem($x = 0$):** $y = 3$;

5. Variação da monotonia:

x	$] -\infty; -1[$	$] -1; 1[$	$] 1; 3[$	$] 3; +\infty[$
f(x)				

6. Variação do sinal:

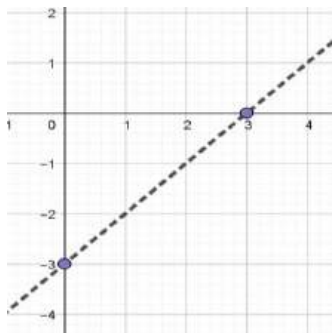
x	$] -\infty; -1[$	-1	$] -1; 3[$	3	$] 3; +\infty[$
f(x)	+		+		+

1.5.2. FUNÇÃO MÓDULO DO TIPO: $y = f(|x|)$

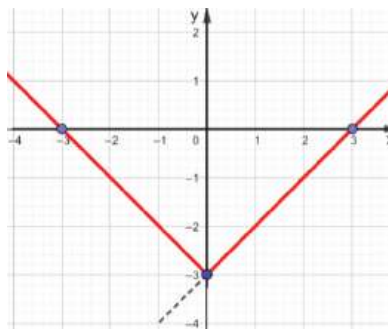
Exemplo 1: $f(x) = |x| - 3$

1º Passo: Traçar o gráfico da função $y = x - 3$;

x	0	3
y	-3	0



2º Passo: Constrói o gráfico de $f(x) = |x| - 3$, através de uma simetria em relação ao eixo das ordenadas (oy).



Estudo do gráfico da função $f(x) = |x| - 3$

- Domínio(Df):** $x] - \infty, +\infty[$ ou $x \in \mathbb{R}$;
- Contradomínio(D'f):** $y [-3, +\infty[$;
- Zeros da função ($y = 0$):** $x = -3$ e $x = 3$;
- Ordenada na origem ($x = 0$):** $y = -3$;
- Variação da monotonia:**

x	$] - \infty; 0[$	$] 0; +\infty[$
f(x)	$\searrow$	$\swarrow$

6. Variação do sinal:

x	$] - \infty; -3 [$	-3	$] -3; 3 [$	3	$] 3; +\infty [$
f(x)	+		-		+

Exemplo 2: $f(x) = -|x|^2 + 2|x|$

1º Passo: Traçar o gráfico da função $y = -x^2 + 2x$;

(i) Sentido da parábola: Parábola virada para baixo;

(ii) Zeros da função: $y = 0$: $-x^2 + 2x = 0$

$$-x(x + 2) = 0$$

$$-x = 0 \vee x + 2 = 0$$

$$x_1 = 0 \vee x_2 = -2$$

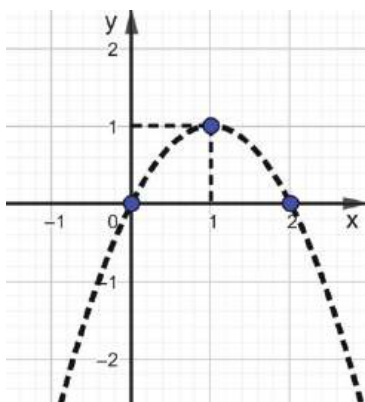
(iii) Ordenada na origem: $x = 0$: $y = -0^2 + 2 \cdot 0 = 0$;

(iv) Coordenadas do vértice V (x_v , y_v):

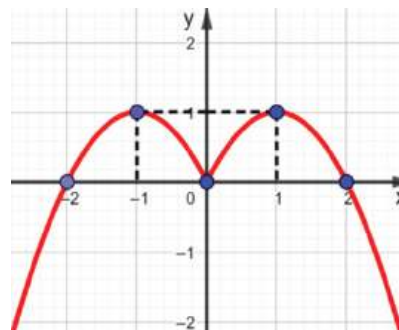
$$\bullet x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0 - 2}{2} = \frac{-2}{2} = -1;$$

$$\bullet y_v = f(x_v) = f(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot 1 = 1;$$

Logo temos, $V(x_v, y_v) = V(-1, 1)$;



2º Passo: Constrói o gráfico de $f(x) = -|x|^2 + 2|x|$, através de uma simetria em relação ao eixo das ordenadas(oy).



Estudo do gráfico da função $f(x) = -|x|^2 + 2|x|$

1. **Domínio(Df):** $x] -\infty, +\infty[$ ou $x \in \mathbb{R}$;

2. **Contradomínio(D'f):** $y] -\infty, 1]$;

3. **Zeros da função ($y = 0$):** $x = -2$ e $x = 2$;

4. **Ordenada na origem($x = 0$):** $y = 0$;

5. **Variação da monotonia:**

x	$] -\infty; -1[$	$] -1; 0[$	$] 0; 1[$	$] 1; +\infty[$
f(x)				

6. **Variação do sinal:**

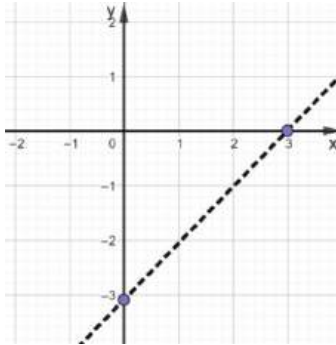
x	$] -\infty; -2 [$	-2	$] -2; 0[$	0	$] 0; 2[$	2	$] 2; +\infty [$
f(x)	+		+				+

1.5.3. FUNÇÃO MÓDULO DO TIPO: $y = |f(x)|$

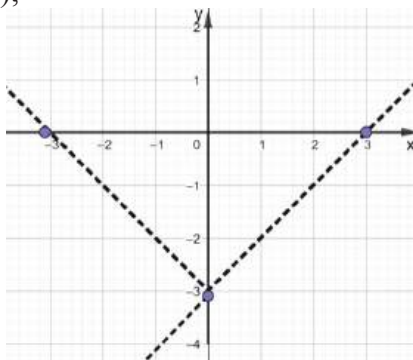
Exemplo: $f(x) = ||x| - 3|$

1º Passo: Traçar o gráfico da função $y = x - 3$;

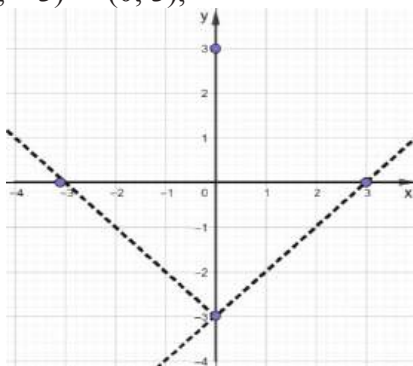
x	0	3
y	-3	0



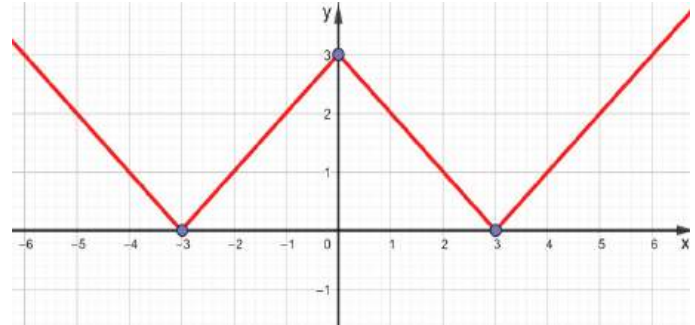
2º Passo: Constrói o gráfico de $f(x) = |x| - 3$, através de uma simetria em relação ao eixo das ordenadas (oy);



3º Passo: Constrói o gráfico de $f(x) = ||x| - 3|$, através de uma simetria em relação ao eixo das abscissas (ox) para os pontos de ordenadas negativas, isto é: $(0; -3) \rightarrow (0; 3)$;



4º Passo: Constrói o gráfico de $f(x) = ||x| - 3|$;



Estudo do gráfico da função $f(x) = ||x| - 3|$

1. **Domínio(Df):** $x] - \infty, +\infty[$ ou $x \in \mathbb{R}$;

2. **Contradomínio(D'f):** $y [0, +\infty[$ ou $y \in \mathbb{R}_0^+$;

3. **Zeros da função ($y = 0$):** $x = -3$ e $x = 3$;

4. **Ordenada na origem($x = 0$):** $y = 3$;

5. **Variação da monotonia:**

x	$] - \infty; -3[$	$] -3; 0[$	$] 0; 3[$	$] 3; +\infty[$
f(x)				

6. **Variação do sinal:**

x	$] - \infty; -3[$	-3	$] -3; 3[$	3	$] 3; +\infty[$
f(x)	+		+		+

NOTA SOBRE FUNÇÕES MODULARES:

- Para funções modulares do tipo $y = |f(x)|$, a função está dentro do módulo por essa razão a função é reflectida para parte positiva, através de uma simetria em relação ao eixo das abcissas (ox).
- Para funções modulares do tipo $y = f(|x|)$, só a variável x que está dentro do módulo, por essa razão a função é reflectida, através de uma simetria em relação ao eixo das ordenadas (oy).
- Para funções modulares do tipo $y = |f(|x|)|$, a função e a variável x , estão dentro do módulo, por essa razão a função sofreu duas simetrias simultaneamente, primeira a função é reflectida, através de uma simetria em relação ao eixo das ordenadas (oy) e a segunda a função é reflectida para parte positiva, através de uma simetria em relação ao eixo das abcissas (ox).

1.6. EQUAÇÕES MODULARES

Equações modulares são equações nas quais a variável encontra-se dentro do símbolo do módulo. A sua resolução pode ser feita utilizando definição do módulo, as propriedades do módulo e princípio de equivalência (Elevação de ambos membros da equação ao quadrado). As equações modulares podem ser, $|f(x)| = a$, $|f(x)| = g(x)$, $|f(x)| = |g(x)|$ e $a|x|^2 + b|x| + c = 0$.

1.6.1. EQUAÇÕES MODULARES DO TIPO: $|f(x)| = a$, onde $a \geq 0$ (O valor de a não deve se negativo, se assim for a equação não terá soluções)

Procedimento:	$ f(x) = a$ $f(x) = a \vee f(x) = -a$
----------------------	---

Exemplo1: $|x + 3| = 4$

Resolução

$$|x + 3| = 4$$

$$x + 3 = 4 \vee x + 3 = -4$$

$$x = 4 - 3 \vee x = -4 - 3$$

$$x = 1 \vee x = -7$$

Verificação

$$|x + 3| = 4$$

■ Para $x = 1$

$$|1 + 3| = 4$$

$$|4| = 4$$

$$4 = 4$$

(Verdade)

■ Para $x = -7$

$$|-7 + 3| = 4$$

$$|-4| = 4$$

$$4 = 4$$

(Verdade)

Sol: $\{-7; 1\}$

Exemplo 2: $|3x - 4| = 2$

Resolução

$$\begin{aligned} |3x - 4| &= 2 \\ 3x - 4 &= 2 \vee 3x - 4 = -2 \\ 3x &= 2 + 4 \vee 3x = -2 + 4 \\ 3x &= 6 \vee 3x = 2 \\ x &= \frac{6}{3} \vee x = \frac{2}{3} \\ x &= 2 \vee x = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Verificação

$$|3x - 4| = 2$$

■ Para $x = 1$

$$\begin{aligned} |3x - 4| &= 2 \\ (\text{Verdade}) \end{aligned}$$

■ Para $x = -\frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} |3x - 4| &= 2 \\ (\text{Verdade}) \end{aligned}$$

Solução: $\{\frac{2}{3}; 2\}$

Exemplo3: $|3x - 4| = 2$

Resolução: Pelo Princípio de equivalência
(Elevação de ambos membros da equação ao quadrado)

$$\begin{aligned} |3x - 4| &= 2 \\ (3x - 4)^2 &= 2^2 \\ 9x^2 - 24x + 16 &= 4 \\ 9x^2 - 24x + 12 &= 0 \\ a &= 9; b = -24; c = 12 \\ x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-24) \pm \sqrt{(-24)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 12}}{2 \cdot 9} = \frac{24 \pm \sqrt{144}}{18} = \frac{24 \pm 12}{18} \\ x_1 &= \frac{24 + 12}{18} \vee x_2 = \frac{24 - 12}{18} \\ x_1 &= \frac{36}{18} \vee x_2 = \frac{12}{18} \\ x_1 &= 2 \vee x_2 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Solução: $\{\frac{2}{3}; 2\}$

Exemplo 4: $|x + 8| = -12$

Esta equação não existe pelo menos um número real que a satisfaz, mas ao resolver a equação caro leitor irás encontrar os números $x = -20$ e $x = 4$, De seguida faça verificação e claramente não satisfaz a igualdade, visto que, o módulo de um número real não é negativo.

1.6.2. EQUAÇÕES MODULARES DO TIPO: $|f(x)| = g(x)$, onde $g(x) \geq 0$

Procedimento:	$ f(x) = g(x)$ $f(x) = g(x) \vee f(x) = -g(x)$
----------------------	--

Exemplo 1: $|x + 5| = 2x - 1$

Condição de existência

$$2x - 1 \geq 0$$

$$2x \geq 1$$

$$x$$

$$\leq \frac{1}{2}$$

(Quer dizer que o valor de x deve ser superior ou igual á $\frac{1}{2}$)

Resolução

$$|x + 5| = 2x - 1$$

$$x + 5 = 2x - 1 \vee x + 5 = -(2x - 1)$$

$$x - 2x = -1 - 5 \vee x + 5 = -2x + 1$$

$$-x = -6 \vee x + 2x = 1 - 5$$

$$x = 6 \vee 3x = -4$$

$$x = 6 \vee x = -\frac{4}{3}$$

Verificação

$$|x + 5| = 2x - 1$$

■ Para $x = 6$

$$|6 + 5| = 2 \cdot 6 - 1$$

$$|11| = 11$$

$$11 = 11$$

(Verdade)

■ Para $x = -\frac{4}{3}$

$$|-\frac{4}{3} + 5| = 2 \cdot (-\frac{4}{3}) - 1$$

$$\frac{11}{3} = -\frac{11}{3}$$

(Falso)

Solução: $\{6\}$

Exemplo 2: $|3x - 2| = 3 - 2x$

Condição de existência

$$3 - 2x \geq 0$$

$$-2x \geq 3$$

$$-2x \geq 3 \cdot (-1)$$

$$2x \leq 3$$

$$x \leq \frac{3}{2}$$

Resolução

$$|3x - 2| = 3 - 2x$$

$$3x - 2 = 3 - 2x \vee 3x - 2 = -(3 - 2x)$$

$$3x + 2x = 3 + 2 \vee 3x - 2 = -3 + 2x$$

$$5x = 5 \vee 3x - 2x = -3 + 2$$

$$x = \frac{5}{5} \vee x = -1$$

$$x = 1 \vee x = -1$$

Verificação

■ Para $x = 1$

$$|3 \cdot 1 - 2| = 3 - 2 \cdot 1$$

$$|3 - 2| = 3 - 2$$

$$|1| = 1$$

$$1 = 1$$

(Verdade)

■ Para $x = -1$

$$|3 \cdot (-1) - 2| = 3 -$$

$$2 \cdot (-1)$$

$$|-3 - 2| = 3 + 2$$

$$|-5| = 5$$

$$5 = 5$$

(Verdade)

Solução: $\{-1; 1\}$

1.6.3. EQUAÇÕES MODULARES DO TIPO: $|f(x)| = |g(x)|$

Procedimento:	$ f(x) = g(x) $
	$f(x) = g(x) \vee f(x) = -g(x)$

Exemplo 1: $|3x - 5| = |x + 1|$

Resolução

$$|3x - 5| = |x + 1|$$

$$3x - 5 = x + 1 \vee 3x - 5 = -(x + 1)$$

$$3x - x = 1 + 5 \vee 3x - 5 = -x - 1$$

$$2x = 6 \vee 3x + x = -1 + 5$$

$$x = \frac{6}{2} \vee 4x = 4$$

$$x = 3 \vee x = \frac{4}{4}$$

$$x = 3 \vee x = 1$$

Verificação

■ Para $x = 3$

$$|3 \cdot 3 - 5| = |3 + 1|$$

$$|9 - 5| = |4|$$

$$|4| = |4|$$

$$4 = 4$$

(Verdade)

■ Para Se $x = 1$

$$|3 \cdot 1 - 5| = |1 + 1|$$

$$|3 - 5| = |2|$$

$$|-2| = 2$$

$$2 = 2$$

(Verdade)

Solução: $\{1; 3\}$

Exemplo 2: $|7 - 2x| = |5x + 19|$

Resolução

$$|7 - 2x| = |5x + 19|$$

$$7 - 2x = 5x + 19 \vee 7 - 2x = -(5x + 19)$$

$$-2x - 5x = 19 - 7 \vee 7 - 2x = -5x - 19$$

$$-7x = 12 \vee -2x + 5x = -19 - 7$$

$$x = -\frac{12}{7} \vee 3x = -26$$

$$x = -\frac{12}{7} \vee x = -\frac{26}{3}$$

Verificação

$$|7 - 2x| = |5x + 19|$$

■ Para $x = -\frac{12}{7}$

$$|7 - 2 \cdot (-\frac{12}{7})| = |5 \cdot (-\frac{12}{7}) + 19|$$

$$|7 + \frac{24}{7}| = |-\frac{60}{7} + 19|$$

$$(7) \quad (1) \quad (1) \quad (7)$$

$$|\frac{49 + 24}{7}| = |-\frac{60 + 133}{7}|$$

$$|\frac{73}{7}| = |-\frac{73}{7}|$$

$$\frac{73}{7} = \frac{73}{7}$$

(Verdade)

■ Para $x = -\frac{26}{3}$

$$|7 - 2 \cdot (-\frac{26}{3})| = |5 \cdot (-\frac{26}{3}) + 19|$$

$$|7 + \frac{52}{3}| = |-\frac{130}{3} + 19|$$

$$(3) \quad (1) \quad (1) \quad (3)$$

$$|\frac{21 + 52}{3}| = |-\frac{130 + 57}{3}|$$

$$|\frac{73}{3}| = |-\frac{73}{3}|$$

$$\frac{73}{3} = \frac{73}{3}$$

(Verdade)

Solução: $\{-\frac{26}{3}; -\frac{12}{7}\}$

1.7. INEQUAÇÕES MODULARES

Inequações modulares são inequações nas quais a variável encontra-se dentro do símbolo do módulo. A sua resolução pode ser feita utilizando definição do módulo, as propriedades do módulo e princípio de equivalência (Elevação de ambos membros da equação ao quadrado). Existem diferentes tipos de inequações modulares a saber: $|f(x)| < a$, $|f(x)| \leq a$, $|f(x)| > a$, $|f(x)| \geq a$, $|f(x)| < g(x)$, $|f(x)| \leq g(x)$, $|f(x)| > g(x)$, $|f(x)| \geq g(x)$, $|f(x)| < |g(x)|$, $|f(x)| \leq |g(x)|$, $|f(x)| > |g(x)|$, $|f(x)| \geq |g(x)|$, $a|x|^2 + b|x| + c < 0$, $a|x|^2 + b|x| + c \leq 0$, $a|x|^2 + b|x| + c > 0$ e $a|x|^2 + b|x| + c \geq 0$.

1.7.1. INEQUAÇÕES MODULARES DO TIPO:

1. $|f(x)| < a$ 2. $|f(x)| \leq a$ 3. $|f(x)| > a$ 4. $|f(x)| \geq a$

Procedimento:	1. $ f(x) < a \Leftrightarrow f(x) < a \wedge f(x) > -a$	Intersecção ($\cap$)
	2. $ f(x) \leq a \Leftrightarrow f(x) \leq a \wedge f(x) \geq -a$	
	3. $ f(x) > a \Leftrightarrow f(x) > a \vee f(x) < -a$	Reunião ($\cup$)
	4. $ f(x) \geq a \Leftrightarrow f(x) \geq a \vee f(x) \leq -a$	

Exemplo 1: $|2x + 3| \leq 4$

Resolução

$$|2x + 3| \leq 4$$

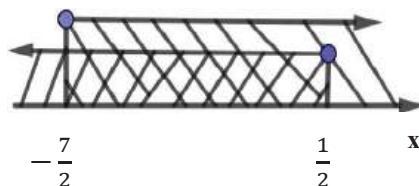
$$2x + 3 \leq 4 \wedge 2x + 3 \geq -4$$

$$2x \leq 4 - 3 \wedge 2x \geq -4 - 3$$

$$2x \leq 1 \wedge 2x \geq -7$$

$$x \leq \frac{1}{2} \wedge 2x \geq -7$$

$$x \leq \frac{1}{2} \wedge x \geq -\frac{7}{2}$$



Solução: $x \in [-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}]$

Exemplo 2: $|4 - 2x| > 6$

Resolução

$$|4 - 2x| > 6$$

$$4 - 2x > 6 \vee 4 - 2x < -6$$

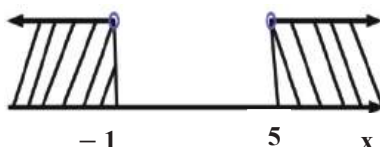
$$-2x > 6 - 4 \vee -2x < -6 - 4$$

$$-2x > 2 / \cdot(-1) \vee -2x < -10 / \cdot(-1)$$

$$2x < -2 \vee 2x > 10$$

$$x < -\frac{2}{2} \vee 2x > \frac{10}{2}$$

$$x < -1 \vee x > 5$$



Solução: $x \in]-\infty; -1[\cup]5; +\infty[$

Exemplo 3: $|6x - 5| < -2$

Para inequações do género não se resolvem necessária, porque é absurdo, visto que, não existem nenhum número real que satisfaz essa desigualdade, isto é, **Solução:** $x \in \emptyset$.

Exemplo 4: $|3x + 4| \geq -10$

Ao resolver esta inequação, irá encontrar intervalo muito estranho como solução, entretanto para qualquer número real a desigualdade é satisfeita, desse modo, a solução desta inequação é todo o conjunto dos números reais, isto é, **Solução:** $x \in \mathbb{R}$.

1.7.2. INEQUAÇÕES MODULARES DO TIPO:

1. $|f(x)| < g(x)$ 2. $|f(x)| \leq g(x)$ 3. $|f(x)| > g(x)$ 4. $|f(x)| \geq g(x)$, com $g(x) \geq 0$

Procedimento:	1. $ f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x) \wedge f(x) > -g(x)$	Intersecção ($\cap$)
	2. $ f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \wedge f(x) \geq -g(x)$	
	3. $ f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x) \vee f(x) < -g(x)$	Reunião ($\cup$)
	4. $ f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) \geq g(x) \vee f(x) \leq -g(x)$	

Exemplo 1: $|x + 2| < 2x + 1$

Condição de Existência

$$2x + 1 \geq 0$$

$$2x \geq -1$$

$$x \geq -\frac{1}{2}$$

Resolução

$$|x + 2| < 2x + 1$$

$$x + 2 < 2x + 1 \wedge x + 2 > -(2x + 1)$$

$$x - 2x < 1 - 2 \wedge x + 2 > -2x - 1$$

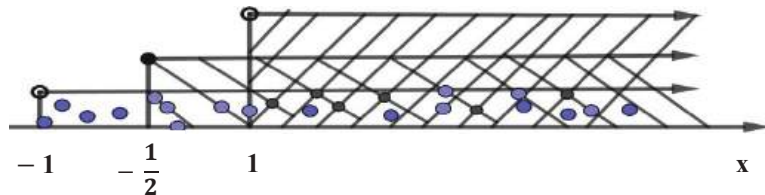
$$-x < -1 / \cdot(-1) \wedge x + 2x > -1 - 2$$

$$x > 1 \wedge 3x > -3$$

$$x > 1 \wedge x > -\frac{3}{3}$$

$$x > 1 \wedge x > -1$$

(vamos representar as três (3) condições e buscamos intersecção dos três (3), que é a solução dessa inequação)



Solução: $x \in]1, +\infty[$

Exemplo 2: $|3x - 4| \leq -2x - 1$

Condições de existência

$$-2x - 1 \geq 0$$

$$-2x \geq 1$$

$$-2x \geq 1 / \cdot(-1)$$

$$2x \leq -1$$

$$x \leq -\frac{1}{2}$$

Resolução

$$|3x - 4| \leq -2x - 1$$

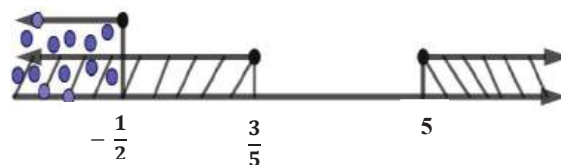
$$3x - 4 \leq -2x - 1 \wedge 3x - 4 \geq 2x + 1$$

$$3x + 2x \leq -1 + 4 \wedge 3x - 2x \geq 1 + 4$$

$$5x \leq 3 \wedge x \geq 5$$

$$x \leq \frac{3}{5} \wedge x \geq 5$$

(vamos representar as três (3) condições e buscamos intersecção dos três (3), que a solução)



Solução: $x \in \{ \}$

Exemplo 3: $|3x + 2| \geq x + 5$

Condições de existência

$$x + 5 \geq 0$$

$$x \geq -5$$

Resolução

$$|3x + 2| \geq x + 5$$

$$3x + 2 \geq x + 5 \vee 3x + 2 \leq -(x + 5)$$

$$3x - x \geq 5 - 2 \vee 3x + 2 \leq -x - 5$$

$$2x \geq 3 \vee 3x + x \leq -5 - 2$$

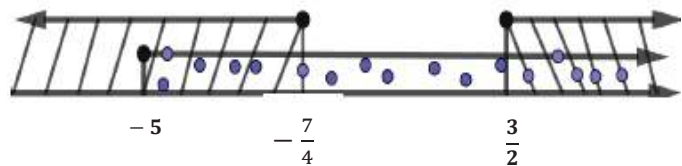
$$x \geq \frac{3}{2} \vee 4x \leq -7$$

$$x \geq \frac{3}{2}$$

$\wedge$

$$x \leq -\frac{7}{4}$$

(vamos representar as três (3) condições e buscamos intersecção dos três (3), que a solução)



$$\text{Solução: } x \in [-5, -\frac{7}{4}] \cup [\frac{3}{2}; +\infty[$$

1.7.3. INEQUAÇÕES MODULARES DO TIPO:

$$1. |f(x)| < |g(x)| \quad 2. |f(x)| \leq |g(x)| \quad 3. |f(x)| > |g(x)| \quad 4. |f(x)| \geq |g(x)|$$

Procedimento:	1. $ f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x) \wedge f(x) > -g(x)$	Intersecção ($\cap$)
	2. $ f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \wedge f(x) \geq -g(x)$	
	3. $ f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x) \vee f(x) < -g(x)$	Reunião ($\cup$)
	4. $ f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) \geq g(x) \vee f(x) \leq -g(x)$	

Exemplo 1: $|2x + 5| \leq |x + 1|$

Resolução

$$|2x + 5| \leq |x + 1|$$

$$2x + 5 \leq x + 1 \wedge 2x + 5 \geq -(x + 1)$$

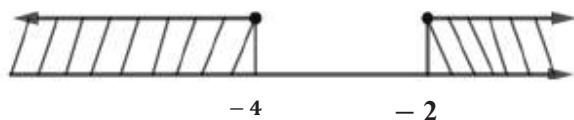
$$2x - x \leq 1 - 5 \wedge 2x + 5 \geq -x - 1$$

$$x \leq -4 \wedge 2x + x \geq -1 - 5$$

$$x \leq -4 \wedge 3x \geq -6$$

$$x \leq -4 \wedge x \geq -\frac{6}{3}$$

$$\boxed{x \leq -4} \quad \wedge \quad \boxed{x \geq -2}$$



Solução: $x \in \emptyset$

Exemplo 2: $|3x - 11| > |x - 7|$

Resolução

$$|3x - 11| > |x - 7|$$

$$3x - 11 > x - 7 \vee 3x - 11 < -(x - 7)$$

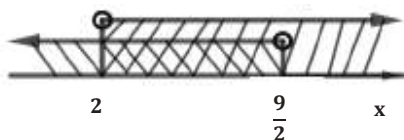
$$3x - x > -7 + 11 \vee 3x - 11 < -x + 7$$

$$2x > 4 \vee 3x + x < 7 + 11$$

$$x > \frac{4}{2} \vee 4x < 18$$

$$x > 2 \vee x < \frac{18}{4}$$

$$\boxed{x > 2} \quad \vee \quad \boxed{x < \frac{9}{2}}$$



Solução: $x \in]2, \frac{9}{2}[$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Escreva em forma de módulo, as seguintes expressões:

(a) $d(2x; 3) = 6$ (b) $d(x; -3) = 4$ (c) $d(5; -x) = 2$ (d) $3d(x; 9) = 12$

2. Traduz simbolicamente as seguintes afirmações:

- (a) Conjunto de valores de x que se encontram a 4 unidades de 2;
(b) Conjunto de valores de x que se encontram a 2 unidades de -4;
(c) A distancia entre os pontos de abscissa $-x$ e 4;
(d) A distancia entre os pontos da recta numérica cujas abcissas são x e -5.

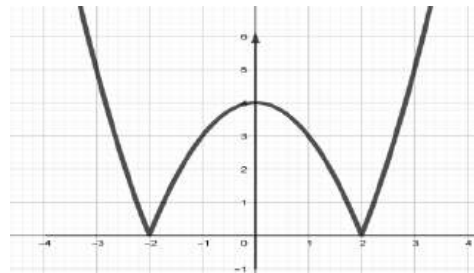
3. Sabendo que $\sqrt{x^2} = |x|$, a que é igual as expressões seguintes?

(a) $\sqrt{a^6b^2}$ (c) $\sqrt{x^4(x+3)^2}$ (e) $\sqrt{100a^4c^2}$
(b) $\sqrt{x^2(x-2)^4}$ (d) $\sqrt{p^2q^8r^{12}}$ (f) $\sqrt{16p^6q^4q^2}$

4. Constrói e faça o estudo do gráfico de cada função:

(a) $f(x) = |x + 3|$ (c) $f(x) = ||x| - 2|$ (e) $f(x) = x^2 - 6|x| + 5$
(b) $f(x) = |x| - 1$ (d) $f(x) = |x^2 - 4|$ (f) $f(x) = -x^2 - |x| + 2$

5. Dado o gráfico ao lado, faça o estudo dos seguintes gráficos das funções: **Domínio, Contradomínio, Zeros, Variação da monotonia e Variação do sinal;**



6. Resolver em $\mathbb{R}$ as seguintes equações:

(a) $|x + 5| = 9$ (i) $|x^2 - 4x + 5| = 2$ (q) $|2x - 3| - x = 2x + 1$
(b) $|\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}| = \frac{1}{8}$ (j) $|1 - 3x| = 5$ (r) $|4,2x - 6,8| = 3,5 - 1,2x$
(c) $|-x + 50| = 50$ (k) $|\frac{7}{4}x + \frac{3}{2}| = -\frac{10}{8}$ (s) $|2x - 3| = |x + 7|$
(d) $|x + 7| = 14$ (l) $|3x - 6| = x - 2$ (t) $|x - 1| = |3x + 2|$
(e) $|2x - 1| = 3$ (m) $|2 + x| = 6 - 2x$ (u) $|x - 1| = 3|x + 2|$
(f) $|3x^2 + 2x + 8| = -10$ (n) $|x - 3| = -2x - 1$ (v) $|x^2 - x - 5| = |x - 2|$
(g) $|1,2 - 2,4x| = 5,8$ (o) $|x^2 - 2x - 2| = 2x - 8$ (x) $|3x + 2| = |x - 1|$
(h) $|x^2 - 3x - 1| = 3$ (p) $|x + 2| = 3x - 4$ (z) $|4x - 1| - |2x + 3| = 0$

7. Que valores, k pode tomar de modo que a equação $|3x - 2| = 4 - k$:

(a) a equação tenha solução

(b) a equação não tenha solução

8. Resolver em IR as seguintes equações:

(a) $|x + 1| \leq 13$

(e) $| -x + 50 | > 50$

(i) $|2 - x| \geq 3x + 5$

(b) $|3 - x| > 12$

(f) $|3x - 10x^2| < -8$

(j) $|x - 2| < |7x - 4|$

(c) $|x + 2| < 3$

(g) $|1,2 - 2,4x| > 5,8$

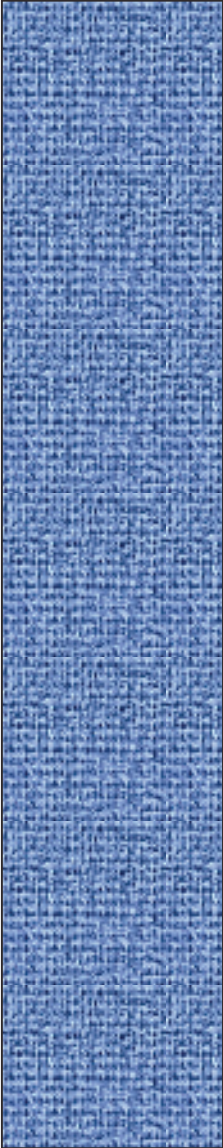
(k) $|3 + 2x| \geq |3x - 2|$

(d) $|x^2 + 3x + 2| > -10$

(h) $|7x - 4| < 5 - x$

(l) $|10 - 5x| \leq |3x + 12|$

CÁLCULO COMBINATÓRIO E PROBABILIDADE



OBJECTIVOS:

No fim do ano, deverás ser capaz de:

- Efectuar o cálculo de factorial de um número natural;
- Simplificar as expressões que envolvem factorial;
- Resolver as equações que envolvem factorial;
- Distinguir Arranjos, Permutações e Combinações;
- Aplicar as fórmulas de Arranjos, Permutações e Combinações para resolver problemas reais da vida:
- Desenvolver as linhas do triângulo de Pascal;
- Determinar a soma dos elementos das linhas do triângulo de Pascal;
- Aplicar a fórmula de Newton para efectuar o desenvolvimento do binómio $(x + y)^n$, sendo n natural;
- Reconhecer regularidades em fenómenos aleatórios;
- Calcular frequências absolutas e relativas de um acontecimento, como cálculo de probabilidade;
- Calcular a probabilidade de um acontecimento pela lei de Laplace;
- Aplicar probabilidades para resolução de problemas práticos da vida;

2.1. DEFINIÇÃO

CÁLCULO COMBINATÓRIO OU ANÁLISE COMBINATÓRIA é um ramo da matemática que se dedica ao estudo das técnicas de contagem de elementos e contagem dos subconjuntos de um dado conjunto. Essas técnicas são: **Arranjos, Permutações e Combinações**.

2.2. FACTORIAL DE UM NÚMERO NATURAL

Factorial de um número natural é o produto de factores inteiros e sucessivos desde um certo número natural n , até a unidade representa-se abreviadamente pelo símbolo $n!$ que lê-se **factorial de n** ou **n factorial**.

Em geral: $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdot (n - 4) \cdot (n - 5) \cdot (n - 6) \cdot (n - 7) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Exemplos: Desenvolver o factorial dos números a seguir e achar seu valor correspondente

(a) $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$;

(d) $12! = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 479001600$;

(b) $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$;

(e) $4! + 5! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 + 120 = 144$;

(c) $\frac{8!}{6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{40320}{720} = 56$

(f) $(3!)^4 = (3 \cdot 2 \cdot 1)^4 = 6^4 = 1296$;

(g) $(5!) \cdot (4!) = (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 120 \cdot 24 = 2880$;

Alguns Casos especiais (Por Convenção)

$$0! = 1 \text{ e } 1! = 1$$

Podemos calcular factorial de qualquer número natural utilizando a maquina calculadora cientifica, através das teclas SHIFIT e X!. Vamos calcular factorial de alguns números:

(a) **3! Digita: 3 + SHIFIT + X! +=, a calculadora vai visualizar 3! = 6;**

(b) **5! Digita: 5 + SHIFIT + X! +=, a calculadora vai visualizar 5! = 479001600;**

(c) **7! Digita: 7 + SHIFIT + X! +=, a calculadora vai visualizar 7! = 5040;**

(d) **12! Digita: 12 + SHIFIT + X! +=, a calculadora vai visualizar 12! = 479001600;**

2.3. SIMPLIFICAÇÃO DE EXPRESSOES QUE ENVOLVEM FACTORIAL

Observe atentamente:

$$\bullet 6! = 6 \cdot 5! = 6 \cdot 5 \cdot 4! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1;$$

$$\bullet (n + 2)! = (n + 2) \cdot (n + 1)! = (n + 2) \cdot (n + 1) \cdot n = (n + 2) \cdot (n + 1) \cdot n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1;$$

$$\bullet (n - 3)! = (n - 3) \cdot (n - 4)! = (n - 3) \cdot (n - 4) \cdot (n - 5)! = (n - 3) \cdot (n - 4) \cdot (n - 5) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1;$$

Para simplificar expressão com factorial, fixa-se o n , procuremos factores anteriores e depois de n e devemos ter conta a sequencia seguir: $\dots n + 4, n + 3, n + 2, n + 1, n, n - 1, n - 2, n - 3, n - 4, \dots$ assim sendo vamos simplificar as seguintes expressões:

$$(a) \frac{9!}{5!}$$

Ora vejamos:

• $9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!$, substituindo na expressão temos:

$$\frac{9!}{5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 3024;$$

$$(b) \frac{7! + 6!}{5!}$$

Ora vejamos:

• $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5!$ e $6! = 6 \cdot 5!$, substituindo na expressão e colocar em evidencia o factor comum $5!$, temos:

$$\frac{7! + 6!}{5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5! + 6 \cdot 5!}{5!} = \frac{\cancel{5!}(7 \cdot 6 + 6)}{\cancel{5!}} = 42 + 6 = 48;$$

$$(c) \frac{8! - 4!}{7! + 5!}$$

Ora vejamos:

• $8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!$, $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!$ e $5! = 5 \cdot 4!$, substituindo na expressão e colocar em evidencia o factor comum $4!$, temos:

$$\frac{8! - 4!}{7! + 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4! - 4!}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4! + 5 \cdot 4!} = \frac{\cancel{4!}(8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 - 1)}{\cancel{4!}(7 \cdot 6 \cdot 5 + 5)} = \frac{1680 - 1}{210 + 5} = \frac{1679}{215}.$$

$$(d) \frac{n!}{(n-1)!}$$

• $n! = n \cdot (n-1)!$

$$\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \cdot \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = n;$$

$$(e) \frac{(n-2)!}{n!}$$

• $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!$

$$\frac{\cancel{(n-2)!}}{n \cdot (n-1) \cdot \cancel{(n-2)!}} = \frac{1}{n \cdot (n-1)} = \frac{1}{n^2 - n};$$

$$(f) \frac{(n+1)!}{n! + (n+1)!}$$

• $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

$$\frac{(n+1)!}{n! + (n+1)!} = \frac{(n+1) \cdot \cancel{n!}}{n! + (n+1) \cdot \cancel{n!}} = \frac{(n+1) \cdot n!}{n!(1 + n + 1)} = \frac{n+1}{n+2};$$

$$(e) \frac{n!}{(n-2)! + (n-1)!}$$

• $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!$ e $(n-1)! = (n-1) \cdot (n-2)!$

$$\begin{aligned} \frac{n!}{(n-2)! + (n-1)!} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cancel{(n-2)!}}{(n-2)! + (n-1) \cdot \cancel{(n-2)!}} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-2)! \cdot (1 + n - 1)} = \\ &= \frac{\cancel{n \cdot (n-1)}}{\cancel{n}} = n - 1; \end{aligned}$$

2.4. EQUAÇÕES QUE ENVOLVEM FACTORIAL

São equações que envolvem factorial, ou seja, a variável está sujeita a factorial. Para resolver estas equações, simplifica-se de modo a eliminar factorial e de seguida encontra-se o valor de **n**, para isso basta isolar o **n**.

Como mostram exemplos a seguir:

$$(a) \frac{(n-1)!}{(n-2)!} = 4$$

$$\frac{(n-1) \cdot \cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 4$$

$$n-1 = 4$$

$$n = 4 + 1$$

$$n = 5$$

$$5 \in \mathbb{N}$$

Solução: {5}

$$(b) \frac{(n-2)!}{(n-1)!} = 9$$

$$\frac{\cancel{(n-2)!}}{(n-1) \cdot \cancel{(n-2)!}} = 9$$

$$\frac{1}{n-1} = 9$$

$$n-1 = \frac{1}{9}$$

$$n = \frac{1}{9} + 1$$

$$n = \frac{10}{9}$$

$$\frac{10}{9} \notin \mathbb{N}$$

Solução: { }

$$(c) \frac{(n-1)!}{(n-3)!} = 56$$

$$\frac{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \cancel{(n-3)!}}{\cancel{(n-3)!}} = 56$$

$$(n-1) \cdot (n-2) = 56$$

$$n^2 - 2n - n + 2 = 56$$

$$n^2 - 3n - 54 = 0$$

$$a = 1; b = -3; c = -54$$

$$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-54)}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{3 \pm 15}{2}$$

$$n_1 = \frac{3-15}{2} \vee n_2 = \frac{3+15}{2}$$

$$n_1 = \frac{-12}{2} \vee n_2 = \frac{18}{2}$$

$$n_1 = -6 \vee n_2 = 9$$

$$-6 \notin \mathbb{N}, \text{ e } 9 \in \mathbb{N}$$

Solução: {9}

$$(d) \frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 12$$

$$\frac{(n+1) \cdot n \cdot \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = 12$$

$$(n+1) \cdot n = 12$$

$$n^2 + n - 12 = 0$$

$$a = 1; b = 1; c = -12$$

$$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2}$$

$$n_1 = \frac{-1-7}{2} \vee n_2 = \frac{-1+7}{2}$$

$$n_1 = \frac{-8}{2} \vee n_2 = \frac{6}{2}$$

$$n_1 = -4 \vee n_2 = 3$$

$$-4 \notin \mathbb{N}, \text{ e } 3 \in \mathbb{N}$$

Solução: {3}

2.5. ARRANJOS SEM REPETIÇÃO

Definição: Chama-se, *arranjos sem repetição de n elementos agrupados (tomados) p a p*, ao número de grupos que se pode formar com p dos n elementos dados, diferindo uns dos outros pela natureza, quer pela ordem, dos seus elementos. A sua notação pode ser: A_p^n , nA_p e $A_{n,p}$.

$$\bullet A_2^4 \Rightarrow n = 4 \text{ e } p = 2 \quad \bullet A_4^7 \Rightarrow n = 7 \text{ e } p = 4 \quad \bullet A_8^8 \Rightarrow n = 8 \text{ e } p = 8 \quad \bullet A_1^6 \Rightarrow n = 6 \text{ e } p = 1$$

Fórmula geral dos arranjos sem repetição

$$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!} \quad \text{com } 0 < p \leq n, \quad p, n \in \mathbb{N}$$

(Está é a formula para o cálculo de arranjos simples em expressões factoriais)

Observação:

Na definição de arranjos sem repetição falamos de grupos que se diferem pela natureza e grupos que se diferem pela ordem dos seus elementos. Para exemplificarmos os grupos (123), (132), (321) e (231) diferem apenas pela ordem (todos os elementos são os mesmos), visto que, o sentido ou a leitura do grupo é diferente quando há troca da posição dos elementos, enquanto os grupos (123), (124), (325) e (789) diferem pela natureza (pelo menos um dos elementos não o mesmo). Estas duas características são fundamentais para chamarmos um agrupamento de arranjos sem repetição.

2.5.1. Cálculo de arranjos sem repetição

$$(a) A_2^6 = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 30;$$

$$(b) A_5^7 = \frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7!}{2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3 \cdot 2!}}{\cancel{2!}} = 2520;$$

$$(c) A_3^8 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 336;$$

$$(d) A_4^9 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 3024;$$

$$(e) A_5^5 = \frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5!}{0!} = \frac{5!}{1} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120;$$

Podemos calcular os arranjos sem repetição de n elementos agrupados p a p, utilizando a máquina calculadora científica, através das teclas **SHIFIT** e **nPr**. Vamos calcular os arranjos sem repetição dos exemplos anteriores:

- (a) A_2^6 Digita: 6 + SHIFIT + nPr + 2 + =, a calculadora vai visualizar $6P2 = 30$;
- (b) A_5^7 Digita: 7 + SHIFIT + nPr + 5 + =, a calculadora vai visualizar $7P5 = 2520$;
- (c) A_3^8 Digita: 8 + SHIFIT + nPr + 3 + =, a calculadora vai visualizar $8P3 = 336$;
- (d) A_4^9 Digita: 9 + SHIFIT + nPr + 4 + =, a calculadora vai visualizar $9P4 = 3024$;
- (e) A_5^5 Digita: 5 + SHIFIT + nPr + 5 + =, a calculadora vai visualizar $5P5 = 120$;

2.5.2. Resolução de problemas da vida real, aplicando arranjos sem repetição

Problema 1: Com os algarismos do conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Quantos números de 3 algarismos diferentes podemos escrever?

Resolução:

Todas vezes que resolvermos questões de problemas, precisamos esquematizar a essência daquilo que entendemos, isso facilitará como resolvê-los. Neste problema podemos analisar assim, escolher alguns números possíveis, (123), (345), (324), (231), (542), (254), (543), ..., nestes grupos de números podemos verificar a existência de duas características fundamentais de arranjos:

- *Os grupos (123), (345), (324) e (542) diferem pela natureza, visto que, pelo menos um dos elementos é diferente;*
- *os grupos (123) e (231), (345) e (543), (542) e (254), ..., diferem pela ordem, visto que, a interpretação do grupo é diferente mesmo haja troca da posição dos elementos;*

Depois de analisar e esquematizar, podemos concluir que, trata-se de arranjos de 5 elementos agrupados 3 a 3, logo: $A_3^5 = 60$;

Resposta: São 60 números de 3 algarismos diferentes que podemos escrever com conjunto A.

Problema 2: Numa prova de velocidade participaram 8 corredores. Quantos são os resultados possíveis para 3 lugares?

Resolução:

Para melhor interpretação, a sequência do grupo (EJM) representa respectivamente por, Eliézer – 1º lugar, Jonas – 2º lugar e Marta – 3º lugar. Entretanto, verifica-se a existência de duas características fundamentais de arranjos, como podemos indicar:

- *os grupos (EJM), (IME), (TDA), (ASM), ..., diferem pela natureza, visto que, pelo menos um dos elementos é diferente;*
- *os grupos (EJM) e (MJE), (TDA) e (DTA), (ASM) e (MSA) ..., diferem pela ordem, visto que, a interpretação do grupo é diferente mesmo haja troca da posição dos elementos;*

Depois de analisar e esquematizar, podemos concluir que, trata-se de arranjos de 8 elementos agrupados 3 a 3, logo: $A_3^8 = 336$;

Resposta: São 336 resultados possíveis para os três lugares;

Problema 3: Um eleitor deve eleger 7 candidatos, um presidente, um secretário, um tesoureiro e um assistente para autarquia local. **De quantas maneiras diferentes pode se fazer a escolha da comissão?**

Resolução:

Sejam os candidatos: Manuel, Rui, Amara, Júlia, Beth, Elton e Yuran, os nomes escolhidos têm letras iniciais diferentes, vejamos alguns resultados possíveis para os 4 lugares: (AMRB), (RBEJ), (BRAM), (YEJB), (JEBY), (MBRA), (EAMY), ... etc.

Para melhor interpretação, a sequência do grupo (AMRJ) representa respectivamente por, Amara – Presidente, Manuel – Secretário, Rui - Tesoureiro e Beth – Assistente. Entretanto, verifica – se a existência de duas características fundamentais de arranjos, como podemos indicar:

- os grupos (AMRB), (RBEJ), (EAMY), ..., diferem pela natureza, visto que, pelo menos um dos elementos é diferente:

- os grupos (AMRB) e (BRAM), (YEJB) e (JEBY), ..., diferem pela ordem, visto que, a interpretação do grupo é diferente mesmo haja troca da posição dos elementos;

Depois de analisar e esquematizar, podemos concluir que, trata-se de arranjos de 7 elementos agrupados 4 a 4, logo: $A_4^7 = 840$.

Resposta: São 840 maneiras diferentes que se pode se fazer a escolha da comissão.

2.6. PERMUTAÇÕES DE n ELEMENTOS

Definição: Permutações de n elementos são arranjos de n elementos agrupados n a n, simbolicamente escreve – se P_n .

$$\bullet P_4 \Rightarrow n = 4$$

$$\bullet P_7 \Rightarrow n = 7$$

$$\bullet P_8 \Rightarrow n = 8$$

$$\bullet P_1 \Rightarrow n = 1$$

Fórmula geral dos das Permutações

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! \quad \text{ou simplesmente} \quad P_n = n!$$

(Está é a formula para o cálculo de permutações em expressões factoriais)

2.6.1. Cálculo das Permutações

$$(a) P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24;$$

$$(b) P_5 - P_3 = 5! - 3! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 - 6 = 114;$$

$$(c) 3P_6 = 3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3 \cdot 720 = 2160;$$

$$(d) \frac{P_7 \cdot P_2}{P_7 - P_2} = \frac{7! \cdot 2!}{7! - 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1} = \frac{10080}{5038} = \frac{5040}{2519};$$

2.6.2. Resolução de problemas da vida real, aplicando Permutações

Problema 1: De quantas maneiras diferentes 5 pessoas podem sentar num banco?

Resolução:

Representemos as 5 pessoas pelas letras ABCDE, assim temos algumas possibilidades: (ABCDE), (BACDE), (EDACB), (BDCEA), ... vê-se que, há troca de posições de 5 elementos, então trata-se de permutações de 5 elementos.

$$P_5 = 5! = 120;$$

Resposta: São 120 maneiras diferentes que 5 pessoas podem sentar num banco;

Problema 2: De quantas maneiras diferentes 4 pessoas podem posicionar para uma sessão fotográfica?

Resolução: Representemos as 5 pessoas pelas letras ABCD, assim temos algumas possibilidades: (ABCD), (BACD), (EDCB), (DCEA), ... vê-se que, há troca de posições de 4 elementos, então trata-se de permutações de 4 elementos.

$$P_4 = 4! = 24;$$

Resposta: São 24 maneiras diferentes que 4 pessoas podem posicionar para uma sessão fotográfica;

Problema 3: Com a palavra MAPUTO. Resolve as questões que se seguem:

(a) Quantos anagramas¹ podemos escrever?

Resolução:

Alguns anagramas possíveis (AMPUTO), (TOMAPU), (AMUOTP), (PMUATO), (MUOATP), ..., vê-se que, há troca de posições de 6 elementos, então trata-se de permutações de 6 elementos;

$$P_6 = 6! = 720;$$

Resposta: Podemos escrever 720 anagramas com a palavra MAPUTO;

(b) Quantos anagramas podemos escrever, que começam com a letra M?

Resolução:

Alguns anagramas possíveis (MPUTOA), (MTOAPU), (MAUOTP), (MPUATO), (MUOATP), ..., vê-se que, há troca de posições de 5 elementos, então trata-se de permutações de 5 elementos.

$$P_5 = 5! = 120;$$

Resposta: Podemos escrever 120 anagramas com a palavra MAPUTO, que começam com a letra M;

¹ Anagramas são palavras formadas pela transposição (troca ou mudança) das letras de uma palavra, com ou sem sentido:

(c) Quantos anagramas podemos escrever, que começam com a letra P e terminam com O?

Resolução:

Alguns anagramas possíveis (PUTAMO), (PMTAUO), (PMAUTO), (PMUATO), ..., vê-se que, há troca de posições de 4 elementos, então trata-se de permutações de 4 elementos;

$$P_4 = 4! = 24;$$

Resposta: Podemos escrever 24 anagramas com a palavra MAPUTO, que começam com a letra P e terminam com O;

(d) Quantos anagramas podemos escrever, com M e A juntos?

Resolução:

Alguns anagramas possíveis (PUTOMA), (AMTOPU), (MAOUTP), (PUMATO), (UOAMTP) ..., vê-se que:

- Na ordem de **MA**, há permutações de 5 elementos, então: $P_5 = 5! = 120$;

- Na ordem de **MA**, também há permutações de 5 elementos, então: $P_5 = 5! = 120$;

Somando temos 240 anagramas;

ou

- **MA** ou **AM** há troca de duas letras, trata-se de permutações de 2 elementos: $P_2 = 2! = 2$;

- **MA** ou **AM** juntou ficando uma letra só, neste caso, há permutações de 5 elementos, então: $P_5 = 5! = 120$;

$$\left. \begin{array}{l} P_2 = 2! = 2 \\ P_5 = 5! = 120 \end{array} \right\} P_2 \cdot P_5 = 2! \cdot 5! = 2 \cdot 120 = 240$$

Resposta: Podemos escrever 240 anagramas com a palavra MAPUTO, com M e A juntos;

2.7. COMBINAÇÕES

Definição: Chama-se, *combinações de n elementos agrupados (tomados) p a p*, ao número de grupos que se pode formar com p dos n elementos dados, diferindo uns dos outros pela natureza, dos seus elementos. **A sua notação pode ser:**

$$C_p^n, {}^nC_p, C_{n,p} \in \binom{n}{p}.$$

$$\bullet C_4^7 \Rightarrow n = 7 \text{ e } p = 4 \quad \bullet C_3^{10} \Rightarrow n = 10 \text{ e } p = 3 \quad \bullet C_6^{12} \Rightarrow n = 12 \text{ e } p = 6 \quad \bullet C_1^5 \Rightarrow n = 5 \text{ e } p = 1$$

Fórmula geral das combinações

$$C_p^n = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!} \text{ com } 0 < p \leq n, \quad p, n \in \mathbb{N}$$

(Está é a formula para o cálculo de combinações em expressões factoriais)

Observação:

Na definição de *combinações* falamos de grupos que se diferem pela natureza e não grupos que se diferem pela ordem dos seus elementos. Para exemplificarmos imaginemos os seguintes nomes Eliézer, Domingos, Jonas, Marta e Isaque, queremos escolher 3 pessoas para organizar uma festa, afirmar que Jonas, Eliézer e Isaque irão organizar a festa, equivale afirmar, Eliézer, Isaque, Jonas, tanto Isaque, Eliézer e Jonas irão organizar a festa, isto quer dizer que, a diferença pela ordem não faz sentido quando se trata das combinações, os elementos só pode diferirem pela natureza pelo menos um dos elementos não é o mesmo, é a características são fundamentais para chamarmos um agrupamento de combinações.

2.7.1. Cálculo das combinações

$$(a) C_2^6 = \frac{6!}{(6-2)! \cdot 2!} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 2 \cdot 1} = \frac{30}{2} = 15;$$

$$(b) C_5^7 = \frac{7!}{(7-5)! \cdot 5!} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{5!}} = \frac{42}{2} = 21;$$

$$(c) C_3^8 = \frac{8!}{(8-3)! \cdot 3!} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{336}{6} = 56;$$

$$(d) C_1^9 = \frac{9!}{(9-1)! \cdot 1!} = \frac{9!}{8! \cdot 1!} = \frac{9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!} \cdot 1} = \frac{9}{1} = 9;$$

$$(e) C_5^5 = \frac{5!}{(5-5)! \cdot 5!} = \frac{5!}{0! \cdot \cancel{5!}} = \frac{1}{1} = 1;$$

Podemos calcular as combinações de n elementos agrupados p a p , utilizando a máquina calculadora científica, através das teclas **nCr**. Vamos calcular as combinações dos exemplos anteriores:

(a) C_2^6 Digita: $6 + \text{nCr} + 2 + =$, a calculadora vai visualizar $6C2 = 15$;

(b) C_5^7 Digita: $7 + \text{nCr} + 5 + =$, a calculadora vai visualizar $7C5 = 21$;

(c) C_3^8 Digita: $8 + \text{nCr} + 3 + =$, a calculadora vai visualizar $8C3 = 56$;

(d) C_1^9 Digita: $9 + \text{nCr} + 1 + =$, a calculadora vai visualizar $9C1 = 9$;

(e) C_5^5 Digita: $5 + \text{nCr} + 5 + =$, a calculadora vai visualizar $5C5 = 1$;

2.7.2. Propriedades das combinações

1ª Propriedades

$$C_p^n = C_{n-p}^n, \forall n, p \in \mathbb{N}$$

ou

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}, \forall n, p \in \mathbb{N}$$

Verificação:

$$\binom{6}{4} = \binom{6}{6-4}$$

$$\binom{6}{4} = \binom{6}{2}$$

$$15 = 15$$

(Verdade)

2ª Propriedades

$$C_p^n = C_{p-1}^n + C_{p-1}^{n-1}, \forall n, p \in \mathbb{N}$$

ou

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{p-1} + \binom{n-1}{p-1}, \forall n, p \in \mathbb{N}$$

Verificação:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{p-1} + \binom{n-1}{p-1}$$

$$\binom{6}{4} = \binom{6}{4-1} + \binom{6-1}{4-1}$$

$$\binom{6}{4} = \binom{6}{3} + \binom{5}{3}$$

$$15 = 5 + 10$$

$$15 = 15$$

(Verdade)

2.7.3. Resolução de problemas da vida real, aplicando Combinações

Problema 1: De um de 30 alunos de uma turma da escola comunitária santos inocentes, porem vai ser feita uma lista de 3 alunos para representar a turma no workshop de negócios em Dubai. **Quantas listas são possíveis de criar?**

Resolução:

Sejam alguns nomes dos alunos (Rosa, Francisco, Miguel, Geovana, Andreia, Tomé, José, Victor, ...). Supondo os alunos escolhidos: (RTJ), (VMG), (GMV), (TRF), (AVR), (JTR), (RAV), ..., etc;

- Os grupos (RTJ), (VMG), (TRF) e (AVR), diferem pela natureza, visto que, pelo menos um elemento no é o mesmo. Mas os grupos (AVR) e (RAV), são os mesmos elementos, ou seja dizer que Andreia, Victor e Rosa irão representar a turma é o mesmo dizer que Rosa, Andreia e Victor irão representar a turma, a troca de posição não muda o sentido do grupo. Depois de analisar e esquematizar podemos concluir que, trata-se de combinações de 30 elementos agrupados 3 a 3, logo: $C_3^{30} = 4060$;

Resposta: São 4060 listas que podem se fazer a escolha;

Problema 2: Uma turma da 12ª classe quer eleger entre 10 alunos uma comissão de 4 alunos para organizar excursão na praia de Njalane. **Quantas maneiras diferentes podem ser feita a escolha da comissão?**

Resolução:

Sejam nomes dos alunos (Rosa, Francisco, Miguel, Geovana, Andreia, Tomé, José, Victor, Quitéria, Sónia). Supondo os alunos escolhidos: (RTJV), (VMFG), (GMV), (TVRF), (AQVR), (JVTR), (RAVQ), ..., etc;

- Os grupos (RTJV), (VMFG), (TGMV), (VTRF) e (AVRQ), diferem pela natureza, visto que, pelo menos um elemento no é o mesmo. Mas os grupos (AQVR) e (RAVQ), são os mesmos elementos, ou seja dizer que Andreia, Quitéria, Victor e Rosa irão representar a turma é o mesmo dizer que Rosa, Andreia, Victor e Quitéria, irão representar a turma, a troca de posição não muda o sentido do grupo. Depois de analisar e esquematizar podemos concluir que, trata-se de combinações de 10 elementos agrupados 4 a 4, logo: $C_4^{10} = 210$;

Resposta: São 210 maneiras diferente que pode se fazer a escolha da comissão;

2.8. TRIÂNGULO DE PASCAL

Coloquemos os números C_p^n em sucessivas linhas formando um triângulo equilátero:

[illegible]

Observações importantes sobre triângulo de Pascal

1ª: Em cada linha do triângulo, o primeiro elemento vale 1, pois qualquer que seja a linha o primeiro elemento é $C_0^n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$;

2ª: Em cada linha do triângulo, o ultimo elemento vale 1, pois qualquer que seja a linha o ultimo elemento é $C_n^n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$;

3ª: A partir da 3ª linha do triângulo cada elemento (com exceção do primeiro e ultimo elemento) é a soma dos elementos da linha anterior, imediatamente acima dele ou seja: $C_p^n = C_{p-1}^n + C_{p-1}^{n-1}, \forall_{n,p \in \mathbb{N}}$;

4ª: Em cada linha do triângulo, os elementos equidistantes dos extremos são iguais, ou seja: $C_p^n = C_{n-p}^n, \forall n, p \in \mathbb{N}$;

2.8.1. SOMA DOS ELEMENTOS DA LINHA DO TRIÂNGULO DE PASCAL

Observe:

[illegible]

Podemos concluir que:

Podemos concluir que:

$$C_0^n + C_1^n + C_2^n + C_3^n + C_4^n + C_5^n + \dots + C_n^n = \sum_{p=0}^n C_p^n = \sum_{p=0}^n \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!} = 2^n, \forall_{n,p \in \mathbb{N}^*}.$$

2.9. BINÓMIO DE NEWTON

Observe o desenvolvimento destes binómios para $x \neq 0$ e $y \neq 0$, mais conhecidos por casos notáveis:

- $(x + y)^0 = 1$;
- $(x + y)^1 = C_0^1 x^1 y^0 + C_1^1 x^0 y^1 = 1 \cdot x + 1 \cdot y = x + y$;
- $(x + y)^2 = C_0^2 x^2 y^0 + C_1^2 x^1 y^1 + C_2^2 x^0 y^2 = 1 \cdot x^2 y^0 + 2 \cdot xy + 1 \cdot y^2 = x^2 + 2xy + y^2$;
- $(x + y)^3 = C_0^3 x^3 y^0 + C_1^3 x^2 y^1 + C_2^3 x^1 y^2 + C_3^3 x^0 y^3 = 1 \cdot x^3 y^0 + 3 \cdot x^2 y^1 + 3 \cdot x^1 y^2 + 1 \cdot x^0 y^3 = x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + y^3$
- $(x + y)^n$ = como será o desenvolvimento?

Depois desta constatação e pelo triangulo de Pascal anterior, podemos escrever os coeficientes de cada desenvolvimento de $(x + y)^n$. A fórmula geral do binómio de Newton é:

$$(x + y)^n = C_0^n \cdot x^{n-0} \cdot y^0 + C_1^n \cdot x^{n-1} \cdot y^1 + C_2^n \cdot x^{n-2} \cdot y^2 + C_3^n \cdot x^{n-3} \cdot y^3 + \dots + C_n^n \cdot x^{n-n} \cdot y^n$$

ou

$$(x + y)^n = \sum_{p=0}^n C_p^n \cdot x^{n-p} \cdot y^p$$

• $\sum$ - é o símbolo de somatório

Observações importantes sobre binómio de Newton

- Os expoentes de x decrescem desde n até zero, simultaneamente os expoentes de y crescem desde zero até n ;
- O desenvolvimento de $(x + y)^n$ tem um termo do que o grau de binómio, isto é, $n + 1$ termos;
- Os coeficientes do desenvolvimento do binómio de Newton são números inteiros e designam-se por coeficientes binomiais;
- Coeficientes binomiais dos termos equidistantes dos extremos são iguais, isto é, $C_p^n = C_{n-p}^n, \forall_{n,p \in \mathbb{N}}$;

Exemplo 1: Desenvolver os seguintes binómios:

(a) $(3x + 2)^4$

$$\begin{aligned}(3x + 2)^4 &= \sum_{p=0}^4 C_p^4 \cdot (3x)^{4-p} \cdot 2^p \\&= C_0^4 \cdot (3x)^{4-0} \cdot 2^0 + C_1^4 \cdot (3x)^{4-1} \cdot 2^1 + C_2^4 \cdot (3x)^{4-2} \cdot 2^2 + C_3^4 \cdot (3x)^{4-3} \cdot 2^3 + C_4^4 \cdot (3x)^{4-4} \cdot 2^4 \\&= 1 \cdot (3x)^4 \cdot 1 + 4 \cdot (3x)^3 \cdot 2 + 6 \cdot (3x)^2 \cdot 4 + 4 \cdot (3x)^1 \cdot 8 + 1 \cdot (3x)^0 \cdot 16 \\&= 81x^4 + 216x^3 + 144x^2 + 96x + 16\end{aligned}$$

$$(b) (2x - 4)^5$$

$$(2x - 4)^5 = \sum_{p=0}^5 C_p^5 \cdot (2x)^{5-p} \cdot (-4)^p$$

$$= C_0^5 \cdot (2x)^{5-0} \cdot (-4)^0 + C_1^5 \cdot (2x)^{5-1} \cdot (-4)^1 + C_2^5 \cdot (2x)^{5-2} \cdot (-4)^2 + C_3^5 \cdot (2x)^{5-3} \cdot (-4)^3 + C_4^5 \cdot (2x)^{5-4} \cdot (-4)^4 + C_5^5 \cdot (2x)^{5-5} \cdot (-4)^5$$

$$= 1 \cdot (2x)^5 \cdot 1 + 5 \cdot (2x)^4 \cdot (-4) + 10 \cdot (2x)^3 \cdot 16 + 10 \cdot (2x)^2 \cdot (-64) + 5 \cdot 2x \cdot 256 + 1 \cdot 1 \cdot (-1024)$$

$$= 32x^5 - 3200x^4 + 1280x^3 - 2560x^2 + 1280x - 1024$$

$$(c) \left(\frac{1}{x} - 2x\right)^3$$

$$\left(\frac{1}{x} - 2x\right)^3 = \sum_{p=0}^3 C_p^3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{3-p} \cdot (-2x)^p$$

$$= C_0^3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{3-0} \cdot (-2x)^0 + C_1^3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{3-1} \cdot (-2x)^1 + C_2^3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{3-2} \cdot (-2x)^2 + C_3^3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{3-3} \cdot (-2x)^3$$

$$= 1 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^3 \cdot 1 + 3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 \cdot (-2x) + 3 \cdot \frac{1}{x} \cdot 4x + 1 \cdot 1 \cdot (-8x^3)$$

$$= \frac{1}{x^3} - \frac{6x}{x^2} + \frac{12x}{x} - 8x^3$$

$$= \frac{1}{x^3} - \frac{6}{x} + 12 - 8x^3$$

2.9.1. Termo geral do binômio de Newton

Termo geral do binômio: é uma expressão que nos permite determinar qualquer termo do binômio, sem recorrermos ao seu desenvolvimento. Em geral para qualquer termo $p+1$ será dado por:

$$T_{p+1} = C_p^n \cdot x^{n-p} \cdot y^p$$

A sequência dos coeficientes binomiais para um dado valor de n é crescente até certa ordem e decresce depois dela. O valor máximo de p é atingido para:

$$\begin{cases} p = \frac{n-1}{2} \text{ ou } p = \frac{n+1}{2}, \text{ se } n \text{ é ímpar;} \\ p = \frac{n}{2}, \text{ se } n \text{ é par;} \end{cases}$$

Exemplo 1: Dada a expressão $(2x - 3)^5$. Determine:

(a) O quinto termo do binômio

$$p + 1 = 5$$

$$p = 5 - 1$$

$$p = 4$$

$$T_{p+1} = C_p^n \cdot x^{n-p} \cdot y^p$$

$$T_5 = C_4^5 \cdot (2x)^{5-4} \cdot (-3)^4$$

$$T_5 = 5 \cdot 2x \cdot 81$$

$$T_5 = 810x$$

(b) O segundo termo do binómio

$$p + 1 = 2$$

$$p = 2 - 1$$

$$p = 1$$

$$T_{p+1} = C_p^n \cdot x^{n-p} \cdot y^p$$

$$T_2 = C_1^5 \cdot (2x)^{5-1} \cdot (-3)^1$$

$$T_2 = 5 \cdot (2x)^4 \cdot (-3)$$

$$T_2 = 5 \cdot 16 \cdot x^4 \cdot (-3)$$

$$T_2 = -240x^4$$

(c) O termo de maior coeficiente

Sendo n ímpar, temos:

$$p = \frac{n-1}{2} \text{ ou } p = \frac{n+1}{2}$$

$$p = \frac{5-1}{2} \text{ ou } p = \frac{5+1}{2}$$

$$p = \frac{4}{2} \text{ ou } p = \frac{6}{2}$$

$$p = 2 \text{ ou } p = 3$$

(Quer dizer, são dois termos de

maior coeficiente, que são: T_3 e T_4)

Somente vamos determinar o quarto termo

$$T_{p+1} = C_p^n \cdot x^{n-p} \cdot y^p$$

$$T_4 = C_3^5 \cdot (2x)^{5-3} \cdot (-3)^3$$

$$T_4 = 10 \cdot (2x)^2 \cdot (-27)$$

$$T_4 = 5 \cdot 4 \cdot x^2 \cdot (-27)$$

$$T_4 = -1080x^2$$

(d) O termo central do binómio

R: Quando n é ímpar, o binómio não possui o termo central;

(e) O termo independente do binómio

- Podemos desenvolver todo o binómio e identificar o termo independente, mas podemos encontrar de uma maneira mais breve, basta escrever todo o termo geral e igualar a zero o expoente de x, ora vejamos:

$$T_{p+1} = C_p^n \cdot x^{n-p} \cdot y^p$$

$$T_{p+1} = C_p^5 \cdot (2x)^{5-p} \cdot (-3)^p$$

(igualando a zero o expoente de x)

$$5 - p = 0$$

$$-p = -5$$

$$p = 5$$

Vamos substituir o **p** por **5**, na expressão:

$$T_{p+1} = C_p^5 \cdot (2x)^{5-p} \cdot (-3)^p, \text{ assim temos:}$$

$$T_{p+1} = C_p^5 \cdot (2x)^{5-p} \cdot (-3)^p$$

$$T_{5+1} = C_5^5 \cdot (2x)^{5-5} \cdot (-3)^5$$

$$T_6 = 1 \cdot (2x)^0 \cdot (-243)$$

$$T_6 = 1 \cdot 1 \cdot (-243)$$

$$T_6 = -243$$

Exemplo 2: Dada a expressão $(x + \frac{3}{x^2})^6$.

(a) Desenvolver o binómio

$$\begin{aligned}
 (x + \frac{3}{x^2})^6 &= \sum_{p=0}^6 C_p^6 \cdot x^{6-p} \cdot \left(\frac{3}{x^2}\right)^p \\
 &= C_0^6 \cdot x^{6-0} \cdot \left(\frac{3}{x^2}\right)^0 + C_1^6 \cdot x^{6-1} \cdot \left(\frac{3}{x^2}\right)^1 + C_2^6 \cdot x^{6-2} \cdot \left(\frac{3}{x^2}\right)^2 + C_3^6 \cdot x^{6-3} \cdot \left(\frac{3}{x^2}\right)^3 + C_4^6 \cdot x^{6-4} \cdot \left(\frac{3}{x^2}\right)^4 + \\
 &\quad + C_5^6 \cdot x^{6-5} \cdot \left(\frac{3}{x^2}\right)^5 + C_6^6 \cdot x^{6-6} \cdot \left(\frac{3}{x^2}\right)^6 \\
 &= 1 \cdot x^6 \cdot 1 + 6 \cdot x^5 \cdot \frac{3}{x^2} + 15 \cdot x^4 \cdot \left(\frac{3}{x^2}\right)^2 + 20 \cdot x^3 \cdot \left(\frac{3}{x^2}\right)^3 + 15 \cdot x^2 \cdot \left(\frac{3}{x^2}\right)^4 + 6 \cdot x \cdot \left(\frac{3}{x^2}\right)^5 + 1 \cdot x^0 \cdot \left(\frac{3}{x^2}\right)^6 \\
 &= x^6 + \frac{18x^5}{x^2} + 15 \cdot x^4 \cdot \frac{9}{x^4} + 20 \cdot x^3 \cdot \frac{27}{x^6} + 15 \cdot x^2 \cdot \frac{81}{x^8} + 6 \cdot x \cdot \frac{243}{x^{10}} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{729}{x^{12}} \\
 &= \boxed{x^6 + 18x^3 + 135 + \frac{540}{x^3} + \frac{1215}{x^6} + \frac{1458}{x^9} + \frac{729}{x^{12}}}
 \end{aligned}$$

(b) O quinto termo do binómio

$$\begin{aligned}
 p+1 &= 5 \\
 p &= 5-1 \\
 p &= 4
 \end{aligned}$$

$$T_{p+1} = C_p^n \cdot x^{n-p} \cdot y^p$$

$$T_4 = C_4^6 \cdot x^{6-4} \cdot \left(\frac{3}{x^2}\right)^4$$

$$T_4 = 15 \cdot x^2 \cdot \frac{81}{x^8}$$

$$T_4 = \frac{1215}{x^6}$$

(c) O termo independente do binómio

- Podemos desenvolver todo o binómio e identificar o termo independente, mas podemos encontrar de uma maneira mais breve, basta escrever todo o termo geral e igualar a zero o expoente de x, ora vejamos:

$$T_{p+1} = C_p^n \cdot x^{n-p} \cdot y^p$$

$$T_{p+1} = C_p^6 \cdot x^{6-p} \cdot \left(\frac{3}{x^2}\right)^p$$

$$T_{p+1} = C_p^6 \cdot x^{6-p} \cdot x^{-2p} \cdot 3^p$$

$$T_{p+1} = C_p^6 \cdot x^{6-3p} \cdot 3^p$$

(igualando a zero o expoente de x)

$$6 - 3p = 0$$

$$-3p = -6$$

$$p = \frac{-6}{-3}$$

$$p = 2$$

Vamos substituir o p por 2, na expressão:

$$T_{p+1} = C_p^6 \cdot x^{6-3p} \cdot 3^p, \text{ assim temos:}$$

$$T_{p+1} = C_p^6 \cdot x^{6-3p} \cdot 3^p$$

$$T_3 = C_2^6 \cdot x^{6-3 \cdot 2} \cdot 3^2$$

$$T_3 = 15 \cdot 1 \cdot 9$$

$$T_3 = 135$$

(d) O termo central do binómio

colocando os termos em ordem, vê-se que se trata-se do quarto termo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 T_1, & T_2, & T_3, & \boxed{T_4} & T_5, & T_6, & T_7 \\
 p + 1 = 4 & & & & & & \\
 p = 4 - 1 & & & & & & \\
 p = 3 & & & & & & \\
 & & & & & & T_{p+1} = C_p^n \cdot x^{n-p} \cdot y^p \\
 & & & & & & T_4 = C_3^6 \cdot x^{6-3} \cdot \left(\frac{3}{x^2}\right)^3 \\
 & & & & & & T_4 = 20 \cdot \cancel{x^3} \cdot \frac{27}{\cancel{x^6}} \\
 & & & & & & T_4 = \frac{540}{x^3}
 \end{array}$$

2.10. INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

2.10. 1. BREVE HISTORIAL DA PROBABILIDADE

O interesse do homem em estudar os fenómenos que envolviam determinadas possibilidades fez surgir a Probabilidade. Alguns indícios alegam que o surgimento da teoria das probabilidades teve início com os jogos de azar disseminados na Idade Média. Esse tipo de jogo é comum praticado através de apostas, na ocasião também era utilizado no intuito de antecipar o futuro. O Ramo da Matemática que visa a formulação de modelos teóricos, abstractos, para o tratamento matemático da ocorrência (ou não ocorrência) de fenómenos aleatórios, pode caracterizar-se como a Matemática do acaso, da incerteza. O importante e fascinante assunto das probabilidades teve as suas origens no século XVII através de esforços de matemáticos como Fermat e Pascal. É certo que o italiano Jerónimo Cardano (1501-1576) escreveu um trabalho notável sobre probabilidades, “*Livros sobre jogos de azar*”. Entretanto, no século XX que se desenvolveu uma teoria matemática rigorosa, baseada em axiomas, definições e teoremas. Kolmogorov propôs uma axiomática completa e consistente do cálculo de probabilidades. Os alicerces da teoria do cálculo das probabilidades e da análise combinatória foram estabelecidos por Pascal e Fermat, as situações relacionando apostas no jogo de dados levantaram diversas hipóteses envolvendo possíveis resultados, marcando o início da teoria das probabilidades como ciências. Actualmente, os estudos relacionados às probabilidades são utilizados em diversas situações, pois possuem axiomas, teoremas e definições bem contundentes.

2.10.2. EXPERIMENTO OU FENOMENOS ALEATORIOS

Encontramos na natureza dois tipos de fenómenos: **fenómenos determinísticos** e **aleatórios**. Os fenómenos determinísticos são aqueles em que os resultados são sempre os mesmos, qualquer que seja o número de vezes de ocorrência verificadas. Nos fenómenos aleatórios, os resultados não são previsíveis, mesmo que haja um grande número de repetições do mesmo fenómeno. Por exemplo, se considerarmos um pomar com centenas de laranjeiras, as produções de cada planta serão diferentes e não previsíveis, mesmo que as condições de temperatura, pressão, humidade, solo, etc. Sejam as mesmas para todas as árvores. Experimentos ou

fenómenos aleatórios são aqueles que, mesmo repetido varias vezes sob condições semelhantes apresentam resultados imprevisíveis.

*“Chamam-se **experimentos ou fenómenos aleatórios** ao processo de observações ou de acção cujos resultados, embora podendo ser descrito no seu conjunto, não são determináveis a priori, antes de realização da experiencia e a sua realização dependente inteiramente do acaso”*

Um experimento aleatório tem as seguintes características:

- Possibilidade de repetição do experimento em condições similar;
- Não se pode dizer a partida qual o resultado do experimento a se realizar;
- A existência de regularidades quando o experimento é repetidos muitas vezes;

Exemplos de alguns fenómenos aleatórios:

- (a) Lançar uma moeda, ao ar, e verificar a face voltada para cima quando a moeda já estiver no chão;
- (b) Lançar duas moedas ao ar, e verificar a face de cima;
- (c) Lançar um dado de seis faces e verificar a face voltada para cima;
- (d) De uma caixa contendo três bolas vermelhas e duas brancas, seleccionar uma bola e observar a sua cor;
- (e) De um baralho de 52 cartas, seleccionar uma carta, e observar o seu naipe² e grafe³;

2.10.3. ESPAÇO DE ACONTECIMENTO OU ESPAÇO AMOSTRAL

*“Chama-se **espaço amostral** ao conjunto de todos os resultados possíveis de um certo experimento aleatório e representa-se por S ou Ω ”.*

Exemplo₁: Lançar uma moeda e observar a face voltada para cima;

Seja: C – cara e K – Coroa, logo espaço amostral é: $S = \{C, K\}$

Exemplo₂: Lançar uma moeda duas vezes e observar a sequencia de caras e coroas;

Seja: C – cara e K – Coroa, logo espaço amostral é: $S = \{(CC), (CK), (KC), (KK)\}$

Exemplo₃: Lançar um dado de 6 face e observar o número da face de cima;

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

² Sinal gráfico pelo qual se distingue cada um dos quartos grupos de cartas de um baralho: Espada, Copas, Florinha e Ouro;

³ Sinal gráfico pelo qual se distingue cada um dos quartos grupos de cartas de um baralho: Ás, Dois, Três, Quatro, ..., Rei;

Exemplo4: Lançar um dado de 6 face e observar o número par da face de cima;

$$S = \{2, 4, 6\}$$

2.10.4. ACONTECIMENTO OU EVENTO

Chamamos **acontecimento** ou **evento** a qualquer subconjunto de espaço amostral. Os acontecimentos ou eventos são geralmente representados pelas letras maiúsculas do nosso alfabeto, isto é, A, B, C, D, ..., X e Z.

Exemplo 1: No lançamento de uma moeda. Apenas pode verificar-se dois resultados distintos, cara ou coroa.

Espaço amostral: $S = \{\text{Cara}, \text{Coroa}\}$

1. Sair cara no lançamento de moeda é um acontecimento, assim podemos representar esse acontecimento, assim: **A: Sair cara;**

2. 1. Sair coroa no lançamento de moeda é um acontecimento, assim podemos representar esse acontecimento, assim: **A: Sair coroa;**

Exemplo 2: Um dado de seis faces é lançado e observa-se o número da face de cima

Espaço amostral: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Assim temos alguns acontecimentos

1. A: Sair um número ímpar;

$$A = \{1, 3, 5\} \Rightarrow \#A = 3;$$

2. B: Sair um número primo;

$$A = \{2, 3, 5\} \Rightarrow \#B = 3;$$

3. C: Sair um número menor que 4;

$$A = \{1, 2, 3\} \Rightarrow \#C = 3;$$

4. D: Sair um número menor que 7;

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow \#D = 6;$$

5. E: Sair um número maior ou igual a 5;

$$A = \{5, 6\} \Rightarrow \#E = 2;$$

2.10.5. OPERAÇÕES COM ACONTECIMENTOS

1. Acontecimento contrário: “O acontecimento contrário de A é o acontecimento que consiste em não verificação de A . Isto é, é o conjunto complementar de A . O acontecimento contrário de A designa-se $\bar{A}$ ou A^c ”.

Exemplo: A : Sair cara no lançamento de uma moeda $\bar{A}$: Sair coroa no lançamento de uma moeda

2. Acontecimento união: “O acontecimento reunião de dois acontecimento de A e B é acontecimento que consiste na realização de pelo menos um dos acontecimentos”. O acontecimento união A e B é o conjunto união de A e B . Representa-se por $A \cup B$ ou $A+B$.

Exemplo: A : Lançamento de um dado de seis faces, sair um número par, é um acontecimento união dos acontecimentos sair 2, sair 4, sair 6, isto é, **B: Sair 2, Sair, 4 D: Sair 6.**

$$A = \{B\} \cup \{C\} \cup \{D\} = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\} = \{2, 4, 6\}$$

3. Acontecimento intersecção: “O acontecimento **intersecção** de dois acontecimentos de A e B é acontecimento que consiste na realização simultânea dos dois acontecimentos”. O acontecimento intersecção A e B , representa-se po $A \cdot B$ ou $A \cap B$.

Exemplo: Lançamento de um dado de seis faces sair um número par $\{2, 4, 6\}$

B : Lançamento de um dado de seis faces sair um número primo $\{2, 3, 5\}$

C : Lançamento de um dado de seis faces sair um número par e primo $\{2\}$

Logo: $C = A \cap B = \{2, 4, 6\} \cap \{2, 3, 5\} = \{2\}$

4. Acontecimento certo: “O acontecimento certo relativo a uma prova é aquele que se verifica sempre que se realiza a prova”

Exemplo: A : No lançamento de um dado de seis faces de 1 a 6, sair um número menor que 7;

B : No lançamento de uma moeda, sair coroa ou cara;

5. Acontecimento impossível: “O acontecimento impossível relativo a uma prova é aquele que nunca se verifica-se sempre que se realiza a prova”

Exemplo: A : No lançamento de um dado de seis faces de 1 a 6, sair um número 7;

B : No lançamento de uma moeda, sair coroa e cara;

6. Acontecimentos disjuntos ou independentes ou mutuamente exclusivo ou incompatíveis: “Dois acontecimentos A e B dizem-se disjuntos ou independentes ou mutuamente exclusivo ou incompatíveis quando a sua intersecção é acontecimento impossível, ou quando a probabilidade de ocorrer um deles não depende do facto de outro ter ou não ocorrido. Isto é, A e B são disjuntos ou independentes ou mutuamente exclusivo ou incompatíveis se $A \cap B = \emptyset$ ”

Exemplo: A: Lançamento de um dado de seis faces sair um número par $\{2, 4, 6\}$

B: Lançamento de um dado de seis faces sair um ímpar $\{1, 3, 5\}$

Logo: $A \cap B = \{2, 4, 6\} \cap \{1, 3, 5\} = \emptyset$

2.10.6. DIFERENTES CONCEITOS DE PROBABILIDADES

1. Definição frequêntista da probabilidade

Uma das definições de probabilidades utiliza a frequência relativa, já que as frequências relativas são estimativas de probabilidades. Podemos então definir a probabilidade como proporção (ou frequência relativa) em uma sequência muito grande de experimentos.

Se em N realizações a experiência, o acontecimento A se verificou f_a vezes, diz-se que a frequência relativa de A nas realizações é $f(A) = \frac{f_a}{N}$. Logo a probabilidade do acontecimento A será dada por:

Onde:

N – Número de realizações de uma experiência

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(A) \approx \frac{f_a}{N}$$

f_a – Número de vezes se verificou ou seja a frequência absoluta do acontecimento

$P(A)$ – Probabilidade do acontecimento A

Exemplo: Vamos determinar a frequência relativa do “*aparecimento do número 5, no lançamento de um dado numerado de 1 a 6*”. Observa a tabela dos resultados experimentais:

Número de lançamento (N)	Frequência absoluta (f_a)	Frequência relativa (f_r)
99	20	$f_r = \frac{f_a}{N} = \frac{20}{99} = 0,2020\dots$
200	42	$f_r = \frac{f_a}{N} = \frac{42}{200} = 0,2100\dots$
500	87	$f_r = \frac{f_a}{N} = \frac{87}{500} = 0,1740\dots$
800	157	$f_r = \frac{f_a}{N} = \frac{157}{800} = 0,1962\dots$
1000	184	$f_r = \frac{f_a}{N} = \frac{184}{1000} = 0,1840\dots$
1500	250	$f_r = \frac{f_a}{N} = \frac{250}{1500} = 0,1666\dots$
...	...	$f_r \approx 0,1666\dots$

A experiência constata que a frequência relativa se aproxima a $0,1666... = \frac{1}{6}$ a medida que aumenta o número de lançamento, isto é, as frequências relativas tendem a estabilizar-se a um determinado valor. A esta constatação que retiramos do exemplo leva-nos a enunciarmos conceito da probabilidade do seguinte modo “*Num grande número de provas, a frequência relativa de um acontecimento tende a estabilizar-se em torno de um número que coincide com a sua probabilidade*”.

2. Definição axiomática⁴ da probabilidade num espaço finito

A noção empírica de probabilidade ligada ao conceito de frequências relativas é inaceitável do ponto de vista de rigor matemático. Todavia, foi baseando-se na noção frequêntista KOLMOGOROV, em 1933, estabeleceu rigorosamente a axiomática da probabilidade.

Seja S um espaço amostral de acontecimento e $P(S)$ o conjunto das suas partes, denomina-se probabilidade de uma aplicação de P de $P(S)$ no conjunto $[0, 1]$ de um números reais que obedecem aos seguintes axiomas:

1. $P(A) \in [0, 1]$ ou $0 \leq P(A) \leq 1$, isto é, a probabilidade de um acontecimento varia 0 á 1;

2. Sendo A e B acontecimentos disjuntos ou independentes ou mutuamente exclusivo ou incompatíveis, definido em S , tem-se:

$$\bullet P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$\bullet P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

3. Dado um acontecimento A com probabilidade $P(A)$, a probabilidade do seu complementar (acontecimento contrário) obtêm-se subtraindo a unidade a probabilidade de A , isto é:

$$\bullet P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad \text{ou} \quad \bullet P(\bar{A}) + P(A) = 1$$

4. A probabilidade de um acontecimento certo é um (1), isto é:

$$\bullet P(S) = 1$$

5. A probabilidade de um acontecimento impossível é zero (0), isto é:

$$\bullet P(\emptyset) = 0$$

⁴Axiomas são verdades inquestionáveis universalmente válidas;

3. Definição clássica da probabilidade – Lei de Laplace

Quando lançarmos uma moeda equilibrada, aceitamos que qualquer uma das faces tem exactamente a mesma chance de aparecer que a outra, isso é, a probabilidade do acontecimento $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$. Dizemos então, que os acontecimentos são **equiprováveis**. Dado um experimento aleatório, sendo S o seu espaço amostral, vamos admitir que todos os elementos de S tenham a mesma chance de acontecer, ou seja, S é um conjunto equiprovável. Definimos a probabilidade de um acontecimento A ao número real $P(A)$, tal que:

$$P(A) = \frac{\text{Número de resultados favoráveis à } A}{\text{Número de resultados possíveis à } S} = \frac{\#(A)}{\#(S)}$$

2.10.7. DETERMINAÇÃO DA PROBABILIDADE DOS ACONTECIMENTOS

Vamos determinar a probabilidades pela definição clássica de probabilidade – Lei de Laplace, para alguns acontecimentos. Ora vejamos:

Exemplo 1: Para o experimento que consiste em lançar um dado de 6 faces. Determinar:

Antes porém de determinar a probabilidade de qualquer acontecimento, devemos determinar o espaço amostral do experimento: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

(a) A probabilidade de sair um número par;

Resolução:

Seja acontecimento **A: Sair um número par**

- O número do resultado favorável do acontecimento A é 3, porque há 3 números pares que são $\{2, 4, 6\}$;

- o número do resultado possível à S é 6, porque há no total 6 números no espaço amostral que são: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- $P(A)$ lê-se probabilidade do acontecimento A , com todos dados disponíveis podemos achar a probabilidade do acontecimento sendo:

$$P(A) = \frac{\text{Número de resultados favoráveis à } A}{\text{Número de resultados possíveis à } S} = \frac{\#(A)}{\#(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

(b) A probabilidade de sair um número maior que 4;

Resolução:

Seja o acontecimento **B: Sair um número maior que 4;**

- O número do resultado favorável do acontecimento B é 2, porque há 2 números maiores que 4, são {5, 6};

- o número do resultado possível à S é 6, porque há no total 6 números no espaço amostral que são: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Com todos dados disponíveis podemos achar a probabilidade do acontecimento sendo:

$$P(B) = \frac{\text{Número de resultados favoráveis à B}}{\text{Número de resultados possíveis à S}} = \frac{\#(B)}{\#(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3};$$

(c) A probabilidade de sair um número menor que 7;

Resolução:

Seja o acontecimento **C: Sair um número menor que 7;**

- O número do resultado favorável do acontecimento C é 6, porque há 6 números menores que 7, são {1, 2, 3, 4, 5, 6};

- o número do resultado possível à S é 6, porque há no total 6 números no espaço amostral que são: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Com todos dados disponíveis podemos achar a probabilidade do acontecimento sendo:

$$P(C) = \frac{\text{Número de resultados favoráveis à C}}{\text{Número de resultados possíveis à S}} = \frac{\#(C)}{\#(S)} = \frac{6}{6} = 1;$$

(Visto que, trata-se uma probabilidade de um acontecimento certo)

(d) A probabilidade de sair um número maior que 6;

Resolução:

Seja o acontecimento **D: Sair um número maior que 6;**

- O número do resultado favorável do acontecimento D é 0, porque não há nenhum número maiores que 6;

- o número do resultado possível à S é 6, porque há no total 6 números no espaço amostral que são: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Com todos dados disponíveis podemos achar a probabilidade do acontecimento sendo:

$$P(D) = \frac{\text{Número de resultados favoráveis à C}}{\text{Número de resultados possíveis à S}} = \frac{\#(D)}{\#(S)} = \frac{0}{6} = 0;$$

(Visto que, trata-se uma probabilidade de um acontecimento impossível)

Exemplo 2: Selecciona-se aleatoriamente a uma carta de um baralho contendo 52 cartas.

Espaço amostral: Num baralho de 52 cartas tem:

$S = \{13 \text{ Espadas, } 13 \text{ Copas, } 13 \text{ Florinhas, } 13 \text{ Ouros}\} = \{4, \text{ Áses, } 4 \text{ Dois, } 4 \text{ Três, } 4 \text{ Quatros, } 4 \text{ Cincos, } 4 \text{ Seis, } 4 \text{ Setes, } 4 \text{ Oitos, } 4 \text{ Noves, } 4 \text{ Dez, } 4 \text{ Valetes - J, } 4 \text{ Damas - Q, } 4 \text{ Reis - K}\}$

(a) Qual é a probabilidade de sair um rei na extracção aleatória de uma carta?

Resolução: Seja acontecimento **A: Sair uma carta rei**

- O número do resultado favorável do acontecimento A é 4, porque há reis num baralho. Com todos dados disponíveis podemos achar a probabilidade do acontecimento sendo:

$$P(A) = \frac{\text{Número de resultados favoráveis à A}}{\text{Número de resultados possíveis à S}} = \frac{\#(A)}{\#(S)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

(b) Qual é a probabilidade de que a carta seja espada?

Resolução: Seja acontecimento **B: Sair uma carta espada**

- O número do resultado favorável do acontecimento A é 13, porque há 13 espadas num baralho. Com todos dados disponíveis podemos achar a probabilidade do acontecimento sendo:

$$P(B) = \frac{\text{Número de resultados favoráveis à B}}{\text{Número de resultados possíveis à S}} = \frac{\#(B)}{\#(S)} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

(c) Qual é a probabilidade de que a carta escolhida ser uma figura?

Resolução: Seja acontecimento **C: Sair uma carta figura**

- O número do resultado favorável do acontecimento C é 12, porque há 12 figuras (4 Valetes - J, 4 Damas - Q, 4 Reis - K) num baralho. Com todos dados disponíveis podemos achar a probabilidade do acontecimento sendo:

$$P(C) = \frac{\text{Número de resultados favoráveis à C}}{\text{Número de resultados possíveis à S}} = \frac{\#(C)}{\#(S)} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

Exemplo 3: Numa caixa há 5 bolas brancas, 6 azuis e 4 vermelhas.

Espaço amostral: Nesta caixa tem num total 15 bolas, $S = \{5 \text{ Brancas}, 6 \text{ Azuis e } 4 \text{ Vermelhas}\}$

(a) Qual é a probabilidade de sair uma bola de cor vermelha?

Resolução: Seja acontecimento **V: Sair uma bola vermelha**

- O número do resultado favorável do acontecimento V é 4, com todos dados disponíveis podemos achar a probabilidade do acontecimento sendo:

$$P(V) = \frac{\text{Número de resultados favoráveis à V}}{\text{Número de resultados possíveis à S}} = \frac{\#(V)}{\#(S)} = \frac{4}{15}$$

(b) Qual é a probabilidade da bola extraída não seja da cor azul?

Resolução: Trata-se da probabilidade do acontecimento contrário e seja acontecimento **A: Sair uma bola de cor azul;**

- O número do resultado favorável do acontecimento A é 6, com todos dados disponíveis podemos achar a probabilidade do acontecimento sendo:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{\text{Número de resultados favoráveis à V}}{\text{Número de resultados possíveis à S}} = 1 - \frac{\#(A)}{\#(S)} = 1 - \frac{6}{15} = \frac{15-6}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

(15) (1)

(c) Qual é a probabilidade de sair duas bolas, uma azul e a outra vermelha sem reposição?

Resolução: Sejam acontecimentos **A: Sair uma bola azul e V: Sair uma bola vermelha;**

Análise: Ora pretendemos achar a probabilidade de extracção de duas bolas, uma de cor azul e a outra vermelha, a probabilidade de sair uma bola de cor azul é $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$, tendo em conta que, saiu uma bola restaram 14 bolas. Sendo assim, a probabilidade de sair uma bola de cor vermelha é $\frac{4}{14} = \frac{2}{7}$, de seguida multiplicamos as probabilidades $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{35}$ que é a probabilidade de sair duas bolas, uma de cor azul e a outra vermelha.

ou

A saída da bola de cor azul não depende a bola da cor vermelha e vice-versa, logo estes acontecimentos são disjuntos ou independentes e mutuamente exclusivos ou incompatíveis, daí podemos aplicar o segundo o axioma que diz:

$$P(A \cap V) = P(A) \cdot P(V) = \frac{6}{15} \cdot \frac{2}{14} = \frac{24}{210} = \frac{4}{35}$$

(d) Qual é a probabilidade de sair duas bolas brancas sem reposição?

Resolução: Seja o acontecimento **B: Sair uma bola branca**

Análise: Ora pretendemos achar a probabilidade de extracção de duas bolas brancas, a probabilidade de sair uma bola branca é $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, tendo em conta que, saiu uma bola branca, restaram 4 bolas no total de 14 bolas. Sendo assim, a probabilidade de sair mais a bola branca é $\frac{4}{14} = \frac{2}{7}$, de seguida multiplica-se as probabilidades $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{21}$ que é a probabilidade de sair duas bolas brancas.

ou

Quando pretendemos determinar a probabilidade de sair duas bolas ou mais bolas da mesma cor, devemos pensar em combinações, o número de resultados favoráveis será combinação de número total das bolas da cor que pretendemos achar a probabilidade, agrupados ao número de bolas que pretendemos extrair, no nosso caso, existem 5 bolas brancas se pretendemos extrair 2 bolas brancas, logo o número de resultado favorável é dado por: $C_2^5 = 10$. Enquanto, o número de resultados possíveis será combinação do número total de bolas existentes na caixa, agrupado ao número de bolas que pretendemos extrair, no nosso caso, existem no total de 15 bolas e queremos extrair duas, logo o número de resultados possível é dado por: $C_2^{15} = 105$. Então temos a probabilidade:

$$P(2 \cdot B) = \frac{\text{Número de resultados favoráveis à B}}{\text{Número de resultados possíveis à S}} = \frac{\#(B)}{\#(S)} = \frac{C_2^5}{C_2^{15}} = \frac{10}{105} = \frac{2}{21}$$

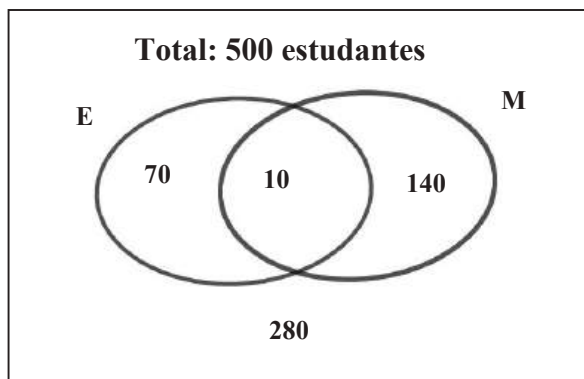
Exemplo 4: Em grupo de 500 estudantes, 80 estudam Engenharia, 150 estudam Medicina e 10 estudam Engenharia e Medicina. Se um estudante é escolhido ao acaso. **Qual é a probabilidade de que:**

- (a) ele estude Medicina e Engenharia?
- (b) ele estude somente Engenharia?
- (c) ele estude somente Medicina?
- (d) ele não estude Medicina, nem Engenharia?
- (e) ele estude Medicina ou Engenharia?

Resolução: Sejam os acontecimentos:

M: O aluno escolhido estude Medicina e E: O aluno escolhido estude Engenharia

Representemos os dados no diagrama de Venn, ao lado apresenta-se a resolução:



$$(a) P(M \cap E) = \frac{\text{Número de resultados favoráveis}}{\text{Número de resultados possíveis}} = \frac{100}{500} = \frac{1}{5},$$

$$(b) P(E) = \frac{\text{Número de resultados favoráveis}}{\text{Número de resultados possíveis}} = \frac{70}{500} = \frac{7}{50},$$

$$(c) P(M) = \frac{\text{Número de resultados favoráveis}}{\text{Número de resultados possíveis}} = \frac{140}{500} = \frac{7}{25},$$

$$(d) P(\overline{M} \cap \overline{E}) = \frac{\text{Número de resultados favoráveis}}{\text{Número de resultados possíveis}} = \frac{280}{500} = \frac{14}{25},$$

$$(e) P(M \cup E) = \frac{\text{Número de resultados favoráveis}}{\text{Número de resultados possíveis}} = \frac{220}{500} = \frac{11}{25},$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Calcule

(a) $7!$

(e) $2 \cdot (4! - 5!)$

(i) $\frac{12!}{9! \cdot 3!}$

(m) $P_4 \cdot A_3^6$

(b) $(3!) \cdot (4!)$

(f) $(4!)^2 \cdot (5!)^2$

(j) A_2^6

(n) $P_8 - C_2^7$

(c) $(8!)^2$

(g) $\frac{10!}{12!}$

(k) C_5^{11}

(o) $\frac{P_5 - C_2^8}{C_2^3}$

(d) $8! + 4!$

(h) $\frac{5! - 4!}{4!}$

(l) $\frac{8! - 7!}{6! - 5!}$

(p) $\frac{P_8 + P_6 + P_4}{P_7 - P_5 - P_3}$

2. Simplifique as seguintes expressões:

(a) $\frac{20! - 18!}{19!}$

(d) $\frac{n!}{(n-2)! + (n-1)!}$

(g) $\frac{(n-1)! - 2n!}{(n-2)! + (n-1)!}$

(b) $\frac{2020!}{2018! + 2019!}$

(e) $\frac{(n+1)!}{n! + (n-1)!}$

(h) $\frac{(n-1)! - (n-2)!}{n!}$

(c) $\frac{(n-3)!}{(n-2)! + (n-1)!}$

(f) $\frac{n! \cdot (n+2)!}{(n-1)! \cdot (n+1)!}$

(i) $\frac{n!}{(n-1)! + (n+1)!}$

3. Resolva

(a) $\frac{(n-2)!}{(n-3)!} = 4$

(d) $\frac{(n-5)!}{(n-3)!} = \frac{1}{56}$

(g) $C_2^n = 10$

(b) $\frac{(n+1)!}{n!} = 67$

(e) $(n-1)!n = 24$

(h) $C_2^{n-3} = 28$

(c) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 12$

(f) $A_2^n = 20$

(i) $\frac{1}{8}A_6^n = 9A_2^{n-2}$

4. Qual é a linha em que a soma dos elementos de uma determinada linha do triângulo de Pascal?

5. A soma dos três últimos de uma linha do triângulo de Pascal é 172. Determine o terceiro elemento da linha seguinte.

6. Determine:

(a) $\binom{11}{8} + \binom{11}{7} =$

(b) $\binom{12}{3} + \binom{12}{4} =$

(c) $\binom{100}{20} - \binom{99}{19} =$

(d) $\binom{20}{5} - \binom{20}{4} =$

7. Determine o valor de x , tal que $\binom{20}{6} + x = \binom{21}{7}$.

8. Desenvolva os seguintes binômios:

(a) $(x+2)^4$

(b) $(x-3)^6$

(c) $(a+2b)^5$

(d) $(2a-b)^7$

9. Sabendo que o desenvolvimento do binómio $(4 - 3x)^n$ tem 6 termos, determine o valor de n .

10. Dada expressão $(4 + \frac{2}{x})^8$. Determine:

- (a) O número de termos do binómio;
- (b) O quarto termo do binómio;
- (c) O termo central do binómio;
- (d) O termo independente do binómio;

11. Dada expressão $(\sqrt{x} + \frac{2}{x})^8$. Determine:

- (a) O termo médio do binómio;
- (b) O termo médio do binómio;
- (c) O termo de maior coeficiente do binómio;
- (d) O termo independente do binómio;

12. Indique o acontecimento e determinar o espaço amostral para cada acontecimento abaixo:

- (a) Uma letra é escolhida entre as letras da palavra PROBABILIDADE;
- (b) Lançar três vezes uma moeda e observar a sequência de caras e coroas;
- (c) Entre 5 pessoas A, B, C, D e E duas são escolhidas para formarem uma comissão;
- (d) Um dado de seis faces é lançado, verificar o número de face de cima os números primos;

13. Quantos números de 4 algarismos diferentes podem se escrever com os algarismos do conjunto $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$?

14. Num campeonato de futebol participam 20 equipas, **quantos resultados possíveis para os 3 primeiros lugares?**

15. Dispomo de 8 cores e queremos pintar uma bandeira de 5 listras. **Quantas listras isso pode ser feito?**

16. As 5 finalistas do concurso para Miss Beira são: Miss Manga, Miss Inhamizua, Miss Ponta-Gêa, Miss Matacuene e Miss Munhava. **De quantas formas o juiz pode escolher 1º, 2º e 3º lugares?**

17. Numa empresa há 7 trabalhadores e pretende criar turnos de 3 trabalhadores cada. **Quantos turnos são possíveis de criar?**

18. Três homens e quatro mulheres decidiram acampar, para garantir a vigia nocturna, organizaram comissões de 3 elementos, tendo sempre um homem. **Quantas comissões foram possíveis de formar?**

19. Várias pessoas encontraram-se numa festa, tendo uma cumprimentado outra pessoa com aperto de mão. Alguém contou apertos que terá havido exactamente 78 apertos de mão. **Quantas eram as pessoas na festa?**

20. Para acompanhar a selecção nacional na copa de África de Sul. É preciso formar-se uma equipa médica que integre dois médicos e três massagistas. Sabendo que estão disponíveis quatros médicos e cinco massagistas, **de quantas maneiras diferentes pode escolher-se a constituição da equipa médica?**

21. Considere os pontos A, B, C, ... de uma circunferência. **Quantos triângulos distintos são determinados pelos 10 pontos?**

22. Determine o número de palavras diferentes que se podem escrever com as letras da palavra **VOTAR**.

23. Com a palavra ESCOLA. Resolve as questões que se seguem:

- (a) Quantos anagramas podemos escrever, com a palavra ESCOLA?
- (b) Quantos anagramas podemos escrever, que começam com a letra O?
- (c) Quantos anagramas podemos escrever, que terminal com a letra S?
- (d) Quantos anagramas podemos escrever, que começam coma letra L e terminal com C?
- (e) Quantos anagramas podemos escrever, com COL juntos?
- (f) Quantos anagramas podemos escrever, que sempre haja a sequencia COL, nesta ordem?

24. Para um debate numa escola que lecciona de 8^a a 12^a classe, foram escolhidos 50 estudantes (dez alunos de cada classe). Findo o debate, um aluno é escolhido ao acaso para fazer comentários sobre o debate. **Qual é a probabilidade de que o escolhido seja aluno da 12^a classe?**

25. Efectua-se duas jogadas com uma moeda equilibrada de cinco meticais. **Qual é a probabilidade de sair, pelo menos, uma face com emblema de república?**

26. O António abre aleatoriamente uma revista com 40 páginas enumeradas de 1 a 40. **Qual é a probabilidade de abrir uma pagina cujo o número é múltiplo de 3?**

27. Uma caixa contém dez camisas das quais quatros são de mangas compridas. Extrai-se duas ao acaso. **Qual é a probabilidade de que nenhuma das camisas extraídas seja de mangas compridas?**

28. Se retirarmos aleatoriamente uma carta com 52 cartas, **qual é a probabilidade de ser um6 ou um Rei?**

29. Numa caixa tem 3 bolas azuis, 4 bolas brancas e 7 bolas pretas. **Qual é a probabilidade de, ao retiramos uma bola ser:**

- (a) Branca
- (b) Preta
- (c) Azul

30. Na cantina de uma escola, há 10 bolos, dos quais, 3 de massa folhada e 7 de arroz, se alguém compra 2 bolos escolhendo-os aleatoriamente, achar a probabilidade de se escolher:

- (a) Arroz
- (b) Massa folhada
- (c) de cada tipo

FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

OBJECTIVOS:

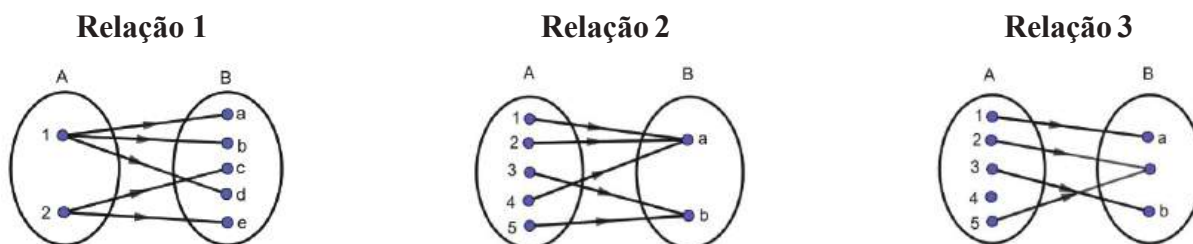
No fim desta unidade, deverás ser capaz de:

- Definir uma função;
- Representar uma função;
- Classificar as funções quanto à Injectividade, Paridade e Monotonia;
- Determinar o Domínio, Contradomínio, Zeros da Função, Monotonia e Variação do Sinal, a partir da sua representação gráfica da função;
- Identificar Determinar o Domínio, Contradomínio, Zeros da Função, Monotonia e Variação do Sinal, a partir da sua expressão Algébrica;
- Determinar o Contradomínio e Período de funções trigonométricas;
- Determinar o Domínio, Contradomínio e Equações de assintótas de funções homográficas;
- Determinar a expressão analítica de uma função composta de duas ou mais funções;
- Determinar a expressão analítica de uma função Inversa para funções injectivas;

Definição: uma função f de A para B ($f: A \rightarrow B$), consiste em dois conjuntos não vazios, de partida A , para o conjunto de chegada B , é uma correspondência que associa a cada elemento x (objecto) de A um e um só elemento y (imagem) de B . simbolicamente escreve-se:

$$\begin{array}{l} f: A \rightarrow B \\ x \rightarrow y = f(x) \end{array}$$

Consideremos as seguintes relações, queremos encontrar a que representa uma função de A para B .



A relação 2 define a função porque nela cada elemento do conjunto de partida (domínio) corresponde um só elemento do conjunto de chegada (contradomínio).

- Chama-se domínio da função ao conjunto de valores de x (objecto) para os quais dada a função é determinada;
- Chama-se domínio da função ao conjunto $\{f(x)\}$ das imagens dos elementos de x em y ;

3.2. Formas de representar uma função

Uma função pode ser definida por: um diagrama, uma expressão verbal, uma expressão analítica, uma tabela e uma representação gráfica

3.3. Classificação das funções

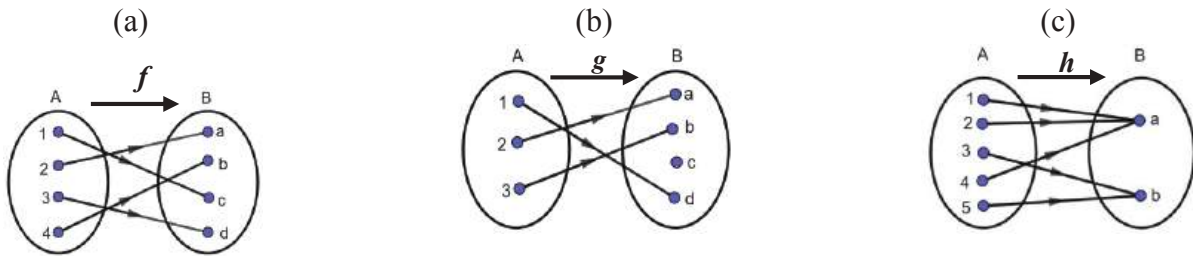
1. Quanto à injectividade

• **Função Injectiva:** Uma função f é injectiva num intervalo do seu domínio se $\forall x_1, x_2 \in Df: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Isto quer dizer objectos diferentes também possuem imagens diferentes. Graficamente vê-se que uma função é injectiva, imaginando rectas horizontais paralelas ao eixo dos x , e verificamos que nenhuma intercepta o gráfico da função em mais do que um ponto.

• **Função Sobrejectiva:** Uma função f é sobrejectiva no seu domínio se todos elementos de contradomínio possuem objecto. Em geral uma função é sobrejectiva quando o contradomínio coincide com o conjunto de chegada. Todas funções de contradomínio o conjuntos dos números reais, são sobrejectivas.

• **Função Bijectiva:** Uma função f é bijectiva no seu domínio se for simultaneamente injectica e sobrejectiva.

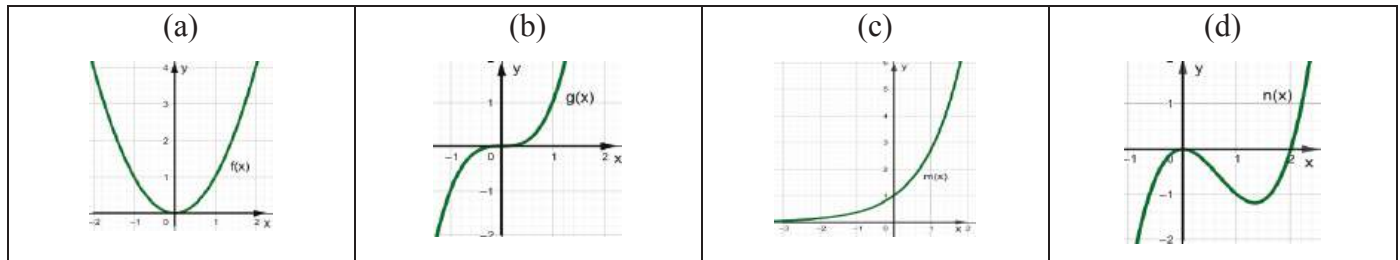
Exemplo 1: Estude a injectividade de cada função representada por diagramas seguintes:



Resolução:

- (a) A função f : é injectiva, é sobrejectiva e é bijectiva;
 (b) A função g : é injectiva, não é sobrejectiva e não é bijectiva;
 (c) A função h : não é injectiva, é sobrejectiva e não é bijectiva;

Exemplo 2: Estude a injectividade de cada função representada pelos gráficos seguintes:



Resolução:

- (a) A função f : não é injectiva, não é sobrejectiva e nem bijectiva;
 (b) A função g : é injectiva, sobrejectiva e bijectiva;
 (c) A função m : é injectiva, não é sobrejectiva e nem bijectiva;
 (d) A função n : não é injectiva, é sobrejectiva e não é bijectiva;

Exemplo 3: Estude a injectividade de cada função representada pelas expressões analíticas seguintes:

- (a) $f(x) = 2x + 3$ (b) $g(x) = x^2 - 7$ (c) $h(x) = 2^x$

Resolução:

- (a) $f(x) = 2x + 3$

• Supondo que a função seja injectiva, então:

$$\forall_{x_1, x_2 \in Df}: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$\text{Para } x_1 = 2 \text{ e } x_2 = 3$$

$$f(2) \neq f(3)$$

$$2 \cdot 2 + 3 \neq 2 \cdot 3 + 3$$

$$7 \neq 9$$

Verdade, a função é injectiva

- A função é sobrejectiva, porque, todos objectos possuem imagens, ou seja o contradomínio coincide com o conjunto de chegada, isto é, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $D_f: y \in \mathbb{R}$.

∴ A função f : é injectiva, sobrejectiva e bijectiva;

(b) $g(x) = x^2 - 7$

- Supondo que a função seja injectiva, então:

$$\forall x_1, x_2 \in D_f: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Para $x_1 = -3$ e $x_2 = 3$

$$g(-3) \neq g(3)$$

$$(-3)^2 - 7 \neq (3)^2 - 7$$

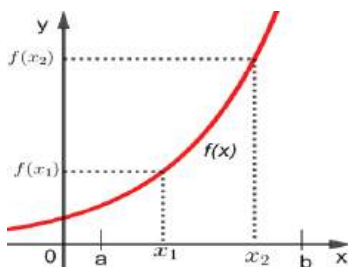
$$2 \neq 2$$

Falsa, a função não é injectiva

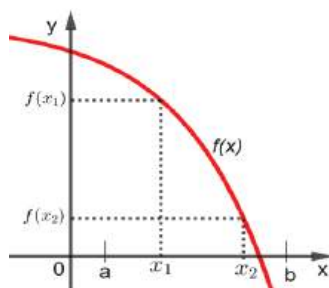
- A função não é sobrejectiva, porque, nem todos objectos possuem imagens, ou seja o contradomínio não coincide com o conjunto de chegada, isto é, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $D_g: y \in [-7, +\infty[$.

2. Quanto á monotonia

- **Função Crescente:** Uma função f diz-se crescente num intervalo $I =]a, b[$ se, $\forall x_1, x_2 \in I: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, como mostra a figura:



- **Função Decrescente:** Uma função f diz-se decrescente num intervalo $I =]a, b[$ se, $\forall x_1, x_2 \in I: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, como mostra a figura:

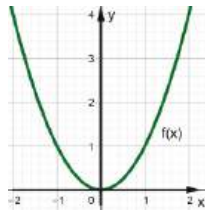


3. Quanto à paridade

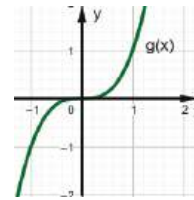
• **Função Par:** Uma função f de domínio D , diz-se par se, $\forall x \in D_f: f(-x) = f(x)$, isto quer dizer, objectos simétricos possuem a mesma imagem.

• **Função Ímpar:** Uma função f de domínio D , diz-se ímpar se, $\forall x \in D_f: f(-x) = -f(x)$, isto quer dizer, objectos simétricos possuem também imagens simétricas.

NOTA IMPORTANTE: Geometricamente podemos verificar a paridade das funções, isto é, o gráfico da função par é simétrico em relação ao eixo dos y , enquanto, o gráfico da função ímpar é simétrico em relação à origem. Como mostram as figuras a seguir:



A função $f(x)$ é par, é simétrica em relação ao eixo oy



A função $f(x)$ é par, é simétrica em relação à origem

Exemplo: Dadas as funções estude paridade

(a) $f(x) = x^2 + 5$

(b) $g(x) = x^3$

(c) $h(x) = 2x + 3$

Resolução:

(a) $f(x) = x^2 + 5$

Supondo que a função seja par, então:

Para $x = 4$; $f(-4) = f(4)$

$$(-4)^2 + 5 = (4)^2 + 5$$

$$16 + 5 = 16 + 5$$

$$21 = 21$$

Verdade, a função é par

(b) $g(x) = x^3$

Supondo que a função seja ímpar, então:

Para $x = 3$, $g(-3) = -g(3)$

$$(-3)^3 = -(3)^3$$

$$-27 = -(27)$$

$$-27 = -27$$

Verdade, a função é ímpar

(c) $h(x) = 2x + 3$

Supondo que a função seja par, então:

Para $x = 2$; $h(-2) = h(2)$

$$2 \cdot (-2) + 3 = 2 \cdot 2 + 3$$

$$-4 + 3 = 4 + 3$$

$$-1 = 7$$

Falso, a função não é par

Supondo que a função seja ímpar, então:

Para $x = 2$; $h(-2) = -h(2)$

$$2 \cdot (-2) + 3 = -(2 \cdot 2 + 3)$$

$$-4 + 3 = -(4 + 3)$$

$$-1 = -7$$

Falso, a função não é ímpar

Logo a função $h(x)$ não é par nem ímpar

3.4. REVISÃO DAS FUNÇÕES

1. FUNÇÃO DO 1º GRAU OU FUNÇÃO LINEAR

Definição: Uma função do 1º grau ou função linear é uma função do tipo $f(x) = ax + b$ onde a e b são coeficientes reais.

Exemplos:

(a) $f(x) = 4x + 5$
 $a = 4$ e $b = 5$

(b) $f(x) = -2x + 1$
 $a = -2$ e $b = 1$

(c) $f(x) = 3x$
 $a = 3$ e $b = 0$

(c) $f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{5}{4}$
 $a = \frac{3}{2}$ e $b = -\frac{5}{4}$

(c) $f(x) = 2$
 $a = 0$ e $b = 2$

■ a chama-se coeficiente angular ou declive, enquanto que, b chama-se coeficiente linear ou ordenada na origem;

■ O gráfico de uma função do 1º grau ou função linear é uma linha recta;

■ Para construir o gráfico de uma função do 1º grau ou função linear é necessário e suficiente conhecer os seus dois pontos onde a recta passa:

■ Para determinar a expressão analítica de uma função do 1º grau ou função linear $f(x) = ax + b$, basta encontrar os valores de a e b ;

■ Se a recta passa pelos pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, então o declive será dado por: $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$;

■ Se dada a recta é conhecida a sua inclinação ao eixo dos x , então, o declive será dado por $a = \operatorname{tg}(\alpha)$;

■ Dadas as funções das rectas, $r: f(x) = a_1x + b_1$ e $s: g(x) = a_2x + b_2$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{► São paralelas: se } a_1 = a_2 \\ \text{► São perpendiculares: se } a_1 \cdot a_2 = -1 \end{array} \right.$

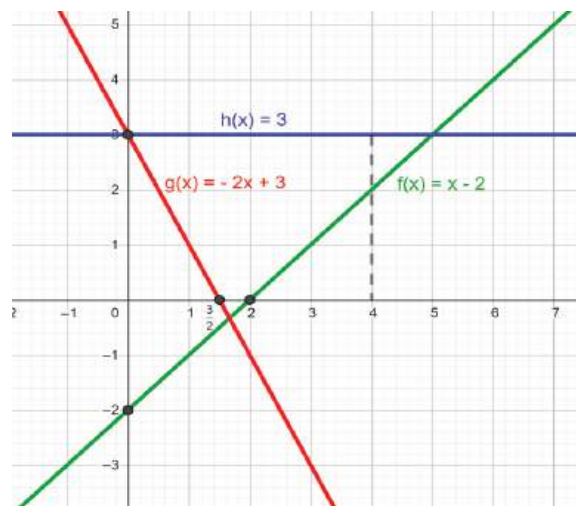
Representação gráfica do 1º grau ou função linear

Vamos representar as funções $f(x) = x - 2$, $g(x) = -2x + 3$ e $h(x) = 3$, no mesmo sistema cartesiano ortogonal (SCO).

$f(x) = x - 2$		
x	0	2
y	-2	0

$g(x) = -2x + 3$		
x	0	$\frac{3}{2}$
y	3	0

$h(x) = 3$		
x	0	4
y	3	3



Exemplo: Dada a recta r pela função $f(x) = 2x + 4$. Determine:

(a) Uma recta t que passa pelo ponto (1, 3) e paralela a dada;

r: $f(x) = 2x + 4$ e t: $g(x) = ax + b$, a recta t deve ser paralela a recta r, então os declives devem ser iguais, isto é $a = 2$, portanto a recta t será dada por **t: $g(x) = 2x + b$** . Para Determinar o valor b, basta substituir o valor de x na função da recta t, isto é, fazendo $g(1) = 3$;

$g(1) = 3 \Rightarrow 2 \cdot 1 + b = 3 \Rightarrow b = 1$, portanto a recta t será dada pela função $g(x) = 2x + 1$, que é paralela a dada.

(b) Uma recta s que passa pelo ponto (1, 3) e perpendicular a dada;

r: $f(x) = 2x + 4$ e s: $h(x) = ax + b$, a recta t deve ser perpendicular a recta r, então o produto dos declives devem ser igual à -1 , isto é, $a_1 \cdot a_2 = -1 \Rightarrow 2 \cdot a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$, portanto a recta s será dada por **s: $h(x) = -\frac{1}{2}x + b$** . Para Determinar o valor b, basta substituir o valor de x na função da recta s, isto é, fazendo $h(1) = 3$;

$h(1) = 3 \Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot 1 + b = 3 \Rightarrow -\frac{1}{2} + b = 3 \Rightarrow b = \frac{7}{2}$, portanto a recta t será dada pela função **$h(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$** , que é perpendicular a dada.

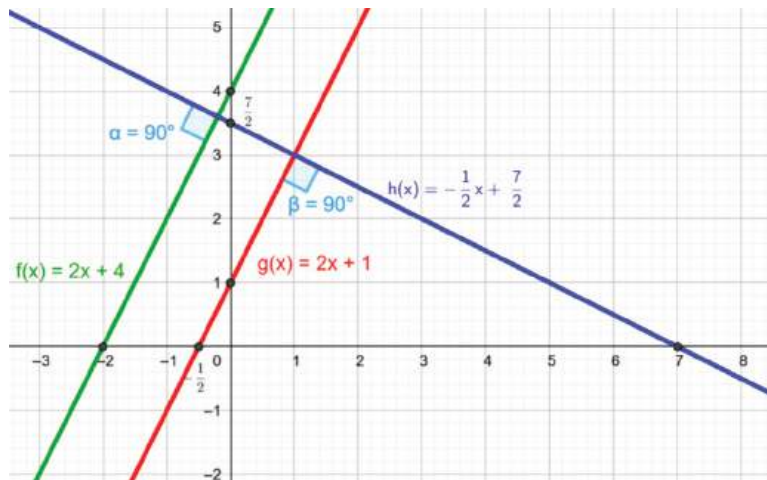
(c) Representa-as no mesmo sistema cartesiano ortogonal

Vamos representar as três rectas, r, s e t no mesmo SCO.

r: $f(x) = 2x + 4$		
x	0	-2
y	4	0

t: $g(x) = 2x + 1$		
x	0	$-\frac{1}{2}$
y	1	0

s: $h(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$		
x	0	7
y	$\frac{7}{2}$	0

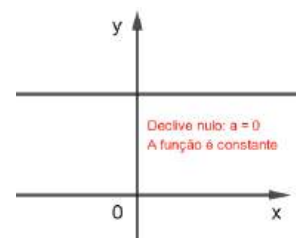
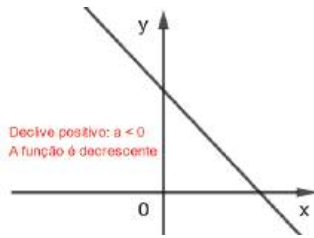
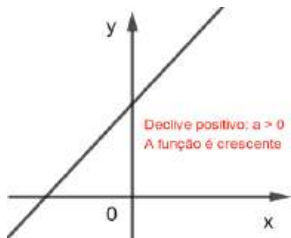


Conclusão: Sobre as do 1º grau ou função linear podemos construir que:

1. O gráfico de uma função linear é uma linha recta;
2. O domínio das funções lineares é o conjunto dos números reais, isto é: $D_f: x \in \mathbb{R}$;
3. O contradomínio das funções lineares é o conjunto dos números reais, isto é: $D'_f: y \in \mathbb{R}$;
4. As funções lineares são injectivas, sobrejectivas e bijectivas;
5. As funções lineares do tipo $y = ax$, são ímpares, caso contrário não são pares nem ímpares;

6. Quanto a monotonia, $f(x) = ax + b$:

- Se $a < 0$, a função linear é decrescente;
- Se $a > 0$, a função linear é crescente;
- Se $a = 0$, a função linear é constante;



2. FUNÇÃO DO 2º GRAU OU FUNÇÃO QUADRÁTICA

Definição: Uma função do 2º grau ou função quadrática é uma função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a , b e c são coeficientes reais mas $a \neq 0$.

- O gráfico de uma quadrática é uma parábola, com

$$x_v = -\frac{b}{2a} \text{ e } y_v = f(x_v) = -\frac{\Delta}{4a} \text{ onde } \Delta = b^2 - 4ac$$

- Para encontrar as raízes ou zeros da função quadrática, acha-se pela fórmula simplesmente por

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

que são chamadas de fórmulas resolventes;

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ou

- A soma das raízes da função quadrática é dada por:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

- O produtos das raízes da função quadrática é dado por:

$$S = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

- A função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, pode ser escrita na forma: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ e $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$

■ Quanto ao valor de a pode – se afirmar:

- Se $a > 0$, a parábola da função está virada para cima;
- Se $a < 0$, a parábola da função está virada para cima;

■ Quanto ao valor de Δ pode – se afirmar:

- Se $\Delta > 0$, a função tem duas raízes diferentes, isto é: $x_1 \neq x_2$;
- Se $\Delta = 0$, a função tem duas raízes iguais, isto é: $x_1 = x_2$;
- Se $\Delta < 0$, a função não tem raízes reais;

Representação gráfica do 2º grau ou função quadrática

Representemos graficamente as funções $f(x) = x^2 - 4x + 3$ e $g(x) = -x^2 - x + 2$. Para tal devemos achar o sentido concavidade da parábola, Ordenada na origem, zeros da função se existirem e coordenadas do vértice, assim vamos:

Exemplo1: Representemos graficamente a função $f(x) = x^2 - 4x + 3$

$$a = 1, b = -4, c = 3$$

- **Sentido concavidade da parábola**

- O valor de a é positivo, daí a concavidade da parábola da função, está virada para cima;

- **Ordenada na origem**

Se $x = 0 \rightarrow f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3$, daí tem-se o ponto de ordenada na origem $(0, 3)$;

- **Zeros da função**

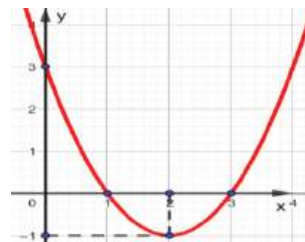
$$f(x) = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1; \\ x_2 = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3; \end{cases}$$

- **Coordenadas do vértice (x_v, y_v)**

$$\left. \begin{aligned} x_v &= -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2 \\ y_v &= -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4}{4 \cdot 1} = -\frac{4}{4} = -1 \end{aligned} \right\} (x_v, y_v) = (2, -1)$$

- **O gráfico da função**



Exemplo2: Representemos graficamente a função $f(x) = -x^2 - x + 2$

$$a = -1, b = -1, c = 2$$

- **Sentido concavidade da parábola**

- O valor de a é negativo, daí a concavidade da parábola da função, está virada para baixo;

- **Ordenada na origem**

Se $x = 0 \rightarrow f(0) = -0^2 - 0 + 2 = 2$, daí tem-se o ponto de ordenada na origem $(0, 2)$;

• Zeros da função

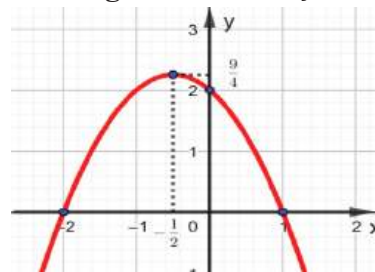
$$f(x) = 0 \rightarrow -x^2 - x + 2 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{-2} = \frac{1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} x_1 = \frac{1-3}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1; \\ x_2 = \frac{1+3}{-2} = \frac{4}{-2} = -2; \end{cases}$$

• Coordenadas do vértice (x_v , y_v)

$$\left. \begin{aligned} x_v &= -\frac{b}{2a} = -\frac{(-1)}{2 \cdot (-1)} = -\frac{1}{2}; \\ y_v &= -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{9}{4 \cdot (-1)} = -\frac{9}{-4} = \frac{9}{4} \end{aligned} \right\} (x_v, y_v) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$$

• O gráfico da função



Conclusão: Sobre as de 2º grau ou função quadrática podemos construir que:

1. O gráfico de uma função quadrática é uma parábola;
2. O domínio da função quadrática é o conjunto dos números reais, isto é: $D_f: x \in \mathbb{R}$;
3. As funções quadráticas não são: injectivas, sobrejectivas e bijectivas;
4. As funções quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + c$ são pares, caso contrário não são pares nem ímpares;

3. FUNÇÃO EXPONENCIAL

Definição: Chama-se função exponencial a uma função do tipo $f(x) = a^x$, onde $a > 0$ e $a \neq 1$.

Exemplos: Algumas funções exponenciais

$$f(x) = 2^x \quad g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} \quad h(x) = (\sqrt{5})^{2-x} \quad m(x) = 3^{x^2+2} \quad n(x) = 0,7^{6-2x} \quad t(x) = e^{1-2x}$$

- O valor de a , deve ser positivo e diferente de um, isto é: $a > 0$ e $a \neq 1$;
- Se o valor de a , for maior que um a função exponencial é crescente e se estiver entre 0 á 1, a função exponencial é decrescente;
- O gráfico de uma função exponencial é uma curva;

Representação gráfica da função Exponencial

Representemos graficamente as funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, para tal devemos achar os valores para

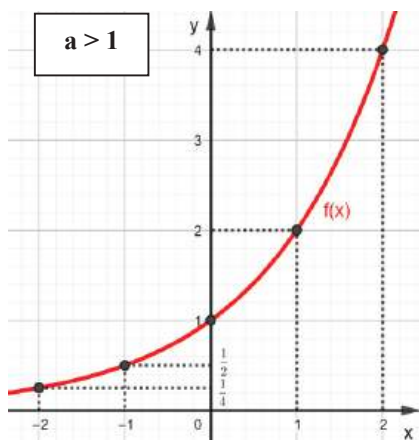
$x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ e $x = 2$, organizados numa tabela de valores, assim vamos:

Exemplo 1: representemos graficamente a função $f(x) = 2^x$

Tabela de valores

x	$y = 2^x$
-2	$y = 2^{-2} = \frac{1}{4}$
-1	$y = 2^{-1} = \frac{1}{2}$
0	$y = 2^0 = 1$
1	$y = 2^1 = 2$
2	$y = 2^2 = 4$

Gráfico



Estudo da função

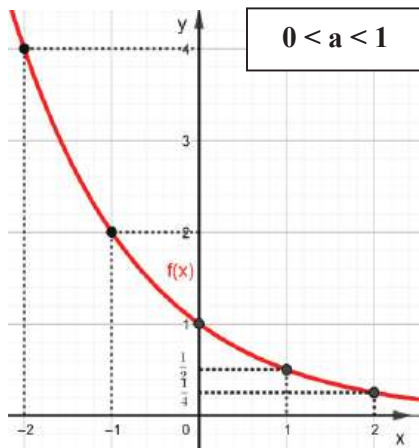
- 1. Domínio (D_f):** $D_f: x \in \mathbb{R}$;
- 2. Contradomínio (D'_f):** $y \in]0, +\infty[$ ou $y \in \mathbb{R}^+$;
- 3. Injectividade:** A função é injectiva, não é sobrejectiva nem sobrejectiva;
- 4. Paridade:** A função não par nem ímpar;
- 5. Variação da monotonia:**
A função é crescente em todo seu domínio;
- 6. Variação do sinal:**
A função é positiva em todo seu domínio;

Exemplo 2: representemos graficamente a função $f(x) = (\frac{1}{2})^x$

Tabela de valores

x	$y = 2^x$
-2	$y = (\frac{1}{2})^{-2} = 4$
-1	$y = (\frac{1}{2})^{-1} = 2$
0	$y = (\frac{1}{2})^0 = 1$
1	$y = (\frac{1}{2})^1 = \frac{1}{2}$
2	$y = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$

Gráfico



Estudo da função

- 1. Domínio (D_f):** $D_f: x \in \mathbb{R}$;
- 2. Contradomínio (D'_f):** $y \in]0, +\infty[$ ou $y \in \mathbb{R}^+$;
- 3. Injectividade:** A função é injectiva, não é sobrejectiva nem sobrejectiva;
- 4. Paridade:** A função não par nem ímpar;
- 5. Variação da monotonia:**
A função é decrescente em todo seu domínio;
- 6. Variação do sinal:**
A função é positiva em todo seu domínio;

Conclusão: Sobre as funções exponenciais podemos construir que:

1. O gráfico de uma função exponencial é uma curva;
2. O domínio da função exponencial é o conjunto dos números reais, isto é: $D_f: x \in \mathbb{R}$;
3. As funções exponenciais são injectivas, não são sobrejectivas nem bijectivas;
4. As funções exponenciais não são pares nem ímpares;
5. Quanto a monotonia, $f(x) = a^x$ pode-se afirmar:
 - Se $a > 1$, a função exponencial é crescente;
 - Se $0 < a < 1$, a função exponencial é decrescente;

4. FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Definição: Chama-se função logarítmica a uma função do tipo $f(x) = \log_a x$, onde $x > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Exemplos: Algumas funções exponenciais

$$f(x) = \log_2 x \quad g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x \quad h(x) = \log_{0,9}(3x + 5) \quad n(x) = \lg(9 - x^2) \quad t(x) = \ln(x - 2)$$

- O valor de x é designado de logaritmando e valor de a é designado de base;
- O valor de a , deve ser positivo e diferente de um, isto é: $a > 0$ e $a \neq 1$;
- Se o valor de a , for maior que um a função logarítmica é crescente e se estiver entre 0 á 1, a função logarítmica é decrescente;
- O gráfico de uma função logarítmica é uma curva;

Representação gráfica da função Logarítmica

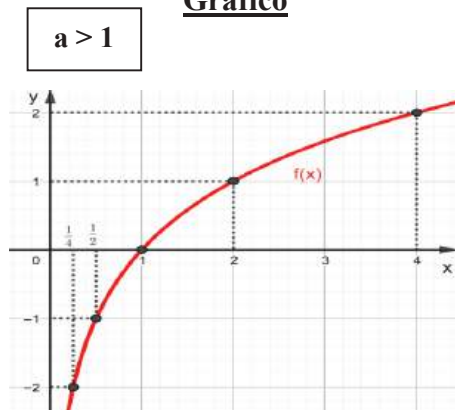
Representemos graficamente as funções $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ para tal devemos achar os valores para $y = -2$, $y = -1$, $y = 0$, $y = 1$ e $y = 2$, organizados numa tabela de valores, assim vamos:

Exemplo1: representemos graficamente a função $f(x) = \log_2 x$

Tabela de valores

x	$y = \log_2 x$
$\frac{1}{4}$	$y = \log_2 \frac{1}{4} = -2$
$\frac{1}{2}$	$y = \log_2 \frac{1}{2} = -1$
1	$y = \log_2 1 = 0$
2	$y = \log_2 2 = 1$
4	$y = \log_2 4 = 2$

Gráfico



Estudo da função

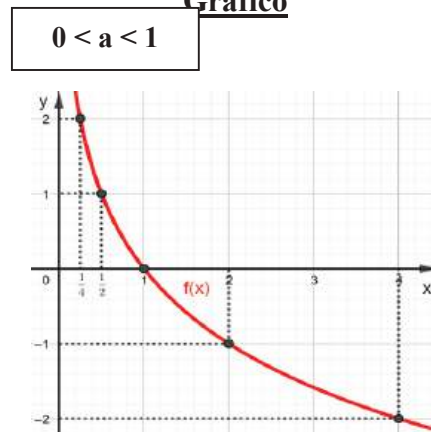
1. **Domínio (D_f):** $D_f: x \in]0, +\infty[$ ou $x \in \mathbb{R}^+$;
2. **Contradomínio (D_f):** $y \in \mathbb{R}$;
3. **Injectividade:** A função é injectiva, sobrejectiva e sobrejectiva;
4. **Paridade:** A função não par nem ímpar;
5. **Variação da monotonia:**
A função é crescente em todo seu domínio;
6. **Variação do sinal:**
A função é positiva em todo seu domínio;
• $]0, 1[$ a função é negativa;
• $]1, +\infty[$ a função é positiva;

Exemplo 2: representemos graficamente a função $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

Tabela de valores

x	$y = \log_{\frac{1}{2}} x$
$\frac{1}{4}$	$y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = 2$
$\frac{1}{2}$	$y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$
1	$y = \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$
2	$y = \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$
4	$y = \log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$

Gráfico



Estudo da função

1. **Domínio (D_f):** $D_f: x \in]0, +\infty[$ ou $x \in \mathbb{R}^+$;
2. **Contradomínio (D_f):** $y \in \mathbb{R}$;
3. **Injectividade:** A função é injectiva, sobrejectiva e sobrejectiva;
4. **Paridade:** A função não par nem ímpar;
5. **Variação da monotonia:**
A função é decrescente em todo seu domínio;
6. **Variação do sinal:**
A função é positiva em todo seu domínio;
• $]0, 1[$ a função é positiva;
• $]1, +\infty[$ a função é negativa;

Conclusão: Sobre a logarítmica podemos construir que:

1. O gráfico de uma função logarítmica é uma curva;
2. O contradomínio da função logarítmica é o conjunto dos números reais, isto é: $D_f: y \in \mathbb{R}$;
3. As funções logarítmicas são injectivas, sobrejectivas e bijectivas;
4. As funções logarítmicas não são pares nem ímpares;
5. Quanto a monotonia, $f(x) = \log_a x$ pode-se afirmar:
 - Se $a > 1$, a função logarítmica é crescente;
 - Se $0 < a < 1$, a função logarítmica é decrescente;

5. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

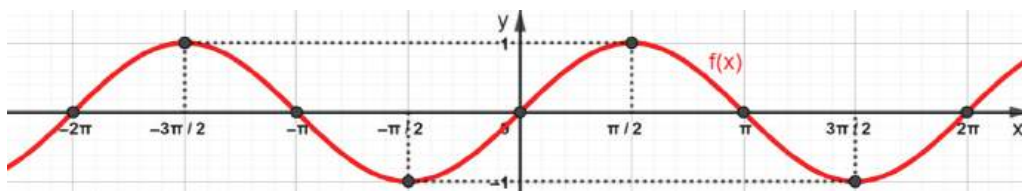
Chamam-se funções trigonométricas à funções que envolvem razões trigonométricas: Seno, Cosseno, Tangente e Cotangente.

5.1. FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA SENO

Chama-se função seno à aplicação que cada número real x , faz corresponder o seno de um ângulo cuja medida em radiano, isto é, $f(x) = \sin x$.

Representação gráfica da função seno

x(Graus)	-360°	-270°	-180°	-90°	0°	90°	180°	270°	360°
x(Radiano)	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
f(x) = senx	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0



Conclusão: Sobre função seno: $f(x) = \sin x$, podemos construir que:

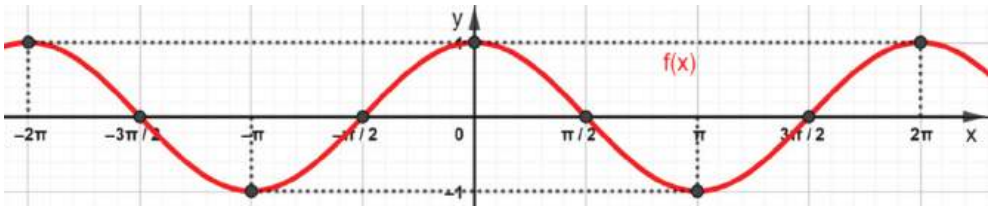
1. O gráfico de uma função seno é sinusóide;
2. O domínio da função seno é o conjunto dos números reais, isto é: $D_f: y \in \mathbb{R}$;
3. O contradomínio da função seno é $[-1, 1]$ isto é: $-1 \leq \sin x \leq 1$;
4. A função seno é periódica no seu domínio (completa as voltas em cada 2π), daí $T = 2\pi$;
5. A função seno não é injectiva, não é sobrejectivas nem bijectivas;
6. A função seno é ímpar;

5.2. FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA COSSENO

Chama-se função cosseno à aplicação que cada número rel x, faz corresponder o seno de um ângulo cuja medida em radiano, isto é, $f(x) = \cos x$.

Representação gráfica da função cosseno

x(Graus)	− 360º	− 270º	− 180º	− 90º	0º	90º	180º	270º	360º
x(Radiano)	−2π	− $\frac{3\pi}{2}$	−π	− $\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
f(x) = cosx	1	0	−1	0	1	0	−1	0	1



Conclusão: Sobre função seno: $f(x) = \cos x$, podemos construir que:

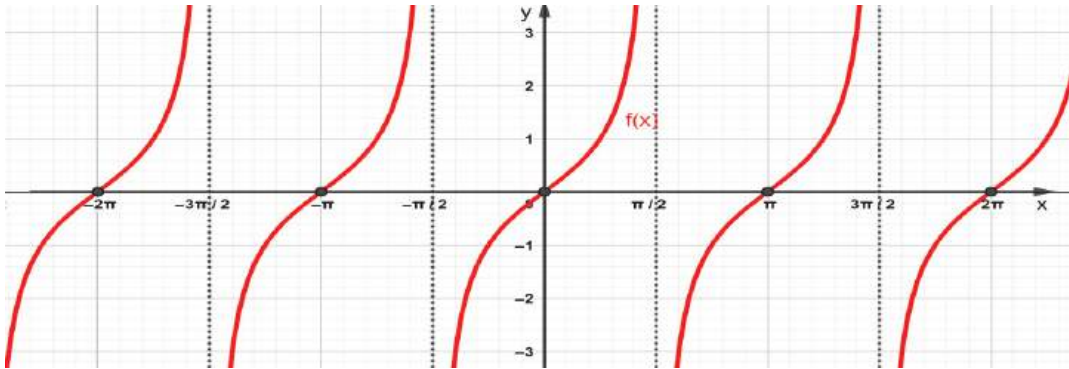
1. O gráfico de uma função cosseno é co-sinusóide;
2. O domínio da função seno é o conjunto dos números reais, isto é: $D_f: y \in \mathbb{R}$;
3. O contradomínio da função cosseno é $[-1, 1]$ isto é: $-1 \leq \text{sen} x \leq 1$;
4. A função cosseno é periódica no seu domínio (completa as voltas em cada 2π), daí $T = 2\pi$;
5. A função cosseno não é injectiva, não é sobrejectivas nem bijectivas;
6. A função cosseno é par;

5.3. FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA TANGENTE

Chama-se função tangente à aplicação que cada número real x, faz corresponder o seno de um ângulo cuja medida em radiano, isto é, $f(x) = \text{tg} x$.

Representação gráfica da função tangente

x(Graus)	− 360º	− 270º	− 180º	− 90º	0º	90º	180º	270º	360º
x(Radiano)	−2π	− $\frac{3\pi}{2}$	−π	− $\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
f(x) = tgx	0	∅	0	∅	0	∅	0	∅	0



Conclusão: Sobre função tangente: $f(x) = \text{tg}x$, podemos construir que:

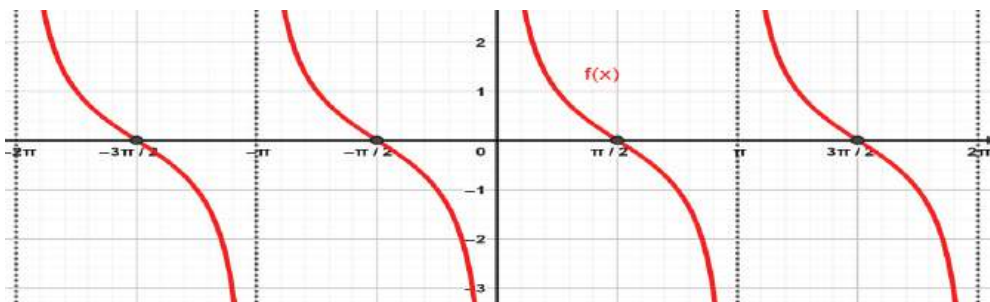
1. O gráfico de uma função tangente é tangetóide;
2. O contradomínio da função tangente é $x \in \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi \}$;
3. O contradomínio da função tangente é o conjunto dos números reais, isto é: $D_f: y \in \mathbb{R}$;
4. A função tangente é periódica no seu domínio (completa as voltas em cada π), daí $T = \pi$;
5. A função tangente não é injectiva, é sobrejectiva não é bijectiva;
6. A função tangente é ímpar;

5.4. FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA COTANGENTE

Chama-se função cotangente à aplicação que cada número real x , faz corresponder o seno de um ângulo cuja medida em radiano, isto é, $f(x) = \text{cotg}x$.

Representação gráfica da função cotangente

x(Graus)	-360°	-270°	-180°	-90°	0°	90°	180°	270°	360°
x(Radiano)	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x) = \text{cotg}x$	0	$\nexists$	0	$\nexists$	0	$\nexists$	0	$\nexists$	0



Conclusão: Sobre função cotangente: $f(x) = \cot g x$, podemos construir que:

1. O gráfico de uma função cotangente é co-tangetóide;
2. O contradomínio da função cotangente é $x \in \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \}$;
3. O contradomínio da função cotangente é o conjunto dos números reais, isto é: $D_f: y \in \mathbb{R}$;
4. A função cotangente é periódica no seu domínio (completa as voltas em cada π), daí $T = \pi$;
5. A função cotangente não é injectiva, é sobrejectiva não é bijectiva;
6. A função cotangente é par;

5.5. DETERMINAÇÃO DO CONTRADÓMIO E PERÍODO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTIAS

■ Determinação do contradomínio de funções trigonométricas

O contradomínio da função seno e funções cosseno é $[-1, 1]$ ou seja $-1 \leq \sin x \leq 1$ e $-1 \leq \cos x \leq 1$, enquanto, o contradomínio da função tangente cotangente é o conjunto dos números reais, assim sendo, só determinaremos o contradomínio para funções seno e cosseno completos, isto é para funções desta natureza:

$$f(x) = A \sin(ax + b) + B \text{ e } g(x) = A \cos(ax + b) + B.$$

Exemplos: Determinar o contradomínio de seguintes funções:

(a) $f(x) = 5 \sin x$

(b) $g(x) = 7 + \sin x$

(a) $h(x) = 3 \cos(2x + \frac{3\pi}{2}) - 5$

Resolução:

(a) $f(x) = 5 \sin x$

$$y \in [-1, 1]$$

$$y \in [-1, 1] \cdot (5)$$

$$y \in [-5, 5]$$

ou

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \cdot (5)$$

$$-5 \leq \sin x \leq 5$$

Daí:

$$D_f: y \in [-5, 5]$$

(b) $g(x) = 7 + \sin x$

$$y \in [-1, 1]$$

$$y \in [-1, 1] + (7)$$

$$y \in [-1 + 7, 1 + 7]$$

$$y \in [6, 8]$$

ou

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 + (7)$$

$$-1 + 7 \leq \sin x \leq 1 + 7$$

$$6 \leq \sin x \leq 8$$

Daí:

$$D_f: y \in [6, 8]$$

(a) $h(x) = 3 \cos(2x + \frac{3\pi}{2}) - 5$

$$y \in [-1, 1]$$

$$y \in [-1, 1] \cdot (3)$$

$$y \in [-3, 3] + (-5)$$

$$y \in [-3 - 5, 3 - 5]$$

$$y \in [-8, -2]$$

ou

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \cdot (3)$$

$$-3 \leq \cos x \leq 3 + (-5)$$

$$-3 - 5 \leq \cos x \leq 3 - 5$$

$$-8 \leq \cos x \leq -2$$

Daí:

$$D_f: y \in [-8, -2]$$

■ Determinação do período de funções trigonométricas

► O período para funções $f(x) = A \sin(ax + b) + B$ e $g(x) = A \cos(ax + b) + B$ é dado por:

$$T = \frac{2\pi}{|a|}$$

► O período para funções $f(x) = A \tan(ax + b) + B$ e $g(x) = A \cot(ax + b) + B$ é dado por:

$$T = \frac{\pi}{|a|}$$

Exemplo 1: Determinar o período de funções:

(a) $f(x) = \sin(4x - \frac{\pi}{2})$ (b) $f(x) = 2\cos(-2x + \frac{\pi}{3})$ (c) $f(x) = 3\tan(2x - \frac{\pi}{5})$ (d) $f(x) = -4\cos(\frac{x}{3})$

Resolução:

(a) $f(x) = \sin(4x - \frac{\pi}{2})$	(b) $f(x) = 2\cos(-2x + \frac{\pi}{3})$	(c) $f(x) = 3\tan(2x - \frac{\pi}{5})$	(d) $f(x) = -4\cot(\frac{x}{3})$
$a = 4$	$a = -2$	$a = 2$	$a = \frac{1}{3}$
$T = \frac{2\pi}{ a }$	$T = \frac{2\pi}{ a }$	$T = \frac{\pi}{ a }$	$T = \frac{\pi}{ a }$
$T = \frac{2\pi}{ 4 }$	$T = \frac{2\pi}{ -2 }$	$T = \frac{\pi}{ 2 }$	$T = \frac{\pi}{ \frac{1}{3} }$
$T = \frac{2\pi}{4}$	$T = \frac{2\pi}{2}$	$T = \frac{\pi}{2}$	$T = \frac{\pi}{\frac{1}{3}}$
$T = \frac{\pi}{2}$	$T = \pi$		$T = 3\pi$

Exemplo 2: Determinar o valor de m, sendo dado período função:

(a) $f(x) = 4\cos(mx + \frac{\pi}{10})$ e $T = 4\pi$ (b) $f(x) = 2\tan(\frac{5\pi}{2} - \frac{2x}{m})$ e $T = 3\pi$

Resolução:

$$\begin{aligned}
 a &= m \\
 T &= \frac{2\pi}{|a|} \\
 \frac{2\pi}{|m|} &= 4\pi \\
 \frac{2\pi}{m} &= 4\pi \\
 m &= \frac{2\pi}{4\pi} \\
 m &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Solução: $\{\frac{1}{2}\}$

Resolução:

$$\begin{aligned}
 a &= -\frac{2}{m} \\
 T &= \frac{2\pi}{|a|} \\
 \frac{2\pi}{|-\frac{2}{m}|} &= 3\pi \\
 \frac{2\pi}{\frac{2}{m}} &= 3\pi \\
 \pi &= \frac{6\pi}{m} \\
 m &= \frac{6\pi}{\pi} \\
 m &= 6
 \end{aligned}$$

Solução: $\{6\}$

3.5. FUNÇÃO HOMOGRAFICA OU HOMÓGRAFA

Uma função é uma função do tipo $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ sendo a, b, c e d coeficientes reais, mas $a \neq 0$ e $c \neq 0$.

Exemplos das funções homográficas:

(a) $f(x) = \frac{2x+3}{x-4}$, $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$ e $d = -4$

(b) $f(x) = \frac{-3x-6}{2x+5}$, $a = -3$, $b = -6$, $c = 2$ e $d = 5$

As características da função homográfica são:

■ A função tem duas assintotas: Assintotas Vertical (A.V.) e Assintotas Horizontal (A.H);

$$\boxed{\text{A.V: } x = -\frac{d}{c} \quad \text{e} \quad \text{A.H: } y = \frac{a}{c}}$$

■ O domínio das funções é o conjuntos dos números reais diferente da assintóta vertical, isto é, $D_f: x \in \mathbb{R} \setminus \{\text{A.V}\}$ ou seja $D_f: x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$;

■ O contradomínio das funções é o conjuntos dos números reais diferente da assintóta vertical, isto é, $D_f: y \in \mathbb{R} \setminus \{\text{A.H}\}$ ou seja $D_f: y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$;

Exemplo 1: Considere a função $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$. Determinar:

Os valores dos coeficientes são: $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$ e $d = 1$

(a) As equações das assintotas

• A.V: $x = -\frac{d}{c} = -\frac{1}{1} = -1$; e • A.H: $y = \frac{a}{c} = \frac{1}{1} = 1$;

(b) O domínio da função

$D_f: x \in \mathbb{R} \setminus \{\text{A.V}\} \Leftrightarrow D_f: x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$;

(c) O contradomínio da função

$D_f: y \in \mathbb{R} \setminus \{\text{A.H}\} \Leftrightarrow D_f: y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$;

(d) Os pontos de intersecção com os eixos ordenados

• Com eixo das abcissas: Zeros da função:

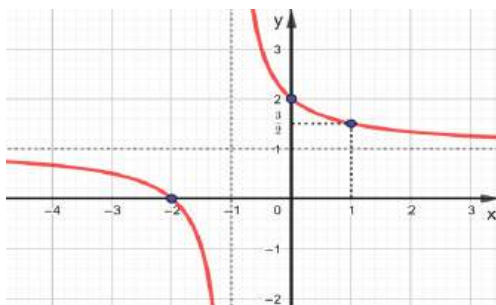
$y = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x+2}{x+1} = 0 \Rightarrow x+2 = 0 \Rightarrow x = -2$; tem-se $(-2, 0)$;

• Com eixo das ordenadas: Ordenada na origem: $x = 0$

$x = 0 \Rightarrow y = f(0) = \frac{0+2}{0+1} = \frac{2}{1} = 2$, tem-se $(0, 2)$;

(e) Esboço do gráfico da função

• Ponto auxiliar: $x = 1 \Rightarrow y = f(1) = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2} \Rightarrow$ tem-se: $(1, \frac{3}{2})$;



As funções homográficas $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ pode ser transformada na forma $f(x) = \frac{r}{cx+d} + q$, para tal basta dividir o numerador por denominador, onde r é o resto da divisão e q é o quociente. Vejamos um exemplo, vamos transformar a função $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$ em $f(x) = \frac{r}{cx+d} + q$, vamos determinar o r e q desta fracção $\frac{x+2}{x+1}$ **ora vejamos:**

$$\begin{array}{r|l} x+2 & x+1 \\ - (x+1) & 1 \\ \hline 1 & \end{array}$$

$r = 1$ e $q = 1$, então: $f(x) = \frac{x+2}{x+1} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x+1} + 1$

Exemplo 2: Considere a função $f(x) = \frac{2x-2}{2x+3}$. Determinar:

Os valores dos coeficientes são: $a = 2$, $b = -2$, $c = 2$ e $d = 3$

(a) As equações das assintóticas

• A.V: $x = -\frac{d}{c} = -\frac{3}{2}$; e • A.H: $y = \frac{a}{c} = \frac{2}{2} = 1$;

(b) O domínio da função

(d) Os pontos de intersecção com os eixos ordenados

$D_f: x \in \mathbb{R} \setminus \{A.V\} \Leftrightarrow D_f: x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$;

• Com eixo das abcissas: Zeros da função:

$$y = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x-2}{2x+3} = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1; \text{ tem-se}$$

(c) O contradomínio da função

$(1, 0)$;

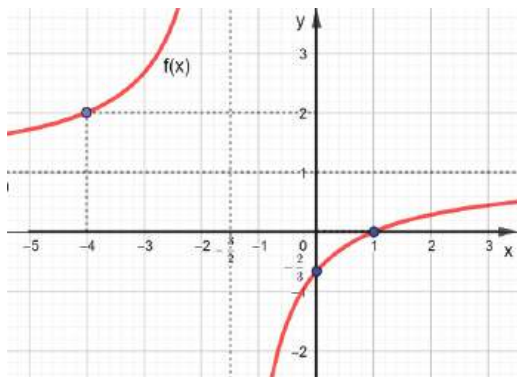
$D_f: x \in \mathbb{R} \setminus \{A.H\} \Leftrightarrow D_f: x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$;

• Com eixo das ordenadas: Ordenada na origem: $x = 0$

$$x = 0 \Rightarrow y = f(0) = \frac{2 \cdot 0 - 2}{2 \cdot 0 + 3} = -\frac{2}{3}, \text{ tem-se } (0, -\frac{2}{3});$$

(e) Esboço do gráfico da função

• **Ponto auxiliar:** $x = -4 \Rightarrow y = f(-4) = \frac{2 \cdot (-4) - 2}{2 \cdot (-4) + 3} = \frac{-10}{-5} = 2$; tem-se: $(-4, 2)$;



(f) Escrever a função na forma $f(x) = \frac{r}{cx + d} + q$

$$\begin{array}{r|l} 2x - 2 & 2x + 3 \\ - (2x + 3) & 1 \\ \hline -5 & \end{array}$$

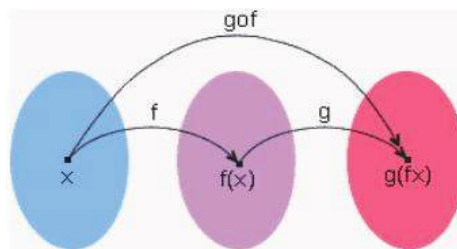
$$r = -5 \text{ e } q = 1, \text{ então: } f(x) = \frac{2x - 2}{2x + 3} \Leftrightarrow f(x) = \frac{-5}{2x + 3} + 1$$

3.6. COMPOSIÇÃO DAS FUNÇÕES – FUNÇÃO COMPOSTA

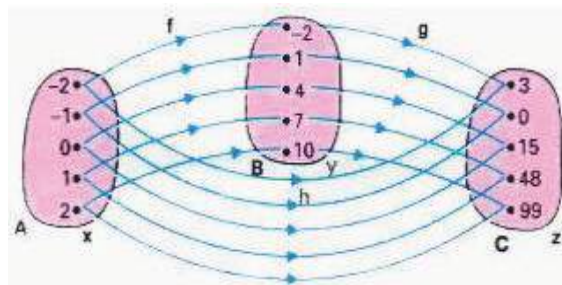
Conceito: A função composta, também chamada de função de função é duas ou mais funções. Dada duas funções, f e g a composta de f com g escreve-se $g \circ f$ (lê-se: g após f ou composta de f com g) cujo o domínio da função g coincide ou tenha parte com o contradomínio da função f e é definida por:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

3.6.1. Ilustração gráfica da composição entre as funções f e g



Consideremos as aplicações $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ e $h: A \rightarrow C$ sendo dadas as funções: $f(x) = 3x + 4$, $g(x) = x^2 - 1$ e $h(x) = 9x^2 + 24x + 15$.



Constatações:

- A função $h(x)$ é função composta de g após f , ou seja $h(x) = g[f(x)]$;
- $h(x) = g[f(x)] = g(y) = z$;
- $h(0) = g[f(0)] = g(4) = 15$;
- $h(-2) = g[f(-2)] = g(-2) = 3$;
- $h(1) = g[f(1)] = g(7) = 48$;
- $h(-1) = g[f(-1)] = g(1) = 0$;
- $h(2) = g[f(2)] = g(10) = 99$;

■ O domínio de $g \circ f$ é o conjunto de todos os números reais que pertencem ao domínio de f tais que $f(x)$ pertencente ao domínio de g . Simbolicamente: $D_{g \circ f} = \{ x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g \}$.

3.6.2. Propriedades sobre composição de funções

Propriedade 1: Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções injectivas, então $g \circ f$ é injectiva;

Propriedade 2: Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções sobrejectivas, então $g \circ f$ é sobrejectiva;

Propriedade 3: Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções bijectivas, então $g \circ f$ é bijectiva;

Propriedade 4: A composição de duas funções não é comutativa, isto é: $f \circ g \neq g \circ f$

Propriedade 5: A composição de três ou mais funções é associativa, isto é: $(f \circ g) \circ h = (f \circ g) \circ h$

Exemplo 1: Considere as seguintes funções $f(x) = 2x + 4$ e $g(x) = 3x - 5$. Determinemos:

(a) $f \circ g(x)$

(b) $g \circ f(x)$

(c) $f \circ f(x)$

(d) $g \circ g(x)$

Resolução:

Para achar a função composta, substitui-se a variável x por uma função.

(a) $f \circ g(x) = f[g(x)] = 2 \cdot g(x) + 4 = 2 \cdot (3x - 5) + 4 = 6x - 10 + 4 = 6x - 6$;

(b) $g \circ f(x) = g[f(x)] = 3 \cdot f(x) - 5 = 3 \cdot (2x + 4) - 5 = 6x + 12 - 5 = 6x + 7$;

(c) $f \circ f(x) = f[f(x)] = 2 \cdot f(x) + 4 = 2 \cdot (2x + 4) + 4 = 4x + 8 + 4 = 4x + 12$;

(d) $g \circ g(x) = g[g(x)] = 3 \cdot (3x - 5) - 5 = 9x - 15 - 5 = 9x - 20$;

Exemplo 2: Considere as seguintes funções $f(x) = \frac{3}{2x-5}$ e $g(x) = 5x + 3$. **Determinar:**

(a) $f \circ g(x)$

(b) $f \circ f(x)$

(c) $g \circ f(x)$

(d) $g \circ g(x)$

Resolução:

(a) $f \circ g(x) = f[g(x)] = \frac{3}{2 \cdot g(x) - 5} = \frac{3}{2 \cdot (5x + 3) - 5} = \frac{3}{10x + 6 - 5} = \frac{3}{10x - 1}$;

(b) $f \circ f(x) = f[f(x)] = \frac{3}{2 \cdot f(x) - 5} = \frac{3}{2 \cdot \frac{3}{2x-5} - 5} = \frac{3}{\frac{6}{2x-5} - 5} = \frac{3}{\frac{6 - 10x + 25}{2x-5}} = \frac{3}{\frac{-10x + 31}{2x-5}} = \frac{3(2x-5)}{-10x + 31} = \frac{6x - 15}{-10x + 31}$;

(c) $g \circ f(x) = g[f(x)] = 5 \cdot f(x) + 3 = 5 \cdot \frac{3}{2x-5} + 3 = \frac{15}{2x-5} + 3 = \frac{15 + 6x - 15}{2x-5} = \frac{6x}{2x-5}$;

(1) $(2x - 5)$

(d) $g \circ g(3)$ - **Pode-se resolver de duas maneiras:**

1ª maneira: Consiste primeiro encontrar a função $g \circ g(x)$ e de seguida substituir-se a variável x por 3;

- $g \circ g(x) = g[g(x)] = 5 \cdot g(x) + 3 = 5 \cdot (5x + 3) + 3 = 25x + 15 + 3 = 25x + 18$, substituindo x por 3, tem-se:
- $g \circ g(3) = 25 \cdot 3 + 18 = 93$;

2ª maneira: Consiste em substituir-se a variável x por 3, na função $g(x) = 5x + 3$, de seguida o resultado obtido, novamente substituir-se a variável x , o resultado é do $g \circ g(3)$;

- $g \circ g(3) = g(5 \cdot 3 + 3) = g(18) = 5 \cdot 18 + 3 = 93$;

(e) $f \circ g(-1) = f[g(-1)] = f[5 \cdot (-1) + 3] = f(-2) = \frac{3}{2 \cdot (-2) - 5} = \frac{3}{-4 - 5} = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$;

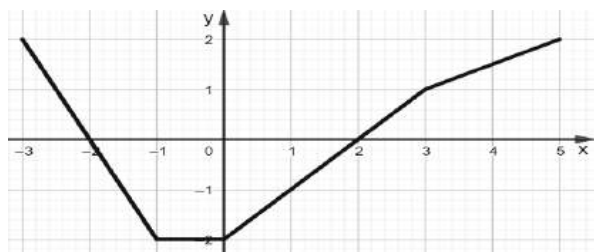
Exemplo 3: Considere a seguinte função f definida pela tabela seguinte:

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	5	6	1	3	2	4

Determinar:

- (a) $f(3) = 1$; (e) $f \circ f \circ f \circ f(6) = f \circ f \circ f(4) = f \circ f(3) = f(1) = f(5) = 2$;
 (b) $f(1) = 5$; (f) $f \circ f \circ f(2) - f \circ f(3) + f(2) = f \circ f(6) - f(1) + 6 = f(4) - 5 + 6 = 3 + 1 = 4$;
 (c) $f \circ f(5) = f(2) = 6$; (g) $f(1) - f \circ f(3) - f \circ f \circ f(5) = 5 - f(1) - f \circ f(2) = 5 - 5 - f(6) = -4$;
 (d) $f \circ f \circ f(4) = f \circ f(3) = f(1) = 5$; (h) $[f \circ f \circ f \circ f(2)]^4 = [f \circ f \circ f \circ f(6)]^4 = [f \circ f \circ f(4)]^4 = [f \circ f(3)]^4 = [f(1)]^4 = 5^4 = 625$;

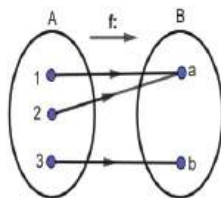
Exemplo 4: Dada a função g definida pelo gráfico **Determine:**



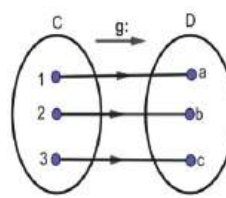
- (a) $g \circ g(0) = g(-2) = 0$;
 (b) $g \circ g \circ g(3) = g \circ g(1) = g(-1) = -1$;
 (c) $g \circ g \circ g \circ g(5) = g \circ g \circ g(2) = g \circ g(0) = g(-2) = 0$;

3.7. FUNÇÕES INVERSAS

Conceito: Consideremos as funções f e g representadas por um diagrama de setas:

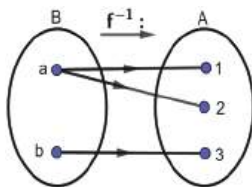


f não é injectiva

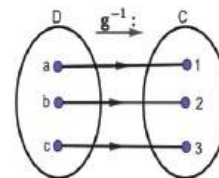


g é injectiva

Invertendo o sentido das setas, considerando agora correspondências inversas de B para A e de D para C , como os diagramas a seguir:



f^{-1} não é função de B para A , porque o objecto “ a ” tem duas imagens ($a, 1$) e ($a, 2$).



g^{-1} é correspondência inversa de g é uma função de D para C .

■ Pode-se concluir que, só as funções injectivas têm inversa, o símbolo f^{-1} representa a função inversa de f ;

3.7.1. Propriedades sobre funções inversas

1. Seja $f^{-1}(x)$ a função inversa de $f(x)$, domínio da função inversa é o contradomínio $f(x)$ e o seu domínio é o domínio da função $f(x)$;

$$\left. \begin{array}{l} \bullet D_{f^{-1}} = D_f' \\ \bullet D_f' = D_{f^{-1}} \end{array} \right\} f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

2. Se a função $f(x)$ é uma função monótona crescente, então a sua inversa é monótona crescente. Se a função $f(x)$ é uma função monótona decrescente, então a sua inversa é monótona decrescente.

3. Seja f uma função real de variável real que possui inversa f^{-1} , é válido $f^{-1}[f(x)] = x, \forall x \in D_f$ ou também válido $f[f^{-1}(x)] = x, \forall x \in D_{f^{-1}}$;

4. Os gráficos $y = f(x)$ e $y = f^{-1}(x)$ são simétricos em relação a recta $y = x$;

3.7.3. Determinação da expressão analítica da função inversa

Sendo dada a expressão analítica $y = f(x)$ para determinar a sua inversa fazemos o seguinte:

1º: Resolvermos a igualdade ou seja a equação a ordem de x (isolar o x);

2º: Trocamos as variáveis y por x e x por y ;

Exemplo 1: Dada a função $f(x) = 3x - 2$;

Representemos graficamente os gráficos dessas funções

1º Passo: Resolvermos a equação a ordem de x ;

$f(x) = 3x - 2$ e $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$ no mesmo SCO.

$$y = 3x - 2$$

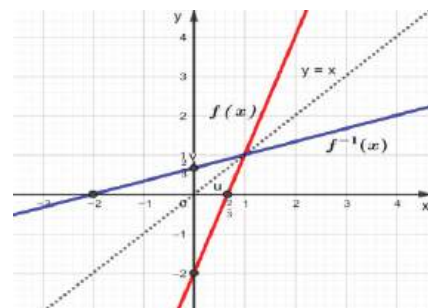
$$3x - 2 = y$$

$$3x = y + 2$$

$$x = \frac{y+2}{3}$$

2º Passo: Trocamos as variáveis y por x e x por y ;

$$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$$



Exemplo 2: Dada a função $f(x) = 4^{x-2}$;

1º Passo: Resolvermos a equação a ordem de x ;

$$4^{x-2} = y$$

$$x - 2 = \log_4 y$$

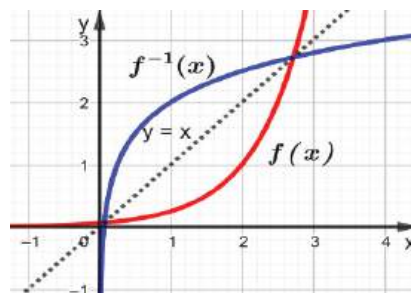
$$x = \log_4 y + 2$$

2º Passo: Trocamos as variáveis y por x e x por y ;

$$f^{-1}(x) = \log_4 x + 2$$

Representemos graficamente os gráficos dessas funções

$f(x) = 4^{x-2}$ e $f^{-1}(x) = \log_4 x + 2$ no mesmo SCO.



Exemplo 3: Dada a função $f(x) = \log_{0,7}(x - 1) + 2$;

1º Passo: Resolvermos a equação a ordem de x ;

$$\log_{0,7}(x - 1) + 2 = y$$

$$\log_{0,7}(x - 1) = y - 2$$

$$x - 1 = 0,7^{y-2}$$

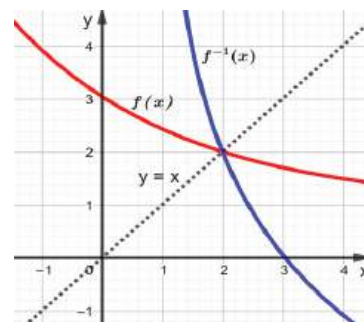
$$x = 0,7^{y-2} + 1$$

2º Passo: Trocamos as variáveis y por x e x por y ;

$$f^{-1}(x) = 0,7^{x-2} + 1$$

Representemos graficamente os gráficos dessas funções $f(x)$

$= \log_{0,7}(x - 1) + 2$ e $f^{-1}(x) = 0,7^{x-2} + 1$ no mesmo SCO.



Exemplo 4: Dada a função $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$;

1º Passo: Resolvermos a equação a ordem de x ;

$$\frac{2x-3}{x+1} = y$$

$$2x - 3 = y(x + 1)$$

$$2x - 3 = xy + y$$

$$2x - xy = y + 3$$

$$x(2 - y) = y + 3$$

$$x = \frac{y+3}{2-y}$$

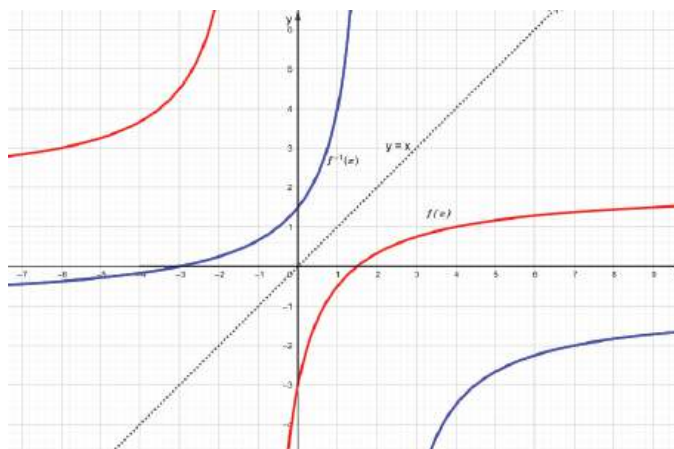
$$x = \frac{y+3}{-y+2}$$

2º Passo: Trocamos as variáveis y por x e x por y ;

$$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{-x+2}$$

Representemos graficamente os gráficos dessas funções

$f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$ e $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{-x+2}$ no mesmo SCO.

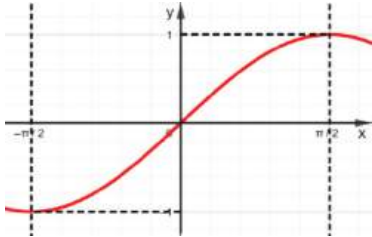


3.7.4. Funções inversas Trigonométricas

1. Função arcseno

A função seno, isto é, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sin x$ evidentemente não é injectiva nem sobrejectiva. Se considerarmos a função seno restrita ao intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e com contradomínio $[-1; 1]$, isto é,

$f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ tal que $f(x) = \sin x$, notamos que:



1º: No intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, f é injectiva pois a função seno é crescente, então: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \sin(x_1) \neq \sin(x_2)$;

2º: f é sobrejectiva pois para todo $y \in [-1, 1]$ existe $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tal que $\sin x = y$;

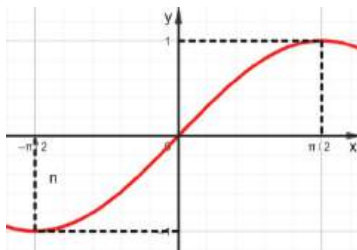
Assim sendo, a função f admite inversa e f^{-1} é denominado função arco-seno. Notemos que f^{-1} tem domínio $[-1, 1]$, contradomínio $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e associa a cada $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tal que y é um arco cujo seno é x e escreve-se:

$y = \arcsin x$ temos que:

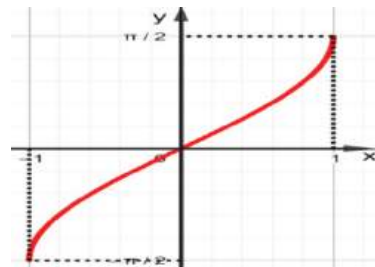
$$y = \arcsin x \Leftrightarrow \sin y = x \text{ e } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

Já vimos que os gráficos de duas funções inversas entre si são simétricas em relação à recta $y = x$, então a partir do gráfico de f obtemos o gráfico de f^{-1} :

$f(x) = \sin x$



$f^{-1}(x) = \arcsin x$



Exemplo: Determinar a inversa da função sendo dada por $f(x) = 3\sin(x - \frac{\pi}{3}) + 2$.

1º Passo: Resolvermos a equação a ordem de x ;

$$3\sin(x - \frac{\pi}{3}) + 2 = y$$

$$3\sin(x - \frac{\pi}{3}) = y - 2$$

$$\sin(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{y-2}{3}$$

$$x - \frac{\pi}{3} = \arcsin(\frac{y-2}{3})$$

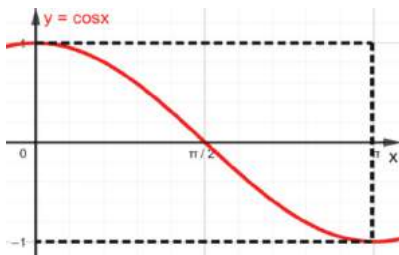
$$x = \arcsin(\frac{y-2}{3}) + \frac{\pi}{3}$$

2º Passo: Trocamos as variáveis y por x e x por y ;

$$f^{-1}(x) = \arcsin(\frac{x-2}{3}) + \frac{\pi}{3}$$

2. Função arccosseno

A função cosseno, isto é, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \cos x$ evidentemente não é injectiva nem sobrejectiva. Se considerarmos a função cosseno restrita ao intervalo $[0; \pi]$ e com contradomínio $[-1, 1]$, isto é, $f: [0; \pi] \rightarrow [-1, 1]$ tal que $f(x) = \cos x$, notamos que:



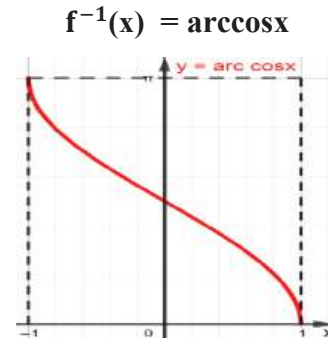
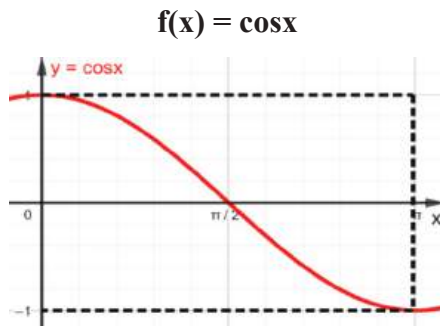
1º: No intervalo $[0, \pi]$, f é injectiva pois a função cosseno é decrescente, então: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \cos(x_1) \neq \cos(x_2)$;

2º: f é sobrejectiva pois para todo $y \in [-1, 1]$ existe $x \in [0, \pi]$, tal que $\cos x = y$;

Assim sendo, a função f admite inversa e f^{-1} é denominado função arco-cosseno. Notemos que f^{-1} tem domínio $[-1, 1]$, contradomínio $[0, \pi]$, e associa a cada $x \in [0, \pi]$, tal que y é um arco cujo cosseno é x e escreve-se: $y = \arccos x$ temos:

$$y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x \text{ e } 0 \leq y \leq \pi$$

Como os gráficos de f e f^{-1} são simétricos em relação à recta $y = x$, podemos construir o gráfico de f^{-1} a partir de f .



Exemplo: Determinar a função sendo dada por $f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{2}) - 4$.

1º Passo: Resolvermos a equação a ordem de x ;

$$\cos(2x + \frac{\pi}{2}) - 4 = y$$

$$\cos(2x + \frac{\pi}{2}) = y + 4$$

$$2x + \frac{\pi}{2} = \arccos(y + 4)$$

$$2x = \arccos(y + 4) - \frac{\pi}{2}$$

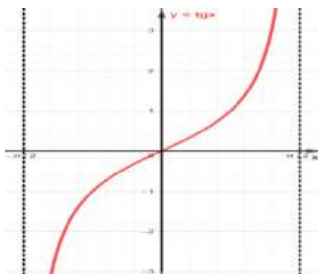
$$x = \frac{\arccos(y + 4)}{2} - \frac{\pi}{4}$$

2º Passo: Trocamos as variáveis y por x e x por y ;

$$f^{-1}(x) = \frac{\arccos(x + 4)}{2} - \frac{\pi}{4}$$

3. Função arctangente

A função tangente, isto é, $f: \{x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \operatorname{tg} x$ é sobrejectiva. Se considerarmos a função tangente restrita ao intervalo aberto $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ e com contradomínio $\mathbb{R}$, isto é, $f:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \operatorname{tg} x$, notamos que:



1º: No intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, f é injetiva pois a função tangente é crescente, então: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \operatorname{tg}(x_1) \neq \operatorname{tg}(x_2)$;

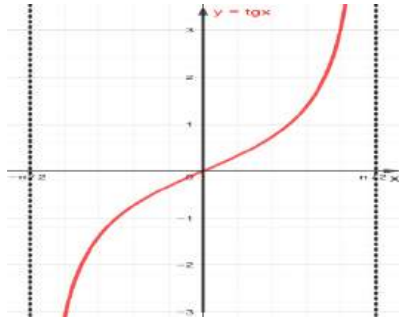
2º: f é sobrejectiva pois para todo $y \in \mathbb{R}$ existe $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tal que $\operatorname{sen} x = y$;

Deste modo a função f admite inversa e f^{-1} é denominado função arco cotangente. Notemos que f^{-1} tem domínio $\mathbb{R}$, contradomínio $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ e associa a cada $x \in \mathbb{R}$ um $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tal que y é um arco cuja tangente é x e escreve-se: $y = \operatorname{arc tg} x$ temos:

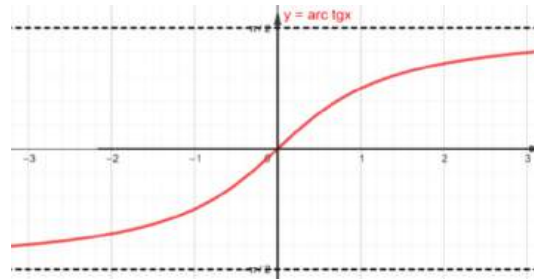
$$y = \operatorname{arc tg} x \Leftrightarrow \operatorname{tg} y = x \text{ e } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

Como de hábito vamos construir o gráfico de f^{-1} a partir f .

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$



$$f^{-1}(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$$



Exemplo: Determinar a função sendo dada por $f(x) = \operatorname{tg}(x + \frac{3\pi}{5}) - 2$.

1º Passo: Resolvermos a equação a ordem de x ;

$$\operatorname{tg}(x + \frac{3\pi}{5}) - 2 = y$$

$$\operatorname{tg}(x + \frac{3\pi}{5}) = y + 2$$

$$x + \frac{3\pi}{5} = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(y + 2)$$

$$x = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(y + 2) - \frac{3\pi}{5}$$

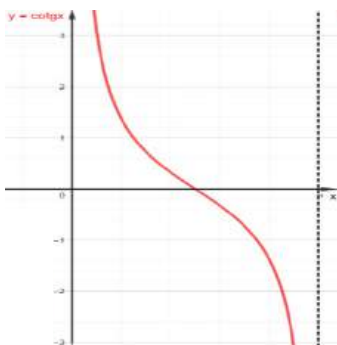
2º Passo: Trocamos as variáveis y por x e x por y ;

$$f^{-1}(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x + 2) - \frac{3\pi}{5}$$

4. Função arccotangente

A função cotangente, isto é, $f: \{ x \mid x \neq \pi + k\pi \} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \operatorname{tg} x$ é sobrejectiva. Se considerarmos a função tangente restrita ao intervalo aberto $]0, \pi[$ e com contradomínio $\mathbb{R}$, isto é, $f:]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \operatorname{cotg} x$, notamos que:

$$f(x) = \operatorname{cotg} x$$



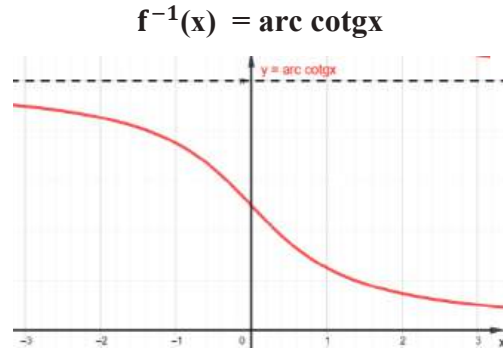
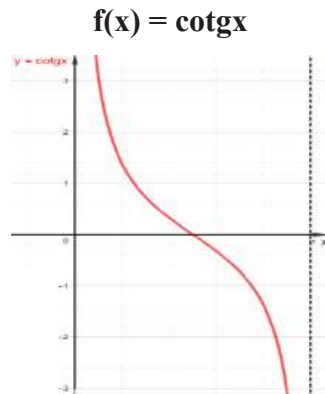
1º: No intervalo $]0, \pi[$, f é injetiva pois a função cosseno é decrescente, então: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \operatorname{cotg}(x_1) \neq \operatorname{cotg}(x_2)$;

2º: f é sobrejectiva pois para todo $y \in \mathbb{R}$ existe $x \in]0, \pi[$, tal que $\operatorname{cotg} x = y$;

Deste modo a função f admite inversa e f^{-1} é denominado função arco tangente. Notemos que f^{-1} tem domínio $\mathbb{R}$, contradomínio $]0, \pi[$, e associa a cada $x \in \mathbb{R}$ um $y \in]0, \pi[$, tal que y é um arco cuja cotangente é x e escreve-se: $y = \text{arc cotg } x$ temos:

$$y = \text{arc cotg } x \Leftrightarrow \text{cotg } y = x \text{ e } 0 < y < \pi$$

Como de hábito vamos construir o gráfico de f^{-1} a partir f .



Exemplo: Determinar a função sendo dada por $f(x) = 4\text{cotg}(x - \frac{\pi}{10})$.

1º Passo: Resolvermos a equação a ordem de x ;

$$4\text{cotg}(x - \frac{\pi}{10}) = y$$

$$\text{cotg}(x - \frac{\pi}{10}) = \frac{y}{4}$$

$$x - \frac{\pi}{10} = \text{arc cot}(\frac{y}{4})$$

$$x = \text{arc cot}(\frac{y}{4}) + \frac{\pi}{10}$$

2º Passo: Trocamos as variáveis y por x e x por y ;

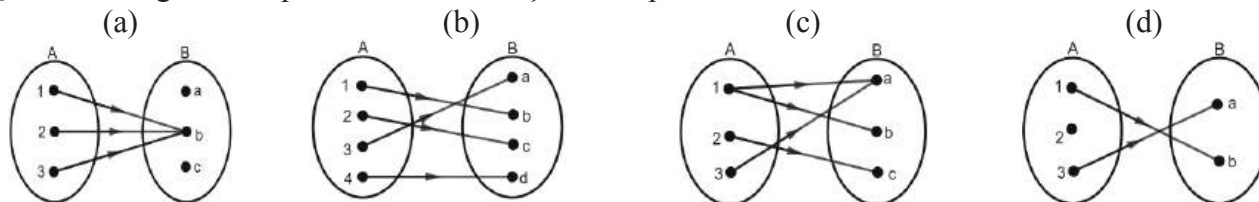
$$f^{-1}(x) = \text{arc cot}(\frac{x}{4}) + \frac{\pi}{10}$$

3.8. QUADRO DE RESUMO SOBRE FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

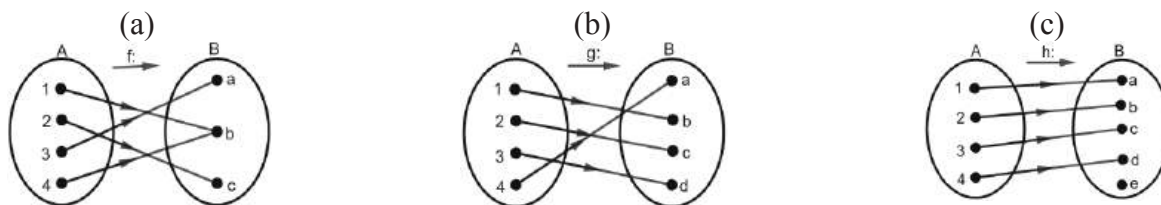
FUNÇÃO	Características									
	Domínio	Contradomínio	Injectiva	Sobrejectiva	Bijectiva	Par	Ímpar	Periódica	Função Inversa	Monotonia
LINEAR $f(x) = ax + b$	$x \in \mathbb{R}$	$y \in \mathbb{R}$	Sim	Sim	Sim	Não	Não	Não	Função Linear	$a > 0$; é crescente $a < 0$; é decrescente
QUADRÁTICA $f(x) = ax^2 + bx + c$	$x \in \mathbb{R}$	Depende de cada função	Não	Não	Não	Sim (Nem todas)	Não	Não	Não tem inversa	Depende de cada função
EXPONENCIAL $f(x) = a^x$	$x \in \mathbb{R}$	Depende de cada função	Sim	Não	Não	Não	Não	Não	Função Logarítmica	$a > 1$; é crescente $0 < a < 1$; é decrescente
LOGARÍTMICA $f(x) = \log_a x$	Depende de cada função	$y \in \mathbb{R}$	Sim	Sim	Sim	Não	Não	Não	Função Exponencial	$a > 1$; é crescente $0 < a < 1$; é decrescente
HOMOGRÁFICA $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{A.V\}$	$y \in \mathbb{R} \setminus \{A.H\}$	Sim	Não	Não	Não	Não	Não	Função Homográfica	Depende de cada função
SENO $f(x) = A \sin(ax + b) + B$	$x \in \mathbb{R}$	Depende de cada função	Não	Não	Não	Não	Sim	Sim	Função arcseno	Oscilante
CO - SENO $f(x) = A \cos(ax + b) + B$	$x \in \mathbb{R}$	Depende de cada função	Não	Não	Não	Sim	Não	Sim	Função arccosseno	Oscilante
TANGENTE $f(x) = A \tan(ax + b) + B$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{A.V\}$	$y \in \mathbb{R}$	Não	Sim	Não	Não	Sim	Sim	Função arctangente	Crescente
CO - TANGENTE $f(x) = A \cot(ax + b) + B$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{A.V\}$	$y \in \mathbb{R}$	Não	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Função arccotangente	Decrescente

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

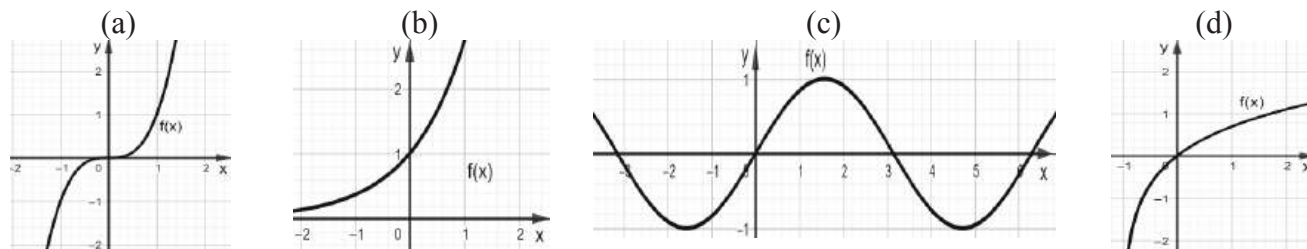
1. Quais dos diagramas representam uma função de A para B?



2. Dos diagramas abaixo, estude a injectividade de cada função (injectiva, sobrejectiva e bijectiva)



3. Dos gráficos abaixo, estude a injectividade de cada função;



4. Dadas as funções estude analiticamente a paridade de cada função (par ou ímpar):

(a) $f(x) = x^2 + 3$ (b) $f(x) = 2x^3 + 2$ (c) $f(x) = -3x - 7$ (d) $f(x) = x^3 - 4$

5. Determine o valor de m de modo que as funções abaixo sejam lineares:

(a) $y = (m^2 - 1)x$ (b) $y = (m - 2)x + m - 3$ (c) $y = \left(-\frac{2m}{3}\right)x + \frac{1}{2}$

6. Dada a função $f(x) = -2x + 3$. **Determine:**

(a) $f(0)$ (b) $f(-3)$ (c) $f(x) = 7$ (d) $f(x) = -5$

7. Determine os zeros das funções a seguir:

(a) $f(x) = 5x + 2$ (b) $f(x) = -2x$ (c) $f(x) = 5x - 3$ (d) $f(x) = 14 - 7x$

8. Determine o valor **k**, de modo que a função $f(x) = (3 - 2k)x + 5$ seja decrescente.

9. Dada a função $f(x) = (3 - m^2)x + 7$. Determine o valor de m de modo que a função seja:

(a) Constante (b) Crescente (c) Decrescente

10. Determine a expressão analítica de uma função linear f , sabendo que a recta passa pelos pontos $(1, 2)$ e $(3, 4)$.
11. O gráfico de $f(x) = ax + b$ passa pelos pontos $A(2, -5)$ e tem coeficiente angular de $\frac{1}{2}$. **Determine a expressão analítica da função.**
12. O gráfico de uma função linear passa por $A(2, 4)$ e forma um ângulo de 30° com o eixo dos ox . **Determine o valor de a e b .**
13. Dada a função da recta $f(x) = x - 2$. **Determine:**
- (a) A função da recta paralela a dada que passa pelo ponto $(2, 5)$;
 - (b) A função da recta perpendicular a dada que passa pelo ponto $(2, -4)$;
 - (c) Represente essas rectas no mesmo sistema cartesiano ortogonal;
14. Dadas as funções $f(x) = 3x - 7$, $g(x) = ax + 4$ e $h(x) = bx - 2$. **Determine:**
- (a) O valor de a sabendo que $f(x)$ e $g(x)$ são paralelas;
 - (b) O valor de b sabendo que $h(x)$ e $g(x)$ são perpendiculares;
15. Dois móveis A e B se deslocam com movimento rectilíneo uniforme, de acordo com as seguintes equações:
Móvel A: $y = 4x - 1$ **Móvel B: $y = x + 5$**
Representa num mesmo SCO os gráficos de A e B. determine o ponto de encontro dos dois móveis.
16. Na produção de peças numa indústria tem custo fixo de 8Mts mais custo variável de 0,50Mts por unidades produzidas.
- (a) Escreva a lei da função;
 - (b) Calcule o custo para 100 peças;
17. Num determinado parque de estacionamento, lê-se o seguinte: 20,00 mt entrada e 15,00 mt por hora de permanência do veículo. **Determine:**
- (a) A fórmula que estabelece o preço a pagar por cada viatura.
 - (b) Quando vai pagar a viatura que ficar estacionada durante 4 horas?
18. Seja a função quadrática $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$. **Calcule $f(-1)$, $f(-2)$, $f(10)$ e $f(2)$.**
19. Dada a função quadrática $f(x) = x^2 - 8x + 12$. Encontre os pontos que intersecção com os eixos x e y .

20. Assinale com V as verdadeiras e F as falsas as afirmações seguintes:

- (a) O gráfico da função $y = x^2 + 2x$ não intercepta o eixo y ;
- (b) O gráfico da função $y = x^2 + 3x + 5$ possui concavidade para baixo;
- (c) O gráfico da função $y = 5x - 7$ é decrescente;
- (d) A equação $x^2 + 25 = 0$ possui duas raízes reais e diferentes;
- (e) A soma das raízes da função $y = x^2 - 3x - 10$ é igual a 3;

21. Dada a função $f(x) = (m - 2)x^2 + 3x - 12$. Determine o valor de m de modo que:

- (a) A função seja quadrática ou de 2º grau;
- (b) A função seja linear ou de 1º grau;
- (c) A parábola da função esteja virada para cima;
- (d) A parábola da função esteja virada para baixo;

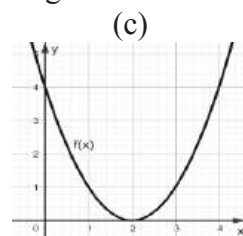
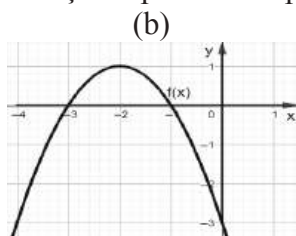
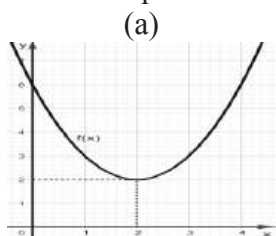
22. Dada a função $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$. Determine:

- (a) Ordenada na origem;
- (b) Zeros da função;
- (c) As coordenadas do vértice;
- (d) Soma das raízes;
- (e) Produto das raízes;
- (f) Esboce o seu gráfico;

23. Dada a função $f(x) = 2x^2 + 8x + 11$. Determine:

- (a) Ordenada na origem;
- (b) Zeros da função;
- (c) As coordenadas do vértice;
- (d) Soma das raízes;
- (e) Produto das raízes;
- (f) Esboce o seu gráfico;

24. Determine a expressão analítica de cada função representada pelos gráficos a seguir:



25. As raízes da equação $2x^2 + bx + c = 0$ são 3 e -4. Determine o valor de $b - c$?

26. A função $y = x^2 + kx + m$ passa pelo pontos (1, 2) e (3, 12). Apresente a expressão analítica da função.

27. A diferença entre dois números é 8. Qual deve ser um deles para que o produto seja mínimo?

28. A respeito das funções trigonométricas. Assinale com V as verdadeiras e F as falsas as afirmações seguintes:

- (a) $f(x) = \cos(x + \pi)$ é equivalente à função $g(x) = -\cos(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$;
- (b) $f(x) = \cos(x)$ é uma função par;
- (c) $f(x) = \sin(x)$ é uma função ímpar;
- (d) $f(x) = \sin(x + \pi)$ é equivalente à função $g(x) = -\sin(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$;

29. Determine o período e esboce o gráfico das seguintes funções:

(a) $y = \sin(4x) - 5$ (b) $y = 5\cos(2x + \frac{2\pi}{3})$ (c) $y = -\operatorname{tg}(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}) - 1$ (d) $y = \operatorname{cotg}(-2x + \frac{\pi}{8}) - 3$

30. Determine o k nos seguintes casos:

(a) $f(x) = \operatorname{cotg}(\frac{2x}{m} + \frac{\pi}{3})$, $T = 5\pi$;

(c) $m(x) = \operatorname{tg}(\frac{mx}{7} - \frac{\pi}{5})$, $T = \frac{5\pi}{9}$;

(b) $h(x) = \cos(-8mx)$, $T = \frac{4\pi}{3}$;

(d) $g(x) = \sin(2\pi - \frac{m}{3}x)$, $T = \frac{7\pi}{6}$;

31. Sejam f e g funções reais tais que $f(x) = 10 - 13x$ e $g(x) = 2x - 4$. **Determine.**

(a) $f[g(x)]$

(b) $g[f(x)]$

(c) $f[f(x)]$

(d) $g[g(x)]$.

32. Suponha a função real $g(x) = x + 1$ e $f(x) = x^4$. **Encontre:**

(a) $f[g(x)]$

(b) $g[f(x)]$

(c) $f[f(x)]$

(d) $g[g(x)]$.

33. Sejam f e g funções reais tais que $f(x) = 3x + 2$ e $g(x) = 2x^2$. **Determine.**

(a) $f[g(0)]$

(b) $g[f(1)]$

(c) $f[f(2)]$

(d) $g[g(-2)]$.

34. Considere $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$ e $g(x) = x - 1$. **Calcule $f[g(4)]$.**

35. Seja $f(x) = x^2 + 2x + 1$ e $g(x) = -2x - 1$. **Determine:**

(a) $f[g(x)]$

(b) $g[f(x)]$

(c) $f[g(x)] - g[f(x)]$

(d) $f[f(0)] + g[g(0)]$.

36. As funções $f(x) = 3 - 4x$ e $g(x) = 3x + m$ são tais que $f[g(x)] = g[f(x)]$, qualquer que seja x real. **Determine valor de m.**

37. Sejam f e g funções reais, sendo que $f(x) = 4x - 2$ e $f[g(x)] = 2x + 10$. **Determine a lei de formação da função g(x).**

38. Sejam f e g funções reais tais que $f[g(x)] = -10x - 13$ e $g(x) = 2x + 3$. **Determine f(x).**

39. Dadas as funções reais $f(x) = 2x - 6$ e $g(x) = ax + b$, se $f[g(x)] = 12x + 8$, **Determine o valor de a + b.**

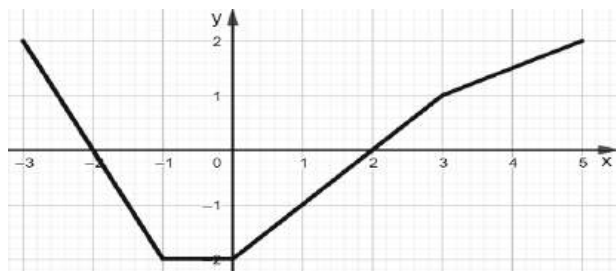
40. Considere a seguinte função f definida pela tabela seguinte:

x	1	2	3	4	5	6
f(x)	4	5	6	3	2	1

Determinar:

- (a) $\text{fofof}(6)$ (c) $f(1) - \text{fof}(3) - \text{fofof}(5)$ (e) $[\text{fofofofof}(2)]^3$
 (b) $\text{fof}(1)$ (d) $4\text{fofof}(4) + 3\text{fof}(3) - 5\text{fofof}(5)$ (f) $-\text{fofofof}(1) + 2\text{fofof}(2) - 10\text{fofof}(3)$

41. Dada a função $g(x)$ definida pelo gráfico



Determine:

- (a) $\text{gog}(-0,5) - \text{gogog}(2)$;
 (b) $\text{gogog}(0) - \text{gog}(1) + \text{gogog}(-1)$;
 (c) $\text{gogog}(5) + \text{gogog}(-2) - \text{gog}(-3)$;
 (d) $-2\text{gog}(-2) - \text{gog}(-1) - 3\text{gog}(5)$;
 (e) $\text{gogog}(0) + \text{gog}(0) - \text{gog}(0)$;

42. Determine a função inversa das seguintes funções:

- (a) $y = 4x + 3$ (b) $y = 7x$ (c) $y = 6x - 2$ (d) $y = 9x - 3$ (e) $y = -x + 7$

43. Determine a função inversa das seguintes funções:

- (a) $f(x) = 10^{2x-5}$ (c) $h(x) = \log_{3,7}(8 - 5x)$ (e) $n(x) = 7^{\frac{5}{2x+3}}$ (g) $l(x) = \log_3(x - 3) + 2$
 (b) $g(x) = \frac{3x-7}{4-5x}$ (d) $m(x) = e^{1-\frac{4}{3}x}$ (f) $t(x) = \ln(x+3) - 2$ (h) $q(x) = \frac{3x+2}{3-2x} + 1$

44. Determine a função inversa das seguintes funções:

- (a) $y = \sin(4x) - 5$ (b) $y = 5\cos(x + \frac{2\pi}{3})$ (c) $y = -\text{tg}(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}) - 1$ (d) $y = \text{cotg}(-2x + \frac{\pi}{8}) - 3$

45. Determine a função inversa das seguintes funções:

- (a) $y = \text{arc sen}(3x + 2)$ (b) $y = -2\text{arc tg}(x - \frac{2\pi}{3})$ (c) $y = \text{arc cos}(5x + 3) - \frac{\pi}{6}$ (d) $y = \text{arc cotg}(10x + 2)$

46. Seja a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{2x-1}{3}$. Calcule $f^{-1}(2)$.

47. Dada a função $f(x) = 11 - 5x$. Determine sem achar a inversa as seguintes alíneas:

- (a) $f^{-1}(-3)$ (b) $f^{-1}(-1)$ (c) $f^{-1}(0)$ (d) $f^{-1}(4)$ (e) $f^{-1}(10)$

48. A água é essencial para a vida e está presente na constituição de todos os alimentos. Em regiões com escassez de água, é comum a utilização de cisternas para a captação e armazenamento da água da chuva. Ao esvaziar um tanque contendo água da chuva, a expressão $V(t) = -\frac{1}{43200}t^2 + 3$ representa o volume (em m^3) de água presente no tanque no instante t em minutos. Qual é o tempo, em horas, necessário para que o tanque seja esvaziado?

49. Um certo reservatório, contendo $72 m^3$ de água, deve ser drenado para limpeza. Decorridas t horas após o início da drenagem, o volume de água que saiu do reservatório, em m^3 , é dado por $v(t) = 24t - 2t^2$. **Sabendo-se que a drenagem teve início às 10 horas, o reservatório estará completamente vazio às:**

50. O lucro de uma microempresa, em função do número de funcionários que nela trabalham, é dado, em milhares de reais, pela fórmula $L(n) = 36n - 3n^2$. Com base nessas informações, **Qual é o lucro máximo dessa microempresa?**

51. Uma bola, ao ser chutada num tiro de meta por um goleiro, numa partida de futebol, teve sua trajetória descrita pela equação $h(t) = -2t^2 + 8t$ ($t \geq 0$), onde t é o tempo medido em segundo e $h(t)$ é a altura em metros da bola no instante t . **Determine, apos o chute:**

- a) o instante em que a bola retornará ao solo.
- b) a altura atingida pela bola.

52. O número de ocorrências registradas das 12 às 18 horas em um dia do mês de janeiro, em uma delegacia do interior de Minas Gerais, é dado por $f(t) = -t^2 + 30t - 216$, em que $12 \leq t \leq 18$ é a hora desse dia. **Qual é o número máximo de ocorrências nesse período do dia foi?**

53. Uma empresa criou o modelo matemático $L(x) = -100x^2 + 1000x - 1900$ para representar o lucro diário obtido pela venda de certo produto, na qual x representa as unidades vendidas. **O lucro máximo diário obtido por essa empresa é igual a:**

54. No estudo de uma população de bactérias, identificou-se que o número N de bactérias, t horas após o início do estudo, é dado por $N(t) = 20 \cdot 2^{1,5t}$. **Nessas condições, em quanto tempo a população de mosquitos duplicou?**

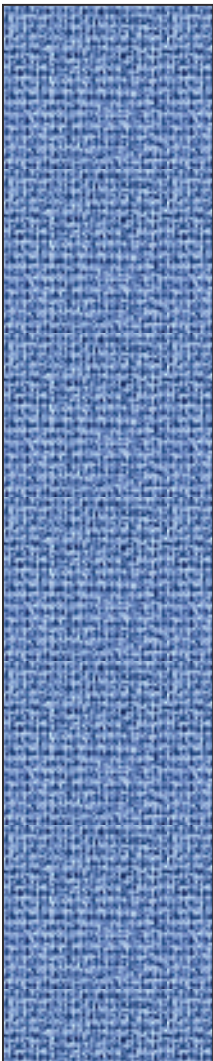
55. Um grupo de biólogos está estudando o desenvolvimento de uma determinada colônia de bactérias e descobriu que sob condições ideais, o número de bactérias pode ser encontrado através da expressão $N(t) = 2000 \cdot 2^{0,5t}$, sendo t em horas. **Considerando essas condições, quanto tempo após o início da observação, o número de bactérias será igual a 8192000?**

56. O lucro L (em contos) obtido na venda de uma peça depende do número x de unidade produzidas mensalmente, de acordo com a fórmula $L(x) = \lg(10 + \frac{x}{4})$.

(a) Se a fábrica tiver a capacidade de produzir 500 e 800 unidades por mês, entre que valores variará o lucro obtido em cada peça?

(b) Qual deve ser o número de unidade produzidas num mês para que o lucro unitário seja 5 contos?

FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL NATURAL (SUCESSÕES NUMÉRICAS)



OBJECTIVOS:

No fim do ano, deverás ser capaz de:

- Identificar as sucessões numéricas;
- Escrever os termos que constituem uma sucessão;
- Determine o termo geral de uma sucessão;
- Representar gráficamente uma sucessão;
- Estudar a monotonia da sucessão;
- Verificar se uma sucessão é uma progressão aritmética ou é uma progressão geométrica;
- Resolver problemas práticos da vida que são conducentes a progressão aritmética é ou geométrica;

4.1. NOÇÃO DE SUCESSÃO NUMÉRICA

Definição: Chama-se sucessão numérica a toda colecção de números depositos ou colocados numa certa ordem (um após outro), crescente ou decrescente tornando a sua enumeração. Uma sucessão é uma aplicação (função) de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$, isto quer dizer, é uma função cujo o domínio da variável é conjunto dos números naturais ($n \in \mathbb{N}$) e o contradomínio das imagens é o conjunto dos números reais ($a_n \in \mathbb{R}$).

Uma sucessão pode ser representada pela qualquer letra minúscula ou maiúscula do alfabeto latino, ou seja ($A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n, \dots, U_n, V_n, Y_n, X_n, Z_n$) ou por ($a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n, \dots, u_n, v_n, y_n, x_n, z_n$). Vamos representar as sucessões pela letra minúscula, deste modo, a sucessão fica escrita na forma $a_n = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots)$.

Os valores $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_n$, dizem-se termos da sucessão, enquanto que, os valores $1, 2, 3, \dots, n$, são números naturais denominado por índice ou ordem. Assim o valor a_1 designa-se por primeiro termo ou termo de ordem um.

Exemplos: Escrever os termos das seguintes sucessões:

(a) Sucessão dos números pares: $a_n = (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \dots)$;

(b) Sucessão dos números ímpares: $b_n = (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \dots)$;

Existem sucessões finitas ou infinitas, conforme o número de termos finitos ou infinitos respectivamente.

Exemplos: Escrever os termos das seguintes sucessões, e de seguida diga se a sucessão é finita ou infinita

(a) Sucessão composta por todos divisores de 24, escrita em ordem crescente;

$a_n = (1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24)$, a sucessão é finita;

(b) Sucessão composta por todos múltiplos de 3, escrita em ordem crescente;

$b_n = (3, 6, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, \dots)$, a sucessão é infinita;

4.2. TERMO GERAL DE UMA SUCESSÃO OU TERMO DE ORDEM n

Termo geral de uma sucessão ou termo de ordem n é uma expressão matemática, em que se encontra a letra n , (a ordem do termo considerado) e de modo que, se pode obter todos os seus termos, ao atribuir a variável n , pelos valores, $1, 2, 3, 4, \dots$, obteremos os termos da sucessão, um após um.

Exemplos: Algumas sucessões dadas por termos gerais

$$a_n = 2n; \quad b_n = -3n + 5; \quad c_n = \frac{3}{n}; \quad d_n = n^2 + 3; \quad x_n = 0,3 \cdot 3^{n+1}$$

Exemplo 1: Calcular os 5 primeiros termos da sucessão definida por:

(a) $a_n = 2n$

(b) $b_n = 2n - 1$

(c) $c_n = \frac{n+2}{n+1}$

(d) $d_n = \frac{1}{2^n}$

Para calcular os 5 primeiros termos da sucessão definida pelo termo geral, basta atribuir a variável n , pelos valores, 1, 2, 3, 4 e 5, assim temos:

(a) $a_n = 2n$

Para $n = 1$; $a_1 = 2 \cdot 1 = 2$;

Para $n = 2$; $a_2 = 2 \cdot 2 = 4$;

Para $n = 3$; $a_3 = 2 \cdot 3 = 6$;

Para $n = 4$; $a_4 = 2 \cdot 4 = 8$;

Para $n = 5$; $a_5 = 2 \cdot 5 = 10$;

(b) $b_n = 2n - 1$

Para $n = 1$; $b_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1$;

Para $n = 2$; $b_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3$;

Para $n = 3$; $b_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5$;

Para $n = 4$; $b_4 = 2 \cdot 4 - 1 = 8 - 1 = 7$;

Para $n = 5$; $b_5 = 2 \cdot 5 - 1 = 10 - 1 = 9$;

Os 5 primeiros termos desta sucessão são:

$a_n = (2, 5, 8, 11, 14, \dots)$

Os 5 primeiros termos desta sucessão são:

$b_n = (1, 3, 5, 7, 9, \dots)$

(c) $c_n = \frac{n+2}{n+1}$

Para $n = 1$; $c_1 = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}$;

Para $n = 2$; $c_2 = \frac{2+2}{2+1} = \frac{4}{3}$;

Para $n = 3$; $c_3 = \frac{3+2}{3+1} = \frac{5}{4}$;

Para $n = 4$; $c_4 = \frac{4+2}{4+1} = \frac{6}{5}$;

Para $n = 5$; $c_5 = \frac{5+2}{5+1} = \frac{7}{6}$;

(d) $d_n = \frac{1}{2^n}$

Para $n = 1$; $d_1 = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$;

Para $n = 2$; $d_2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$;

Para $n = 3$; $d_3 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$;

Para $n = 4$; $d_4 = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$;

Para $n = 5$; $d_5 = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$;

Os 5 primeiros termos desta sucessão são:

$c_n = (\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \dots)$

Os 5 primeiros termos desta sucessão são:

$d_n = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots)$

■ Uma sucessão pode ser definida por recorrência através de um processo do qual, para determinar os termos da sucessão, recorre-se ao termo anterior.

Exemplos: Algumas sucessões definidas por recorrência, dadas por termos gerais

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 3 \cdot u_n - 5 \end{cases}, \dots \text{etc};$$

Exemplo 2: Calcular os 5 primeiros termos da sucessão definida por:

$$(a) \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 3 \end{cases}$$

$$\text{Para } n = 1; a_2 = a_1 + 3 = 2 + 3 = 5;$$

$$\text{Para } n = 2; a_3 = a_2 + 3 = 5 + 3 = 8;$$

$$\text{Para } n = 3; a_4 = a_3 + 3 = 8 + 3 = 11;$$

$$\text{Para } n = 4; a_5 = a_4 + 3 = 11 + 3 = 14;$$

Os 5 primeiros termos desta sucessão são:

$$a_n = (2, 5, 8, 11, 14, \dots)$$

$$(b) \begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 3 \cdot u_n - 5 \end{cases}$$

$$\text{Para } n = 1; u_2 = 3 \cdot u_1 - 5 = 3 \cdot 4 - 5 = 12 - 5 = 7;$$

$$\text{Para } n = 2; u_3 = 3 \cdot u_2 - 5 = 3 \cdot 7 - 5 = 21 - 5 = 16;$$

$$\text{Para } n = 3; u_4 = 3 \cdot u_3 - 5 = 3 \cdot 16 - 5 = 48 - 5 = 43;$$

$$\text{Para } n = 3; u_5 = 3 \cdot u_4 - 5 = 3 \cdot 43 - 5 = 129 - 5 = 124;$$

Os 5 primeiros termos desta sucessão são:

$$u_n = (4, 7, 16, 43, 124, \dots)$$

Exemplos 3: Dada a sucessão $u_n = 2n + 7$. **Determinar:**

(a) Os 5 primeiros termos;

$$\text{Para } n = 1; u_1 = 2 \cdot 1 + 7 = 2 + 7 = 9;$$

$$\text{Para } n = 2; u_2 = 2 \cdot 2 + 7 = 4 + 7 = 11;$$

$$\text{Para } n = 3; u_3 = 2 \cdot 3 + 7 = 6 + 7 = 13;$$

$$\text{Para } n = 4; u_4 = 2 \cdot 4 + 7 = 8 + 7 = 15;$$

$$\text{Para } n = 5; u_5 = 2 \cdot 5 + 7 = 10 + 7 = 17;$$

Os 5 primeiros termos desta sucessão são:

$$u_n = (9, 11, 13, 15, 17, \dots)$$

(b) O décimo quinto termo;

Neste caso o valor de n é 15, queremos determinar u_{15}

$$n = 15; u_{15} = 2 \cdot 15 + 7 = 30 + 7 = 37;$$

(c) O termo de ordem 20;

Neste caso o valor de n é 20, queremos determinar u_{20}

$$n = 20; u_{20} = 2 \cdot 20 + 7 = 40 + 7 = 47;$$

(d) verifique se o número 54 é termos da sucessão, pretende – se o valor de n , tal que $u_n = 54$;

$$u_n = 54$$

$$2n + 7 = 54$$

$$2n = 54 - 7$$

$$2n = 47$$

$$n = \frac{47}{2}$$

$$n = 23,5$$

$$23,5 \notin \mathbb{N}$$

Logo o número 54 não é termo da sucessão u_n

(e) verifique se o número 107 é termos da sucessão Pretende – se o valor de n , tal que $u_n = 107$

$$u_n = 107$$

$$2n + 7 = 107$$

$$2n = 107 - 7$$

$$2n = 100$$

$$n = \frac{100}{2}$$

$$n = 50$$

$$50 \in \mathbb{N}$$

Logo o número 107 é termo da sucessão u_n

4.3. REPRESENTAÇÃO GRÁFICAS DE UMA SUCESSÃO

A sucessão sendo de variável natural pode ser representada graficamente, representemos graficamente a sucessão de termo geral $a_n = 2n - 1$, sendo assim, devemos achar alguns primeiros termos, neste caso, determinemos 4 primeiros termos.

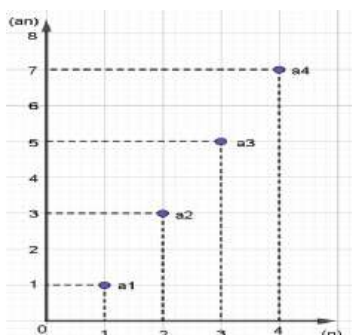
$$a_n = 2n - 1$$

$$n = 1; a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1;$$

$$n = 2; a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3;$$

$$n = 3; a_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5;$$

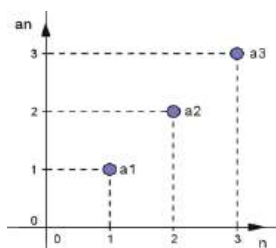
$$n = 4; a_4 = 2 \cdot 4 - 1 = 8 - 1 = 7;$$



► Vê-se que, o gráfico de uma sucessão são pontos isolados.

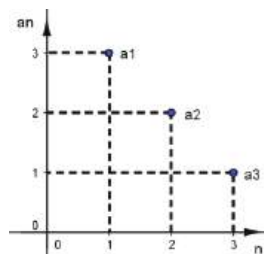
4.4. SUCESSÕES MONÓTONAS

Sucessão a_n é crescente



$$\begin{aligned} a_2 &> a_1 \\ a_3 &> a_2 \\ &\dots \\ a_{n+1} &> a_n \end{aligned}$$

Sucessão a_n é decrescente



$$\begin{aligned} a_2 &< a_1 \\ a_3 &< a_2 \\ &\dots \\ a_{n+1} &< a_n \end{aligned}$$

Geralmente podemos afirmar que:

Uma sucessão a_n é crescente se e só se: $\forall n \in \mathbb{N}: a_{n+1} - a_n > 0$;

Uma sucessão a_n é decrescente se e só se: $\forall n \in \mathbb{N}: a_{n+1} - a_n < 0$;

Exemplos: Verifique monotonia de seguintes Sucessões

(a) $a_n = 2n + 7$

(b) $b_n = -3n + 5$

(c) $c_n = \frac{n}{n+1}$

(d) $d_n = \frac{2n+1}{n+2}$

Resolução:

(a) $a_n = 2n + 7$

• A sucessão $a_{n+1} = 2(n+1) + 7 = 2n + 2 + 7 = 2n + 9$;

► Suponhamos que a sucessão a_n seja crescente

$$a_{n+1} - a_n > 0$$

$$2n + 9 - (2n + 7) > 0$$

$$\cancel{2n} + 9 - \cancel{2n} - 7 > 0$$

$$2 > 0$$

A Suposição é verdadeira, daí a sucessão a_n é crescente;

(b) $b_n = -3n + 5$

• A sucessão $b_{n+1} = -3(n+1) + 5 = -3n - 3 + 5 = -3n + 2$;

► Suponhamos que a sucessão b_n seja crescente

$$b_{n+1} - b_n > 0$$

$$-3n + 5 - (-3n + 2) > 0$$

$$-\cancel{3n} + 5 + \cancel{3n} - 2 > 0$$

$$-2 > 0$$

A Suposição é falsa, daí a sucessão b_n é decrescente;

(c) $c_n = \frac{n}{n+1}$

• A sucessão $c_{n+1} = \frac{n+1}{n+1+1} = \frac{n+1}{n+2}$

► Suponhamos que a sucessão c_n seja decrescente;

$$c_{n+1} - c_n < 0$$

$$\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} < 0$$

$$(n+1)(n+2)$$

$$\frac{(n+1) \cdot (n+1) - n \cdot (n+2)}{(n+2) \cdot (n+1)} < 0$$

$$\frac{\cancel{n^2} + \cancel{2n} + 1 - \cancel{n^2} - \cancel{2n}}{(n+2) \cdot (n+1)} < 0$$

$$\frac{1}{(n+2) \cdot (n+1)} < 0$$

A Suposição é falsa, daí a sucessão c_n é crescente;

(d) $d_n = \frac{2n+1}{n+2}$

• A sucessão $d_{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{n+1+2} = \frac{2n+2+1}{n+3} = \frac{2n+3}{n+3}$;

► Suponhamos que a sucessão d_n seja crescente;

$$d_{n+1} - d_n > 0$$

$$\frac{2n+3}{n+3} - \frac{2n+1}{n+2} > 0$$

$$(n+2)(n+3)$$

$$\frac{(2n+3) \cdot (n+2) - (2n+1) \cdot (n+3)}{(n+3)(n+2)} > 0$$

$$\frac{2n^2 + 4n + 3n + 6 - 2n^2 - 6n - n - 3}{(n+3)(n+2)} > 0$$

$$\frac{\cancel{2n^2} + \cancel{7n} + 6 - \cancel{2n^2} - \cancel{7n} - 3}{(n+3)(n+2)} > 0$$

$$\frac{3}{(n+3)(n+2)} > 0$$

A Suposição é verdadeira, daí a sucessão d_n é crescente;

4.5. SUCESSÕES LIMITADAS

Esboçemos os gráficos das sucessões: $a_n = \frac{2n+1}{n+2}$ e $b_n = n+1$, para tal, determinemos 4 primeiros termos de cada sucessão.

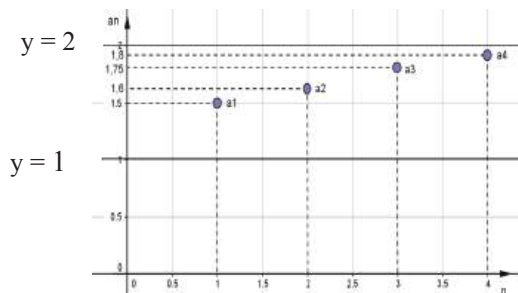
$$a_n = \frac{2n+1}{n+2}$$

$$\text{Para } n=1; a_1 = \frac{2 \cdot 1 + 1}{1 + 2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5;$$

$$\text{Para } n=2; a_2 = \frac{2 \cdot 2 + 1}{2 + 2} = \frac{4+1}{3} = \frac{5}{3} \approx 1,7;$$

$$\text{Para } n=3; a_3 = \frac{2 \cdot 3 + 1}{3 + 2} = \frac{6+1}{4} = \frac{7}{4} = 1,75;$$

$$\text{Para } n=4; a_4 = \frac{2 \cdot 4 + 1}{4 + 2} = \frac{8+1}{5} = \frac{9}{5} = 1,8;$$



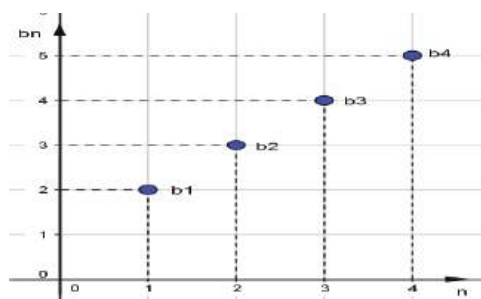
$$b_n = n + 1$$

$$\text{Para } n=1; b_1 = 1 + 1 = 2;$$

$$\text{Para } n=2; b_2 = 2 + 1 = 3;$$

$$\text{Para } n=3; b_3 = 3 + 1 = 4;$$

$$\text{Para } n=4; b_4 = 4 + 1 = 5;$$



Uma sucessão diz-se limitada, se as imagens de todos os seus termos pertencem ao interior da faixa definida.

No exemplo anterior a sucessão $a_n = \frac{2n+1}{n+2}$ é limitada porque os seus termos pertencem numa faixa definida de $y=1$ e $y=2$, isto é, $1 < a_n < 2$. Para a sucessão $b_n = n+1$ não é limitada, porque não é possível considerar a existência de uma faixa limitada por rectas paralelas para o eixo dos x que contenha no seu interior o gráfico da sucessão.

4.6. LIMITE DE UMA SUCESSÃO

Diz-se que uma sucessão a_n tem um limite o número L , se e só se para todo número positivo tal pequeno seja, existe um número positivo n tal que $|a_n - L| < \epsilon$, quando $n > N(\epsilon)$ (N dependente de ϵ) e escreve-se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

Exemplo: Demonstrar que a sucessão do termo geral $a_n = \frac{n}{n+1}$ tem como limite igual a 1.

Demonstração

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

A condição é:

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

Substituindo a_n e L , para encontrar a ordem a partir da todos termos da sucessão pertencem num determinado intervalo temos:

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$$

$$(1) \quad (n+1)$$

$$\left| \frac{n - n - 1}{n+1} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{-1}{n+1} \right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < n+1$$

$$\frac{1}{\varepsilon} - 1 < n$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

$$N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

(N dependente de ε)

A sucessão é limitada porque todos termos devem pertencem numa faixa definida, deste modo vamos encontrá-la, de tal modo para $\varepsilon = 0,1$, daí $N(0,1) = \frac{1}{0,1} - 1 = 9$;

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < 0,1$$

(vamos resolver essa inequação modular)

$$-0,1 < \frac{n}{n+1} - 1 < 0,1$$

$$-0,1 + 1 < \frac{n}{n+1} < 0,1 + 1$$

$$0,9 < \frac{n}{n+1} < 1,1$$

Finalmente, temos o intervalo $]0,9; 1,1[$

Isso significa que a partir da ordem 10, todos os termos da sucessão $a_n = \frac{n}{n+1}$ pertencerão ao intervalo de 0,9 à 1,1, vendo o 1 pertence a esse intervalo, isto prova que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}$;

4.7. SUCESSÃO INFINITAMENTE PEQUENA E INFINITAMENTE GRANDE

■ **Sucessão Infinitamente Pequena:** Uma sucessão a_n diz-se infinitamente pequena ou infinitésimo se e só se o limite é nulo, isto é, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;

■ **Sucessão Infinitamente Grande:** Uma sucessão a_n diz-se infinitamente grande se e só se o limite é mais infinitos ou menos infinito, isto é, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$;

■ **Sucessão Infinitamente Grande Negativo:** Uma sucessão a_n diz-se infinitamente grande se e só se o limite é menos infinito, isto é, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$;

■ **Sucessão Infinitamente Grande Positivo:** Uma sucessão a_n diz-se infinitamente grande se e só se o limite é mais infinitos, isto é, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$;

4.8. SUCESSÃO CONVERGENTE E SUCESSÃO DIVERGENTE

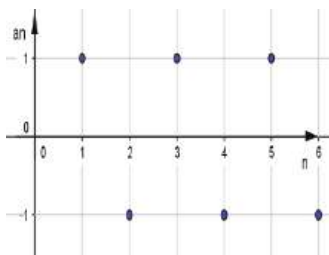
■ **Sucessão Convergente:** Uma sucessão a_n diz-se convergente cujo o limite é um numero real;

■ **Sucessão Divergente:** Uma sucessão a_n diz-se divergente cujo o limite é mais infinitos ou menos infinito (), ou seja diverge para menos ou para mais infinito;

- Se a sucessão a_n é convergente, então o seu limite é único;

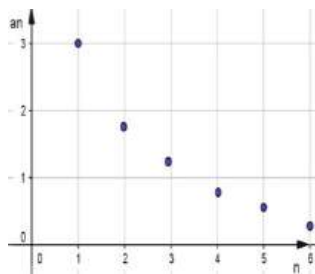
- Se a sucessão a_n é convergente, então é limitada;

- Uma sucessão pode ser limitada, mas não ser convergente;



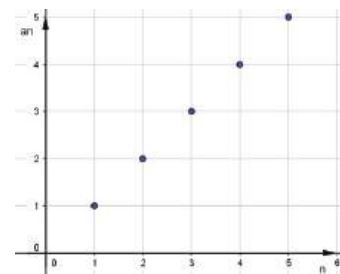
A sucessão a_n é limitada;

A sucessão a_n não é convergente;



A sucessão a_n é limitada;

A sucessão a_n é convergente;



A sucessão a_n não é limitada;

A sucessão a_n é divergente;

4.9. PROPRIEDADES DA SUCESSÃO CONVERGENTE (PROPRIEDADES OPERADORAS DELIMITES)

A expressão $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ lê-se limite da sucessão a_n , quando n tende para infinito. Para o cálculo de limites, devemos notar que escrever $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ é igual a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ porque n tende sempre para ∞ .

1ª Propriedade: Limite de uma sucessão caso exista é único;

2ª Propriedade: Limite de uma sucessão constante k é igual a própria constante k ;

Sendo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, k - é constante real e n - é índice do radical, então:

3ª Propriedade: Limite de uma sucessão multiplicada por uma constante k ;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k \cdot a_n = k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = k \cdot a$$

4ª Propriedade: Limite de uma soma é igual a soma dos limites, isto é:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a + b$$

5ª Propriedade: Limite de uma diferença é igual a diferença dos limites, isto é:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a - b$$

6ª Propriedade: Limite de um produto é igual ao produto dos limites, isto é:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \cdot b$$

7ª Propriedade: Limite de um quociente é igual ao quociente dos limites, isto é:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}$$

8ª Propriedade: Limite de uma potência Sendo e e p é uma potencia natural, então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^p = a^p$$

9ª Propriedade: Limite de um radical Sendo e e p é índice do radical, então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \sqrt[p]{a}$$

4.10. CÁLCULO DE LIMITE DAS SUCESSÕES

Para o cálculo de limites adoptaremos as convenções seguintes:

- | | |
|---|--|
| 1. $a \cdot \infty = \infty$; $a \neq 0$ | 7. $\frac{\infty}{a} = \infty$; $a \neq 0 \wedge a \neq \infty$; |
| 2. $a + \infty = \infty$; | 8. $\infty \cdot \infty = \infty$; |
| 3. $a - \infty = \infty$; ; $a \neq \infty$; | 9. $\infty + \infty = \infty$; |
| 4. $\frac{a}{0} = \infty$; $a \neq 0 \wedge a \neq \infty$; | 10. $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$; |
| 5. $\infty - a = \infty$; $a \neq \infty$; | 11. $\infty^a = \infty$; $a \neq 0$ |
| 6. $\frac{a}{\infty} = 0$; $a \neq 0 \wedge a \neq \infty$; | 12. $\sqrt[n]{\infty} = \infty$; |

Exemplos de cálculo de Limites:

Para calcular limites de qualquer sucessão, devemos substituir o n pelo valor que tende, no caso das sucessões o n pode tender para ∞ , ou $-\infty$, e de seguida aplicar as convenções para obter o resultado, que é o limite da sucessão, ao processo de substituição a operação do limite não pode ser escrito, porque o que leva-nos a substituir é por causa do limite, então não devemos mais escrever, sendo assim vamos calcular os limites e classificaremos cada sucessão se é limitada ou não limitada, convergente ou divergente, ou ainda infinitamente grande ou infinitamente pequena, assim temos exemplos a seguir:

Exmplo 1: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 7}{4}$

Resolução: Substituir o n por infinito (∞), temos;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 7}{4} = \frac{3 \cdot \infty^2 - 7}{4} = \frac{3 \cdot \infty - 7}{4} = \frac{\infty - 7}{4} = \frac{\infty}{4} = \infty; \text{ daí pode-se afirmar que: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 7}{4} = +\infty;$$

Como classificação podemos concluir que, a sucessão $a_n = \frac{3n^2 - 7}{4}$: **Não é limitada, é divergente e é infinitamente grande positivo;**

Exmplo 2: $\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \frac{5}{n+1}$

Resolução: Substituir o n por infinito (∞), temos;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \frac{5}{n+1} = 2 + \frac{5}{\infty+1} = 2 + \frac{5}{\infty} = 2 + 0 = 2; \text{ daí pode-se afirmar que: } \lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \frac{5}{n+1} = 2;$$

Como classificação podemos concluir que, a sucessão $a_n = 2 + \frac{5}{n+1}$: **É limitada, é convergente e não é infinitamente pequena nem infinitamente grande;**

Exmplo 3: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n^3 - 4}$

Resolução: Substituir o n por infinito (∞), temos;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n^3 - 4} = \frac{7}{\infty^3 - 4} = \frac{7}{\infty - 4} = \frac{7}{\infty} = 0; \text{ daí pode-se afirmar que: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n^3 - 4} = 0;$$

Como classificação podemos concluir que, a sucessão $a_n = \frac{7}{n^3 - 4}$: **É limitada, é convergente e é infinitamente pequena;**

Exmplo 4: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{9 + \frac{3}{2-n}}$

Resolução: Substituir o n por infinito (∞), temos;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{9 + \frac{3}{2-n}} = \sqrt{9 + \frac{3}{2-\infty}} = \sqrt{9 + \frac{3}{-\infty}} = \sqrt{9 + 0} = \sqrt{9} = 3; \text{ daí pode-se afirmar que: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{9 + \frac{3}{2-n}} = 3;$$

Como classificação podemos concluir que, a sucessão $a_n = \frac{7}{n^3 - 4}$: **É limitada, é convergente e não é infinitamente pequena nem infinitamente grande;**

4.11. LEVAMENTO DAS INDETERMINAÇÕES

Ao substituir o n pelo valor de $+\infty$ podemos encontrar situações em que as convenções acima mencionadas não se aplicam, nas situações que se seguem $\left| \frac{\infty}{\infty} \right|$, $|\infty - \infty|$, $|1^\infty|$, $|0^\infty|$, $|0^0|$, $|\infty^0|$, $\left| \frac{0}{0} \right|$ a que se dá nome de indeterminações. Para cada caso é necessário simplificar a expressão dada a maneira mais adequada que permite calcular o limite dado, esse processo chama-se levantamento da indeterminação.

1. INDETERMINAÇÃO DO TIPO $\left| \frac{\infty}{\infty} \right|$

Para levantar indeterminação deste tipo começa por pôr em evidência no numerador e no denominador a potência de maior expoente de n , ou seja, dividir no numerador tanto no denominador pela potência de maior expoente de n .

Exemplo 1: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+1}{2n-5}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+1}{2n-5} = \frac{4 \cdot \infty + 1}{2 \cdot \infty - 5} = \frac{\infty + 1}{\infty - 5} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right|$ - é uma indeterminação, portanto vamos levantar - lá;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+1}{2n-5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4n+1}{n}}{\frac{2n-5}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{1} + \frac{1}{n}}{\frac{2}{1} - \frac{5}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{1}{n}}{2 - \frac{5}{n}} = \frac{4 + \frac{1}{\infty}}{2 - \frac{5}{\infty}} = \frac{4 + 0}{2 - 0} = \frac{4}{2} = 2;$$

Logo: A sucessão é limitada, é convergente e não é infinitamente pequena nem infinitamente grande;

Exemplo 2: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 4n + 7}{5n + 10}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 4n + 7}{5n + 10} = \frac{3 \cdot \infty^2 + 4 \cdot \infty + 7}{5 \cdot \infty + 10} = \frac{3 \cdot \infty + \infty + 7}{\infty + 10} = \frac{\infty + \infty}{\infty} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right|$ - é uma indeterminação;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 4n + 7}{5n + 10} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3n^2 + 4n + 7}{n^2}}{\frac{5n + 10}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3n^2}{n^2} + \frac{4n}{n^2} + \frac{7}{n^2}}{\frac{5n}{n^2} + \frac{10}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{4}{n} + \frac{7}{n^2}}{\frac{5}{n} + \frac{10}{n^2}} = \frac{3 + \frac{4}{\infty} + \frac{7}{\infty^2}}{\frac{5}{\infty} + \frac{10}{\infty^2}} = \frac{3 + 0 + 0}{0 + 0} = \frac{3}{0} = +\infty;$$

Logo: A sucessão não é limitada, é divergente e é infinitamente grande positivo;

Exemplo 3: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 4n - 5}{n^3 + 4}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 4n - 5}{n^3 + 4} = \frac{5 \cdot \infty^2 + 4 \cdot \infty - 5}{\infty^3 + 4} = \frac{\infty + \infty - 5}{\infty + 4} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right|$ - é uma indeterminação;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 4n - 5}{n^3 + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5n^2 + 4n - 5}{n^3}}{\frac{n^3 + 4}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5n^2}{n^3} + \frac{4n}{n^3} - \frac{5}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3} + \frac{4}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{n} + \frac{4}{n^2} - \frac{5}{n^3}}{1 + \frac{4}{n^3}} = \frac{0 + 0 + 0}{1 + 0} = \frac{0}{1} = 0;$$

Logo: A sucessão é limitada, é convergente e é infinitamente ⁰ pequena;

Exemplo 4: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^4 + 4}{2n^4 - 3}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^4 + 4}{2n^4 - 3} = \frac{8 \cdot \infty^4 + 4}{2 \cdot \infty^4 - 3} = \frac{8 \cdot \infty + 4}{2 \cdot \infty - 3} = \frac{\infty + 4}{\infty - 3} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| - \text{é uma indeterminação};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^4 + 4}{2n^4 - 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4(8 + \frac{4}{n^4})}{n^4(2 - \frac{3}{n^4})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 + \frac{4}{n^4}}{2 - \frac{3}{n^4}} = \frac{8 + 0}{2 - 0} = \frac{8}{2} = 4;$$

Logo: A sucessão é limitada, é convergente e não é infinitamente pequena nem infinitamente grande;

Corolário⁵: No processo de levantamento desta indeterminação vê-se que há três resultados possíveis, pode ser zero, mais ou menos infinito e quociente dos coeficientes de maior potência de n, podemos concluir que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 n^m + a_1 n^{m-1} + a_2 n^{m-2} + a_3 n^{m-3} + a_4 n^{m-4} + a_5 n^{m-5} + \dots}{b_0 n^k + b_1 n^{k-1} + b_2 n^{k-2} + b_3 n^{k-3} + b_4 n^{k-4} + b_5 n^{k-5} + \dots} = \begin{cases} 0; m < k; \\ \frac{a_0}{b_0}; m = k; \\ \infty; m > k; \end{cases}$$

Interpretação: Se o grau do numerador for menor a do denominador o limite da sucessão é igual a zero, se o grau do numerador for maior a do denominador o limite da sucessão é igual a infinito e se o grau do numerador for igual a do denominador o limite da sucessão é igual ao quociente (divisão) dos coeficientes de maior potência de n. Esta expressão ajudará determinar limite de qualquer sucessão de indeterminação $\left| \frac{\infty}{\infty} \right|$, sem passar pelo processo de levantamento da mesma, ora vejamos os exemplos a seguir:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 3n - 2}{3n^4 + 4n - 7} = 0;$

Porque, o grau do numerador (2) é menor a do denominador (4), logo o limite da sucessão é igual a zero;

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 6}{2n + 10} = + \infty;$

Porque, o grau do numerador (3) é maior a do denominador (1), logo o limite da sucessão é igual a infinito;

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n^5 + 3}{2n^5 - 7} = 5;$

Vê – se que, o grau do numerador (5) é igual a do denominador (5), logo o limite da sucessão é igual ao quociente dos coeficientes de maior potência de n, isto é:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n^5 + 3}{2n^5 - 7} = \frac{10}{2} = 5;$$

⁵ Uma afirmação deduzida de uma verdade já demonstrada;

2. INDETERMINAÇÃO DO TIPO $|\infty - \infty|$ PARA EXPRESSÕES POLINOMIAIS

Para levantar este tipo de indeterminação para expressões polinomiais coloca – se em evidência a potência de maior expoente de n.

Exemplo 1: $\lim_{n \rightarrow -\infty} 4n^3 - 5n + 7$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} 4n^3 - 5n + 7 = 4 \cdot (-\infty)^3 - 5 \cdot (-\infty) + 7 = -\infty + \infty + 7 = |\infty - \infty| - \text{É uma indeterminação};$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow -\infty} 4n^3 - 5n + 7 &= \lim_{n \rightarrow -\infty} n^3 (4n^3 - 5n + 7) = \lim_{n \rightarrow -\infty} n^3 \left(\frac{4n^3}{n^3} - \frac{5n}{n^3} + \frac{7}{n^3} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow -\infty} n^3 (4 - 0 + 0) = \lim_{n \rightarrow -\infty} 4n^3 = 4 \cdot (-\infty^3) = 4 \cdot (-\infty) = -\infty; \end{aligned}$$

Logo: A sucessão não é limitada, é divergente e é infinitamente grande negativa;

Exemplo 2: $\lim_{n \rightarrow \infty} (3n^4 - 2n + 4)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (3n^4 - 2n + 4) = 3 \cdot (\infty)^4 - 2 \cdot \infty + 4 = \infty - \infty + 4 = |\infty - \infty| - \text{É uma indeterminação};$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (3n^4 - 2n + 4) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^4 \left(\frac{3n^4}{n^4} - \frac{2n}{n^4} + \frac{4}{n^4} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^4 \left(\frac{3n^4}{n^4} - \frac{2n}{n^4} + \frac{4}{n^4} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^4 \left(3 - \frac{2}{n^3} + \frac{4}{n^4} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^4 (3 - 0 + 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3n^4 = 3(\infty)^4 = 3 \cdot \infty = +\infty; \end{aligned}$$

Logo: A sucessão não é limitada, é divergente e é infinitamente grande positiva;

3. INDETERMINAÇÃO DO TIPO $|\infty - \infty|$ PARA EXPRESSÕES IRRACIONAIS (RADICAIS)

Para levantar este tipo de indeterminação para expressões irracionais multiplica – se e divide-se pelo seu simétrico, para eliminar os radicais.

LEMBRAR QUE: $(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$

Exemplo 1: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2n-1} - \sqrt{2n-4}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2n-1} - \sqrt{2n-4} = \sqrt{2 \cdot (\infty) - 1} - \sqrt{2 \cdot (\infty) - 4} = \sqrt{\infty - 1} - \sqrt{\infty - 4} = \sqrt{\infty} - \sqrt{\infty} = |\infty - \infty| -$$

É uma indeterminação;

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2n-1} - \sqrt{2n-4} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2n-1} - \sqrt{2n-4}) \cdot (\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n-4})}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n-4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2n-1})^2 - (\sqrt{2n-4})^2}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n-4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1 - (2n-4)}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n-4}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1 - 2n+4}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n-4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n-4}} = \frac{3}{\sqrt{2 \cdot \infty - 1} + \sqrt{2 \cdot \infty - 4}} = \frac{3}{\sqrt{\infty} + \sqrt{\infty}} = \frac{3}{\infty + \infty} = \frac{3}{\infty} = 0; \end{aligned}$$

Logo: A sucessão é limitada, é convergente e é infinitamente pequena;

Exemplo 2: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 5} - n$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 5} - n) = \sqrt{\infty^2 + 5} - \infty = \sqrt{\infty + 5} - \infty = |\infty - \infty|$ - É uma indeterminação;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 5} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 5} - n) \cdot (\sqrt{n^2 + 5} + n)}{\sqrt{n^2 + 5} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 5})^2 - n^2}{\sqrt{n^2 + 5} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 5 - n^2}{\sqrt{n^2 + 5} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{\sqrt{n^2 + 5} + n} = \frac{5}{\sqrt{\infty^2 + 5} + \infty} = \frac{5}{\infty + \infty} = \frac{5}{\infty} = 0;$$

Logo: A sucessão é limitada, é convergente e é infinitamente pequena;

Exemplo 3: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 4}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 4} = \sqrt{\infty^2 + \infty} - \sqrt{\infty^2 - 4} = \sqrt{\infty} - \sqrt{\infty} = |\infty - \infty|$ - É uma indeterminação;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 4}) \cdot (\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - 4})}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - 4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + n})^2 - (\sqrt{n^2 - 4})^2}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - 4}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n - (n^2 - 4)}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - 4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n - n^2 + 4}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - 4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 4}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - 4}} \text{ (substituindo } n \text{ por } \infty, \text{ obteremos uma nova}$$

indeterminação, vamos levantar esta indeterminação);

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 4}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - 4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n + 4}{n}}{\frac{\sqrt{n^2 + n}}{n} + \frac{\sqrt{n^2 - 4}}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n} + \frac{4}{n}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2}} + \sqrt{\frac{n^2}{n^2} - \frac{4}{n^2}}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{4}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + \sqrt{1 - 0}} = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2};$$

• A sucessão é limitada, é convergente e não é infinitamente pequena nem infinitamente grande

4. INDETERMINAÇÃO DO TIPO $|1^\infty|$ LIMITE NOTÁVEL EXPONENCIAL

Ao encontrar o limite do tipo $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{b_n}$, caso, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, então teremos uma indeterminação do tipo $|1^\infty|$ que pode ser levantada da seguinte maneira:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{b_n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1) \cdot b_n}$$

Onde: $e \approx 2,7182818284$ chamado número de Nepper

Exemplo 1: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{3}{n})^n$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{3}{n})^n = (1 + \frac{3}{\infty})^\infty = (1 + 0)^\infty = |1^\infty|$ - É uma indeterminação: Neste caso $a_n = 1 + \frac{3}{n}$ e $b_n = n$;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{3}{n})^n = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{3}{n} - 1) \cdot n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{3}{n}) \cdot n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} 3} = e^3;$$

Logo: A sucessão é limitada, é convergente e não é infinitamente pequena nem infinitamente grande;

Exemplo 2: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{5}{n})^n$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{5}{n})^n = (1 - \frac{5}{\infty})^\infty = (1 - 0)^\infty = |1^\infty|$ - É uma indeterminação: $a_n = 1 - \frac{5}{n}$ e $b_n = n$;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{5}{n})^n = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{5}{n} - 1) \cdot n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (-\frac{5}{n}) \cdot n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} -5} = e^{-5} = \frac{1}{e^5};$$

Logo: A sucessão é limitada, é convergente e não é infinitamente pequena nem infinitamente grande;

Exemplo 3: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n}{n+4})^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n}{n+4})^n = (\frac{\infty}{\infty+4})^\infty = |\frac{\infty}{\infty}|^\infty$$

■ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+4} = \frac{1}{1} = 1$, daí podemos afirmar que: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n}{n+4})^n = |1^\infty|$ - É uma indeterminação: $a_n = \frac{n}{n+4}$ e $b_n = n$;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n}{n+4})^n = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n}{n+4} - 1) \cdot n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n - n - 4}{n+4}) \cdot n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{-4}{n+4}) \cdot n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4n}{n+4}} = e^{\frac{-4}{1}} = e^{-4};$$

Substituindo n por ∞ , obteremos a indeterminação

$|\frac{\infty}{\infty}|$, vamos levantar esta indeterminação

Logo: A sucessão é limitada, é convergente e não é infinitamente pequena nem infinitamente grande;

Exemplo 4: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{3n-4}{3n+5})^{2n+8}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{3n-4}{3n+5})^{2n+8} = (\frac{3 \cdot \infty - 4}{3 \cdot \infty + 5})^{2 \cdot \infty + 8} = (\frac{\infty - 4}{\infty + 5})^\infty = |\frac{\infty}{\infty}|^\infty$$

■ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-4}{3n+5} = \frac{3}{3} = 1$, daí podemos afirmar que: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{3n-4}{3n+5})^{2n+8} = |1^\infty|$ - É uma indeterminação: $a_n = \frac{3n-4}{3n+5}$ e $b_n = 2n + 8$;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{3n-4}{3n+5})^{2n+8} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{3n-4}{3n+5} - 1) \cdot (2n+8)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{3n-4 - (3n+5)}{3n+5}) \cdot (2n+8)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{3n-4 - 3n-5}{3n+5}) \cdot (2n+8)} =$$

$$= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{-9}{3n+5}) \cdot (2n+8)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-18n-72}{3n+5}} = e^{\frac{-18}{3}} = e^{-6} = \frac{1}{e^6};$$

Substituindo n por ∞ , obteremos a indeterminação

$|\frac{\infty}{\infty}|$, vamos levantar esta indeterminação

Logo: A sucessão é limitada, é convergente e não é infinitamente pequena nem infinitamente grande;

1. Definição:

Exemplos das sucessões que são Progressão Aritmética

- (a) $a_n = (3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots)$; $d = 2$
 (b) $b_n = (5, 1, -3, -7, -14, \dots)$; $d = 4$
 (c) $c_n = (6, 6, 6, 6, 6, 6, \dots)$; $d = 0$

$$\mathbf{a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = a_5 - a_4 = \dots = a_n - a_{n-1} = d}$$

Se $d > 0$; a PA é crescente

Se $d < 0$; a PA é decrescente

Se $d = 0$; a PA é constante

[illegible]
$$\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_1 + (n - 1) \cdot \mathbf{d}$$

a_1 – é primeiro termo da progressão; **n** – a ordem o termo;
 d – é a diferença da progressão; **a_n** – o termo geral da Progressão;

NOTA IMPORTANTE: Para escrever o termo geral da Progressão Aritmética é suficiente saber o primeiro termo e a diferença da progressão.

Exemplo 1: Encontre o termo geral de cada sucessão a seguir:

$$(a) a_n = (3, 6, 12, 24, 48, \dots)$$

$$a_1 = 9 \quad a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

$$d = 3 \quad a_n = 9 + (n - 1) \cdot 3$$

$$a_n = ? \quad a_n = 9 + 3n - 3$$

$$a_n = 3n + 6$$

$$(b) b_n = (15, 13, 11, 9, 7, \dots)$$

$$b_1 = 15 \quad b_n = b_1 + (n - 1) \cdot d$$

$$d = -2 \quad b_n = 15 + (n - 1) \cdot (-2)$$

$$b_n = ? \quad b_n = 15 - 2n + 2$$

$$b_n = 17 - 2n$$

Exemplo 2: Numa organização aritmética sabe-se $a_5 = 55$ e $a_{21} = -25$. Determinar o termo geral da progressão.

Para determinar o termo geral da progressão precisamos determinar o primeiro termo (a_1) e a diferença (d).

$$\begin{cases} a_5 = 55 \\ a_{21} = -25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 4d = 55 \\ a_1 + 20d = -25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 4d = 55 \quad / \cdot (-1) \\ a_1 + 20d = -25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a_1 - 4d = -55 \\ a_1 + 20d = -25 \end{cases}$$

$$16d = -80$$

$$a_1 + 4d = 55$$

$$a_1 = 55 - 4d = 55 - 4 \cdot (-5) = 55 + 20 = 75;$$

$$d = -\frac{80}{16}$$

$$d = -5$$

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1) \cdot d \\ a_n &= 75 + (n - 1) \cdot (-5) \\ a_n &= 75 - 5n + 5 \\ a_n &= 80 - 5n \end{aligned}$$

Exemplo 3: Determine o valor x de modo que a sucessão $(5, 2x + 4, 6x + 2)$ seja Progressão aritmética;

Resolução: $a_1 = 5$, $a_2 = 2x + 4$ e $a_3 = 6x + 2$, pela definição tem-se:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2$$

$$2x + 4 - 5 = 6x + 2 - (2x + 4)$$

$$2x + 4 - 5 = 6x + 2 - 2x - 4$$

$$-2x = 3$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Solução: } \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$$

2. Propriedades da Progressão Aritmética

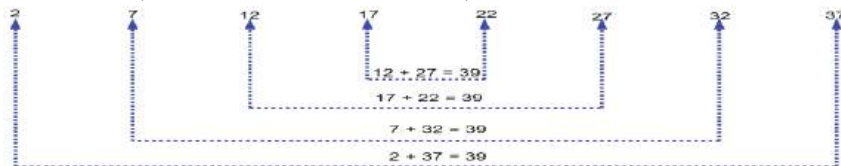
1ª Propriedade: Cada termo da Progressão Aritmética é igual a média aritmética dos termos adjacentes, isto é,
 $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Exemplo: Dada a sucessão $a_n = (2, 7, 12, 17, 22, 27, \dots)$

$$\bullet a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} = \frac{2 + 12}{2} = \frac{14}{2} = 7; \quad \bullet a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2} = \frac{7 + 17}{2} = \frac{24}{2} = 12; \quad \bullet a_5 = \frac{a_4 + a_6}{2} = \frac{17 + 27}{2} = \frac{44}{2} = 22;$$

2ª Propriedade: A soma dos termos equidistantes dos extremos da Progressão Aritmética finita é igual á soma dos extremos.

Exemplo: Dada a sucessão $a_n = (2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37)$



3. Soma dos n primeiro de Progressão Aritmética

Usemos a propriedade 2 para obter a fórmula soma dos n primeiro de progressão aritmética:

Seja $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$ dos n primeiro de progressão aritmética de diferença d. A soma S_n pode ser definida assim:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \quad (1)$$

Aplicando a propriedade 1, voltemos a escrever os termos S_n , a começarmos do último termo.

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 \quad (2)$$

Somando membro a membro as igualdades (1) e (2).

$$\begin{array}{r|l} & S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \\ + & S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 \\ \hline = & 2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_1 + a_n)} \end{array}$$

A soma dos termos equidistantes dos extremos da P.A finita é igual;
ou seja: $(a_1 + a_n) = (a_2 + a_{n-1}) = \dots = (a_{n-1} + a_2) = (a_1 + a_n)$
Daí são n parcelas iguais à $(a_1 + a_n)$

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

(Fórmula que permite calcular a soma dos n primeiro de P.A.)

Mas $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$, a formula também se pode escrever:

$$S_n = \frac{[a_1 + a_1 + (n-1) \cdot d]n}{2}$$

$$S_n = \frac{[2a_1 + (n-1) \cdot d]n}{2}$$

(Fórmula que permite calcular a soma dos n primeiro de P.A. de diferença d)

Exemplo 1: Dada a Progressão Aritmética (4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, ...). Determine:

(a) A soma dos 6 primeiros termos;

• $S_6 = 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 = 69$;

Podemos aplicar as fórmulas da soma dos n primeiros termos;

Dados:

$$S_6 = ?$$

$$a_1 = 4$$

$$a_6 = 19$$

$$n = 6$$

Resolução

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

$$S_6 = \frac{(a_1 + a_6) \cdot n}{2}$$

$$S_6 = \frac{(4 + 19) \cdot 6}{2}$$

$$S_6 = \frac{23 \cdot 6}{2}$$

$$S_6 = \frac{138}{2}$$

$$S_6 = 69;$$

ou

Dados:

$$S_6 = ?$$

$$a_1 = 4$$

$$d = 3$$

$$n = 6$$

Resolução

$$S_n = \frac{[2a_1 + (n - 1) \cdot d]n}{2}$$

$$S_6 = \frac{[2 \cdot 4 + (6 - 1) \cdot 3] \cdot 6}{2}$$

$$S_6 = \frac{(8 + 5 \cdot 3) \cdot 6}{2}$$

$$S_6 = \frac{(8 + 15) \cdot 6}{2}$$

$$S_6 = \frac{23 \cdot 6}{2}$$

$$S_6 = \frac{138}{2}$$

$$S_6 = 69;$$

(b) A soma dos 20 primeiros termos;

Dados:

$$S_{20} = ?$$

$$a_1 = 4$$

$$d = 3$$

$$n = 20$$

Resolução

$$S_n = \frac{[2a_1 + (n - 1) \cdot d]n}{2}$$

$$S_{20} = \frac{[2 \cdot 4 + (20 - 1) \cdot 3] \cdot 20}{2}$$

$$S_{20} = \frac{(8 + 19 \cdot 3) \cdot 20}{2}$$

$$S_{20} = \frac{(8 + 57) \cdot 20}{2}$$

$$S_{20} = \frac{65 \cdot 20}{2}$$

$$S_{20} = \frac{1300}{2}$$

$$S_{20} = 650;$$

Exemplo 2: Determine o valor de x em que: $3 + 10 + 17 + \dots + x = 498$.

Dados:

$$S_n = 498$$

$$n = ?$$

$$a_1 = 3$$

$$d = 7$$

$$a_n = x$$

Resolução

$$S_n = \frac{[2a_1 + (n - 1) \cdot d]n}{2}$$

$$498 = \frac{[2 \cdot 3 + (n - 1) \cdot 7] \cdot n}{2}$$

$$\frac{(6 + 7n - 7) \cdot n}{2} = 498$$

$$\frac{(7n-1) \cdot n}{2} = 498$$

$$7n^2 - n = 996$$

$$7n^2 - n - 996 = 0$$

$$a = 7; b = -1; c = -996$$

$$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-996)}}{2 \cdot 7} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 27888}}{14} = \frac{1 \pm \sqrt{27889}}{14} = \frac{1 \pm 167}{14}$$

$$=$$

$$n_1 = \frac{1-167}{14} \vee n_2 = \frac{1+167}{14}$$

$$n_1 = \frac{-166}{14} \vee n_2 = \frac{168}{14}$$

$$n_1 = -11,8 \vee n_2 = 12$$

$$-11,8 \notin \mathbb{N} \vee 12 \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d \\ x &= 3 + (12-1) \cdot 7 \\ x &= 3 + 11 \cdot 7 \\ x &= 3 + 77 \\ x &= 80 \end{aligned}$$

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (P.G.)

1. Definição

Uma sucessão chama – se Progressão Geométrica (P.G), se cada termo a partir do segundo termo é multiplicado por um numero **q** fixo para dada a sucessão com o termo anterior, este número fixo chama – se razão da Progressão Geométrica.

Exemplos das sucessões que são Progressão Geométrica

(a) $a_n = (2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots); q = 2$

(b) $b_n = (4, 20, 100, 500, \dots); q = 5$

(c) $c_n = (3, -6, 12, -24, 48, \dots); q = -2;$

(d) $d_n = (3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \dots); q = \frac{1}{3},$

(e) $e_n = (256, 128, 64, 32, 16, \dots); q = \frac{1}{2};$

Da definição da Progressão Geométrica $a_n = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots)$ é uma Progressão Geométrica então:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_5}{a_4} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

2. Fórmula do termo geral da Progressão Geométrica

$$\text{De acordo com a definição, temos:} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1 \bullet \mathbf{q} \\ \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_2 \bullet \mathbf{q} \\ \mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_3 \bullet \mathbf{q} \\ \mathbf{a}_5 = \mathbf{a}_4 \bullet \mathbf{q} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \mathbf{a}_n = \mathbf{a}_{n-1} \bullet \mathbf{q} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1 \bullet \mathbf{q} \\ \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 \bullet \mathbf{q} \bullet \mathbf{q} = \mathbf{a}_1 \bullet \mathbf{q}^2 \\ \mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_1 \bullet \mathbf{q}^2 \bullet \mathbf{q} = \mathbf{a}_1 \bullet \mathbf{q}^3 \\ \mathbf{a}_5 = \mathbf{a}_1 \bullet \mathbf{q}^3 \bullet \mathbf{q} = \mathbf{a}_1 \bullet \mathbf{q}^4 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \mathbf{a}_n = \mathbf{a}_1 \bullet \mathbf{q}^{n-1} \end{array} \right.$$

Podemos concluir que a fórmula do termo geral da Progressão Geométrica é dada por:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Onde:

a_1 – é primeiro termo da progressão; **n** – a ordem o termo;

q – é a razão da progressão;

a_n – o termo geral da Progressão

NOTA IMPORTANTE: Para escrever o termo geral da Progressão Geométrica é suficiente saber o primeiro termo e a diferença da progressão.

Exemplo 1: Encontre o termo geral de cada sucessão a seguir:

(a) $a_n = (3, 6, 12, 24, 48, \dots)$

$$a_1 = 3; q = 2; a_n = ?$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

(b) $b_n = (4, 20, 100, 500, \dots)$;

$$b_1 = 4; q = 5; b_n = ?$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

$$b_n = 4 \cdot 5^{n-1}$$

(c) $c_n = (256, 128, 64, 32, 16, \dots)$;

$$c_1 = 256; q = \frac{1}{2}; c_n = ?$$

$$c_n = c_1 \cdot q^{n-1}$$

$$c_n = 256 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$C_n = \frac{256}{2^{n-1}}$$

Exemplo 2: Numa organização geométrica sabe – se o segundo termo é 6 e o sétimo termo é 192. Determine o termo geral da progressão.

Para determinar o termo geral da progressão precisamos determinar o primeiro termo a_1 e a razão q .

$$\begin{cases} a_2 = 6 \\ a_7 = 192 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \cdot q = 6 \\ a_1 \cdot q^6 = 192 \end{cases} \text{ Dividindo as equações membro á membro ou seja primeiro com o primeiro e}$$

segundo com o segundo, e de seguida simplificar para encontrar primeiro termo ou a razão;

$$\begin{cases} a_1 \cdot q = 6 \\ a_1 \cdot q^6 = 192 \end{cases} \Rightarrow \frac{a_1 \cdot q^6}{a_1 \cdot q} = \frac{192}{6}$$

$$a_1 \bullet q = 6$$

$$a_1 \cdot 2 = 6$$

$$a_1 = \frac{6}{2}$$

$$a_1 = 3$$

$$q^5 = 32$$

$$q = \sqrt[5]{32}$$

$q = 2$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

Exemplo 3: Numa organização geométrica sabe – se a soma do primeiro termo com o quarto termo é 252 e a soma do segundo termo com o quinto termo é 84. Determine o termo geral da progressão;

$$\begin{cases} a_1 + a_4 = 252 \\ a_2 + a_5 = 84 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 \cdot q^3 = 252 \\ a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^4 = 84 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1(1 + q^3) = 252 \\ a_1 q(1 + q^3) = 84 \end{cases} \Rightarrow \frac{a_1(1 + q^3)}{a_1 q(1 + q^3)} = \frac{252}{84}$$

$$\frac{1}{q} = 3$$

$$q = \frac{1}{3}$$

$$a_1(1 + q^3) = 252$$

$$a_1 = \frac{252}{1 + q^3} = \frac{252}{1 + (\frac{1}{3})^3} = \frac{252}{1 + \frac{1}{27}} = \frac{252}{\frac{28}{27}} = \frac{27 \cdot 252}{28} = 243;$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_n = 243 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Exemplo 4: Determine o valor x de modo que a sucessão (5, 2x + 4, 6x + 2) seja Progressão geométrica;

Resolução: $a_1 = 5$, $a_2 = 2x + 4$ e $a_3 = 6x + 2$, pela definição tem – se:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$$

$$\frac{2x + 4}{5} = \frac{6x + 2}{2x + 4}$$

$$(2x + 4) \cdot (2x + 4) = 5 \cdot (6x + 2)$$

$$4x^2 + 8x + 8x + 16 = 30x + 10$$

$$4x^2 + 8x + 8x - 30x + 16 - 10 = 0$$

$$4x^2 - 14x + 6 = 0$$

$$a = 4; b = -14; c = 6$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 6}}{2 \cdot 4} = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 96}}{8} = \frac{14 \pm \sqrt{100}}{8} = \frac{14 \pm 10}{8}$$

$$x_1 = \frac{14 - 10}{8} \vee x_2 = \frac{14 + 10}{8}$$

$$x_1 = \frac{4}{8} \vee x_2 = \frac{24}{8}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \vee x_2 = 3$$

■ Para $x = \frac{1}{2}$: $a_n = (5; 5; 5)$ – É progressão geométrica de razão 1;

■ Para $x = 3$: $a_n = (5; 10; 20)$ – É progressão geométrica de razão

3. Propriedades da Progressão Geométrica

1ª Propriedade: Numa Progressão Geométrica com número ímpar de termos, o quadrado do termo médio (central) é igual ao produto dos extremos.

Exemplo:

Na P.G. (3, 6, 12, 24, 48), os termos extremos são 3 e 48, o termo médio é 12, temos:

$$12^2 = 3 \cdot 48$$

$$144 = 144$$

(Verdade)

2ª Propriedade: O produto dos termos equidistantes dos extremos de uma Progressão Geométrica é igual.

Exemplo:

Na P.G. (3, 6, 12, 24, 48, 96), os termos equidistantes dos extremos são: 3 e 96, 6 e 48, 12 e 24 temos:

$$3 \cdot 96 = 6 \cdot 48 = 12 \cdot 24$$

$$288 = 288 = 288$$

(Verdade)

4. Soma dos n primeiro de Progressão Geométrica

Seja a_n uma Progressão geométrica de razão q , a soma dos n primeiro termos consecutivos calcula – se pela formula:

Consideremos a P.G. $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$, de razão q temos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \quad (1)$$

Multiplicando a ambos membros da equação por $q \neq 0$, tem-se:

$$q \cdot S_n = q \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) \quad (2)$$

Subtraindo ordenadamente a 2ª equação da 1ª, ou seja subtraindo membro a membro, tem-se:

$$S_n - q \cdot S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n - q \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)$$

$$S_n - q \cdot S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n - a_2 - a_3 - \dots - a_n - a_{n+1}$$

$$S_n(1 - q) = a_1 - a_{n+1}$$

$$S_n = \frac{a_1 - a_{n+1}}{1 - q} \text{ mas } a_{n+1} = a_1 \cdot q^n$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

ou

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

(Fórmula que permite achar a soma dos n primeiro de P.G. de razão q)

Onde:

a_1 – é primeiro termo da progressão;

q – é a razão da progressão;

n – o numero que pretende-se somar;

S_n – soma dos n primeiro da Progressão

Exemplo: Dada a Progressão Geométrica (3, 6, 12, 24, 48, ...). **Determine:**

(a) A soma dos 7 primeiros termos;

$$S_7 = ?$$

$$a_1 = 3$$

$$n = 7$$

$$q = 2$$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_7 = \frac{3 \cdot (2^7 - 1)}{2 - 1}$$

$$S_7 = \frac{3 \cdot 127}{1}$$

$$S_7 = 381$$

(b) A soma dos 15 primeiros termos;

$$S_{15} = ?$$

$$a_1 = 3$$

$$n = 15$$

$$q = 2$$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_7 = \frac{3 \cdot (2^{15} - 1)}{2 - 1}$$

$$S_7 = \frac{3 \cdot 32767}{1}$$

$$S_7 = 98301$$

5. Progressão geométrica infinita

Seja a_n uma progressão Geométrica de razão q , sendo $|q| < 1$ e $a_1 \neq 0$;

Sabe-se que: $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q} - \frac{a_1 q^n}{1 - q}$ introduzindo o limite tem-se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1}{1 - q} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 q^n}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q} - 0 = \frac{a_1}{1 - q};$$

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

(Fórmula que permite somar todos os termos consecutivos de uma P.G. infinitamente decrescente)

Exemplo: Calcule a soma de todos termos da P.G. $a_n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots)$;

Como trata-se de uma progressão geométrica infinitamente decrescente de razão $q = \frac{1}{2}$, a soma de todos os termos consecutivos será dada por

$$S = \frac{a_1}{1 - q} = S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2;$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Escreve os termos e da sucessão e diga se é finita ou infinita composto por:

- (a) Números pares até 24 (c) Múltiplo de 5 (e) Potência de $\frac{1}{2}$
(b) Divisores de 28 (d) Potência de 6 (f) Números primos inferior que 41

2. Determine 5 primeiros termos da sucessão definida por:

- (a) $a_n = 3n - 7$ (b) $b_n = 4 - n$ (c) $c_n = \frac{2n+1}{2n}$ (d) $d_n = -4n + 8$ (e) $e_n = 2^n$

4. Determine 4 primeiro termos da sucessão definida por:

- (a) $a_n = (-1)^n + 3n$ (b) $b_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$ (c) $c_n = \frac{1 - (-1)^n}{3^n}$ (d) $d_n = 2^n - \frac{2}{3n}$ (e) $e_n = (-1)^n \cdot (n^2 - 1)$

5. Determine 7 primeiros termos da sucessão definida por:

- (a) $\begin{cases} \frac{1}{n}; & \text{se } n \text{ é ímpar;} \\ \frac{2}{n}; & \text{se } n \text{ é par;} \end{cases}$ (b) $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_n = nu_{n-1} \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_{n+1} = 4x_n + 2 \end{cases}$

6. Dada a sucessão $u_n = 3n + 2$. Determine:

- (a) a ordem do termo 298 (c) $u_1 + u_3 + u_5$ (e) 394 é termo da sucessão?
(b) Os termos de ordem 10, 15 e 99 (d) $u_1 + u_2 + u_4$ (f) A soma dos cinco primeiros termos

7. Considera a sucessão $a_n = \frac{n^2 - 1}{n}$

- (a) Determine $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_{n+1}$ e a_{k+2}
(b) Verifica se 9,9 é termo da sucessão e indica a sua ordem
(c) Será que 6 é termo da sucessão? Justifica a sua resposta.

8. Esboce o gráfico de cada sucessão:

- (a) $a_n = n^2 - 1$ (b) $u_n = \frac{2}{n+1}$ (c) $v_n = (-1)^n$ (d) $x_n = 2^{n-1}$

9. Estude a monotonia de cada sucessão a seguir:

- (a) $a_n = \frac{2n}{2n+1}$ (c) $c_n = -3n + 2$ (e) $e_n = \frac{2n-5}{2}$ (g) $g = \frac{n^2+1}{n}$
(b) $b_n = \frac{1}{n}$ (d) $d_n = \frac{n+1}{n-1}$ (f) $f_n = 2 + \frac{1}{n}$ (h) $h_n = 5 - n^2$

10. Quais das sucessões seguintes são limitadas, para as limitadas indique a faixa que limita a sucessão:

- (a) $a_n = \frac{n+1}{n}$ (c) $c_n = n^2$ (e) $e_n = (0, -1, 0, -1, 0, -1, \dots)$ (g) $g_n = n$
 (b) $b_n = \frac{3n-2}{2n+5}$ (d) $d_n = \frac{1}{2^n}$ (f) $f_n = (4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, \dots)$ (h) $h_n = 5 - 2n$

11. Aplicando a definição de limite de uma sucessão, prove que:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{5n+2} = \frac{2}{5}$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{2n-5} = 2$ (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{2n+1} = 2$

12. Calcule os limites das sucessões que se seguem e classifica – as em: Convergente, Divergente, Infinitamente pequena, infinitamente grande negativo e infinitamente grande positivo.

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n)$ (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n-5}{2n+4} \right)$ (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2n}{3n-2} \right)$ (m) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+8} - \sqrt{n})$
 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - n)$ (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-1}{n^4-1} \right)$ (j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{n^2-1} \right)^6$ (n) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{5-n^2} - \sqrt{2-n})$
 (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$ (g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2+5}{n+2} \right)$ (k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{n+4}{8n+2}}$ (p) $\lim_{n \rightarrow -\infty} (5n^3 - 2n - 7)$
 (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{3n} \right)$ (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{n^3-2} \right)$ (l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{15n^2+5n-7}}{2n-5}$ (q) $\lim_{n \rightarrow \infty} (6n^4 + 3n^4 - 2n)$

13. Calcule:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n} \right)^n$ (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2+1} \right)^{3n^2-3}$ (g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+5}{3n+1} \right)$ (j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n} \right)^{\sqrt{n}}$
 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n$ (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+5}{n+2} \right)^n$ (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{n+4} \right)^{2n}$ (l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n-7}{5n+2} \right)^n$
 (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n$ (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+4}{3n+2} \right)^{n+8}$ (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)$ (m) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-2} \right)^n$

14. Quais das sucessões são progressão aritmética, para as que são, indique a diferença d:

- (a) $a_n = (1, 3, 5, 7, 9, \dots)$ (c) $c_n = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \dots \right)$ (e) $e_n = (12, 9, 7, 4, 2, -1, \dots)$
 (b) $b_n = (100, 103, 106, 108, 111, \dots)$ (d) $d_n = \left(4, \frac{11}{3}, \frac{10}{3}, 3, \frac{8}{3}, \dots \right)$ (f) $f_n = (5, 3, 1, -1, -3, \dots)$

15. Quais das sucessões são progressão geométrica, para as que são, indique a razão q:

- (a) $a_n = (1, 2, 4, 8, 16, \dots)$ (c) $c_n = (-54, -18, -6, -2, \dots)$ (e) $e_n = (4, 16, 64, 1024, \dots)$
 (b) $b_n = (7, 7, 7, 7, 7, \dots)$ (d) $d_n = (5, 10, 20, 30, 40, \dots)$ (f) $f_n = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots \right)$

16. Nas sucessões seguintes, escreve o termo geral, de cada sucessão:

- (a) $a_n = (-1, -4, -9, -16, -25, \dots)$ (c) $a_n = (-54, -18, -6, -2, \dots)$ (e) $a_n = (1, 3, 9, 27, 81, \dots)$
 (b) $a_n = (-1, 2, -3, 4, -5, 6, -7, \dots)$ (d) $a_n = \left(2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots \right)$ (f) $a_n = (1, 3, 9, 27, 81, \dots)$

17. Dada a sucessão $a_n = (1, 3, 5, 7, 9, \dots)$, calcula a soma dos n primeiros termos:

- (a) $n = 10$ (b) $n = 12$ (c) $n = 15$ (d) $n = 20$ (e) $n = 25$ (f) $n = 100$

18. Dada a sucessão $a_n = (1, 3, 9, 27, 81, \dots)$, calcula a soma dos n primeiros termos:

- (a) $n = 5$ (b) $n = 10$ (c) $n = 12$ (d) $n = 15$ (e) $n = 20$ (f) $n = 25$

19. Numa P.A. de diferença 3, o sexto termo é 7 e o ultimo é 247. Quantos termos tem a progressão?

20. Quantos termos devem ser somados na P.A. $(-5, -1, 3, \dots)$ a partir do 1º termo, para que a soma seja 1590?

21. De uma P.A. sabe-se $a_2 + a_5 = 62$ e $a_4 + a_6 = 82$. Determine o termo geral da progressão.

22. Determina a soma dos dez primeiros termos de uma PA, sabendo que a soma do 3º e 5º termos é 14 e a soma do 3º e 7º termos é 8.

23. Determine o valor de x :

(a) $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + x = 325$

(c) $(x + 3) + (x + 8) + (x + 13) + \dots + (x + 33) = 133$

(b) $1 + 3 + 5 + \dots + x = 100$

(d) $3x + x + \frac{x}{3} + \dots = 27$

24. Determina o 1º termo e a razão q de uma PG, sabendo que a soma do 1º e 2º termos é 15 e a soma do 3º e 4º termos é 60.

25. Determine a soma de todos termos da sucessão PG infinita a seguir $(0,3; 0,03; 0,003; \dots)$

26. Determine o valor x de modo que a sucessão $(x - 3, x - 1, x + 3)$ seja progressão geométrica.

27. Quantos números divisíveis por 3 existem entre 100 e 10 00 inclusive?

28. Calcula a soma de $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

29. Um automóvel percorreu no primeiro dia de viagem x km, no segundo dia percorreu o dobro de x e no terceiro dia percorreu o triplo de x , assim sucessivamente. Até ao fim de 10 dias, percorreu uma distância total de 1650km. Quantos quilómetros o automóvel percorreu no primeiro dia de viagem?

30. O cometa Halley é visto da terra de 76 em 76 anos. Seu último aparecimento foi em 2019. Determina as suas 4 ocorrências seguintes.

31. O Senhor Eliézer depositou num banco 5 mil meticais e resolveu ai colocar, todos meses, 500 meticais. Assim, decorrido um mês o Senhor Eliézer tinha 5500 meticais no banco. Ao fim de quantos meses o Senhor Eliézer terá 50 000 meticais depositados no banco?

32. Um mentiroso conta uma mentira a três amigos. Ao fim de 10 minutos cada um deles conta-a a outros três que, por sua vez, a contam em 10 minutos a outros três (cada um). Quantas pessoas, incluindo o mentiroso, conhecem a mentira ao fim de uma hora ao contar do momento em que três amigos a começaram a espalhar?

32 Limites

32.1 Definição de limite de uma função num ponto

O conceito de uma função é fundamental para o estudo e compreensão do cálculo. A ideia intuitiva de limite é aproximar-nos o máximo possível de um valor numérico e, mesmo assim, nunca alcança-lo.

Antes, porém, é conveniente observar que a existência do limite de uma função para um valor numérico b quando x tende para um valor numérico a , não exige que a função esteja definida no ponto a . Na realidade, quando calculamos um limite, consideramos os valores da função tão próximos quando desejamos do ponto a , porém não coincidente com a , ou seja, consideramos os valores da função a vizinhança do ponto a .

Consideremos a função definida por, $f(x) = \frac{4x^2-16}{2x-4}$.

Vamos estudar o limite de $f(x)$ quando x tende para 2.

Observamos que para $x = 2$, a função não está definida. No entanto, mesmo não existindo $f(2)$, o limite de $f(x)$ quando x tende para 2 existe e pode ser calculado da seguinte forma, factorizando o numerador:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x+4)(2x-4)}{2x-4} = \lim_{x \rightarrow 2} 2x+4 = 2*2+4 = 8$$

Vamos apresentar a definição de limite de uma função segundo Heine:

Seja f uma função real de variável real e a um ponto de acumulação do domínio de f . Diz-se que f tende para b quando x tende para a e escreve-se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

Exemplos

Calcule os seguintes limites:

$$1^\circ) \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 5x + 2) = 3 * 2^2 - 5 * 2 + 2 = 4$$

$$2^\circ) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+2x-3}{4x-3} = \frac{(-1)^2+2*(-1)-3}{4*(-1)-3} = \frac{-4}{-7} = \frac{4}{7}$$

32.2 Limite de função racional tipo $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

Para o cálculo limite de uma função do tipo $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, usualmente procede-se da seguinte forma:

- Coloca-se primeiro em evidência a potência máxima de $f(x)$ e $g(x)$;
- Depois, simplifica-se e em seguida substitui-se x por $+\infty$.

Exemplo

1º Vamos calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^3 - 8x + 4}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^3 - 8x + 4} = \frac{+\infty}{+\infty}$ é uma indeterminação

Vamos proceder como em cima:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^3 - 8x + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2(1 - \frac{x}{x^2} + \frac{3}{x^2})}{x^3(1 - \frac{8}{x^3} + \frac{4}{x^3})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 0$$

32.3 Limites de funções racionais do tipo $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$

Para o cálculo do limite de uma função do tipo $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ usualmente procede-se da seguinte forma:

- Primeiro substitui-se x por a e, se $f(a) = 0$ e $g(a) = 0$, então obtém-se uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$;
- Logo, factoriza-se os dois termos da fracção e simplifica-se;
- Por fim, substitui-se x por a para obtermos o valor do limite.

Exemplo

1º Vamos calcular $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1 - 1}{1 - 3 + 2} = \frac{0}{0} \text{ é uma indeterminação.}$$

Vamos proceder como em cima:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{(x + 1)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x - 1)}{(x + 2)} = \frac{-1 - 1}{-1 + 2} = -2$$

2º Vamos calcular $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 + 4a^2x - 5a^3}{x^2 - ax}$.

Vamos usar a regra de Ruffini para a factorização do numerador:

	1	0	$4a^2$	$-5a^3$
a		a	a^2	$5a^3$
	1	a	$5a^2$	0

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x^2 + ax + 5a^2)}{x(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + ax + 5a^2}{x} = \frac{7a^2}{a} = 7a$$

32.4 Limites de funções irracionais

Para o cálculo do limite de uma função irracional, usalmente, procede-se da seguinte forma:

- Primeiro tenta-se substituir x por a ;
- Tenta-se depois levantar a indeterminação através da multiplicação pelo conjugado do numerador ou do denominador;
- Por fim, substitui-se x por a para obter o valor do limite.

Exemplo

1º Vamos calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \text{ é uma indeterminação.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1+x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2}{1+1} = 1$$

2º Vamos calcular o $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[4]{x-1}}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[4]{x-1}} = \frac{0}{0} \text{ é uma indeterminação}$$

Para levantar a indeterminação, vamos encontrar o mínimo múltiplo comum (m.m.c) dos índices dos radicais:

$$\text{m.m.c.}(3,4) = 12$$

Seja $x = t^{12}$, se $x \rightarrow 1$, então $t \rightarrow 1$.

Recorda que:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[4]{x-1}} &\rightarrow \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^4 - 1}{t^3 - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t^2 - 1)(t^2 + 1)}{(t - 1)(t^2 + t + 1)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t - 1)(t + 1)(t^2 + 1)}{(t - 1)(t^2 + t + 1)} \\ &= \frac{(1 + 1)(1 + 1)}{(1 + 1 + 1)} = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

Calcular $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{4x+1}-3} = \left\| \frac{0}{0} \right\|$

Para resolver este limite, multiplicamos o numerador e o denominador pelo “conjugado” do numerador e também pelo “conjugado” do denominador.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{4x+1}-3} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{3x-2}-2)(\sqrt{3x-2}+2)(\sqrt{4x+1}+3)}{(\sqrt{4x+1}-3)(\sqrt{3x-2}+2)(\sqrt{4x+1}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x-2)(\sqrt{3x-2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(\sqrt{4x+1}+3)}{4(\sqrt{3x-2}+2)} = \frac{9}{8}\end{aligned}$$

Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 3x + 2} - x = \|\infty - \infty\|$

Para obtermos o limite procurado, multiplicamos e dividimos $(\sqrt{x^2 + 3x + 2} - x)$ por $(\sqrt{x^2 + 3x + 2} + x)$. Assim, temos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x + 2} - x)(\sqrt{x^2 + 3x + 2} + x)}{\sqrt{x^2 + 3x + 2} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 2}{\sqrt{x^2 + 3x + 2} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(3 + \frac{2}{x})}{\sqrt{x^2(1 + \frac{3x}{x^2} + \frac{2}{x^2})} + x} = \frac{3}{2}$$

32.5 Limites de funções trigonométricas

Limite notável: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} x}{x} = 1$

Limite notável: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg} x}{x} = 1$

Exemplos

1º Vamos calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} 3x}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} 3x}{x} = \frac{0}{0} \text{ é uma indeterminação}$$

Vamos levantar a indeterminação aplicando o limite notável:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\operatorname{sen}3x}{3x} = 3 * 1 = 3$$

2º Vamos calcular:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x \cdot \cos x}{x} = \left\| \frac{0}{0} \right\|$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x (\operatorname{sen} x - \cos x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} * \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{sen} x - \cos x) = 1 * (0 - 1) = -1$$

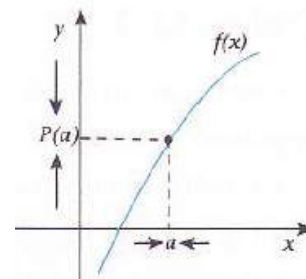
33 Continuidade de funções

33.1 Continuidade de uma função num ponto

Seja f uma função real de variável real e a um ponto de acumulação do seu domínio.

Diz-se que f é contínua no ponto a do seu domínio se, e só se as três condições seguintes se verificarem:

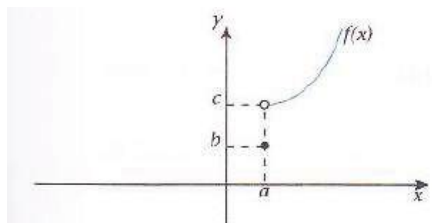
- Existe $f(a)$;
- Existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$;
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.



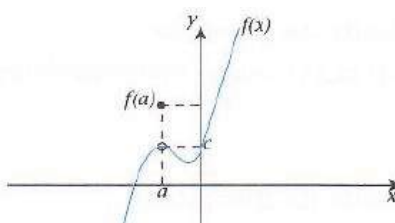
Se uma função não é contínua num ponto $x = a$ do seu domínio, diz-se que a função é descontínua nesse ponto. A descontinuidade ponto acontecer ou porque a função apresenta um «furo», ou dá «salto» nesse ponto.

Pode ocorrer as seguintes situações:

- Não existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$;
- Não existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$

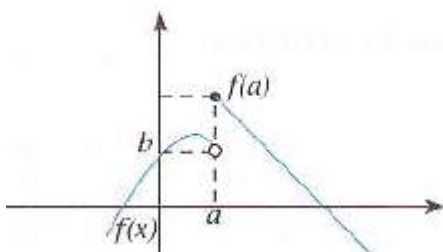


Descontinuidade não evitável.



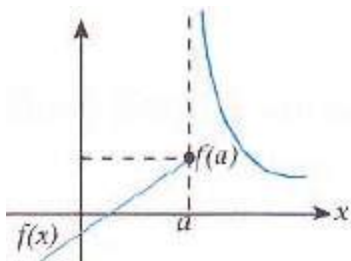
Descontinuidade evitável.

- Se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ diz-se que f é contínua à direita do ponto a ;



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

- Se $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ diz-se que f é contínua à esquerda do ponto a ;



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

Função contínua num intervalo

Definição 1

Uma função f diz-se contínua num intervalo $]a, b[$ do seu domínio, se e só se é contínua todos os pontos desse intervalo.

Definição 2

Uma função f diz-se contínua num intervalo $[a, b]$ do seu domínio, se e só se verifica seguintes condições:

- É contínua em $]a, b[$;
- É contínua à direita do ponto a ;
- É contínua à esquerda do ponto b ;

Exemplo

1º) Na função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x < 1 \\ -1 & \text{se } x = 1 \\ 3 - x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Temos:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3 - x) = 2$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 4) = -3$$

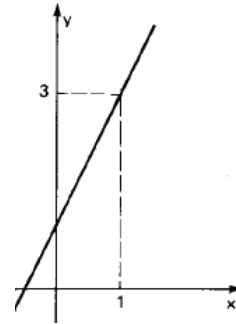
Como os limites laterais são diferentes, dizemos que $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ não existe. A justificação da não existência de um limite devido ao facto de os limites laterais serem diferentes é dada no teorema que segue.

2º) A função $f(x) = 2x + 1$ definida em $\mathbb{R}$ é contínua em 1, pois

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3 = f(1)$$

Notamos que f é contínua em $\mathbb{R}$, pois para todo $a \in \mathbb{R}$, temos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (2x + 1) = 2a + 1 = f(a)$$



2º) A função

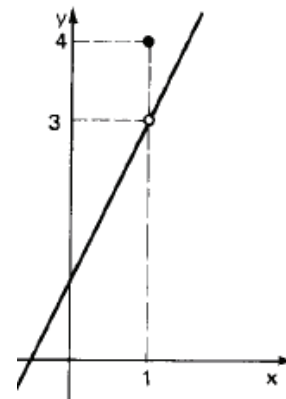
$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x \neq 1 \\ 4 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Definida em $\mathbb{R}$ é descontínua em 1, pois

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3 \neq 4 = f(1)$$

Observemos que f é contínua em $\mathbb{R} - \{1\}$, temos:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (2x + 1) = 2a + 1 = f(a)$$



3º) A função

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 1 - x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Definida em $\mathbb{R}$ é descontínua em 1, pois

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) = 2$$

e

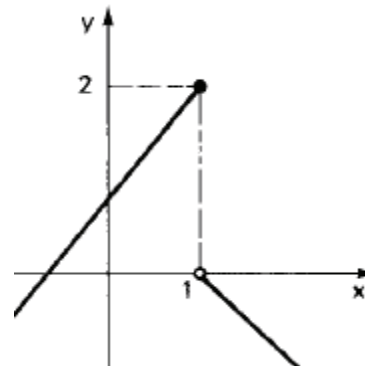
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - x) = 0$$

Portanto, não existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

4º) Verificar se a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x < 2 \\ 7 - 2x & \text{se } x \geq 2 \end{cases} \text{ é contínua em } x = 2.$$

Solução



Devemos verificar se $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

$$f(2) = 7 - 2 * 2 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 1) = 3$$

$$\text{Então } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3 = f(2)$$

Logo f é contínua em $x = 2$.

Limites infinitos

Os limites infinitos são limites em que $x \rightarrow \pm\infty$.

Seja a função em que o limite é do tipo $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.

O procedimento do cálculo consiste no seguinte:

- Colocar em evidência a potência de x com maior expoente de $f(x)$ e de $g(x)$;
- Simplificar a fração;
- Substituir x por $\pm\infty$ para obter o valor do limite.

Exemplos

1. Encontra os limites das seguintes funções:

$$1.1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^2 - 8x + 1}$$

Se substituirmos x por $+\infty$, teremos a indeterminação do tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$.

Para levantar esta indeterminação, devemos colocar x^2 em evidência:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^2 - 8x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{8}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(2 - \frac{1}{\infty} + \frac{3}{\infty^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{8}{\infty} + \frac{1}{\infty^2}\right)} = 2$$

$$1.2 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 4x + 2}{\sqrt{9x^4 + 2x - 5}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3(-\infty)^2 - 4(-\infty) + 2}{\sqrt{9(-\infty)^4 - 2(-\infty) - 5}} = \frac{-\infty}{-\infty} \text{ é uma indeterminação}$$

Levantando a indeterminação:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(3 - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2} \right)}{\sqrt{x^4 \left(9 + \frac{2}{x^3} - \frac{5}{x^4} \right)}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 * 3}{\sqrt{9x^4}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{3x^2} = 1$$

34 Cálculo diferencial

34.1 Definição de derivada

A derivada de uma função $y = f(x)$ num ponto $x = x_0$, é igual ao valor da tangente trigonométrica do ângulo formado pela tangente geométrica à curva representativa de $y=f(x)$, no ponto $x = x_0$, ou seja, a derivada é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função no ponto x_0 (somatematica, s/d).

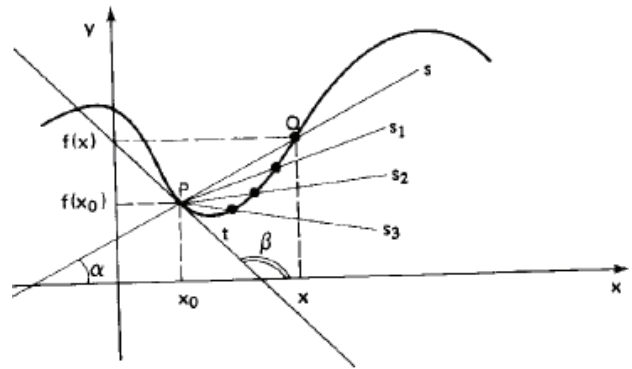
A derivada de uma função $y = f(x)$, pode ser representada também pelos símbolos:

y' , dy/dx ou $f'(x)$.

34.2 Interpretação Geométrica

Seja f uma função contínua no intervalo aberto I . Admitamos que exista a derivada de f no ponto $x_0 \in I$.

Dado um ponto $x \in I$, tal que $x \neq x_0$, consideremos a recta s determinada pelos pontos $P(x_0, f(x_0))$ e $Q(x, f(x))$.

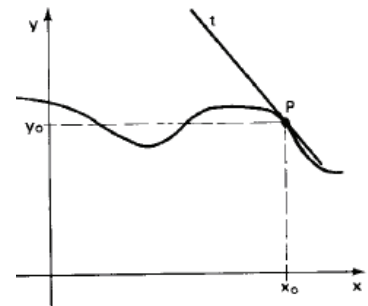


A recta s é secante com o gráfico de f e seu coeficiente angular é:

$$tg\alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

A derivada de uma função f no ponto x_0 é igual ao coeficiente angular da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x_0 .

Quando queremos obter a equação de uma recta passando por $P(x_0, y_0)$ e com coeficiente angular m , utilizamos a fórmula de Geometria Analítica. $y - y_0 = m * (x - x_0)$



Em particular, se queremos a equação da tangente t ao gráfico de uma função f no ponto (x_0, y_0) , onde f é derivável, basta fazer $y_0 = f(x_0)$ e $m = f'(x_0)$. A equação da recta t fica:

$$y - y_0 = f'(x) * (x - x_0)$$

Exemplo

Determine a equação da recta tangente à curva $y = x^2 - 3x$ no seu ponto de abcissa 4?

Resolução

$$x_0 = 4 \rightarrow f(x_0) = 4^2 - 3 * 4 = 4$$

Então P(4,4) é o ponto de tangência.

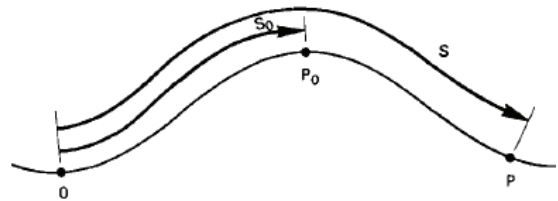
$$f'(x_0) = f'(4) = 2 * 4 - 3 = 5$$

Portanto, o coeficiente angular de t é 4 e sua equação é:

$$y - 4 = 5(x - 4) \rightarrow y = 5x - 16$$

34.3 Interpretação Cinemática

Do estudo da Cinemática, sabemos que a posição de um ponto material em movimento, pode ser determinada, em cada instante t , através de sua abcissa s . A expressão que nos dá s em função do tempo t : $s = s(t)$



- A derivada da função $s = s(t)$ no ponto $t = t_0$ é igual à velocidade escalar do móvel no instante t_0 .
- A derivada da função $v = v(t)$ no ponto $t = t_0$ é igual à aceleração escalar do móvel no instante t_0 .

Exemplo:

Um ponto percorre uma curva obedecendo à equação horária $s = t^2 + t - 2$. Calcular a sua velocidade no instante $t_0 = 2$. (Unidades S.I)

Solução

A velocidade no instante $t_0 = 2$ é igual à derivada de s no instante t_0 :

$$v(t) = s'(t) = 2t + 1 \rightarrow v(2) = 2 * 2 + 1 = 5 \text{ m/s}$$

34.4 Propriedades das Derivadas

34.4.1 Derivada da função potência

Dada a função $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*$. A derivada de $f(x)$ é:

$$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

Exemplos

1. $f(x) = x^6 \rightarrow f'(x) = 6x^5$
2. $f(x) = x^{15} \rightarrow f'(x) = 15x^{14}$

34.4.2 Derivada da função exponencial

Dada a função $f(x) = a^x, a \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$. A derivada de $f(x)$ é:

$$f(x) = a^x \rightarrow f'(x) = a^x * \ln a$$

Exemplos

1. $f(x) = 5^x \rightarrow f'(x) = 5^x * \ln 5$
2. $f(x) = 21^x \rightarrow f'(x) = 21^x * \ln 21$

34.4.3 Derivada da função seno e cosseno

1. $f(x) = \text{sen}x \rightarrow f'(x) = \text{cos}x$
2. $f(x) = \text{cos}x \rightarrow f'(x) = -\text{sen}x$

34.4.4 Derivada da Soma

Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$. A derivada da $f(x) = u(x) + v(x)$ é:

$$f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

Exemplos:

1. $f(x) = \text{sen}x + \text{cos}x \rightarrow f'(x) = \text{cos}x - \text{sen}x$
2. $f(x) = x^2 - e^x \rightarrow f'(x) = 2x - e^x$

34.4.5 Derivada da Produto

Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$. A derivada da função $f(x) = u(x) * v(x)$ é:

$$f'(x) = u'(x) * v(x) + u(x) * v'(x)$$

Exemplos:

$$1. f(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 2x) \rightarrow f'(x) = 2x * (x^3 + 2x) + (x^2 + 1)(3x^2 + 2)$$

$$f'(x) = 5x^4 + 9x^2 + 2$$

$$2. f(x) = \text{sen}x * \text{cos}x \rightarrow f'(x) = \text{cos}x * \text{cos}x + \text{sen}x * (-\text{sen}x)$$

$$f'(x) = \text{cos}^2x - \text{sen}^2x$$

34.4.6 Derivada de Quociente

Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ e $v(x) \neq 0$. A derivada da função $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ é:

$$f'(x) = \frac{u'(x) * v(x) - u(x) * v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Exemplos

$$1. f(x) = \frac{e^x}{x^2} \rightarrow f'(x) = \frac{e^x * x^2 - e^x * 2x}{(x^2)^2} = \frac{e^x(x^2 - 2x)}{x^4}$$

$$2. f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1} \rightarrow f'(x) = \frac{(2x)(x + 1) - (x^2 + 1) * 1}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x + 1)^2}$$

34.4.6.1 Derivada da função tangente

Sejam $f(x) = \text{tg}x$, sabemos que $f(x) = \frac{\text{sen}x}{\text{cos}x}$ e então podemos aplicar a regra da derivada de um quociente:

$$u(x) = \text{sen}x \rightarrow u'(x) = \text{cos}x$$

$$v(x) = \text{cos}x \rightarrow v'(x) = -\text{sen}x$$

Portanto,

$$f'(x) = \frac{u'(x) * v(x) - u(x) * v'(x)}{[v(x)]^2} = \frac{\text{cos}^2x + \text{sen}^2x}{\text{cos}^2x} = \frac{1}{\text{cos}^2x} = \text{sec}^2x$$

Logo,

$$f(x) = \text{tg}x \rightarrow f'(x) = \text{sec}^2x$$

34.4.7 Derivada de uma função composta (Regra de Cadeia)

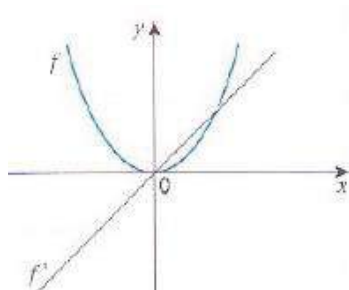
$$F(x) = g(f(x)) \rightarrow F'(x) = g'(f(x)) * f'(x)$$

Exemplos

1. $F(x) = \cos 2x \rightarrow F'(x) = (-\sin 2x) * 2 = -2\sin 2x$
2. $F(x) = \sin^3 x \rightarrow F'(x) = (3\sin^2 x) * (\sin x)' = 3 * \sin^2 x * \cos x$

35 Estudo da variação de uma função

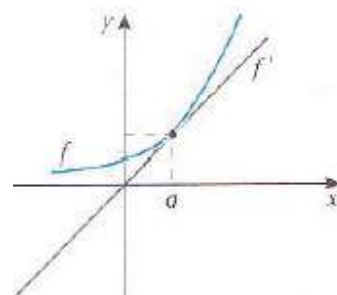
Observe o gráfico da função f e da sua função derivada f' :



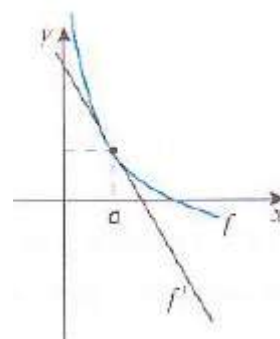
x	$] -\infty; 0 [$	$] 0; +\infty [$
f		
f'	negativa	positiva

Conclusão

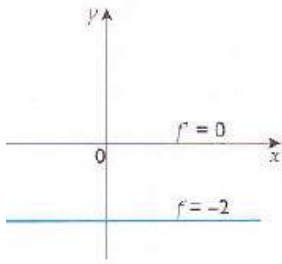
- Uma função é estritamente crescente num intervalo quando f' positiva. Se $f' > 0$, então f cresce.



- Uma função é estritamente decrescente num intervalo quando f' negativa. Se $f' < 0$, então f decresce.



- Se a derivada f' é nula em todos os pontos do intervalo, então f é constante nesse intervalo.



Exemplos

1º Dado a função $f(x) = 2x^2 - x - 1$:

- Vamos determinar f' ;
- Vamos estudar a monotonia da função.

Solução

a) $f'(x) = 4x - 1$

b) $f'(x) = 0 \leftrightarrow 4x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{4}$

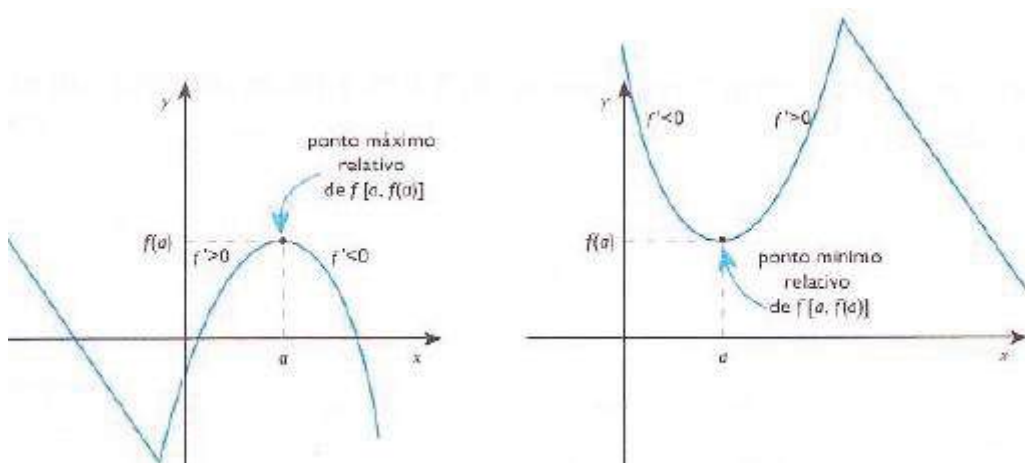
	$x < \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$x > \frac{1}{4}$
f'	—	0	+
f		$-\frac{9}{8}$	

Para encontrar $f\left(\frac{1}{4}\right)$ devemos substituir x por $\frac{1}{4}$ na função primitiva:

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 2 * \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 \rightarrow f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{9}{8}$$

Extremos relativos da função

Observa os gráficos abaixo.



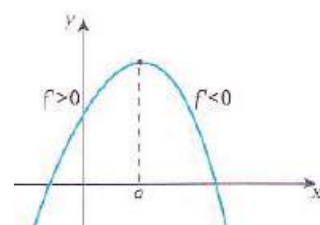
Sendo a um ponto de domínio f , $f(a)$ diz-se que é um **máximo relativo** de f se e só se existe pelo menos, uma vizinhança de a tal que $f(x) \leq f(a), \forall x$;

No ponto $x = a, f'(a) = 0$.

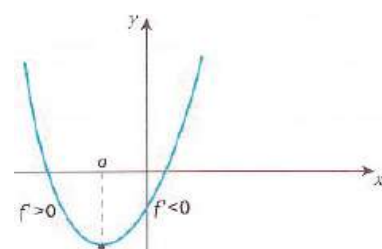
Sendo a um ponto de domínio f , $f(a)$ diz-se que é um **mínimo relativo** de f se e só se existe pelo menos, uma vizinhança de a tal que $f(x) \geq f(a), \forall x$;

No ponto $x = a, f'(a) = 0$.

Se um máximo relativo é ao mesmo tempo o maior valor do contradomínio da função, diz-se máximo absoluto;



Se um mínimo relativo é ao mesmo tempo o menor de todos os valores do contradomínio da função, diz-se mínimo absoluto;



Exemplo

Considera a função $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$

- a) Vamos determinar $f'(x)$;
- b) Vamos indicar os intervalos de monotonia da função;
- c) Vamos indicar os extremos relativos da função.

Solução

a) $f'(x) = x^2 - 2x$

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0$

$$x(x - 2) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2$$

Para $x \in]-\infty, 0[\cup]2; +\infty[$, a função cresce.

Para $x \in]0; 2[$, a função decresce.

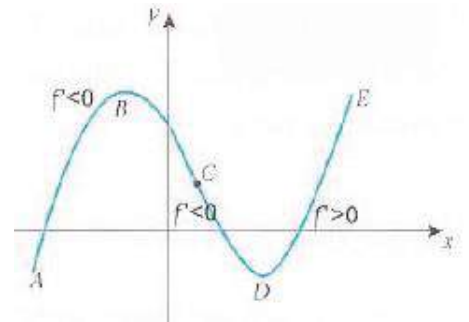
	$x < 0$	0	$x < 0$	2	$x < 0$
f'	+	0	-	0	+
f		1		$-\frac{1}{3}$	

- c) O ponto $(0,1)$ é um máximo relativo.
O ponto $(2, -\frac{1}{3})$ é um mínimo relativo.

35.1 Sentido da concavidade e ponto de inflexão

Examinemos o gráfico de uma função $f(x)$. Observe o seguinte:

- Entre os pontos A e B a derivada é positiva, mas vai diminuindo, até se anular no ponto B;
- Entre B e C a derivada é negativa, mas cresce em valor absoluto;
- De C e E a derivada cresce continuamente, mas é negativa entre C e D e positiva de D até E;
- O ponto C, em que a função muda o sentido de concavidade, chama-se ponto de inflexão;
- A derivada $f'(x)$ é crescente ou decrescente conforme a sua derivada $f''(x)$ é positiva ou negativa nesse intervalo



Assim, em resumo, pode afirmar-se:

- O gráfico de uma função tem a concavidade virada para cima se a 2^a é positiva:
Se $f'' > 0$ então f é côncavo para cima;
- O gráfico de uma função tem a concavidade virada para baixo se a 2^a é negativa:
Se $f'' < 0$ então f é côncavo para baixo.

Exemplos

1º) Seja $f(x) = 2x^2 - 5x + 4$

A função derivada é $f'(x) = 4x - 5$.

A 2^a derivada é $f''(x) = 4$.

Visto que a 2^a derivada é sempre positiva, o gráfico da função é côncavo para cima.

2º) Seja $f(x) = x^3 + 6x^2 + 3$

A 1^a derivada é $f'(x) = 3x^2 + 12x$

A 2^a derivada é $f''(x) = 6x + 12$

O ponto de inflexão é dado por:

$$f''(x) = 0 \rightarrow 6x + 12 = 0 \rightarrow x = -2$$

$$f(-2) = (-2)^3 + 6 * (-2)^2 + 3 = 19$$

Logo: o ponto de inflexão é (-2, 19).

Para facilitar, vamos esquematizar o estudo num quadro em que os símbolos $\cup$ e $\cap$ indicam o sentido da concavidade:

x	$] - \infty; 2[$	-2	$] - \infty; 2[$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\cap$	19	$\cup$

35.2 Determinação das assíntotas

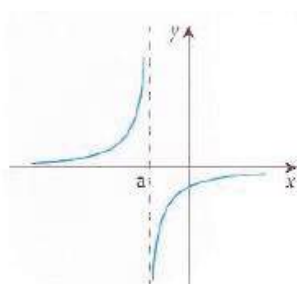
Seja $f(x)$ uma função real de variável real e C uma curva representativa desta função no sistema coordenado de ordenadas.

Uma recta r diz-se assíntota da curva C representativa da função f se a distância de um ponto qualquer da curva C à recta tende para zero quando $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow a$.

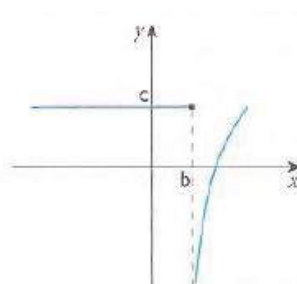
Assíntota vertical

A recta r de equação $x = a$, com $a \in \mathbb{R}$, é uma assíntota vertical (AV) do gráfico da função $y = f(x)$ se e só se:

- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$)
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$)

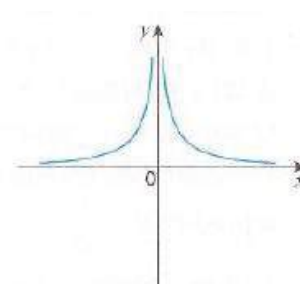


$x = a$ é uma AV



$\lim_{x \rightarrow b^+} f = -\infty$

$x = b$ é uma AV



$\lim_{x \rightarrow 0^+} f = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f = +\infty$

$x = 0$ é uma AV

Exemplos

1º Vamos determinar as assíntotas verticais de cada uma das seguintes funções:

$$y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ é AV}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = -1 \text{ é AV}$$

Assíntota horizontal

A recta da equação $y = b$, com $b \in \mathbb{R}$, é uma assíntota horizontal (AH) do gráfico da função $y = f(x)$ se:

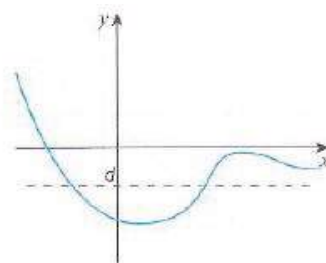
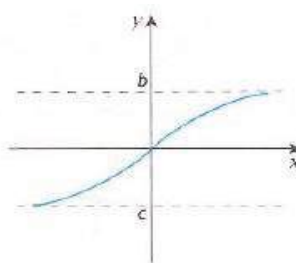
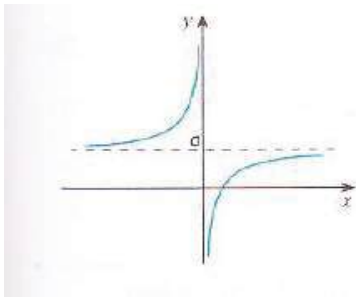
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \text{ ou } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$

$y = a$ é uma AH

$y = b$ é uma AH

$y = d$ é uma AH

$y = c$ é uma AH



Exemplos

$$1^\circ) f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 3}{x^2 - x + 1}$$

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 3}{x^2 - x + 1} = 2$$

$y = 2$ é uma assíntota horizontal.

$$2^{\circ}) y = \frac{-x^2+x+1}{x^2+5}$$

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -3$$

$y = -3$ é uma assíntota horizontal.

35.3 Estudo completo de funções

Vamos fazer o estudo completo da função $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$.

- Domínio da função: $x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$; $D_f: x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- Zeros da função: $x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$
- Ordenada na origem: $f(0) = \frac{0-2}{0+1} \rightarrow f(0) = -2$
- Equações das assíntotas:

Assíntota vertical

$$x = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{x+1} = +\infty$$

$$x = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{x+1} = -\infty$$

Assíntota vertical: $x = -1$

Assíntota horizontal

$$y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x+1} = +\infty$$

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x+1} = -\infty$$

Assíntota horizontal: $y = 1$.

- Paridade

$$f(x) = \frac{x-2}{x+2}$$

$$f(-x) = \frac{-x-2}{-x+2} = \frac{x+2}{x-1}$$

Logo, a $f(x)$ não é par nem ímpar.

- Intervalos de monotonia:

$$f(x) = \frac{x-2}{x+2} \rightarrow f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$$

O numerador é positivo e também o é o denominador. Por esta razão $f'(x) > 0$, qualquer que seja x . Logo, a função é sempre crescente no seu domínio.

- Sentido da concavidade:

$$f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$$

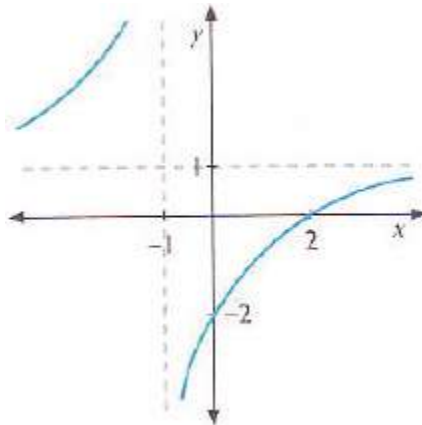
$$f''(x) = \frac{6}{(x+1)^3}$$

$$x + 1 = 0 \leftrightarrow x = -1$$

x	$x < -1$	-1	$x > -1$
$f''(x)$	+		-
$f(x)$	∪	-3	∩

- Contradomínio: $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- Não tem extremos relativos
- Injectividade: a função é injectiva

Esboço gráfico:



Exemplos

1º) Dada a função $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$;

a) Vamos determinar os zeros da função:

$$f(x) = 0 \rightarrow x \left(\frac{1}{3}x^2 - 1 \right) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } \frac{1}{3}x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = 0 \text{ ou } x = \pm\sqrt{3}$$

b) Vamos determinar os intervalos de monotonia e os extremos relativos (se existirem).

$$f'(x) = x^2 - 1 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	+	0		0	+
$f(x)$		$\frac{2}{3}$		$-\frac{2}{3}$	

Para $x < -1$ ou $x > 1$ a função cresce;

Para $-1 < x < 1$ a função decresce;
 O ponto $\left(-1, \frac{2}{3}\right)$ é o máximo relativo;
 O ponto $\left(1, -\frac{2}{3}\right)$ é o mínimo relativo.

c) Vamos determinar o sentido da concavidade e os pontos de inflexão (caso existam).

$$f'(x) = x^2 - 1 \rightarrow f''(x) = 2x; f''(x) = 0, \text{ se } x = 0$$

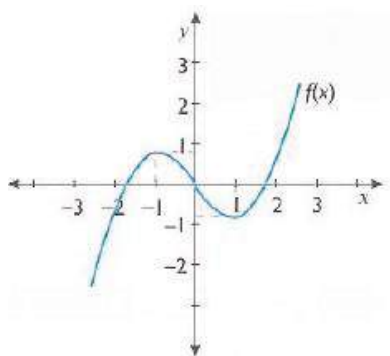
x	$x < 0$	0	$x > 0$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	0	$\cup$

Ponto de inflexão $(0,0)$;

Para $x < 0$ f é côncavo para baixo;

Para $x > 0$ f é côncavo para cima.

d) Vamos fazer o esboço do gráfico



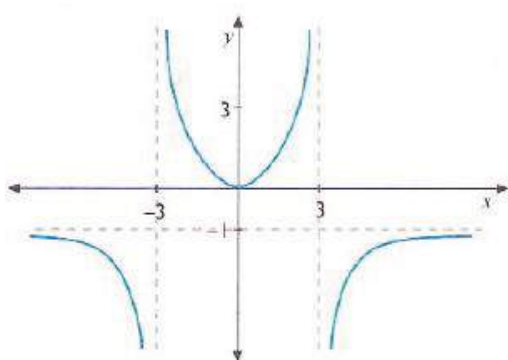
$$f(x) = \frac{x^2}{9 - x^2}$$

- Domínio da função: $D_f: x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$
- Assíntota vertical: $x = 3$ e $x = -3$
- Assíntota horizontal: $y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{9 - x^2} = -1$
- Derivada: $f'(x) = \frac{18x}{(9 - x^2)^2}$

$$18x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$x < 0$	0	$x > 0$
$f'(x)$	–		+
$f(x)$		0	

Esboço gráfico:



- Contradomínio: $y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- Paridade: f é par
- Injectividade: f é não injectiva e não sobrejectiva

36 Introdução ao Cálculo Integral

36.1 Tabela de Integrais

4. $\int dx = x + c$
5. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
6. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$
7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, a > 0, a \neq 1$
8. $\int e^x dx = e^x + c$
9. $\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + c$
10. $\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + c$

Exercícios Resolvidos

1. $\int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} = \frac{x^3}{3} + c$
2. $\int 3x^4 dx = 3 \int x^4 dx = 3 \frac{x^{4+1}}{4+1} = \frac{3x^5}{5} + c$
3. $\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{1}{x} + c$
4. $\int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + c$

Propriedade da integral indefinida

Sejam $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ e $c \neq 0$ uma constante. Então:

- a. $\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$
- b. $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

Exercícios Resolvidos

$$1^\circ) \int (3x^2 + 5 + \sqrt{x}) dx = \int 3x^2 dx + \int 5 dx + \int \sqrt{x} dx = 3 \int x^2 dx + 5 \int dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{3x^3}{3} + 5x + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = x^3 + 5x + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C$$

$$2^\circ) \int \left(\frac{x^3+2x+7}{x} \right) dx = \int \left(\frac{x^3}{x} + \frac{2x}{x} + \frac{7}{x} \right) dx = \int x^2 dx + \int 2 dx + 7 \int \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} + 2x + \ln|x| + C$$

$$3^{\circ}) \int \left(\frac{e^x}{2} + x\sqrt{x} \right) dx = \frac{1}{2} \int e^x dx + \int x^1 * x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{e^x}{2} + \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{e^x}{2} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{e^x}{2} + \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + C$$

36.2 Método da Substituição ou Mudança de Variável para Integração

Utilizando regras de integração, é possível encontrar a primitiva de algumas funções. Entretanto, o que acontece quando temos que encontrar a primitiva de funções do tipo:

$$\int 2x\sqrt{1+x^2} dx$$

Tendo a seguinte situação:

$$\int f(g(x)) \cdot [g'(x)] dx$$

Fazendo $u = g(x)$ tem-se $du = g'(x)dx$ temos:

$$\int f(g(x)) \cdot [g'(x)] dx = \int f(u) du = F(u) + C$$

Exercícios Resolvidos

$$1^{\circ}) \int 2x\sqrt{1+x^2} dx$$

Seja: $u = 1 + x^2 \rightarrow du = 2x dx$

$$\int 2x\sqrt{1+x^2} dx \rightarrow \int \sqrt{u} du = \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2\sqrt{u^3}}{3}$$

Recorrendo a igualdade: $u = 1 + x^2$, temos:

$$\int 2x\sqrt{1+x^2} dx = \frac{2\sqrt{(1+x^2)^3}}{3} + C$$

$$2^{\circ}) \int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$$

Seja: $u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx \rightarrow \int u^2 du = \frac{u^3}{3}$$

Recorrendo a igualdade: $u = \ln x$, temos:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \frac{(\ln x)^3}{3} + C$$

$$3^{\circ}) \int \operatorname{sen}(x+7) dx$$

$$\text{Seja: } u = x + 7 \rightarrow du = dx$$

$$\int \operatorname{sen}(x+7) dx \rightarrow \int \operatorname{sen} u du = -\cos u + C$$

Recorrendo a igualdade: $u = x + 7$, temos:

$$\int \operatorname{sen}(x+7) dx = -\cos(x+7) + C$$

$$4^{\circ}) \int \operatorname{sen}^2(x) \cos(x) dx = \int [(\operatorname{sen}(x))]^2 \cos(x) dx$$

$$\text{Seja: } u = \operatorname{sen}(x) \rightarrow du = \cos(x) dx$$

$$\int [(\operatorname{sen}(x))]^2 \cos(x) dx \rightarrow \int u^2 du = \frac{u^3}{3}$$

Recorrendo a igualdade: $u = \operatorname{sen}(x)$, temos:

$$\int [(\operatorname{sen}(x))]^2 \cos(x) dx = \frac{\operatorname{sen}(x)^3}{3} + C$$

$$5^{\circ}) \int x^3 \cos x^4 dx$$

$$\text{Seja: } u = x^4 \rightarrow du = 4x^3 dx \rightarrow \frac{du}{4} = x^3 dx$$

$$\int x^3 \cos x^4 dx = \frac{1}{4} \int \cos u du = \frac{1}{4} \operatorname{senu}$$

Recorrendo a igualdade: $u = x^4$, temos:

$$\int x^3 \cos x^4 dx = \frac{1}{4} \operatorname{sen} x^4 + C$$

36.3 Método da Integração por Partes

Podemos escrever a fórmula da *integração por partes*, expressa por:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Exercícios Resolvidos

$$1^{\circ}) \int \ln x dx$$

Seja: $u = \ln x \rightarrow du = \frac{dx}{x} e dv = dx \rightarrow \int dv = \int dx \rightarrow v = x$

Utilizando a fórmula de integração por partes temos:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} \rightarrow \int \ln x dx = x \ln x - x \rightarrow \int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C$$

2º) $\int x \sin x dx$

Seja: $u = x \rightarrow du = dx e dv = \sin x dx \rightarrow \int dv = \int \sin x dx \rightarrow v = -\cos x$

Utilizando a fórmula de integração por partes temos:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int x \sin x dx = -x \cos x - \int -\cos x dx \rightarrow \int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx$$

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x + C$$

3º) $\int x \ln x dx$

Seja: $u = \ln x \rightarrow du = \frac{dx}{x} e dv = x dx \rightarrow \int dv = \int x dx \rightarrow v = \frac{x^2}{2}$

Utilizando a fórmula de integração por partes temos:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} \rightarrow \int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{2 * 2}$$

$$= \int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + C$$

4º) $\int x e^{2x} dx$

Seja: $u = x \rightarrow du = dx e dv = e^{2x} dx \rightarrow \int dv = \int e^{2x} dx^1 \rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x}$

Utilizando a fórmula de integração por partes temos:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

¹ Para resolver esta integral o utilize o método de substituição onde $u = 2x$

$$\int x e^{2x} dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx \rightarrow \int x e^{2x} dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx$$

$$\int x e^{2x} dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} * \frac{1}{2} e^{2x} \rightarrow \int x e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C$$

37 Matriz de exame de admissão

1. Fracções simples e mistas

1.1. Transformação de fracções para decimais e vice-versa

1.2. Operações com fracções

2. Percentagens

2.1. Transformação de fracções em percentagem e vice-versa

2.2 Cálculo de percentagens múltiplos

2.3 Aumentos numerários e percentuais

2.4. Diminuições numerários e percentuais

3. Proporções e problemas de bom senso

4. Circunferência

4.1. Posição relativa de uma recta e de uma circunferência

4.2. Ângulos ao centro e arcos de uma circunferência

4.3. Relações entre cordas, arcos e ângulos ao centro

4.4. Amplitude de ângulo e de arco

4.5. propriedades relativas a cordas, arcos e ângulos ao centro

4.6 Ângulos inscritos e exteriores a circunferência

4.7 Área do sector circular e da coroa circular

5. Congruência de triângulos

5.1. Determinação de congruência de ângulos à partir de duas rectas paralelas e uma secante por elas

5.2. Ângulos de um triângulo

5.3. Critérios de congruência de triângulos.

6. Potenciação e Radiciação

6.1. Simplificação de expressões numéricas com potência inteira

6.2. Simplificação de expressões numéricas com potência fraccionária (radicais)

7. Quadriláteros

7.1. Teorema de Thales e sua aplicação

8. Semelhança de triângulos

8.1. Homotetia e semelhança

8.2 Teorema de Thales

9. Equações

9.1. Equações polinomiais

9.2. Equações racionais fraccionárias

9.3. Equações Irracionais

9.4. Equações exponenciais

9.5. Equações logarítmicas

10. Sistemas de equações

10.1. Sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas

10.2. Sistemas de três equações e três incógnitas

10.3. Problemas envolvendo sistemas de equações

11. Inequações

11.1. Inequações polinomiais

11.2. Inequações racionais fraccionárias

11.3. Inequações Irracionais

11.4. Inequações exponenciais

11.5. Inequações logarítmicas

12. Geometria Analítica

12.1. Equação de recta

12.2. Determinação de coordenadas de um ponto da divisão da recta sendo dada a razão

12.3. Equação da circunferência

12.4. Equação da elipse

12.5. Equação da hipérbole

12.6. Posição relativa de rectas

12.7. Distância entre dois pontos e de um ponto a recta

13. Trigonometria

13.1. Redução de ângulos ao primeiro quadrante

13.2. Razões de ângulos acima de 360^0 e no sentido negativo

13.3. Teorema de pitágoras, dos senos e co-seno

13.4. Funções trigonométricas

13.4.1. Caracterização de funções: domínio, contradomínio, paridade, bijectividade e periodicidade

13.4.2. Transformações lineares com funções trigonométricas

14. Módulo de um número real

14.1. propriedades sobre expressões modulares

14.2. Expressões modulares

14.3. Equações modulares

14.4. Inequações modulares

14.5. Funções modulares

15. Análise Combinatória

15.1. Factorial

15.2. Arranjos, Combinações e permutações simples

