# El Principio del Palomar

(*Principio de las Casillas*)

El objetivo de este tema es familiarizarse con un principio elemental llamado "*Principio del Palomar*", "*Principio de los Casilleros*", o bien, "*Principio de Dirichlet*", en honor a Peter Dirichlet, quien lo postuló originalmente.

Antes de enunciar el principio veamos un ejemplo simple para fijar ideas:

**Ejemplo 1.** Si en una sala hay 13 o más personas, entonces existe un par (quizá más) de personas cuyo cumpleaños cae el mismo mes.

Es relativamente simple darse cuenta que lo anterior es cierto, pues como un año tiene 12 meses y hay más personas que meses, por obligación en algún mes estarán de cumpleaños 2 o más personas.

Pongamos ahora en claro el principio, en su versión más simple (y más "literaria").

**Principio del Palomar, de los Casilleros o de Dirichlet (primera versión)**

Si tenemos $m$ palomares, y en ellos duermen $m + 1$ palomas, entonces hay al menos un palomar donde duerme más de una paloma.

Este principio lo podemos extender no sólo a $m + 1$ "palomas" sino a cualquier número mayor que $m$. Para irnos familiarizando con el principio, en vez de usar "palomas" y "palomares" comenzaremos a usar "objetos" y "casilleros" que es como habitualmente se usa este principio.

**Principio del Palomar, de los Casilleros o de Dirichlet (segunda versión)**

Si se tiene un conjunto de $n$ objetos, repartidos en $m$ casilleros y $n > m$ (hay más objetos que casilleros) entonces hay al menos un casillero donde hay 2 o más objetos.

Si bien es cierto esta versión es bastante más general, aún podemos generalizarla un poco más, de la siguiente manera:

**Principio del Palomar, de los Casilleros o de Dirichlet (versión general)**

Si se tiene un conjunto de $n$ objetos, repartidos en $m$ casilleros y $n > km$, con $k$ un número natural, entonces hay al menos un casillero donde hay $(k + 1)$ o más objetos.

Esta última generalización pudiera, a primera vista no ser tan obvia, sin embargo después de un momento es fácil convencerse de que es así. Pero en matemáticas, las afirmaciones no se asumen convenciéndose, es necesario dar una demostración a todo lo que se afirma. Por esa razón, a continuación demostraremos el principio:

**Demostración del Principio del Palomar.** Supongamos que tenemos $n$ objetos repartidos en $m$ casilleros con $n > km$, y supongamos por contradicción que el principio es falso, es decir, que no hay casilleros con $(k + 1)$ o más objetos.

Esto quiere decir que todos los casilleros tienen a lo más $k$ objetos ($k$ o menos objetos). Entonces el número de objetos que hay en los casilleros será igual a $N_1 + N_2 + \ldots + N_m$, siendo $N_i$ el número de objetos del casillero $i$. Pero ya sabemos que en cada casillero hay $k$ objetos o menos, luego: $N_1 \leq k$, $N_2 \leq k, \ldots, N_m \leq k$.

Sumando las ecuaciones anteriores obtenemos que: $N_1 + N_2 + \ldots + N_m \leq km$, es decir, el número total de objetos en los casilleros es menor o igual a $km$ ($n \leq km$).

Pero esto es una contradicción ya que $n > km$. Luego, nuestra suposición de que el principio era falso es incorrecta. Por lo tanto, el Principio del Palomar es cierto.

Ahora nos concentraremos en resolver algunos problemas que, a priori, pudieran ser muy difíciles de resolver sin esta nueva herramienta que acabamos de introducir.

**Problema 1.**

En un estadio hay 10, 000 personas. Demostrar que hay al menos un grupo de 28 personas que está de cumpleaños el mismo día.

*Solución.*

Bastaría considerar a las personas del estadio como nuestros "objetos" y a los días del año como nuestros "casilleros" (podemos "clasificar" a las personas según su día de cumpleaños).

Así, tenemos que el número de personas es $n = 10000$ y el número de días del año es $k = 366$ (consideramos el caso fortuito de que haya personas nacidas en días 29 de febrero).

Podemos notar, además, que $366 \times 27 = 9882$, entonces $10000 > 27 \times 366$ (es decir, $k = 27$), luego, el Principio del Palomar nos asegura que en alguno de los días del año hay 28 o más personas de cumpleaños.

**Problema 2.**

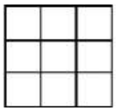
Sea un cuadrado de diagonal 3 en el que se marcan al azar 10 puntos. Demostrar que siempre podemos encontrar al menos 2 puntos que están a una distancia no mayor a 1.

*Solución*.

Nos gustaría usar el Principio del Palomar para resolver este problema. Sabemos que se van a marcar 10 puntos al interior del cuadrado; luego, si creamos 9 "casilleros" que cubran completamente el cuadrado de modo que cada punto deba forzosamente entrar en alguno de los casilleros, el principio del palomar nos aseguraría que al menos 2 puntos caerían en el mismo casillero.

Luego, para resolver el problema, nos bastaría encontrar una forma de crear 9 casilleros con la gracia que si dos puntos caen en el mismo casillero entonces la distancia entre ambos sea menor o igual que 1.

Una forma de lograr esto es dividir el cuadrado en 9 cuadrados más pequeños de la siguiente manera:



Y supongamos que los bordes de los cuadrados los asignamos arbitrariamente a alguno de los cuadrados que bordea (por ejemplo, podemos decir que las líneas horizontales pertenecen al cuadrado inmediatamente superior, las verticales pertenecen al cuadrado inmediatamente a la izquierda y los vértices al cuadrado inmediatamente arriba y a la izquierda).

De esta manera, cualquier punto que pongamos en el cuadrado grande pertenecerá a uno y sólo uno de los cuadrados pequeños. Además como el cuadrado grande tiene diagonal 3, los cuadrados pequeños tendrán diagonal 1. Luego, la distancia máxima que puede haber entre dos puntos dentro de un mismo cuadrito será de 1 (la diagonal del cuadrito).

Así, el Principio del Palomar nos asegura que, al marcar 10 puntos, dos de ellos deberán quedar en el mismo cuadrito, y por lo tanto la distancia entre dichos dos puntos será menor o igual que 1.

Notemos que en el problema anterior dividimos un conjunto (el cuadrado) en casilleros que cumplen cierta propiedad. Esa es, en general, la idea cuando nos enfrentamos a problemas de este tipo.

Ejercitemos un poco más la aplicación de este principio con el siguiente problema:

**Problema 3.**

Se tienen los números del 1 al $2n$ escritos en una pizarra. Se tachan $(n - 1)$ de ellos. Probar que entre los números que quedaron sin tachar en la pizarra, hay al menos 2 de ellos que son consecutivos.

*Solución*.

En esta ocasión hay que tener cuidado, pues los números que deseamos que cumplan la propiedad de ser consecutivos son los números que quedaron sin tachar. Es decir, nuestros objetos serán los números sin tachar, que son $2n - (n - 1) = (n + 1)$.

Como son $n + 1$ números y queremos que al menos 2 de ellos sean consecutivos, nos conviene crear $n$ casilleros de tal forma que si dos números pertenecen al mismo casillero entonces son consecutivos.

Ahora, al igual que en el problema anterior, la idea es dividir el conjunto total de trabajo en casilleros, en este caso el conjunto total de $2n$ números originales. Como son $2n$ podemos dividirlos de la siguiente manera:

$$\boxed{1\quad 2}\boxed{3\quad 4}\boxed{5\quad 6}\;\cdots\;\boxed{2n-3\quad 2n-2}\boxed{2n-1\quad 2n}$$

Es decir, en el casillero 1 ubicamos los números 1 y 2, en el casillero 2, los números 3 y 4, y así sucesivamente hasta que en el casillero $n$ ubicamos los números $2n - 1$ y $2n$. De este modo si dos números están en el mismo casillero, entonces serán consecutivos.

Como los números sin tachar son $n + 1$, y cada uno de ellos pertenece a alguno de los $n$ casilleros indicados previamente, entonces el Principio del Palomar asegura que habrá un casillero que contenga 2 de los números sin tachar. Estos dos números, entonces serán consecutivos.

En los problemas anteriores impusimos que todos los casilleros fueran del mismo tamaño (días del año, cuadrados de diagonal 1, pares de números), sin embargo esto no tiene por qué ser así.

Es más, a veces conviene que los casilleros sean distintos como lo ilustra el siguiente problema:

**Problema 4.**

Supongamos que tenemos 27 números impares positivos menores que 100. Demostrar que hay al menos dos de ellos cuya suma es 102.

*Solución.*

Ya deberíamos ser capaces de intuir que lo que nos conviene es tomar los 27 números como nuestros objetos y crear 26 casilleros que contengan a todos los impares menores que 100 con la propiedad de que si dos números están en el mismo casillero, entonces su suma es 102.

Sabiendo eso, entonces es relativamente simple pensar que el número 3 debe estar en el mismo casillero que el número 99, y asimismo el 5 y el 97, el 7 y el 95, etc. Pero, ¿qué hacemos con el número 1?

Es claro que no hay ningún impar menor que 100 que sumado con 1 dé 102. En ese caso, lo que más nos conviene es dejarlo en un casillero aparte. De esa manera será imposible que dos números distintos queden en ese casillero pues ese casillero es especial para el número 1. Lo mismo hacemos para el número 51.

Sabiendo esto, podemos dividir el conjunto de los números impares positivos menores que 100 en los siguientes casilleros:

| 1 | 3 | 5 | ... | 47 | 49 | 51 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 99 | 97 | | 55 | 53 | |

De esta manera hemos dividido el conjunto en exactamente 26 casilleros distintos, y como en el problema original tenemos 27 números impares positivos menores que 100, el Principio de Palomar nos asegura que dos de ellos caerán en el mismo casillero. Y por la manera como hemos construído las casillas, la suma de ambos números será 102.

Al ver la resolución del problema anterior podría surgir una duda: ¿Es 27 la cantidad mínima de números impares que debo tomar para asegurarme que haya un par que sume 102? ¿Si tomo sólo 26 se puede asegurar que hay un par que suma 102?
La respuesta a la última pregunta es negativa, de hecho, los casilleros que hemos construído nos facilitan la respuesta: basta tomar un número de cada uno de los casilleros (que son 26) y obtendremos un conjunto de 26 números de los cuales ningún par de ellos suma 102.

Un problema similar a éste se plantea a continuación:

**Problema 5.**
¿Cuántas veces, como mínimo, debe lanzarse un par de dados para asegurarse que el puntaje obtenido (la suma de los dados) se repita?

*Solución*.
Ahora el objetivo es otro, es asegurarse que haya dos dados (resultados) que se repitan minimizando el número de objetos.
Para ello basta simplemente contar el número de resultados posibles. Con dos dados uno puede obtener números desde el 2 hasta el 12, es decir, 11 resultados distintos. Si sólo tiráramos los dados 11 veces entonces podría suceder que en cada tirada obtuviéramos un resultado distinto.
Si tiramos, en cambio, 12 veces los dados, como 12 es mayor que 11, el Principio del Palomar nos asegura que al menos en dos ocasiones obtendremos el mismo resultado.
Luego, el número mínimo de veces que han de lanzarse los dados para estar seguro es 12.

Para finalizar este tema, vemos un problema donde el Principio del Palomar aparece implícito y es usado sólo como herramienta para resolver un problema mayor.