

Apuntes para una breve introducción a la

# RESISTENCIA DE MATERIALES

y temas relacionados.

Universidad de Valladolid

Área de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de estructuras



Reimpresión - Septiembre de 2014



## Prólogo y Licencia

Estos “Apuntes para una breve introducción a la Resistencia de Materiales y temas relacionados” han sido elaborados con la intención de que sirvan de guía al alumno en su primera (y según el caso, única) asignatura relacionada con la Resistencia de Materiales y las estructuras, en las titulaciones de Grado que han comenzado a impartirse el curso 2009-10 en el ámbito del Espacio Europeo de Enseñanza Superior en la Universidad de Valladolid.

Se abordan tantos aspectos relacionados con los sólidos resistentes y las estructuras como se ha considerado razonablemente posible, sin profundizar demasiado en ninguno de ellos, sino más bien pretendiendo ofrecer un panorama general amplio sobre la materia. Con ello se espera cubrir tanto las necesidades del estudiante que solamente cursará una asignatura relacionada con la Resistencia de Materiales, el cual adquirirá la deseable “cultura general” al respecto para juzgar casos sencillos y para poder comunicarse eficazmente en el futuro con un especialista, como las del estudiante que cursará (o tendrá oportunidad de cursar) otras asignaturas relacionadas, el cual podrá construirse un marco mental de referencia donde ir “colocando” los conocimientos en los que profundizará.

Debido al carácter introductorio del curso, cada uno de los contenidos abordados en estos apuntes se pueden encontrar tratados con mayor amplitud y profundidad en muchos otros textos. Precisamente, se ha considerado que la oportunidad de este documento radica en ofrecer al estudiante una referencia concisa y justamente del nivel pretendido de la amplia diversidad de temas previstos, recomendando como complemento referencias existentes en las que el nivel inevitablemente supera lo establecido para el curso.

Hasta la fecha, las sucesivas reimpresiones incluyen la ampliación de uno de los apéndices, la corrección de las erratas observadas, y algunas modificaciones menores.

---

*Este trabajo se publica bajo la licencia “Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Unported” de Creative Commons. Se trata de una licencia pensada para compartir, y no tanto para restringir las condiciones de utilización. Para ver una copia de esta licencia, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/> o bien escriba una carta a Creative Commons, 444 Castro Street, Suite 900, Mountain View, California, 94041, USA.*



*En resumen, dicha licencia establece que Ud. es libre de:*

- *Compartir - copiar, distribuir y transmitir este trabajo.*
- *Reutilizar - adaptar el trabajo y hacer obras derivadas.*

*Bajo las siguientes condiciones:*

- *Atribución (“BY”)- Ud. debe atribuir este trabajo a sus autores en la manera especificada por ellos (pero no de una manera que sugiera que los autores le respaldan a Ud. o al uso que Ud. hace del trabajo de ellos). En este caso, debe atribuir la autoría al “Área de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de estructuras de la Universidad de Valladolid”, como forma genérica de reconocimiento a los profesores de dicho Área que han elaborado este trabajo.*
- *No comercial (“NC”)- Ud. no debe usar este trabajo para fines comerciales.*
- *Compartir de la misma manera (“SA”)- Si Ud. transforma, o hace una obra derivada de este trabajo, Ud. puede distribuir el resultado únicamente bajo una licencia como la presente.*

# Índice de contenido

<b>1.- Introducción.....</b>	<b>1</b>
Algunos enfoques de estudio del sólido real.....	1
Formas estructurales básicas.....	3
Materiales.....	5
Acciones sobre la estructura.....	6
Objetivos en el análisis de la estructura.....	7
<b>2.- Equilibrio y Tensión.....</b>	<b>9</b>
Equilibrio estático.....	9
Concepto de Tensión.....	10
Tensor de Tensiones.....	12
<i>Simetría del tensor de tensiones.....</i>	<i>15</i>
Direcciones y Tensiones Principales.....	17
Representación de Mohr.....	18
<b>3.- El Sólido Elástico.....</b>	<b>22</b>
Nociones sobre la Deformación.....	22
Ensayo de Tracción.....	24
Ensayo de Torsión.....	28
Ley de Comportamiento Elástica Lineal.....	31
Criterios de Plastificación.....	32
<i>Líneas Lüder.....</i>	<i>33</i>
<i>Ensayos de Lode.....</i>	<i>33</i>
<i>Ensayos de Bridgman.....</i>	<i>34</i>
<i>Criterio de Tresca.....</i>	<i>35</i>
<i>Criterio de Von Mises.....</i>	<i>38</i>
<b>4.- Tracción – Flexión de Barras Rectas.....</b>	<b>42</b>
Introducción y Concepto de Esfuerzo.....	42
Hipótesis adoptadas.....	47
Relación entre cargas y esfuerzos. Ecuaciones de Equilibrio.....	50
Cálculo de Tensiones Normales en la Sección.....	52
Relación entre Giros y Desplazamientos transversales.....	55
Trazado de Diagramas de Esfuerzos y Desplazamientos.....	57
<i>Trazado a mano alzada.....</i>	<i>60</i>
<i>Trazado mediante integración explícita de las ecuaciones.....</i>	<i>67</i>
Estimación de las Tensiones Tangenciales en la Sección.....	69
<i>Secciones Macizas.....</i>	<i>70</i>
<i>Secciones con Alma.....</i>	<i>71</i>
<i>Secciones de Pared Delgada.....</i>	<i>72</i>
<b>5.- Torsión Uniforme en Barras Rectas.....</b>	<b>74</b>
Generalidades.....	74
Torsión en barras de sección circular.....	75
<i>Sección circular hueca de pared delgada.....</i>	<i>75</i>
<i>Sección circular hueca de pared gruesa.....</i>	<i>77</i>
<i>Perfil circular macizo.....</i>	<i>78</i>
Nociones sobre la torsión en barras de sección no circular.....	78
<b>6.- Inestabilidad y Pandeo.....</b>	<b>83</b>
Concepto de Inestabilidad Mecánica.....	83
Carga Crítica de Euler.....	84
Longitud de Pandeo.....	86
Esbeltez Mecánica.....	89
Método de coeficientes parciales.....	90

Otros fenómenos de Inestabilidad.....	91
<i>Pandeo Lateral</i> .....	91
<i>Abolladura</i> .....	92
<b>7.- Estructuras de Barras.....</b>	<b>94</b>
Concepto de Hiperestaticidad.....	94
Armaduras isostáticas.....	97
<i>Un ejemplo</i> .....	100
<i>Notas sobre la ejecución</i> .....	103
Estructuras Hiperestáticas de Nudos Rígidos.....	105
<i>Fundamentos del Método de Compatibilidad</i> .....	105
<i>Fundamentos del Método de Equilibrio</i> .....	107
<b>8.- Nociones sobre temas relacionados.....</b>	<b>112</b>
El Hormigón.....	112
El Terreno.....	116
<i>Resistencia y fallo del terreno</i> .....	117
<i>Comportamiento en servicio del terreno</i> .....	122
La Cimentación.....	123
<i>Zapatas</i> .....	124
<i>Otros elementos de cimentación directa</i> .....	128
<i>Cimentaciones profundas</i> .....	130
Uniones en Estructura Metálica.....	132
<i>Medios de unión</i> .....	132
<i>Nudos</i> .....	135
<i>Perfiles compuestos</i> .....	139
La Nave Industrial.....	141
<i>Las cerchas y los pórticos</i> .....	141
<i>La cubierta</i> .....	142
<i>Los entramados laterales y la viga contraviento</i> .....	144
<i>El puente grúa</i> .....	146
<b>Apéndice A. Álgebra de Vectores Deslizantes.....</b>	<b>148</b>
Generalidades.....	148
Operaciones básicas.....	149
<i>Adición (o suma) de vectores</i> .....	149
<i>Producto escalar de dos vectores</i> .....	149
<i>Producto vectorial de dos vectores</i> .....	150
<i>Momento de un vector deslizante respecto de un punto</i> .....	150
<i>Momento de un vector deslizante respecto de una recta</i> .....	151
Sistemas de vectores deslizantes.....	152
<i>Campo de momentos</i> .....	152
<i>Momento Mínimo y Eje Central</i> .....	153
<i>Equivalencia y Reducción de sistemas de vectores deslizantes</i> .....	154
Aplicación a la Estática.....	155
<b>Apéndice B. Propiedades estáticas.....</b>	<b>157</b>
Centros de Gravedad.....	157
Centros de Área.....	158
Momentos de Inercia.....	159
<b>Apéndice C. Notas sobre el análisis de celosías.....</b>	<b>161</b>
Cálculo gráfico de reacciones.....	161
Cálculo gráfico de esfuerzos en las barras.....	163
Cálculo analítico de esfuerzos en las barras.....	167
<b>Apéndice D. Tablas y Gráficos.....</b>	<b>171</b>
<i>Tablas para elección de la curva de pandeo. Tomadas del Código Técnico de la Edificación [6], DB SE-A, 6.3.2.1</i> .....	171
<i>Tablas de presión de hundimiento del terreno qh (kN/m2)</i> .....	173

<i>Algunas propiedades de funciones polinómicas elementales.....</i>	<i>174</i>
<b>Bibliografía.....</b>	<b>177</b>

# 1.- Introducción

## ***Algunos enfoques de estudio del sólido real***

El comprender de manera completa la totalidad de los fenómenos que ocurren en un proceso físico cualquiera puede ser algo demasiado difícil, y en general resultar de dudosa utilidad desde el punto de vista práctico.

Frecuentemente es posible identificar un conjunto de parámetros que representen de manera suficiente aquellos aspectos del proceso que más nos interesan. Las “leyes físicas” expresan relaciones predecibles entre esos parámetros de interés, permitiendo con ello el estudio sistemático de casos particulares, con vistas a las labores de análisis y de diseño.

En el caso de los sólidos sobre los que actúan fuerzas, puede ocurrir que sólo estemos interesados en el estado de reposo o movimiento del sólido como un conjunto, y no en fenómenos internos que podrían ocurrir en el interior del mismo, como por ejemplo la deformación o la rotura. En ese caso, el modelo proporcionado por la Dinámica del Sólido Rígido será suficiente para su estudio. Este modelo es particularmente elegante, ya que se formula en base a un número de parámetros muy reducido, y a sólo dos ecuaciones vectoriales. Éstas son las conocidas:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \sum \vec{M} = I \cdot \vec{\alpha} \quad (1.1)$$

Que relacionan, respectivamente, la resultante de las fuerzas aplicadas y su momento resultante respecto de un punto con parámetros instantáneos de movimiento (la aceleración lineal y la aceleración angular, respectivamente), a través de las propiedades de inercia del sólido (masa y momentos de inercia). En el caso particular de que los términos de inercia sean de magnitud despreciable frente a las fuerzas y momentos que intervienen en el problema, los miembros derechos de las ecuaciones anteriores se pueden suponer nulos:

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \sum \vec{M} = 0 \quad (1.2)$$

Las anteriores son las ecuaciones de la Estática del Sólido Rígido, de común aplicación en el cálculo de reacciones y otras fuerzas, en problemas de sólidos resistentes.

Puede incluso ocurrir que, por la naturaleza del problema, los movimientos de rotación puedan despreciarse. En estos casos, sólo la ecuación de fuerzas es relevante, y el problema implica en la práctica el estudio de un punto con masa: es la Dinámica del Punto Material. Si además el término de inercia es despreciable, el modelo adquiere la forma más simple de Estática del Punto Material, en el que sólo hay que asegurar el equilibrio de fuerzas que pasan por el punto.

Todos los modelos citados anteriormente hacen uso de la herramienta matemática denominada Álgebra de Vectores Deslizantes, que es especialmente adecuada para este tipo de problemas ya que como es sabido:

*“El estado de movimiento o reposo de un cuerpo rígido no cambia si una fuerza actuante es aplicada en otro punto de su recta de acción”.*

En este curso estamos interesados en los fenómenos de deformación, daño, y posible rotura, que pueden ocurrir en los sólidos reales. Centraremos el estudio en las condiciones estáticas (términos de inercia despreciables) que son frecuentes en los problemas de estructuras convencionales.

Aunque el estudio de los fenómenos asociados a la deformación requiere modelos matemáticos diferentes que la Estática del Sólido Rígido, ésta será aún de utilidad, ya que la imposición de las condiciones de equilibrio se realiza mediante las mismas ecuaciones (1.2) de “suma de fuerzas igual a cero, y suma de momentos igual a cero”.

El estudio del sólido real (deformable) se divide tradicionalmente en varias disciplinas, que están fuertemente interconectadas entre sí, pero que al mismo tiempo tienen sus particularidades en cuanto al ámbito de aplicación, objeto de estudio, y modelos matemáticos o aproximaciones que utilizan. A continuación se enumeran estas disciplinas:

**Teoría de la Elasticidad.-** No presupone ninguna particularidad en la geometría del sólido que pudiera conducir a simplificaciones aproximadas del modelo. Sus resultados son por tanto de aplicación a sólidos de cualquier geometría. Habitualmente, en especial al abordar un primer estudio, suelen asumirse un conjunto de hipótesis que por una parte simplifican el modelo, y por otra parte se adaptan bien al comportamiento del acero y de otras aleaciones metálicas. En concreto supondremos material homogéneo (las propiedades son iguales en distintos puntos) e isótropo (en cualquier punto dado las propiedades no dependen de la dirección de observación), comportamiento elástico (el sólido recupera su forma inicial tras la descarga) y lineal (existe proporcionalidad entre cargas y desplazamientos), pequeños desplazamientos y cambios de forma (lo bastante para que sea buena aproximación plantear el equilibrio en la configuración indeformada), y ausencia de efectos dinámicos.

**Resistencia de Materiales.-** Estudia el sólido con forma de barra esbelta, generalmente recta. Se asumen el resto de hipótesis básicas usadas en la Teoría de la Elasticidad. La particularidad geométrica de que una dimensión sea mucho mayor que las otras dos, permite realizar simplificaciones muy útiles en el modelo matemático. Esta tipología de barra es mayoritariamente utilizada tanto en estructuras de edificación como de ingeniería civil, y en algunos casos en máquinas y mecanismos, de ahí la importancia de su estudio particular.

**Teoría de Estructuras.-** Para enunciarlo brevemente, podemos decir que estudia el comportamiento de los sistemas de barras conectadas entre sí, bajo las mismas hipótesis que la Resistencia de Materiales. En realidad la línea divisoria entre ambas disciplinas es confusa, siendo habitual incluir estudios de sistemas de barras sencillos en el ámbito de la Resistencia de Materiales. Por otra parte, muchos textos sobre Teoría de Estructuras abordan el estudio de fenómenos (como pueden ser la plasticidad o los grandes desplazamientos) que se salen de las hipótesis más típicas del primer estudio de la Elasticidad y la Resistencia de Materiales.

Aunque la clasificación anterior debiera ser suficiente para que el recién llegado se forme una idea rápida del contenido de cada disciplina, debe tenerse noticia de que hay varios aspectos que no se han mencionado, fundamentalmente porque no serán objeto de estudio en este curso. Tales son los estudios de placas y láminas (formas estructurales que mencionaremos seguidamente), que suelen realizarse en el ámbito de la Resistencia de Materiales, o ciertos estudios de sólidos que no admiten simplificaciones geométricas claras y que suelen estudiarse como parte de la Teoría de Estructuras, como pueden ser los detalles de las uniones en estructuras y en su cimentación, por ejemplo.

El estudio de las disciplinas básicas enumeradas permite abordar otras más especializadas. Entre ellas, como continuación y aplicación de sus conocimientos, podemos citar las Estructuras Metálicas, Estructuras de Hormigón, Estructuras de Madera, etc. El diseño de los elementos de Máquinas y Mecanismos en su aspecto resistente también necesita de esos conocimientos básicos. Como materias adyacentes, pero cuyo estudio sólo cobra sentido tras adquirir los conocimientos citados, están las materias relacionadas con Proyectos de Estructuras, Construcciones Industriales, Puesta en Obra, etc. Como profundización en el estudio del comportamiento del sólido resistente, existen diversas disciplinas, generalmente derivadas de relajar alguna de las hipótesis básicas que se realizaron en el primer estudio, o de incluir nuevos fenómenos. Podemos citar la Plasticidad, la Viscoelasticidad, la Termoelasticidad, los modelos de Grandes Deformaciones, la Mecánica de la Fractura, el estudio del Material Ortótropo y de los Apilados de Láminas, entre otros muchos.

### **Formas estructurales básicas**

En cuanto a su geometría, podemos clasificar las formas estructurales de acuerdo con el siguiente esquema:

<p><u>Con una dimensión mucho mayor que las otras dos:</u></p> <p>Barras rectas  Vigas, Pilares, Ejes, y Barras de Armaduras  Vigas curvas, Vigas de sección variable  Arcos  Cables</p> <p><u>Con una dimensión mucho menor que las otras dos:</u></p> <p>Membranas, Placas, y Láminas</p> <p><u>Forma general</u></p> <p>Frecuente en nudos y uniones entre los elementos anteriores, y en muchos elementos de máquinas (bielas, cigüeñales...)</p>
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Como se ha apuntado, la forma de barra recta es la más ampliamente utilizada en las estructuras de todo tipo, y será a la que prestemos especial atención en este curso. Su geometría es la engendrada por una superficie plana que llamaremos “sección” o “perfil” de la barra, al desplazarse a lo largo de un segmento de recta perpendicular a ella, que llamamos “directriz” de la barra. Entendemos por viga (fig 1.1a) aquella barra que está sujeta en algunos (pocos) puntos, y que soporta cargas transversales a ella, situadas en otros puntos. Por pilar (fig 1.1b) entendemos aquella barra que soporta cargas fundamentalmente longitudinales con su eje. Frecuentemente se reserva el calificativo de pilar para las barras verticales de las construcciones de edificación, que suelen trabajar de la manera indicada, en concreto a compresión (no a tracción). Las “armaduras” (fig 1.1e) son estructuras metálicas de barras muy ligeras y esbeltas, como las que suelen formar el cuerpo de las grandes grúas (para obra civil o urbana, portuarias, etc), y los esqueletos resistentes de las cubiertas de muchas naves industriales, polideportivos, etc. Las barras de las armaduras, por cómo están diseñadas y montadas, en general sólo admiten cargas longitudinales con la propia barra, siendo en ese sentido parecidas a los pilares. Pero por una parte, estas barras para armaduras suelen ser mucho más esbeltas, y por otra parte pueden trabajar a tracción o a compresión. Su gran esbeltez las hace especialmente propensas a sufrir fenómenos de inestabilidad, y su montaje y puesta en servicio difiere mucho del de los pilares, por lo que se estudian por separado.

Las vigas curvas se utilizan generalmente debido a exigencias de la funcionalidad que debe prestar el elemento resistente, aunque en ocasiones obedecen a criterios estéticos. Algunos



semáforos de tráfico, cuyo soporte tiene directriz curva, constituyen un ejemplo sencillo de viga curva. La exigencia de funcionalidad es, en este caso que las luces del semáforo cuelguen del centro de la carretera sin que el soporte obstaculice el tráfico.

Una viga de sección variable se proyecta generalmente con la intención de aprovechar mejor el material. La idea básica es poner sección más gruesa donde la sollicitación va a ser mayor. La ejecución de una viga de sección variable es más complicada -y por lo tanto cara-, que una de sección constante. Este es un factor que puede contrarrestar fácilmente el ahorro de material, y que debe ser sopesado al considerar elementos de este tipo.

Un arco tiene una geometría similar a la de una viga curva, por lo que conviene enfatizar la diferencia entre ambos: el arco tiene su curvatura y sus apoyos diseñados de modo que, para el estado de carga previsto, trabaje a compresión en todos sus puntos. Esto permite realizar arcos en materiales que no resisten tracción, como pueden ser la piedra o el hormigón, e incluso formar el arco con piezas que no presenten cohesión entre sí (sillería). Por el contrario, en una viga curva se cuenta con que habrá tracción en muchos de sus puntos. Es evidente que el diseño de un arco debe ser especialmente cuidadoso, ya que la aparición indeseada de tracciones puede arruinar fácilmente el arco. Muchas catedrales góticas y románicas tienen magníficos ejemplos de arcos realizados en piedra.

Los cables (fig 1.1d), al contrario que los arcos, no pueden soportar otra cosa que no sea tracción. Su geometría se adapta de forma natural a las cargas para que ello resulte así. En estructuras convencionales, el cable suele usarse en forma de tirante, es decir para intentar mantener la distancia entre dos puntos de la estructura que de otro modo tenderían a separarse entre sí. En esos casos el cable recibe las acciones por sus extremos, y adopta una geometría recta.

Una membrana puede entenderse como “un cable con una dimensión más”: no presenta resistencia a ser doblada y no puede soportar compresiones (al igual que el cable). Un ejemplo familiar de membrana es la tela que forma un globo aerostático. En estructuras habituales, las membranas son escasamente usadas como elemento resistente.

Una placa (fig 1.1c) puede entenderse “como una viga recta con una dimensión más”. Al igual que las vigas, presenta resistencia a ser curvada, y típicamente está sustentada en algunos puntos mientras soporta acciones transversales a la placa en otros puntos. Un ejemplo familiar de placa es el tablero de una mesa, o también la plancha de acero que se suele poner en las calles sobre una zanja (realizada normalmente para operaciones de mantenimiento), para que puedan continuar pasando vehículos por encima. El suelo (“forjado”) entre plantas de un edificio no es un buen ejemplo de placa, debido a su construcción con vigas y direcciones preferentes (“forjado unidireccional”). Un suelo construido a base de un emparrillado de vigas (“forjado bidireccional”) podría asimilarse más a una placa.

Una lámina puede entenderse “como una viga curva con una dimensión más”. Tiene en común con las placas todas sus características, salvo que su geometría no es plana sino alabeada. El típico ejemplo de lámina lo constituye la chapa de la carrocería de un automóvil bajo la carga aerodinámica, o bajo la acción accidental de un peso (una persona apoyada o sentada sobre la chapa, etc).

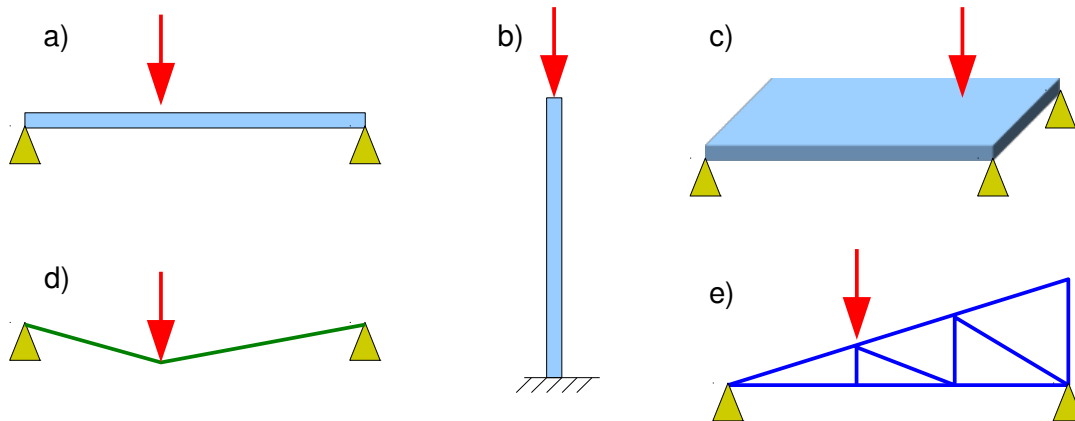


Figura 1.1: Algunos ejemplos de formas estructurales a) viga b) pilar c) placa d) cable e) armadura de barras

Se han desarrollado modelos matemáticos específicos para el estudio de cada una de las tipologías resistentes anteriores. Estos modelos, más o menos complejos, resultan en todo caso de aplicar simplificaciones razonables al modelo elástico general. Los sólidos resistentes de geometría general, es decir aquellos cuya forma y condiciones de trabajo no permiten aplicar razonablemente aproximaciones simplificadoras, deben ser analizados mediante técnicas basadas directamente en la Teoría de la Elasticidad. Aparte de los órganos de máquinas, existen un gran número de detalles constructivos (en los nudos o uniones de las estructuras por ejemplo) que caen en esta categoría. No obstante, la existencia de normativa al respecto, sustentada por una amplia experiencia, facilita al proyectista en análisis de estos detalles constructivos en la mayoría de los casos comunes.

## Materiales

Los materiales utilizados para construir sólidos con función resistente son muy diversos. Se emplean desde materiales que se encuentran en la naturaleza como la madera o la piedra, hasta los más modernos elaborados por el hombre, como los materiales reforzados con fibras o el acero y aleaciones metálicas. En estructuras de edificación e industriales, los materiales más utilizados son el acero y el hormigón.

El acero es un producto industrial obtenido a partir de mineral de hierro, mediante sucesivos procesos de extracción y refinado (alto horno, convertidor... etc). El acero es básicamente hierro con una proporción de carbono menor que el 2% (el hierro con mayor proporción de carbono suele denominarse “fundición”, y presenta propiedades distintas). El acero para estructuras es “acero extradulce”, de bajo contenido en carbono (del orden del 0.2%).



La norma vigente en España, llamada “Código Técnico de la Edificación” (CTE), en su apartado 4.2, contempla cuatro tipos de aceros para estructuras. Se denominan:

S235

S275

S355

S450

El número que acompaña a la denominación es el valor del “Límite Elástico”, característica particular de la que hablaremos más tarde. La “S” es la inicial de “steel”, acero en inglés.

El hormigón consiste en una mezcla de cemento con áridos (arena, grava...), y agua, y frecuentemente otros materiales (aditivos) adicionales. Tras un cierto tiempo de fraguado y endurecimiento (típicamente 28 días), adquiere sus propiedades nominales de resistencia. Las vigas y pilares de hormigón para estructuras suelen ejecutarse con barras de acero convenientemente embebidas en el interior, a modo de armado, debido a que el hormigón por sí mismo no tiene apenas capacidad de resistir tracciones. Por tanto, en condiciones normales de servicio, el hormigón y sus armaduras de acero constituyen un material fuertemente no homogéneo, circunstancia que aconseja abordar su estudio tras haber comprendido el comportamiento de un material homogéneo.

La normativa vigente relativa al hormigón está recogida en la instrucción EHE, que es una norma aparte del CTE, y no está incluida en éste. La mayoría de las estructuras de otros materiales (acero, madera, fábrica de ladrillo, etc), así como otros aspectos del servicio de la estructura (cargas, cimentación, salubridad, etc), sí están recogidos y reglamentados en el CTE.

La madera merece aquí al menos una breve mención como material estructural. Su moderna ejecución en forma de apilados de tablas (no en bruto, sino en forma de laminados), le confiere características muy interesantes en cuanto a resistencia, homogeneidad del producto y predecibilidad de comportamiento frente a acciones como el fuego, o las propias cargas de uso de la estructura.

## ***Acciones sobre la estructura***

Cualquier “estructura”, entendida en un sentido amplio, se diseña para realizar una cierta función, como puede ser transmitir un movimiento (caso típico de un elemento de maquinaria), o mantener en posición los cerramientos (paredes etc) de un edificio, entre otras muchas funciones imaginables. El uso y funcionalidad previstos de nuestra estructura conllevarán unas acciones sobre la misma, pero éstas no serán las únicas acciones a considerar. Hay que prever eventuales acciones climáticas y térmicas (de origen climático o no), y acciones producidas por eventos poco probables pero que de ocurrir pueden suponer daños graves (sismos, impactos, etc), entre otras acciones accidentales posibles.

En los casos de estructuras de edificaciones convencionales, las acciones que deben considerarse están reguladas por la normativa, en función del uso previsto de la estructura, su ubicación geográfica, etc. La normativa vigente en el territorio español está recogida en el CTE, Documento Básico de Seguridad Estructural, punto 4 (“Método de Coeficientes Parciales”), y Documento Básico de Seguridad Estructural – Acciones en la Edificación (que detalla los valores concretos de las acciones a considerar en la aplicación del citado Método de los Coeficientes Parciales). La norma divide las acciones en tres categorías:

Acciones Permanentes: Actuarán en todo instante, en la misma posición. Como el peso propio, peso de elementos fijos, empujes del terreno, etc.

Acciones Variables: Las que en un instante dado pueden actuar, o no, y cambiar de posición. Las acciones debidas al uso, y las acciones climáticas, por ejemplo.

Acciones Accidentales: Aquellas cuya probabilidad de ocurrir no es grande, pero que podrían suponer daños importantes a la estructura. Como terremotos, fuego, impactos y explosiones.

El Método de Coeficientes Parciales para las acciones que impone la norma consiste en aplicar combinaciones de acciones ponderadas por coeficientes. Los coeficientes de ponderación son de dos tipos: coeficientes de simultaneidad (que tienen en cuenta la muy escasa probabilidad de que todas las acciones variables independientes ocurran con su valor máximo en el mismo instante) y coeficientes de seguridad (que tienen en cuenta la incertidumbre existente en relación con el máximo valor al que pudiera llegar una acción variable). Su valor aplicable en cada caso está basado en técnicas probabilísticas.

Básicamente, se trata de generar un caso de carga por cada acción variable. De cada uno de ellos derivan otros, considerando cada acción accidental. Además hay casos de carga adicionales según el tipo de fallo considerado (límites de resistencia o de desplazamientos). Todo ello suele implicar un gran número de combinaciones de carga, incluso para estructuras relativamente sencillas.

### **Objetivos en el análisis de la estructura**

Desde el punto de vista del análisis, estaremos interesados en aquellas variables que afecten al correcto comportamiento de la estructura en condiciones de servicio. Esto conlleva la necesidad de realizar comprobaciones relativas a la resistencia de la misma, a su estabilidad, y a la magnitud de sus desplazamientos. Aparte de posibles pruebas experimentales, generalmente muy costosas, las comprobaciones se realizan sobre modelos matemáticos que proporcionan la información necesaria acerca de dichos aspectos del comportamiento.

Para el caso del tipo de estructuras contempladas en el CTE, que fundamentalmente son aquellas cuyo uso previsto involucre la seguridad o la comodidad de personas, la norma introduce el concepto de Estados Límite, dividiendo éstos en dos categorías:

**Estados límite últimos:** Son los estados de la estructura que, de ser superados, implican un riesgo para las personas, generalmente por un colapso total o parcial de la estructura.

**Estados límite de servicio:** Son aquellos estados de la estructura que, de ser superados, afectan negativamente al bienestar de las personas, o a la apariencia de la construcción.



Típicamente los análisis relativos a estados límite últimos requieren comprobaciones acerca de la resistencia y la estabilidad, mientras que los análisis relativos a estados límite de servicio requieren comprobaciones sobre los desplazamientos.

Cabe entender lo anterior como la manera en que la normativa expresa el hecho, generalmente válido para el análisis de cualquier sólido resistente, de que es preocupante que el sólido se rompa, pero también que se deforme excesivamente, aunque ello no supusiese peligro de rotura. En resumen, los mencionados modelos matemáticos de aplicación habitual en el análisis, deben proporcionar predicciones acerca de:

**El comportamiento esperado del material** bajo las acciones previstas. Interesa en particular saber si el mismo se romperá o sufrirá algún tipo de alteración indeseable.

**La magnitud de los desplazamientos** de la estructura bajo las acciones previstas, para poder juzgar si los mismos serán aceptables o no en condiciones de servicio.

Las comprobaciones anteriores, basadas en las predicciones ofrecidas por los modelos matemáticos, se utilizan para validar un determinado diseño estructural, o apreciar la necesidad de su modificación.

Por supuesto existen otros criterios aparte de los puramente funcionales y de resistencia. Típicamente, los condicionantes económicos y estéticos pueden ser determinantes para validar o no un diseño. No obstante, dichos aspectos caen fuera del ámbito de este curso.

## 2.- Equilibrio y Tensión

### ***Equilibrio estático***

Consideremos como objeto de análisis un sólido cualquiera, que en principio podemos suponer rígido, o bien considerar que es deformable y que se encuentra en su estado deformado tras la aplicación de unas cargas.



Hemos adoptado como hipótesis básica el que los desplazamientos y los cambios de forma del sólido son pequeños. Ello permite plantear el equilibrio en la configuración indeformada con excelente aproximación.

Las mencionadas cargas serán un conjunto de fuerzas concentradas (cargas puntuales) o distribuidas (como la acción de la gravedad), y en todo caso se representan matemáticamente mediante un sistema de vectores deslizantes. Como se indicó en el tema anterior, en ausencia de efectos dinámicos dicho sistema de vectores debe cumplir las ecuaciones (1.2):

$$\sum \vec{F}=0 \quad \sum \vec{M}=0 \quad (1.2 \text{ bis})$$

Que expresan que la resultante de las fuerzas debe ser nula, y que su momento resultante respecto de un punto (cualquiera) del espacio debe ser también nulo. Conviene enfatizar que el equilibrio de un sólido, y por tanto las ecuaciones anteriores, no son algo opcional que un sólido en reposo podría cumplir o no:



En la naturaleza, y en ausencia de efectos dinámicos, un sólido, o cualquier porción de un sólido, siempre estará en equilibrio. Por tanto, el sistema de fuerzas que actúa sobre él siempre cumplirá las ecuaciones (1.2) de equilibrio.

Ocasionalmente utilizamos expresiones como “el sólido no estaría en equilibrio”, que parecen sugerir que tal estado de no equilibrio fuese posible, cuando en la realidad física, de una u otra forma, el sólido siempre estará en equilibrio. Lo que en realidad queremos decir con expresiones como esa es que, en nuestro análisis, “estamos aplicando mal, o de forma incompleta, las ecuaciones de equilibrio”. De hecho, incluso en presencia de efectos dinámicos pueden definirse unas “fuerzas de inercia”, que permiten aplicar formalmente las ecuaciones de equilibrio estático (1.2), aunque ello no sea de nuestro interés en este curso.

Como se ha mencionado anteriormente, el “Álgebra de Vectores Deslizantes” es la herramienta matemática oportuna para analizar las condiciones de equilibrio de un sólido, debido a que el estado de equilibrio no se ve afectado por la posición de las fuerzas dentro de su recta de acción. A modo de resumen, en el Apéndice A se incluye una breve descripción de los aspectos de mayor interés del Álgebra de Vectores deslizantes, y su aplicación al equilibrio estático.

## Concepto de Tensión

La tensión es probablemente el concepto físico más importante de toda la mecánica de medios continuos en general, y de la mecánica de sólidos en particular.

Considérese un sólido en equilibrio estático bajo a la acción de un determinado sistema de fuerzas. Frecuentemente dichas fuerzas estarán producidas por el contacto con otros sólidos, y por tanto actuarán en la superficie del sólido. Pueden ser fuerzas concentradas (que actúan en un punto y tienen unidades de fuerza), o distribuciones de fuerzas (que actúan sobre cierto área del contorno del sólido, y tienen unidades de fuerza dividida por superficie). Además de las fuerzas en el contorno anteriores, pueden existir fuerzas en el dominio, (que actúan en el interior del sólido y tienen dimensiones de fuerza dividida por volumen), como por ejemplo la acción de la gravedad. Frecuentemente nos referiremos a todas estas acciones como “cargas aplicadas” o “acciones exteriores” en el sólido.



Las acciones aplicadas sobre el sólido son esas fuerzas concentradas o distribuidas en el contorno, y la posible fuerza en el dominio. Usualmente son datos, y no se deben confundir con las tensiones internas en el sólido, concepto diferente que definiremos a continuación, y que raramente es dato en un problema elástico

Imaginemos nuestro sólido dividido en dos partes por una cierta superficie  $S$  como indica la figura 2.1a. Consideremos una de las partes del sólido para nuestro análisis (la izquierda en la figura). Definimos un vector  $\mathbf{n}$  adimensional, de módulo unidad, dirección perpendicular a la superficie  $S$  en cada uno de sus puntos, y sentido saliente de la parte del sólido considerada. Asumimos que  $S$  es tal que la evolución de  $\mathbf{n}$  es continua ( $S$  no tiene “esquinas”).

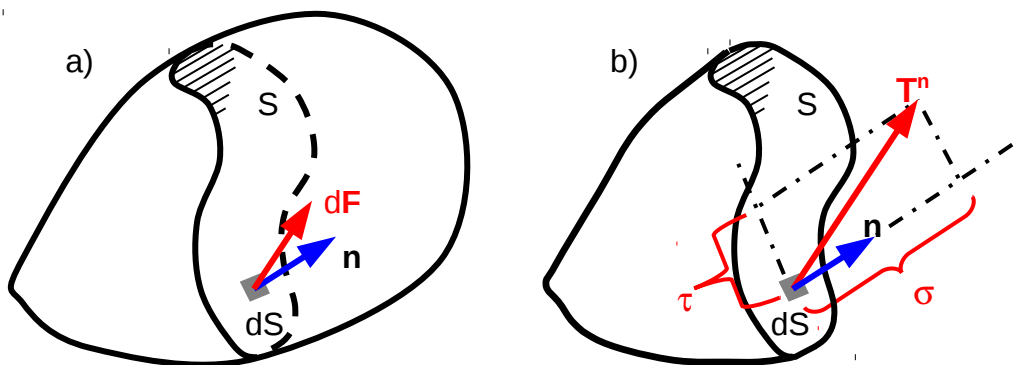


Figura 2.1: Porción de un sólido en equilibrio y concepto de tensión.

La porción del sólido que hemos aislado debe estar, cómo no, en equilibrio. Las acciones que actúan sobre ella, y bajo las que debe estar en equilibrio, serán las que ya actuaban en esa porción en el sólido original, más las acciones que la porción eliminada del sólido ejerce sobre la porción considerada a través de la superficie  $S$ .

La hipótesis fundamental de la Mecánica de los Medios Continuos establece que dicha interacción entre ambas porciones del sólido, es una distribución continua de fuerzas por unidad de superficie.

El valor vectorial de dicha distribución de fuerzas en cada punto de  $S$ , es lo que conocemos como “vector tensión” (o simplemente “tensión”, cuando el contexto no da lugar a ambigüedades). Toda la mecánica de los medios continuos se apoya en este concepto.

La distribución de fuerzas transmitida a través de la superficie  $S$  es, por tanto, de características similares a lo que habíamos definido como la “distribución de fuerzas” que podía actuar como carga aplicada en una zona de la superficie real del sólido. De hecho, ambas tienen las mismas dimensiones (fuerza dividido por superficie), y en realidad tienen idéntico significado físico una vez que hemos asumido que nuestro sólido de estudio es la porción considerada del sólido original.

De esta manera (ver nuevamente fig. 2.1a), en un elemento de área  $dS$ , de normal  $\mathbf{n}$ , perteneciente a la superficie  $S$ , actuará una fuerza elemental  $d\mathbf{F}$ , que será la resultante de la distribución de tensión que actúa en ese pequeño área. Puede demostrarse que el momento resultante que pudiéramos considerar tiende a cero al tomar un  $dS$  arbitrariamente pequeño. Lo anterior puede intuirse sin demostración, ya que al ser continua la distribución de tensiones, ésta será de dirección (también módulo) aproximadamente constante en el pequeño  $dS$ , lo que permite su reducción a sólo la resultante.

La figura 2.1b muestra el vector tensión  $\mathbf{T}^n$  en el punto considerado de la superficie  $S$ . La notación que empleamos incluye el superíndice  $n$  para denotar que el vector tensión en ese mismo punto, pero según otra superficie de corte cuya normal no fuese  $\mathbf{n}$ , sería distinto. Debe entenderse por tanto que el vector tensión varía con el punto considerado del sólido, pero también con la orientación de la superficie ideal de corte en ese punto.



En rigor no hacía falta toda la superficie  $S$  para ilustrar el concepto de vector tensión en un punto: con la superficie elemental  $dS$  habría bastado. El vector tensión en ese punto no depende de la forma u orientación que tenga  $S$  en los demás puntos. Se ha incluido un corte completo  $S$  porque una explicación basada en equilibrio resulta más clara.

Otra particularidad que se ilustra en la figura 2.1b es que, aunque tiene dimensiones de presión (fuerza partido por superficie), el vector tensión  $\mathbf{T}^n$  no tiene porqué ser perpendicular a la superficie  $S$ . Por ello  $\mathbf{T}^n$  no tiene la dirección de  $\mathbf{n}$  en la figura. De hecho, en la misma figura se representan las componentes del vector tensión en la dirección de  $\mathbf{n}$  (componente  $\sigma$ , llamada tensión normal), y en el plano perpendicular a  $\mathbf{n}$ , que coincide con el plano tangente a  $S$  en el punto (componente  $\tau$ , llamada tensión tangencial). Se conoce al conjunto de ambas,  $\sigma$ ,  $\tau$ , como componentes intrínsecas del vector tensión. Vienen dadas por las expresiones:

$$\sigma = \mathbf{T}^n \cdot \mathbf{n} \qquad \tau^2 = |\mathbf{T}^n|^2 - \sigma^2 \qquad (2.1)$$

Siendo el resultado de un producto escalar, la tensión normal  $\sigma$  puede tener signo positivo o negativo. Decimos que esta componente  $\sigma$  es de tracción cuando el producto escalar es positivo, y que es de compresión cuando es negativo. Esto coincide con la idea intuitiva de que si  $\mathbf{T}^n$  “apunta hacia el sólido” el elemento de superficie  $dS$  está siendo comprimido hacia adentro del sólido, mientras que si  $\mathbf{T}^n$  “apunta hacia afuera del sólido” estamos tirando del elemento de superficie hacia el exterior del sólido. Por su parte, la tensión tangencial  $\tau$  aparece en la fórmula elevada al cuadrado (ello es resultado de haber sido calculada como un cateto de un triángulo rectángulo usando el teorema de Pitágoras). Por tanto el signo de  $\tau$  es irrelevante. Diremos que la tensión tangencial  $\tau$  es un escalar sin signo. Lo anterior refleja el hecho físico de que la tensión tangencial puede tener cualquiera de las infinitas direcciones dentro del plano tangente a  $S$ , y un simple cambio de signo no puede servir para discriminar entre infinitas posibilidades. Sin embargo, para la tensión normal sólo hay dos posibilidades (“hacia adentro” o “hacia afuera”), que sí pueden asociarse a un cambio de signo.



Finalmente, consideremos por un momento la porción del sólido que fue descartada del análisis en la figura 2.1 (porción derecha). La misma está limitada por la misma superficie  $S$ , pero en este caso la normal exterior en un punto sería directamente opuesta a la normal  $\mathbf{n}$  que obteníamos al aislar la porción izquierda. Por tanto, la normal exterior en el punto al aislar la porción derecha, será  $-\mathbf{n}$  (ver figura 2.2).

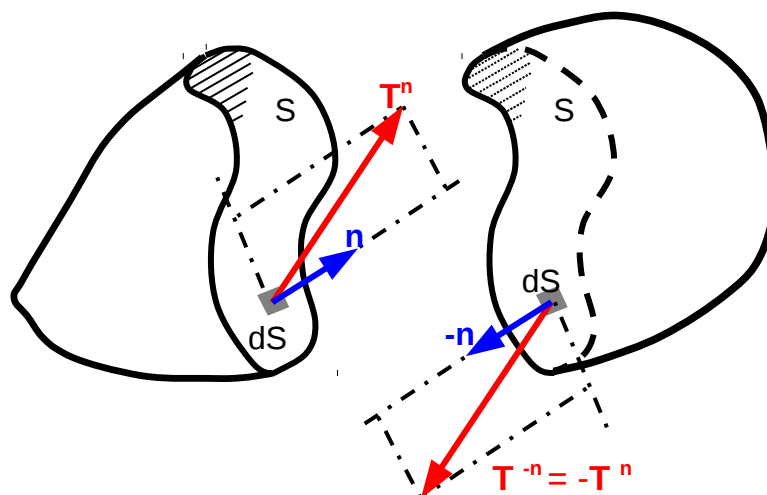


Figura 2.2: Vector tensión al considerar la otra porción del sólido

Por otra parte, el principio de acción y reacción de Newton indica que la fuerza  $d\mathbf{F}$  que la porción derecha ejerce sobre la izquierda a través del  $dS$ , debe ser igual y contraria a la que la porción izquierda ejerce sobre la derecha. Esta reciprocidad es inmediatamente trasladable a los vectores tensión, ya que sólo hay que dividir la fuerza elemental por el escalar  $dS$ . Por lo tanto, tal como se muestra en la figura 2.2:

$$\mathbf{T}^n = -\mathbf{T}^{-n} \quad (2.2)$$

## Tensor de Tensiones

El vector tensión, pese a su notable interés, no es una magnitud adecuada para ser usada directamente en la elaboración de un modelo matemático para el sólido deformable. La razón es que dicho vector tensión depende del plano de corte, para un mismo punto considerado. Es decir, el vector tensión no describe completamente cómo se transmiten las fuerzas en el entorno del punto, ya que no proporciona información acerca de los otros -infinitos- planos posibles que pasan por el punto del sólido. Para elaborar un modelo matemático nos gustaría disponer de una magnitud que, para un problema dado, tuviese un único valor para cada punto del sólido, y que describiese completamente cómo se produce la transmisión de fuerzas en el entorno de dicho punto (proporcionase información acerca de todos los planos).

Dicha magnitud existe, es del tipo denominado “tensor de orden dos”, y puede expresarse mediante 9 componentes reales. Aunque una presentación formal de los tensores cae fuera del ámbito de este curso, daremos al menos noticia de que los tensores pueden entenderse como una generalización de los conceptos de escalar y vector: Un escalar consta de una única componente, y sería un tensor de orden cero ( $3^0=1$ ). Un vector en el espacio tridimensional puede expresarse mediante 3 componentes, y sería un tensor de orden uno ( $3^1=3$ ). Un tensor de orden 2 puede expresarse mediante las  $3^2=9$  componentes citadas, y en general un tensor de orden  $k$  tendría  $3^k$  componentes en un espacio tridimensional. Cuando hacemos girar los

ejes cartesianos coordenados, las componentes de los tensores cambian de acuerdo con unas “ecuaciones de cambio de base”, de las que las conocidas ecuaciones de cambio de base para los vectores son un caso particular. El lector interesado puede consultar bibliografía más específica [9,10,11,12] al respecto de éste y otros muchos detalles acerca de la tensión que aquí se omitirán.



A modo de ejemplo, puede considerarse el caso del campo de velocidades del sólido rígido. A cada punto del sólido corresponde un vector velocidad, que describe completamente su velocidad. Y para ello no sería suficiente usar un escalar. Hay problemas, como el que nos ocupa, en que ni siquiera un vector es suficiente. Se necesita otro tipo de magnitud, que eventualmente llamamos “tensor”.

Vamos a indicar sin mayor justificación qué contienen las 9 componentes del tensor de tensiones. Considérese un punto P del interior de un sólido, y que se han definido unos ejes cartesianos  $x,y,z$ , que tienen asociados los vectores unitarios  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_z$ . Se considera una superficie plana de corte cuya normal exterior es  $\mathbf{e}_y$ , y que por tanto es perpendicular al eje “y”, y tiene sólido a su izquierda. En el punto P, y en el plano de corte indicado, el vector tensión es  $\mathbf{T}^{\mathbf{e}_y}$ , que puede expresarse, como todo vector, por sus tres componentes cartesianas  $T_x^{\mathbf{e}_y}$ ,  $T_y^{\mathbf{e}_y}$ ,  $T_z^{\mathbf{e}_y}$  según los ejes  $x,y,z$ . Como indica la figura 2.3, adoptamos para estas componentes la denominación alternativa  $\sigma_{yx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{yz}$ , respectivamente. Nótese cómo el primer subíndice indica el plano de corte (más precisamente, el eje coordenado perpendicular al plano de corte, que es “y” en este caso), y el segundo subíndice indica la dirección de la componente de tensión.

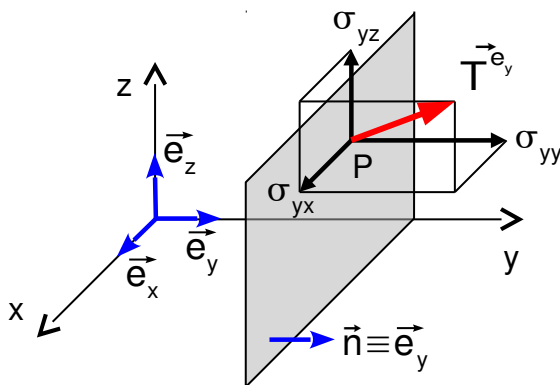


Figura 2.3: Tres de las componentes del tensor de tensiones.

En un plano de corte que pase por el mismo punto P, y cuya normal exterior coincidiese con  $\mathbf{e}_x$ , habríamos obtenido otro vector tensión (en general diferente), denotado como  $\mathbf{T}^{\mathbf{e}_x}$ , de componentes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xz}$ . Análogamente, si el plano de corte tuviese de normal exterior  $\mathbf{e}_z$ , habríamos obtenido otro nuevo vector tensión  $\mathbf{T}^{\mathbf{e}_z}$ , cuyas componentes llamaríamos  $\sigma_{zx}$ ,  $\sigma_{zy}$ ,  $\sigma_{zz}$ . Las componentes de los tres vectores tensión considerados forman un conjunto de nueve números reales, que son las nueve componentes del Tensor de Tensiones. Por conveniencia, es frecuente escribir las componentes del tensor de tensiones en forma compacta como una matriz, por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Donde, según lo expuesto, cada término  $\sigma_{ji}$  (con  $j, i$ , tomando los posibles valores  $x, y, z$ ) queda definido por:

$$\sigma_{ji} = T_i^{e_j} \quad (i, j = x, y, z) \quad (2.3)$$

El convenio de signos para los términos del tensor de tensiones está implícito en la ecuación (2.3) anterior. No habría que decir más al respecto, pero existen algunas implicaciones de ello que pueden resultar sorprendentes en un primer estudio, y en las que se insiste a continuación.

Por una parte, la ecuación (2.3) define cada término del tensor de tensiones como componente de un vector tensión. Según ella, hemos de observar un plano de corte cuya normal exterior sea  $+e_j$ , es decir esté dirigida en el mismo sentido que uno de los ejes coordenados. En tal plano, una componente del tensor de tensiones es positiva tal como lo sería una componente de un vector.

Por otra parte, en un problema concreto, podemos conocer el vector tensión en un plano cuya normal exterior tiene el sentido opuesto a un eje ( $-e_j$ ). Nos gustaría inducir a partir de ese vector tensión los signos de las tres componentes correspondientes del tensor de tensiones. La ecuación (2.3) no es aplicable al caso, ya que en ella aparece  $+e_j$ . Pero podemos usar (2.2), que en nuestro caso se traduce en  $T_i^{e_j} = -T_i^{-e_j}$ , para hacer aparecer  $-e_j$  en la (2.3), con el resultado:

$$\sigma_{ji} = -T_i^{-e_j} \quad (i, j = x, y, z) \quad (2.4)$$

Que indica que en un plano de normal exterior contraria al sentido de un eje, una componente del tensor de tensiones es positiva contrariamente a como lo sería una componente de un vector.



Nota: la experiencia nos dice que el recién llegado tenderá a realizar cualquier razonamiento (incorrecto) que conduzca a que “algo es positivo si tiene el sentido del eje”. Aunque eso es cierto para las componentes de los vectores, se acaba de mostrar que no lo es para las de los tensores. Así, se trata de una magnitud distinta, cuyo convenio de signos es necesariamente de un tipo distinto.

Recapitulando lo obtenido de la observación de (2.3) y (2.4), podemos concluir que una componente del tensor de tensiones es positiva en cualquiera de los dos casos siguientes:

- El plano tiene la normal exterior en el sentido de un eje, y la componente de tensión tiene también el sentido de un eje.
- El plano tiene la normal exterior contraria al sentido de un eje, y la componente de tensión es también contraria a un eje.

El los demás casos, la componente del tensor será negativa. Éstos son los dos casos “cruzados”, de normal según un eje y componente contraria a un eje, o bien de normal contraria a un eje y componente en el sentido de un eje.

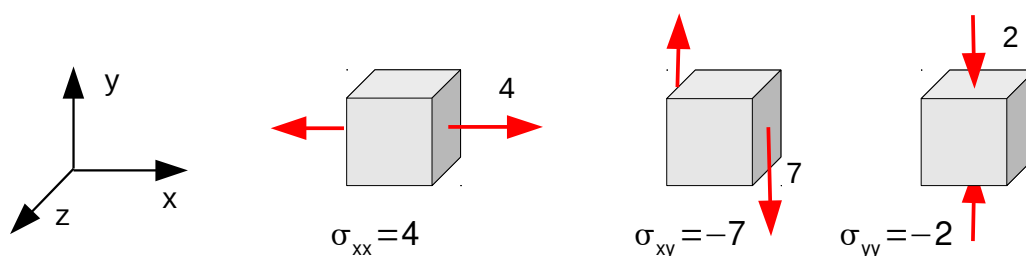


Figura 2.4: Ejemplos de valores de componentes de tensión

Como ejemplo, la figura 2.4 muestra algunos valores de tensión en planos paralelos a los coordenados que pasan por el punto considerado, junto con el signo de la componente del tensor de tensiones correspondiente. Puede entenderse indistintamente que los cubos se dibujan sólo para visualizar tres planos con sólido a uno y otro lado de los mismos, o bien puede entenderse que se trata de cubos diferenciales materiales, obtenidos mediante seis cortes ideales por planos paralelos a los coordenados. En este último caso, los valores de una componente de tensión serían ligeramente distintos (un diferencial de primer orden) en caras paralelas, y debería entenderse que este diferencial se ha despreciado en las figuras. Por lo demás, es importante que se aprecie que el haber dibujado como dato una sola de las dos flechas en cada uno de los dibujos, permitiría dibujar la otra (aplicando el principio de acción y reacción, ya que son prácticamente el mismo plano de corte, con normal opuesta), así como conocer el signo de la componente del tensor correspondiente.



Hemos dicho que el conocer las 9 componentes del tensor de tensiones permite calcular el vector tensión en un plano de cualquier orientación, pero no se ha mencionado cómo. Aunque no usaremos (ni demostraremos) ese resultado en este curso, a título de curiosidad, las componentes del vector tensión  $\mathbf{T}^n$  en el plano de normal exterior  $\mathbf{n}$  pueden obtenerse de:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_x^n \\ T_y^n \\ T_z^n \end{pmatrix}$$

### Simetría del tensor de tensiones

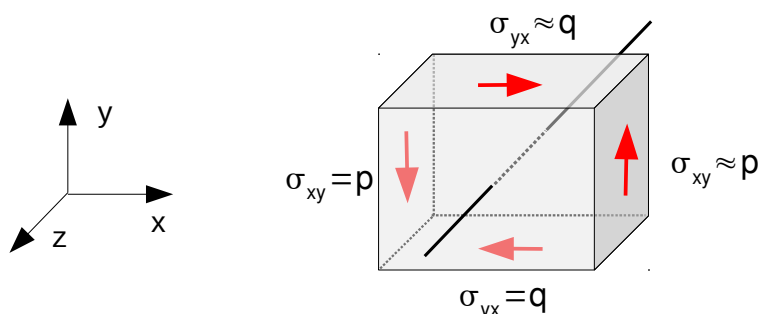


Figura 2.5: Momento de las fuerzas sobre un diferencial, respecto de una recta

Consideremos esta vez un elemento diferencial material, limitado por 6 planos de corte paralelos a los planos coordenados, como muestra la figura 2.5. Dicho elemento tendrá de dimensiones  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , en las direcciones correspondientes. Tomaremos momentos respecto de una

recta paralela al eje z, como por ejemplo la que pasa por el centro del cubo elemental. Las únicas fuerzas que dan momento respecto de esta recta son las que derivan de las tensiones  $\sigma_{xy}$ , y las  $\sigma_{yx}$ . Obsérvese cómo se han dibujado todas ellas positivas.

El valor de las tensiones en dos caras paralelas no será exactamente el mismo, ya que son planos distintos, pero en las condiciones de continuidad que suponemos a la evolución de las tensiones en el sólido, sólo diferirán en un diferencial de tensión (nótese por ej.: si en la cara izda. el valor es p, en la derecha se ha denotado como aproximadamente p), el cual no afectará al equilibrio de momentos que vamos a plantear. Las tensiones normales, así como las fuerzas de volumen si existen, se pueden suponer constantes en el diferencial, y por tanto la recta de acción de su resultante cortaría a nuestra recta, por lo que su momento sería nulo respecto de ella. Por tanto, la ecuación de equilibrio de momentos, salvo diferenciales de orden superior, conduce a:

$$p \cdot (dy dz) \frac{dx}{2} + p \cdot (dy dz) \frac{dx}{2} = q \cdot (dx dz) \frac{dy}{2} + q \cdot (dx dz) \frac{dy}{2} \Rightarrow p = q \Rightarrow \sigma_{xy} = \sigma_{yx}$$

Imponiendo el equilibrio de momentos respecto de rectas paralelas al eje x o al eje y, obtendríamos similarmente  $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$ ,  $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$ . Es decir que cuando representamos los términos del tensor de tensiones en forma de matriz, resultará una matriz simétrica:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{se cumple } \sigma_{ij} = \sigma_{ji}) \quad (2.5)$$

Por lo tanto, las componentes del tensor de tensiones pueden expresarse mediante solamente 6 números reales (en lugar de los 9 planteados inicialmente).

Un corolario interesante de la simetría del tensor de tensiones es el llamado “Principio de Reciprocidad de las Tensiones Tangenciales”. Su demostración se realiza considerando dos planos perpendiculares entre sí que pasan por el punto considerado, como los de la figura 2.6. El sentido de las normales exteriores adoptadas se indica en la primera figura.

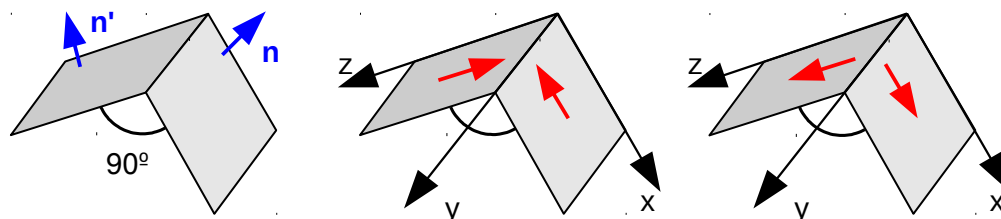


Figura 2.6: Principio de Reciprocidad de las Tensiones Tangenciales

Dado que no estamos obligados a adoptar unos ejes coordenados en particular, podemos imaginar circunstancialmente que tomamos unos ejes como muestra cualquiera de las otras dos figuras. Es decir, con un eje en la intersección de los dos planos, y los otros dos ejes contenidos en cada uno de los dos planos. Con los sentidos de los ejes mostrados en la figura 2.6, las componentes de tensión indicadas serían  $\sigma_{xz}$  y  $\sigma_{zx}$ . Deben ser iguales (incluido el signo), por lo que serán como muestra la segunda figura (ambas positivas), o bien como muestra la tercera figura (ambas negativas). Obtenida la conclusión anterior, podemos enunciar la condición que

cumplen esas componentes de tensión, prescindiendo de un sistema de ejes particular. Dicho enunciado es el Principio de Reciprocidad de las Tensiones Tangenciales:

En dos planos perpendiculares entre sí que pasan por un punto considerado, las componentes de tensión perpendiculares a la arista que forman, tendrán ambas el sentido de apuntar hacia la arista, o bien ambas el sentido de apuntar contrariamente a la arista.



Nótese que no es posible obtener ninguna conclusión acerca de las componentes de tensión paralelas a la arista en esos planos ( $\sigma_{xy}$  y  $\sigma_{zy}$ ). No hemos obtenido ninguna relación entre ellas.

Un ejemplo típico de aplicación de este principio es la imposición de las condiciones de contorno en tensiones en esquinas (reales) que forman ángulo recto. Si es conocido el valor de la tensión tangencial en uno de los planos en ese punto esquina, en el otro plano debe ser tal que se satisfaga el principio de reciprocidad de las tensiones tangenciales. En particular, si como supone la figura 2.7, la tensión es nula en un plano, debe serlo también en el perpendicular, en ese punto.

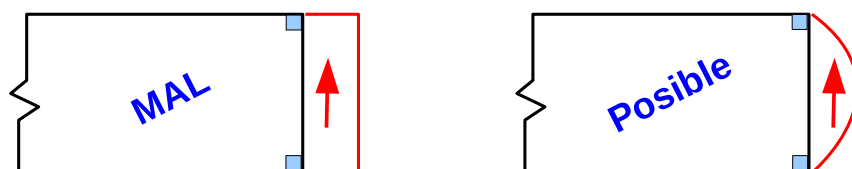


Figura 2.7: Hipótesis que violaría el principio de reciprocidad en las esquinas de una placa (a la izda.), e hipótesis aceptable (dcha.)

## Direcciones y Tensiones Principales

Como hemos indicado, el vector tensión no tiene porqué ser perpendicular al plano sobre el que actúa. Por ello, en general, ambas componentes intrínsecas del vector tensión,  $\sigma$ ,  $\tau$ , serán distintas de cero. Sin embargo, nos preguntamos si en el punto considerado existirá algún plano en el que excepcionalmente la tensión sí que sea perpendicular al plano sobre el que actúa. O lo que es lo mismo, si existirá siempre algún plano tal que la componente intrínseca  $\tau$  de su vector tensión sea nula. La figura 2.8 ilustra el tipo de situación por la que nos estamos preguntando.

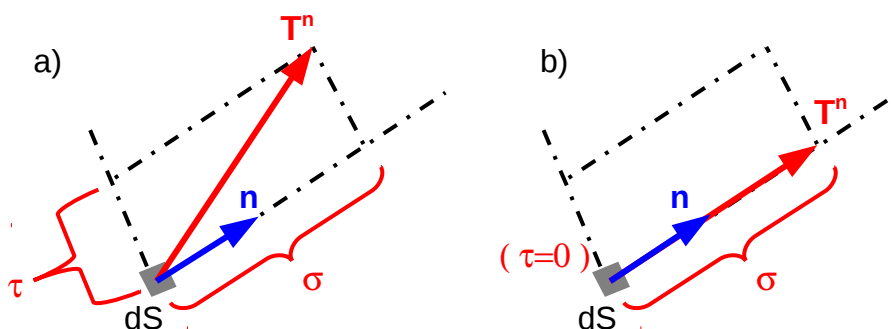


Figura 2.8: a)  $n$  no es dirección principal b)  $n$  es dirección principal

La respuesta a la pregunta anterior es afirmativa. En un punto del sólido siempre existen ciertas direcciones  $\mathbf{n}$  para las que los planos correspondientes tienen sólo tensión normal. Se llaman Direcciones Principales. Los valores de la tensión  $\sigma$  en esos planos se llaman Tensiones Principales. Por tanto, cada dirección principal puede ser especificada mediante un vector unitario adimensional, y cada valor de tensión principal es un escalar con signo.

El problema matemático de encontrar las tensiones y las direcciones principales de tensión resulta ser formalmente idéntico al problema de encontrar los valores propios y vectores propios de una matriz simétrica de números reales que se estudia en el Álgebra Matricial. Como probablemente se recordará, los resultados conducen a la existencia de tres vectores propios, que son perpendiculares entre sí, cada uno de los cuales tiene asociado un valor propio real. Trasladar estos resultados al ámbito de la tensión es inmediato, siendo las “tensiones principales” y las “direcciones principales” los conceptos correspondientes a los “valores propios” y “vectores propios”, respectivamente. Así, en el ámbito de la tensión tendremos que:

- En cada punto del sólido hay tres direcciones principales ( $\mathbf{n}^I, \mathbf{n}^{II}, \mathbf{n}^{III}$ ).
- Las tres direcciones principales son perpendiculares entre sí.
- Siempre podremos definir unos ejes coordenados que coincidan con las direcciones principales en el punto considerado.
- Se denomina tensión principal al valor de la tensión en cada plano principal (el perpendicular a una dirección principal). Se denotarán como  $\sigma^I, \sigma^{II}, \sigma^{III}$ .

Cuando se adoptan unos ejes coordenados que coinciden con las direcciones principales, se les llama ejes principales, siendo frecuente la notación I, II, III, para referirse a ellos (en lugar de los habituales  $x, y, z$ ). Una consecuencia inmediata de adoptar ejes principales en el punto considerado, es que el tensor de tensiones resultará diagonal en esos ejes, como se muestra en la figura 2.9.

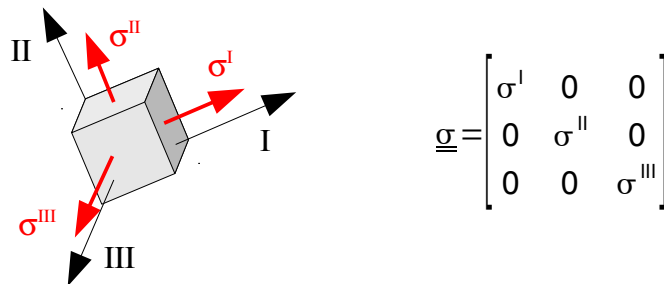


Figura 2.9: Tensor de tensiones cuando se adoptan ejes principales

Como quizá se recuerde del estudio del álgebra, puede darse el caso de que existan más de tres direcciones principales. Son los casos en que dos tensiones principales, o las tres, tienen el mismo valor. En esos casos hay infinitas direcciones principales. No se pretende entrar en detalle al respecto aquí, pero en todo caso está asegurado que siempre podremos tomar unos ejes coordenados en direcciones principales.

## Representación de Mohr

La representación de Mohr es una construcción gráfica que sirve para visualizar de una manera compacta las tensiones en los infinitos planos de corte que pueden considerarse en un

punto del sólido. En cierto sentido, esta representación nos ayudará a compensar el hecho de que nuestros sentidos no están preparados naturalmente para apreciar un tensor (un vector en el espacio tridimensional es el máximo a ese respecto). También lo utilizaremos como herramienta de cálculo ventajosa en problemas bidimensionales. Aquí vamos a dar solamente noticia de los resultados de interés, omitiendo las justificaciones que los sustentan. En caso de interesar, éstas pueden consultarse en la bibliografía [9,10,11].

Considérese un punto de un sólido. En él, un plano de corte ideal, que tendrá su vector tensión, con sus componentes intrínsecas  $\sigma$ ,  $\tau$ . Representamos esa pareja de valores  $\sigma$ ,  $\tau$ , como coordenadas (abcisa y ordenada, respectivamente) en un espacio bidimensional. Obtenemos así un punto de ese espacio  $\sigma$ - $\tau$ , que representa al vector tensión en el plano considerado.

Imaginemos que realizamos esa misma operación para los infinitos planos posibles que pasan por el punto del sólido. Obtendremos una zona del espacio  $\sigma$ ,  $\tau$ , cuyos puntos representan al vector tensión en los distintos planos. Ocurre que esa zona -lugar geométrico- está acotada, y se reduce a la zona comprendida entre tres circunferencias que se muestra sombreada en la figura 2.10. Las tres circunferencias son tales que sus centros están sobre el eje  $\sigma$ , y sus diámetros abarcan el segmento entre dos tensiones principales.

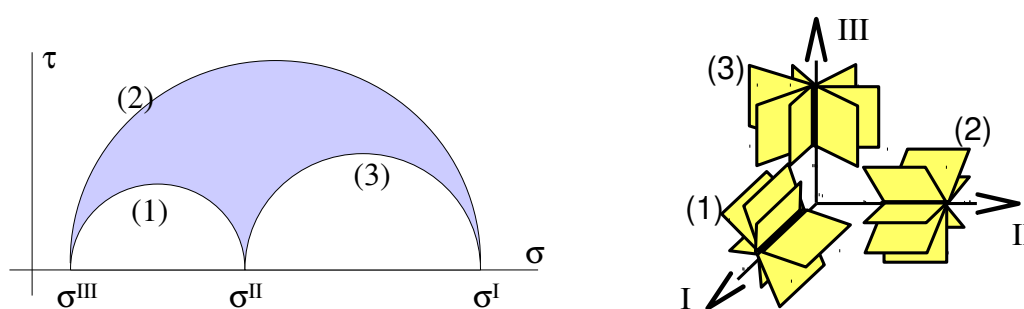


Figura 2.10: Diagrama de Mohr (izda.) y planos del espacio físico a los que corresponden las circunferencias (dcha)

Es habitual en la representación de Mohr considerar, sin pérdida de generalidad, las tensiones principales ordenadas de forma que  $\sigma^I > \sigma^{II} > \sigma^{III}$  (por supuesto, los ejes principales I, II, III, en el espacio físico se nombran de manera acorde). Llamaremos “circunferencia (1)” a la que tiene su diámetro entre  $\sigma^{II}$  y  $\sigma^{III}$ . Análogamente, llamaremos “circunferencia (2)” a aquella que tiene su diámetro entre  $\sigma^I$  y  $\sigma^{III}$ , y “circunferencia (3)” a la que lo tiene entre  $\sigma^I$  y  $\sigma^{II}$ . Resulta ser que los puntos de la circunferencia 1 representan tensiones en planos de corte que son paralelos al eje I principal (diremos que son planos pertenecientes a la radiación del eje I). Análogamente, los puntos de la circunferencia 2 representan tensiones que ocurren en planos de la radiación del eje II, y los puntos de la circunferencia 3 representan tensiones en planos de la radiación del eje principal III. Los puntos interiores de la zona sombreada representan las tensiones en planos que no son paralelos a ningún eje principal. Todo ello se ilustra en la figura 2.10. En ella, los planos de corte se representan desplazados para su mejor visualización, pero debe entenderse que todos ellos pasan por el punto del sólido bajo estudio (en el origen de los ejes).

El diagrama de Mohr proporciona de un modo inmediato buena parte de la información relevante en cuanto a cómo es la sollicitación en el punto considerado, con vistas a enjuiciar la resistencia del material. Por ejemplo, permite saber de un vistazo si existen o no planos que trabajan a tracción (algunos materiales, como el hormigón no resisten tracciones), y el valor máximo de la tensión tangencial en los planos que pasan por el punto, que siempre será el radio de la circunferencia (2). Eventualmente, en la figura se ha representado un caso en el que



no habría ningún plano trabajando a compresión, ya que todo el diagrama está en la zona de  $\sigma$  positiva.

Seguidamente presentaremos con algún detalle algunos resultados correspondientes al caso bidimensional del diagrama de Mohr. En primer lugar vamos a dar una definición provisional de “caso bidimensional” (debe entenderse aplicable sólo en este ámbito de estudio de la tensión en un punto). Diremos que se trata de un “caso bidimensional”, o “problema plano” cuando concurren estas circunstancias:

- Una dirección principal es conocida en el punto considerado.
- Sólo nos interesamos por planos de corte pertenecientes a la radiación de esa dirección principal.

En estas circunstancias, podemos observar el problema desde un punto de la dirección princi-

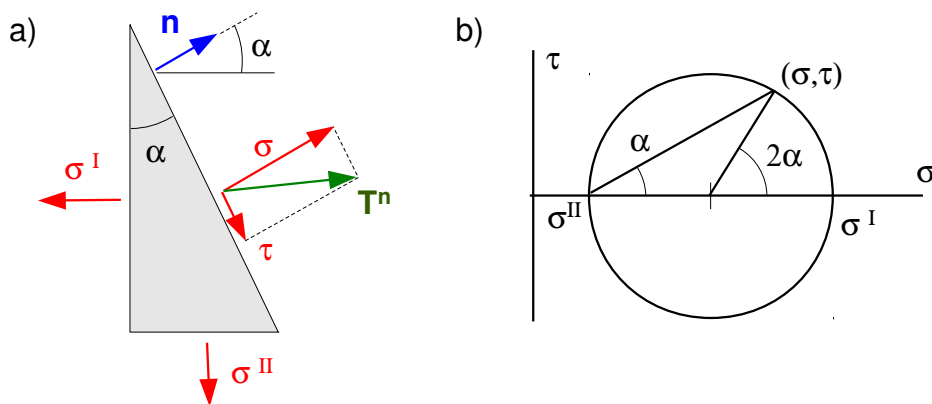


Figura 2.11: Elemento visto desde el eje III, y Diagrama de Mohr bidimensional

pal conocida, y veremos los planos de corte como líneas rectas. Esta vista es la que usaremos para visualizar y analizar el problema, y es la representada en la figura 2.11a.

En los planos de corte, la tensión tangencial es perpendicular a la dirección principal conocida, y por tanto se verá en su magnitud real en nuestro dibujo. Lo mismo ocurre con la tensión normal. Sabemos que esas componentes intrínsecas del vector tensión estarán representadas en algún punto de la circunferencia de Mohr correspondiente al eje principal conocido. En la figura 2.11a, éste es el III, y por tanto la circunferencia pertinente es la (3), que tiene su diámetro entre las tensiones  $\sigma^I$  y  $\sigma^{II}$ .

Antes de seguir adelante, observemos que en un problema bidimensional, y para un plano dado, la tensión tangencial  $\tau$  sólo tiene una dirección posible, con sus dos sentidos. Son, en total, dos posibilidades, en contraposición a las infinitas posibilidades que tenía en el problema tridimensional (ello motivó que definiéramos  $\tau$  como un escalar sin signo). Las dos posibilidades pueden ahora discriminarse con un signo. Por ello vamos a definir un convenio de signos para  $\tau$  en problemas bidimensionales: la tensión tangencial  $\tau$  será positiva si “deja a la derecha el sólido”.

Lo anterior se interpreta como sigue: imaginamos que estamos de pie sobre el dibujo, caminando sobre la línea que representa el plano, en el mismo sentido que tenga  $\tau$ . Si en esas condiciones tenemos el sólido a nuestra derecha, el escalar  $\tau$  será positivo. Si el sólido queda a nuestra izquierda,  $\tau$  será negativo.



Dibujamos la mitad inferior de los diagramas bidimensionales de Mohr, ya que  $\tau$  tiene signo. En los tridimensionales, la mitad inferior no aporta información, y puede omitirse.

Finalmente indicaremos, nuevamente sin demostración, cuál es el punto del diagrama que representa la tensión en nuestro plano. En la figura 2.11b, se indica dónde encontrar el ángulo  $\alpha$  en el diagrama. Éste es el mismo ángulo que forma nuestra normal  $\mathbf{n}$  con el eje principal I. Con el convenio de signos adoptado para  $\tau$ , el sentido de giro de  $\mathbf{n}$  a partir de la dirección I es el mismo sentido de giro que debe seguirse en el diagrama, desde la posición de  $\sigma^I$  hasta encontrar el punto buscado. Éste punto tiene unas coordenadas  $(\sigma, \tau)$ , que son las componentes intrínsecas de tensión en nuestro plano (el de la fig. 2.11a).

Debido a las propiedades geométricas de la circunferencia, el ángulo que forma el eje I con el radio de la circunferencia correspondiente al punto buscado  $(\sigma, \tau)$ , será  $2\alpha$ . Por ello, el ángulo también se puede medir desde el centro de la circunferencia, tomando un ángulo de valor doble a lo que corresponde en el espacio físico.

La realización de unos pocos ejercicios prácticos, como los que se presentan en el curso, ayudará a asimilar los detalles involucrados. No obstante, se enumeran a continuación algunos de los aspectos del manejo del diagrama de Mohr bidimensional que pueden ser de especial utilidad:

- Una vez establecido el procedimiento para encontrar un ángulo en el diagrama a partir de la dirección I, es inmediato apreciar (porque los ángulos entre tres direcciones son aditivos) la posibilidad de medir ángulos a partir de cualquier otra dirección. Ello será útil cuando se conozca la tensión en un plano de orientación no principal.
- Es inmediato (nuevamente, sólo hay que sumar ángulos) que planos cuyas normales formen entre sí un ángulo  $\theta$  en el espacio físico, formarán el mismo ángulo  $\theta$  en la representación de Mohr. O bien  $2\theta$  si se miden ángulos desde el centro. En particular, si los planos forman  $90^\circ$  en el espacio físico, formarán un diámetro en el diagrama.
- Cuando se realiza un análisis bidimensional, es aconsejable pensar que se está mirando provisionalmente un problema tridimensional desde un eje principal conocido. No olvidar la tercera tensión principal es necesario para estimar correctamente la tensión tangencial máxima, y el plano en que ocurre.
- Mirando el problema tridimensional desde su eje principal II, observamos el problema plano descrito por la circunferencia (2) del diagrama. De él se obtiene inmediatamente el valor de la tensión tangencial máxima, y que la misma ocurrirá siempre en planos de la radiación del eje II, a  $45^\circ$  de los ejes I y III.
- Aunque no hay necesidad real de ello, muchos textos denominan I y II a las direcciones principales perpendiculares a la conocida inicialmente, independientemente del valor de esta última. El detalle es irrelevante mientras no se confunda el círculo del diagrama sobre el que se está trabajando.

Para futura ampliación y profundización acerca del concepto de tensión presentado en este tema, puede consultarse por ejemplo <sup>[11]</sup>, o con una notación y enfoque similares, en <sup>[10]</sup>. La referencia <sup>[9]</sup> contempla el mismo enfoque aunque usa una notación diferente. Un enfoque y notación ligeramente diferentes pueden encontrarse en <sup>[12]</sup>.

## 3.- El Sólido Elástico

### ***Nociones sobre la Deformación***

Como su nombre indica, la deformación hace referencia a los cambios de forma del sólido. Sin necesidad de pensar en las causas o acciones que provocaron la deformación, resulta claro que si conociésemos los incrementos de longitud de los infinitos segmentos de línea diferenciales que podamos considerar en el sólido, seríamos capaces de inducir el cambio de forma de todo el sólido macroscópico. Pensando cada uno de los puntos materiales del sólido, desearíamos conocer los incrementos de longitud de todos los posibles segmentos diferenciales de línea que pasan por el punto. Y como paso previo, desearíamos disponer de una magnitud cuyo valor describiese todos esos incrementos de longitud del entorno del punto.

La pretensión anterior es razonable, ya que el tensor de tensiones ofrecía una funcionalidad similar (conocer valor del tensor de tensiones en un punto permite conocer el vector tensión en cualquier plano que pasa por el punto). Similarmente, la deformación de todos los segmentos de línea diferenciales del entorno de un punto, puede caracterizarse mediante un tensor simétrico de orden dos. Se llama "Tensor de Pequeñas Deformaciones", o "Tensor de Cauchy".

La caracterización de la deformación como tensor cae fuera del ámbito de este curso. Simplemente presentaremos sin mayor justificación algunos resultados relativos a la deformación, que serán útiles en el desarrollo de los epígrafes siguientes.

El tensor de deformaciones guarda muchas analogías formales con el tensor de tensiones. Llamaremos  $\varepsilon_{ij}$  a sus 9 componentes, de las que sólo 6 son independientes debido a que es simétrico ( $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ ), pudiendo tomar  $i, j$ , los valores  $x, y, z$ , de unos ejes cartesianos previamente definidos.

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Los términos diagonales del tensor,  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\varepsilon_{zz}$ , representan los alargamientos unitarios de segmentos diferenciales que pasan por el punto considerado, y que inicialmente (antes de la deformación) tenían respectivamente la orientación del eje  $x$ ,  $y$ , o  $z$ . Si se trata de un alargamiento el término es positivo, y si se trata de un acortamiento del segmento, el término del tensor es negativo. Se llama "longitudinales" a estas componentes de deformación.

Un término no diagonal, como el  $\varepsilon_{xy}$ , representa la mitad de lo que se cierra el ángulo inicialmente recto que formaban dos segmentos diferenciales que parten del origen de coordenadas, y tienen los sentidos de los ejes  $x$  e  $y$ . Si el ángulo se cierra, el término del tensor es positivo. Si el ángulo se abre, el término del tensor es negativo. Se llama "transversales" a estas componentes de deformación.

Nótese que los términos del tensor de deformaciones son adimensionales. Los diagonales representan un incremento de longitud dividido por una longitud inicial (resultado adimensional), y los no diagonales, un incremento de ángulo en radianes (nuevamente adimensional).

Por otra parte, y en coherencia con la hipótesis de pequeños desplazamientos y cambios de forma que se asumen en el curso, los términos del tensor son numéricamente pequeños. Matemáticamente, se suele caracterizar como “pequeñas” las deformaciones resultantes de un campo de desplazamientos diferenciales 1<sup>er</sup> orden. Esto es útil para formular ecuaciones, pero ayuda poco a establecer un límite físicamente aceptable para el concepto de “pequeñas deformaciones”. Aunque no es posible establecer dicho límite de forma universal (depende del problema concreto), deformaciones del orden de  $10^{-3}$  o menores suelen hacer aceptable el planteamiento del equilibrio en la configuración indeformada, y demás hipótesis relacionadas, y pueden considerarse “pequeñas deformaciones”.

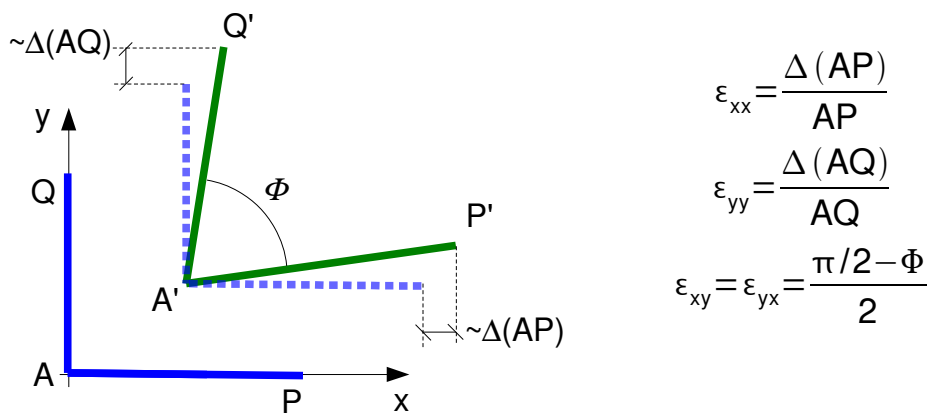


Figura 3.1: Significado físico de los términos del tensor de deformaciones

La figura 3.1 ilustra los significados físicos de los términos del tensor de deformaciones en un caso bidimensional. En ella, los puntos materiales que inicialmente estaban en las posiciones A, P, y Q, se desplazan tras la deformación a las posiciones A', P', y Q' respectivamente, lo que provoca tanto cambios de longitud como de orientación en los segmentos diferenciales. Como los cambios de orientación serán muy pequeños, es buena aproximación calcular el incremento de longitud de un segmento que inicialmente era horizontal (AP) en proyección horizontal, como se indica. Para referencia, se dibujan en línea discontinua los segmentos con su longitud original, tal como quedarían tras una traslación que llevase A a la posición A'. Análogamente, es correcto aproximar el incremento de longitud de AQ mediante su proyección vertical.

Para terminar esta breve presentación de la deformación, daremos noticia de un resultado que utilizaremos con posterioridad. Considere que cada punto del sólido, dado por sus coordenadas iniciales  $(x,y,z)$ , tiene asociado un vector desplazamiento  $\mathbf{u}(x,y,z)$ , que es el vector con origen en la posición inicial del punto material, y destino en la posición final. Como vector que es, tiene sus componentes  $u_x, u_y, u_z$ , que varían con las coordenadas espaciales. Considere también un segmento diferencial en el sólido, de orientación inicial coincidente con el eje x (tal como AP en la figura anterior). Se demuestra que el incremento de longitud unitario de tal segmento, que ya hemos identificado como  $\epsilon_{xx}$ , puede calcularse también como  $\partial u_x / \partial x$ , evaluada en el punto A cuyo entorno estamos considerando:

$$\frac{\Delta(AP)}{AP} = \epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (3.2)$$

## Ensayo de Tracción

El ensayo de tracción consiste en estirar de forma controlada una pequeña probeta del material con forma de barra esbelta, generalmente hasta su rotura. Se trata de un ensayo muy común, probablemente el más común de los que cabe realizar a un material que se pretenda usar con fines resistentes. Por ello, este ensayo está contemplado y regulado en la normativa (norma UNE-EN ISO 6892-1:2010). El resultado del ensayo es una gráfica en la que se representa en abscisas el incremento de longitud de la probeta en cada instante, dividido entre su longitud inicial, y en ordenadas la fuerza aplicada en cada instante, dividida entre el área de la sección de la probeta.

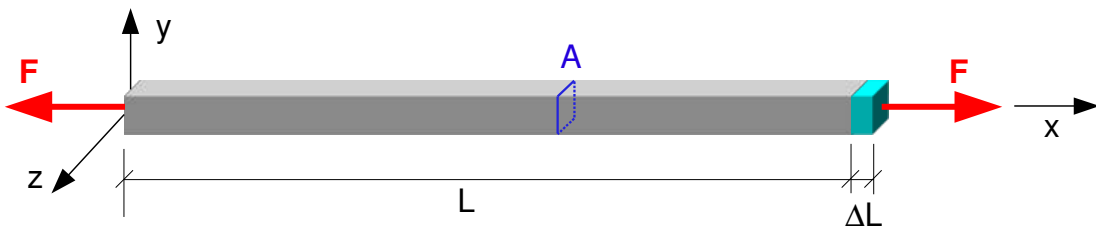


Figura 3.2: Magnitudes que intervienen en el trazado de la gráfica del ensayo de tracción

$$\text{En el ensayo de tracción: } \left. \begin{array}{l} \sigma_{xx} \approx F/A ; \quad \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0 \\ \varepsilon_{xx} \approx \Delta L/L ; \quad \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz} \neq 0 ; \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0 \end{array} \right\} \quad (3.3)$$

Tanto las soluciones analíticas conocidas como una amplia evidencia experimental muestran que, salvo en una pequeña zona cercana a las mordazas u otros dispositivos que se empleen para sujetar la probeta por sus extremos y aplicar la fuerza, la distribución de tensiones y deformaciones es prácticamente uniforme en la probeta. Lo anterior es más cierto cuanto más esbelta sea la probeta, pero en todo caso en la práctica del ensayo se opera de forma que la medición se vea afectada lo menos posible por los efectos de borde. En concreto, para una probeta como la esquematizada en la figura 3.2, es buena aproximación suponer que:

- Solamente existe componente de tensión  $\sigma_{xx}$  en la barra, la cual tiene un valor constante en todos los puntos. Un sencillo razonamiento de equilibrio conduce a que su valor debe ser  $\sigma_{xx}=F/A$ , que se representa en la gráfica del ensayo. El resto de componentes  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{yz}$ ,  $\sigma_{zz}$ , son nulas.
- Solamente existen las componentes normales de deformación  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\varepsilon_{zz}$ , en la barra, teniendo cada una un valor constante en los puntos de la barra. Al ser constante,  $\varepsilon_{xx}$  debe coincidir con el incremento de longitud unitario de toda la barra,  $\Delta L/L$ , que se representa en la gráfica del ensayo. Las componentes transversales de deformación,  $\varepsilon_{xy}$ ,  $\varepsilon_{xz}$ ,  $\varepsilon_{yz}$ , son nulas.

Las ecuaciones (3.3) resumen lo indicado anteriormente. La figura 3.3 muestra esquemáticamente el resultado de un ensayo de tracción para un acero de bajo contenido en carbono. El ensayo comienza en el origen de ejes (tensión nula, y deformación nula), y evoluciona en principio linealmente, hasta llegar a la tensión denominada “Límite Elástico”, denotado como  $\sigma_e$ . Ésta es la notación usual en la literatura, aunque las normas suelen llamarlo  $f_y$ . La pendiente de esta recta es una característica importante del material, que se denomina “Módulo de Elasti-

cidad”, o “Módulo de Young”, y se denota como “E”, de forma que  $E = \tan \alpha$ . Siendo el cociente de un incremento de tensión entre uno de deformación (que es adimensional), “E” tiene dimensiones de tensión.

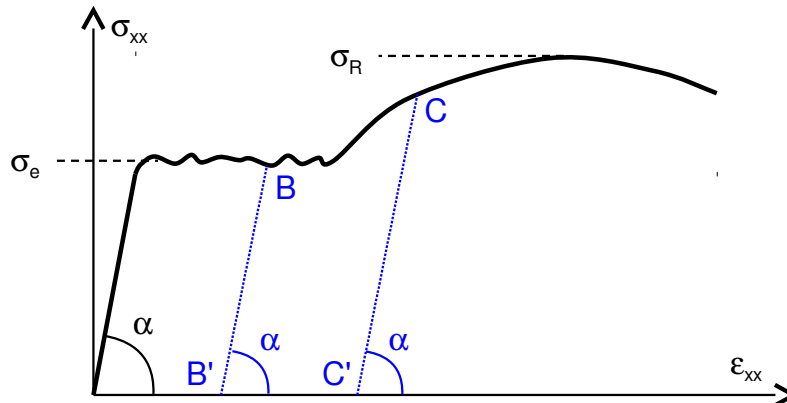


Figura 3.3: Resultado típico de un ensayo de tracción para un acero (Nota: no está a escala para mostrar los detalles)

Por, tanto, en esta zona lineal inicial (en la que estaremos interesados fundamentalmente el resto del curso), se satisface

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} \quad (3.4)$$

Al llegar a la tensión del límite elástico, ocurre un fenómeno particular llamado “fluencia” del material. Como se aprecia, se trata de un aumento de la deformación a un valor de la tensión sensiblemente constante, que es el propio valor  $\sigma_e$ . El ensayo se suele realizar de forma que se impone a la probeta el incremento de longitud deseado en cada instante, gracias a lo cual es posible detener el ensayo en un punto como el B, si se desea. En ese caso, se desciende al nivel de tensión cero por una recta que es paralela a la de subida inicial, y la probeta descargada termina con la deformación correspondiente al punto B' indicado en la figura. Se llaman deformaciones plásticas a estas deformaciones que no se recuperan tras la descarga.

Si en lugar de interrumpir el ensayo en B, continuamos, no tarda en llegar un valor de la deformación para el que vuelve a ser preciso aumentar la tensión para obtener más deformación. Se llama etapa de fortalecimiento a esta fase del comportamiento del material. El punto marcado “C” se encuentra en esta zona. Nuevamente, si decidimos interrumpir el ensayo en este punto, descendemos al nivel de tensión cero por una recta de la misma pendiente que la recta inicial, y la probeta descargada termina con la deformación plástica correspondiente al punto C'.

Finalmente, si no se interrumpe el ensayo, se llega a una tensión  $\sigma_R$ , que se denomina “tensión de rotura”. La misma corresponde al máximo indicado de la gráfica del ensayo. En la zona final descendente de la gráfica ocurren fenómenos de gran estrechamiento local de la sección de la probeta, que hacen que el parámetro  $F/A$  que se representa (siendo A el área inicial de la probeta), no es ya, ni siquiera aproximadamente, el valor real de la tensión  $\sigma_{xx}$  en la zona del estrechamiento. En todo caso, en condiciones normales de trabajo, un material resistente soporta unas cargas dadas (no unos desplazamientos dados, como ocurre en el ensayo). En estas circunstancias, una zona descendente de la gráfica se recorre de manera incontrolada hasta la rotura efectiva de la probeta, por lo que el máximo antes citado es el que se toma como valor de la tensión de rotura.



**Notas:** El acero tiene un comportamiento muy similar a tracción y a compresión, como muestra esquemáticamente la figura 3.4a. Un ensayo de compresión tendría prácticamente la misma forma que uno de tracción, al menos hasta superar el escalón de fluencia.

Se han omitido algunos detalles considerados poco relevantes por brevedad. Entre ellos, la diferenciación entre una tensión de fluencia superior y una inferior, y la diferenciación entre tensiones muy cercanas a  $\sigma_e$ , que delimitan ciertos fenómenos justo antes de la fluencia (un pequeño tramo no lineal pero elástico antes de  $\sigma_e$ , y otro pequeño tramo no elástico antes de llegar la fluencia). No es usual distinguir entre ellas en las aplicaciones de Resistencia de Materiales.

La figura 3.3 está distorsionada para poder apreciar algunos detalles. Dibujando el eje de abscisas a escala, el tramo recto inicial aparecería muy cercano al eje de ordenadas. Asimismo, el escalón de fluencia es mucho más corto de lo que se ha dibujado.

Por otra parte, las deformaciones en las direcciones y, z, pueden medirse con instrumentación adicional, observándose que  $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz}$ . De hecho, cualquier segmento orientado perpendicularmente al eje x experimenta la misma deformación relativa que el orientado según esas direcciones “y” o “z”. En la zona lineal, el valor de esta deformación es:

$$\text{En el ensayo de tracción: } \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\nu \varepsilon_{xx} \quad (3.5)$$

Donde  $\nu$  es un parámetro característico del material, llamado Coefficiente de Poisson. El signo menos de la ecuación anterior indica que si en la dirección x existe alargamiento, en las perpendiculares existe un acortamiento (o viceversa). Este acortamiento unitario es una fracción  $\nu$  del alargamiento unitario existente en la dirección x. Como veremos más adelante, la Ley de Comportamiento del acero en la zona elástica inicial puede expresarse en función de las dos constantes E,  $\nu$ , del material. Es curioso que dichas constantes apenas dependen de la calidad del acero, o incluso de si el mismo está aleado o no. De hecho, la norma CTE indica que sus valores para todos los tipos de acero que contempla (que son aceros para construcción, no aleados y de bajo contenido en carbono), son los siguientes:

$$\text{Para el acero: } E = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa} \quad \nu = 0.3 \quad (3.6)$$

Como se adelantó en el Tema 1, el CTE establece cuatro calidades de acero para estructuras. Su denominación consiste en una “S”, seguido de una cifra que coincide con su límite elástico en MPa (límite elástico nominal para espesores menores de 16mm; para espesores mayores se especifican valores menores del límite elástico). Estos tipos son:

	S235	S275	S355	S450
$\sigma_e = f_y$ (MPa)	235	275	355	450
$\sigma_R = f_u$ (MPa)	360	410	470	550

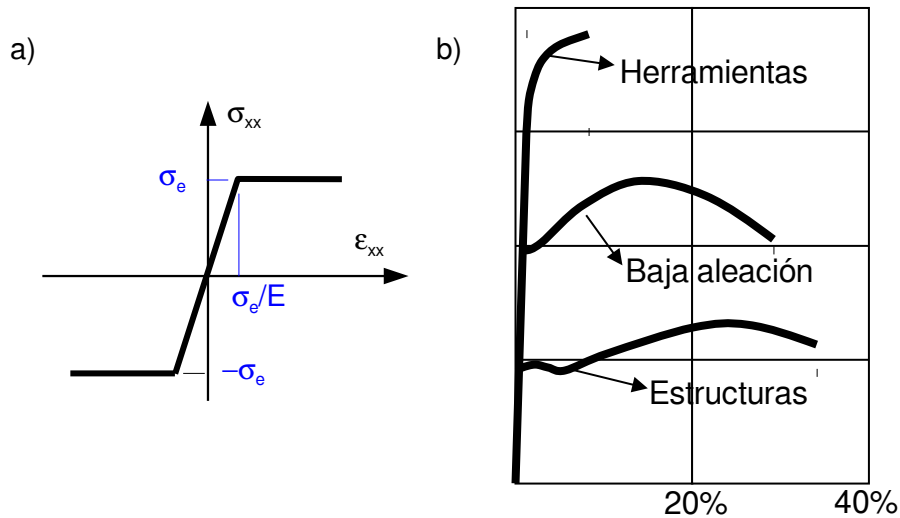


Figura 3.4: a) Comportamiento idealizado del acero a tracción y a compresión.  
b) Comparación de tres aceros de muy distinta calidad y finalidad

La figura 3.4b muestra esquemáticamente las gráficas de los ensayos de tracción para tres aceros típicos, de muy diferente calidad: un acero para estructuras, un acero de baja aleación, y un acero para herramientas, o para tornillos de alta resistencia. Puede observarse una gran diferencia entre sus límites elásticos, así como entre sus tensiones de rotura. Nótese sin embargo como todos comparten la inclinación de la zona lineal inicial, ya que el valor de  $E$  es común a todos.

En ciertas aplicaciones, la existencia del periodo de fluencia no es deseable. Por ejemplo, no deseamos que la cadena cinemática de una máquina de mecanizado sufriese deformaciones plásticas una vez puesta en servicio, estropeando los delicados ajustes realizados. En su lugar deseamos un límite elástico lo más alto posible. Como ejemplo, el acero para herramientas mostrado en la figura no presenta escalón de fluencia. Esto se consigue generalmente mediante tratamientos previos en frío, que llevan el material hasta la zona de fortalecimiento antes de su puesta en servicio.

Por el contrario, en las aplicaciones estructurales habituales, la fluencia es un fenómeno deseable, ya que los desplazamientos apreciables “avisar” de la presencia de tensiones altas, y por otra parte, en determinadas circunstancias, dota a las estructuras de una reserva de resistencia importante más allá de la plastificación del primer punto del material. Esta reserva de resistencia es debida a que el aumento de deformación en una zona sin aumento de tensión, hace que otras zonas menos cargadas adquieran tensiones mayores.



No debe sorprender que los aceros para estructuras sean los de peor calidad. Ello es una consecuencia del necesario compromiso entre características del material y coste económico, en un campo de aplicación en que la cantidad de acero necesaria para un proyecto, incluso modesto, se mide por decenas de toneladas.

Finalmente, nótese que en la zona elástica lineal inicial, en la que habitualmente desearemos que el acero trabaje, las deformaciones son muy pequeñas. Por ello es de esperar que los análisis que realicemos bajo las hipótesis de pequeños desplazamientos y deformaciones tengan muy poco error debido a este efecto.



## Ensayo de Torsión

En este momento del curso solamente necesitamos mostrar el efecto de una tensión tangencial, del tipo  $\sigma_{xy}$ , sobre un elemento diferencial del material. Aunque este detalle podría presentarse sin justificación por brevedad, se ha considerado preferible dar noticia del ensayo real que típicamente permite aplicar a un elemento diferencial del material un estado de tensión que solamente tenga la referida componente de tensión. Éste es el ensayo de torsión.

El ensayo de torsión se realiza usualmente sobre una probeta maciza de geometría cilíndrica, aplicando un momento colineal con la directriz de la barra, que llamamos “momento torsor” y denotamos como “ $T$ ”, y cuyo efecto es retorcer la barra en torno a su eje. Para los objetivos ilustrativos que perseguimos aquí, es más conveniente considerar una probeta cilíndrica hueca de pared delgada, sobre la que es igualmente posible realizar el ensayo. Teóricamente los resultados debieran ser análogos para ambas geometrías, pero debe tenerse noticia de que en la práctica, en el caso de sección de pared delgada, pueden aparecer fenómenos de inestabilidad (abolladura de la pared del tubo) para cierto nivel del par torsor. Si la pared del tubo es muy delgada en comparación con el diámetro, dichos fenómenos pueden aparecer antes de la plastificación del material. Para que esto no suceda, la relación diámetro “ $D$ ” a espesor “ $e$ ” debe ser menor que 50, orientativamente. Por otra parte, a los efectos del ensayo puede considerarse “de pared delgada” a los tubos con relación  $D/e$  mayor que 20, orientativamente. Asumimos que nuestro ensayo estará realizado sobre una probeta cuya relación  $D/e$  está entre esos valores, de forma que se alcance, al menos, la plastificación sin que aparezcan fenómenos de inestabilidad.

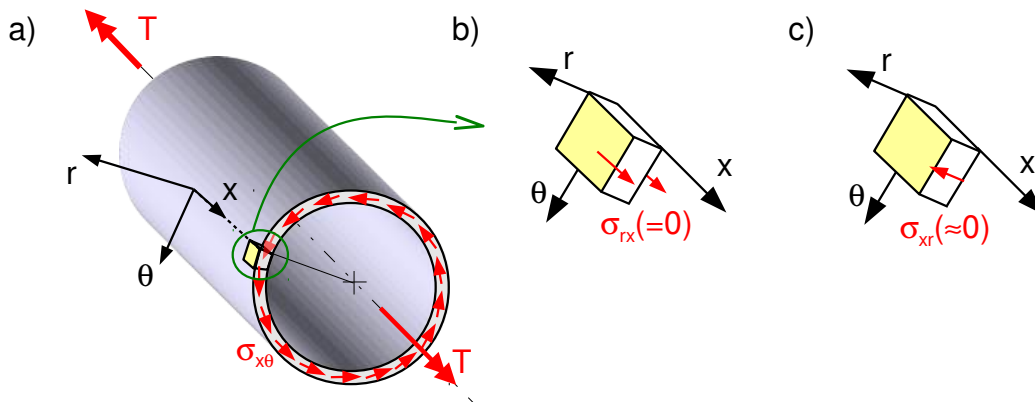


Figura 3.5: Ensayo de torsión en una barra de perfil circular hueca de pared delgada

La figura 3.5a muestra un tubo de pared delgada sometido a un momento torsor  $T$ . La distribución de tensiones que se genera en una sección de la barra perpendicular a su eje, consta de un sistema de tensiones tangenciales que tienen la dirección circunferencial en el perfil, como justificaremos enseguida. Si definimos unos ejes que varíen de orientación con el punto de la barra considerado, de forma que  $x$  sea paralelo al eje de la misma,  $r$  tenga la dirección radial, y  $\theta$  tenga la dirección circunferencial, entonces estas tensiones serían de componente  $\sigma_{x\theta}$  en cada punto. Se asume como aproximación que dichas tensiones son constantes en el espesor por ser éste pequeño. Y por supuesto son constantes en la dirección circunferencial debido a la simetría axial del problema.



Es claro que las tensiones  $\sigma_{xx}$  serán nulas: Por una parte, su resultante debe ser nula en la sección, para que la porción de barra que consideremos esté en equilibrio. Por otra parte debe tener un valor constante debido a la simetría axial del problema. Ambas cosas sólo son posibles simultáneamente si  $\sigma_{xx}=0$  en todos los puntos.

Las figuras 3.5b y 3.5c muestran la justificación de que la tensión tangencial debe tener aproximadamente la dirección tangente a la línea media del perfil, es decir la dirección  $\theta$ . La figura 3.5b muestra ampliado el elemento diferencial de la pared del tubo indicado en la figura 3.5a. Este elemento tiene dimensiones diferenciales en las direcciones  $x$ ,  $\theta$ , y abarca el pequeño espesor del tubo en la dirección  $r$ . Como se indica, la tensión  $\sigma_{rx}$  es evidentemente nula en las paredes interior y exterior del tubo, ya que no existe ninguna acción aplicada sobre dichas superficies (que son superficies exteriores del sólido). Estos dos puntos están muy próximos en el sólido, ya que el espesor es pequeño. Dada la evolución continua que se espera para las variables del problema, es razonable asumir que entre esos dos puntos próximos de valor nulo,  $\sigma_{rx}$  no puede crecer significativamente, y puede despreciarse. Pero siendo  $\sigma_{rx} = \sigma_{xr}$ , ésta última también será despreciable, como indica la figura 3.5c. Por tanto, de las dos posibles componentes de tensión tangencial en la sección ( $\sigma_{xr}$  y  $\sigma_{x\theta}$ ),  $\sigma_{xr}$  es despreciable. Luego  $\sigma_{x\theta}$  es la única a considerar, como pretendíamos justificar.



Existen otros razonamientos geométricos que permiten concluir que, de hecho, la tensión tangencial debe tener exactamente la dirección circunferencial, en esta geometría concreta. Dichos razonamientos se mencionarán en el tema posterior de torsión, aunque no se entrará en detalle. El razonamiento presentado aquí es de naturaleza aproximada, pero es más versátil: es aplicable a las tensiones tangenciales de cualquier origen (torsión o flexión), y a cualquier perfil cerrado de pared delgada (circular o no). Su inclusión en este epígrafe en lugar de otros razonamientos más específicos obedece a dicha versatilidad.

Entre las observaciones experimentales del ensayo cabe destacar que:

- 1) La barra no experimenta variaciones de longitud apreciables, y las secciones  $x=\text{cte}$  de la barra permanecen planas y sin cambios de dimensión apreciables.
- 2) En el tramo lineal, se observa proporcionalidad entre el par torsor aplicado y el ángulo girado entre dos secciones que se encuentran a una cierta distancia.

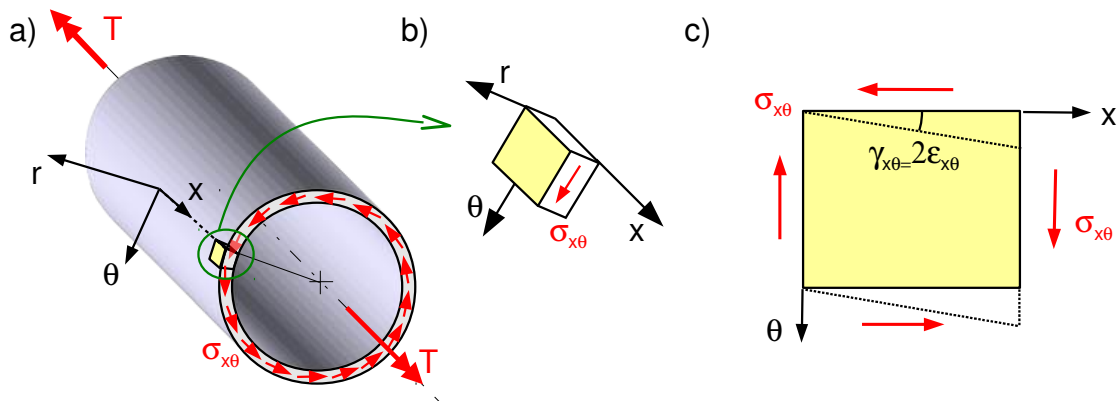


Figura 3.6: Deformación de un elemento de la pared del tubo en el ensayo de torsión.

La figura 3.6b muestra el elemento diferencial con la tensión  $\sigma_{x\theta}$  aplicada en el plano paralelo a la sección de la barra (la cual se vuelve a mostrar en la figura 3.6a por comodidad). El principio de reciprocidad de las tensiones tangenciales exige que exista esa misma tensión en las otras caras del elemento diferencial, como muestra la figura 3.6c. En ella, además se muestra el efecto de estas tensiones. La primera observación experimental anterior, implica que los lados del elemento diferencial no experimentan cambios de longitud. Solamente hay cambio de ángulos.

La segunda observación experimental anterior conduce a que existe proporcionalidad entre la tensión  $\sigma_{x\theta}$  y el ángulo  $\gamma_{x\theta}$ . Esto es debido a que  $\sigma_{x\theta}$  es proporcional a  $T$ , y el ángulo girado entre dos secciones es proporcional a  $\gamma_{x\theta}$ . A continuación justificamos las mencionadas proporcionalidades.

Si consideramos un elemento diferencial de área en la sección, de dimensiones  $R \cdot d\theta$  en sentido circunferencial ( $R$  es el radio exterior del tubo, aproximadamente igual al radio medio), y el espesor  $e$  en sentido radial, como muestra la figura 3.7a, vemos que el momento de la fuerza que actúa sobre el diferencial es  $(\sigma_{x\theta} e R d\theta) \cdot R$ , y el momento total será:

$$\int_0^{2\pi} \sigma_{x\theta} e R^2 d\theta = \sigma_{x\theta} e R^2 \cdot 2\pi = T \quad \Rightarrow \quad \sigma_{x\theta} = \frac{T}{2\pi R^2 e} \quad (3.7)$$

Que expresa la proporcionalidad  $\sigma_{x\theta} \sim T$ . Por otra parte, considerando una longitud de barra  $dx$ , y llamando  $\Theta$  al ángulo girado entre secciones por unidad de longitud de barra, ángulo que se mide en el ensayo, la figura 3.7b pone de manifiesto que el desplazamiento circunferencial de un punto exterior de la sección derecha, suponiendo (sin pérdida de generalidad) que la sección izquierda no gira, será por una parte  $\gamma_{x\theta} dx$ , y por otra parte  $\Theta dx \cdot R$ . Los ángulos  $\gamma_{x\theta}$ ,  $\Theta dx$ , se expresan en radianes. Por tanto:

$$\gamma_{x\theta} = \Theta \cdot R \quad (3.8)$$

Que expresa la proporcionalidad entre  $\gamma_{x\theta}$  y el ángulo de giro entre secciones por unidad de longitud de barra  $\Theta$  que pretendíamos justificar.

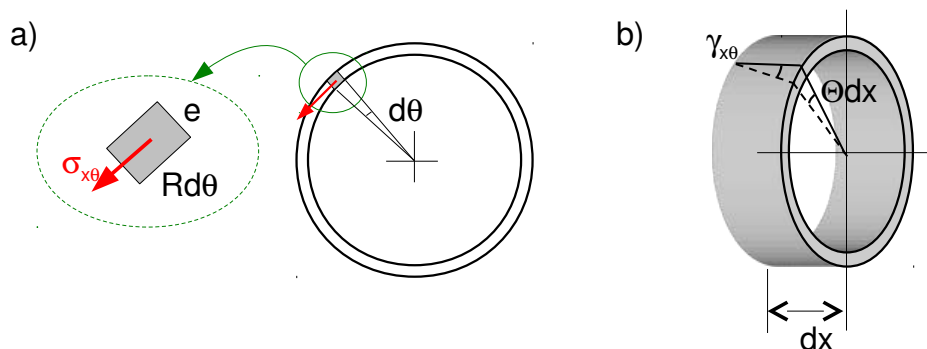


Figura 3.7: a) Elemento diferencial de área en la sección. b) Desplazamiento circunferencial de un punto en función de dos ángulos diferentes

Volviendo a la segunda observación experimental anterior, la proporcionalidad entre el par torsor aplicado  $T$  y el ángulo girado por unidad de longitud  $\Theta$ , implica la proporcionalidad entre la tensión  $\sigma_{x\theta}$  y el ángulo  $\gamma_{x\theta}$ , ya que de (3.7) y (3.8) se tiene que

$$\frac{\sigma_{x\theta}}{\gamma_{x\theta}} = \frac{1}{2\pi R^3 e} \cdot \frac{T}{\Theta}$$

La constante de proporcionalidad entre estas magnitudes es una característica del material, que se llama “Módulo de Cortadura” y es denotada como G:

$$\frac{\sigma_{x\theta}}{\gamma_{x\theta}} = G \quad (3.9)$$

Se puede demostrar que la constante G no es independiente de las otras constantes elásticas del material. Su valor en función de las ya conocidas E,  $\nu$ , es:

$$G = \frac{E}{2+2\nu} \quad (3.10)$$

Aunque aquí omitimos esa demostración por brevedad, téngase noticia de que el comportamiento del material isótropo queda completamente descrito por dos constantes elásticas. Se definen en la literatura diversas constantes elásticas por conveniencia, entre ellas G (otras posibles son el módulo de Lamé y el “módulo global”, a título informativo), pero siempre será posible expresar cualquiera de ellas en función de dos elegidas, no siendo “preferente” ninguna pareja de ellas desde el punto de vista conceptual. En todo caso, (3.10) implica que para un acero será  $G = 2.1 \times 10^5 / (2+0.6) = 0.81 \times 10^5$  MPa.

### Ley de Comportamiento Elástica Lineal

Deseamos encontrar la relación existente entre las componentes de deformación y las componentes de tensión. Nos referimos a las ecuaciones que expresan dichas relaciones como “Ley de Comportamiento” del material. Estamos interesados en el comportamiento lineal elástico que el acero y otros materiales presentan antes de plastificar.

Consideremos un elemento diferencial del material con forma de cubo como el mostrado en la figura 3.8a. Pretendemos calcular las deformaciones que se producen en el elemento ante un estado general de tensión, que pueda contener todas las componentes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$ .

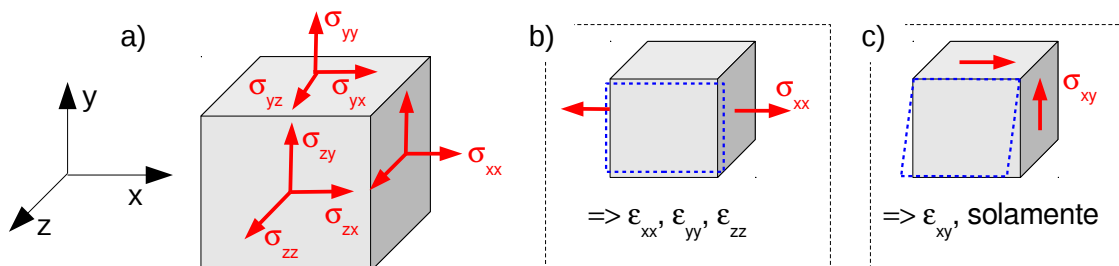


Figura 3.8: a) Elemento diferencial con un estado general de carga. b) Efecto de una tensión normal. c) Efecto de una tensión tangencial.

Empezaremos por calcular la componente de deformación  $\epsilon_{xx}$ . Dada la linealidad del problema, procederemos aplicando el principio de superposición de efectos:

- Debido a  $\sigma_{xx}$ , la deformación es  $\sigma_{xx}/E$  (según el ensayo de tracción, ec. (3.4)).

- Debido a  $\sigma_{yy}$ , la deformación es  $-\nu\sigma_{yy}/E$  (efecto de Poisson en un ensayo de tracción de dirección "y").
- Debido a  $\sigma_{zz}$ , la deformación es  $-\nu\sigma_{zz}/E$  (efecto de Poisson en un ensayo de tracción de dirección "z").
- Las tensiones cortantes no afectan a  $\epsilon_{xx}$ , ya que según lo visto en el ensayo de torsión esas tensiones no producen variación de longitud de un segmento que tenga dirección x.

La deformación  $\epsilon_{xx}$  será la suma de las aportaciones de los distintos efectos, es decir:

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}\sigma_{yy} - \frac{\nu}{E}\sigma_{zz} \quad (3.11)$$

Un razonamiento análogo permite concluir que los valores de las otras componentes normales de deformación serán:

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{E}\sigma_{yy} - \frac{\nu}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}\sigma_{zz} \quad (3.12)$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{E}\sigma_{zz} - \frac{\nu}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}\sigma_{yy} \quad (3.13)$$

Por otra parte, como se mostró en el ensayo de torsión, cada componente de tensión cortante está relacionada únicamente con su correspondiente componente de deformación, es decir:

$$\epsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{\sigma_{xy}}{2G} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy} \quad (3.14)$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{\gamma_{xz}}{2} = \frac{\sigma_{xz}}{2G} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xz} \quad (3.15)$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{\gamma_{yz}}{2} = \frac{\sigma_{yz}}{2G} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{yz} \quad (3.16)$$

El conjunto de ecuaciones (3.11) a (3.16) expresan la relación entre todas las componentes de tensión y todas las componentes de deformación, y constituyen la Ley de Comportamiento del material que pretendíamos obtener en este epígrafe.

### **Criterios de Plastificación**

En un estado tridimensional de tensiones, se observa que llegado un cierto nivel de sollicitación del material, se produce también el fenómeno que hemos llamado fluencia del material, consistente en un aumento de las deformaciones a tensión aproximadamente constante, y que supone el fin del comportamiento lineal elástico del material. Las condiciones que deben darse para que se alcance la fluencia del material en el estado tridimensional de tensiones, no son en absoluto evidentes, ni inmediatas de inducir a partir de lo observado en el ensayo de tracción.

Llamamos "Criterio de Plastificación" a una expresión particular de las antedichas condiciones que, de alcanzarse, implican la plastificación del material. Desafortunadamente, no se ha

encontrado un conjunto de condiciones precisas que permitan predecir con total exactitud la plastificación del material en todos los casos, y mucho menos para todos los materiales. En su lugar existen “criterios” (o “teorías”), que en base a las observaciones experimentales y a razonamientos más o menos plausibles elaborados a partir de ellas, consiguen predecir con suficiente aproximación a efectos prácticos la llegada de la plastificación. En primer lugar, daremos una breve noticia de algunas de las evidencias experimentales que sustentan algunos criterios de plastificación aplicables a materiales dúctiles, como el acero.

### Líneas Lüder

Para la mayoría de los aceros dulces y extradulces (de bajo contenido en carbono, entre los que se encuentran los aceros de construcción), al realizar el ensayo de tracción, aparecen en la superficie de la probeta al llegar la plastificación unas líneas que forman aproximadamente  $45^\circ$  con el eje de la misma (fig. 3.9a), y que pueden ser visibles incluso a simple vista. Son las líneas Lüder, que se observaron ya en 1860. Se interpreta que son el resultado de la plastificación no homogénea del material.



Aunque el acero sea homogéneo desde un punto de vista macroscópico, es plenamente verosímil que pequeñas diferencias locales hagan que se produzca la plastificación en unos puntos antes que en otros. Esta incorporación progresiva y no homogénea de planos a la plastificación justifica además el comportamiento ligeramente errático observado durante el escalón de fluencia en el ensayo.

El hecho de que las líneas aparezcan aproximadamente a  $45^\circ$  sugiere que preferentemente la plastificación se produce por deslizamiento entre planos del material, ya que los planos a  $45^\circ$  son los que soportan la mayor tensión tangencial (ver fig. 3.9b), que es la tensión responsable de dicho deslizamiento entre planos (ilustrado en la fig. 3.9c).

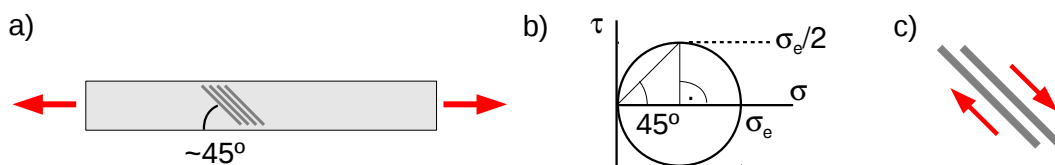


Figura 3.9: a) Líneas Lüder b) La  $\tau^{max}$  ocurre a  $45^\circ$  c) Deslizamiento en los planos de  $\tau^{max}$

### Ensayos de Lode

Los ensayos de Lode, realizados en la década de 1920, consisten en someter un tubo de pared delgada, del tipo al referido en este tema para ilustrar el ensayo de torsión, a tracción, torsión, y presión interior, de forma controlada, hasta su plastificación. La presión interior se consigue introduciendo aceite a presión en el tubo, el cual está cerrado en sus extremos por dos gruesas tapas. Una de las tapas tiene un orificio previsto para este fin.

Variando esas acciones, es posible obtener una notable variedad de sollicitaciones en un elemento diferencial de la pared del tubo. Si consideramos el mismo elemento mostrado en la figura 3.6, y adoptando los mismos ejes, los efectos que produce cada sollicitación son:

- La tracción produce tensión  $\sigma_{xx}$  en el elemento.
- La torsión produce tensión  $\sigma_{x\theta}$  en el elemento.

- La presión interior produce fundamentalmente  $\sigma_{\theta\theta}$ , y también una aportación adicional a  $\sigma_{xx}$ . Aunque exista esta acción, es buena aproximación suponer  $\sigma_{rr}=0$  (no justificamos estos hechos relativos a la presión interior por brevedad).

Tras numerosos ensayos, los resultados de Lode indican que la tensión tangencial máxima existente en el elemento juega un papel decisivo en su plastificación. Sin embargo, existe cierta dispersión en las observaciones que impide vincular de manera inequívoca la plastificación al valor de la  $\tau^{\max}$ , ya que dependiendo del estado de carga inducido al elemento, la plastificación ocurre para valores de  $\tau^{\max}$  entre  $0.5\sigma_e$  y  $0.56\sigma_e$  (nótese que si la plastificación o no del material dependiese exclusivamente de  $\tau^{\max}$ , debería obtenerse plastificación para un valor concreto de  $\tau^{\max}$  independientemente del estado de cargas aplicado). En concreto, los extremos observados se corresponden con las siguientes situaciones:

- Aplicando sólo tracción al tubo se obtiene plastificación para el valor más pequeño de  $\tau^{\max}$  de entre los observados (es el valor esperado correspondiente al ensayo de tracción,  $0.5\sigma_e$ , como se aprecia en la figura 3.9b)
- Aplicando sólo torsión al tubo se obtiene plastificación para el valor más grande de  $\tau^{\max}$  de entre los observados (es el valor  $0.56\sigma_e$ ).

En el resto de ensayos, la plastificación ocurría para valores de  $\tau^{\max}$  comprendidos entre los valores  $0.5\sigma_e$  y  $0.56\sigma_e$ . En lo que respecta a asumir que “aproximadamente la  $\tau^{\max}$  existente en un punto es la que determina su plastificación o no”, la discrepancia que implica la dispersión de las observaciones (0.5 ... 0.56) sería asumible en las aplicaciones de ingeniería. No obstante, dicha dispersión supone un 12% en el valor de la tensión tangencial máxima, lo que impide afirmar lo anterior desde un punto de vista estricto.

### Ensayos de Bridgman

El físico P.W. Bridgman fue conocido por sus estudios sobre el comportamiento de los materiales sometidos a grandes compresiones, recibiendo el premio Nobel por su trabajo en 1946. Sus ensayos de interés aquí son parcialmente posteriores a esa fecha (década de 1950). Los resultados de los mismos pueden resumirse en que una compresión de tipo hidrostático produce siempre deformación elástica.

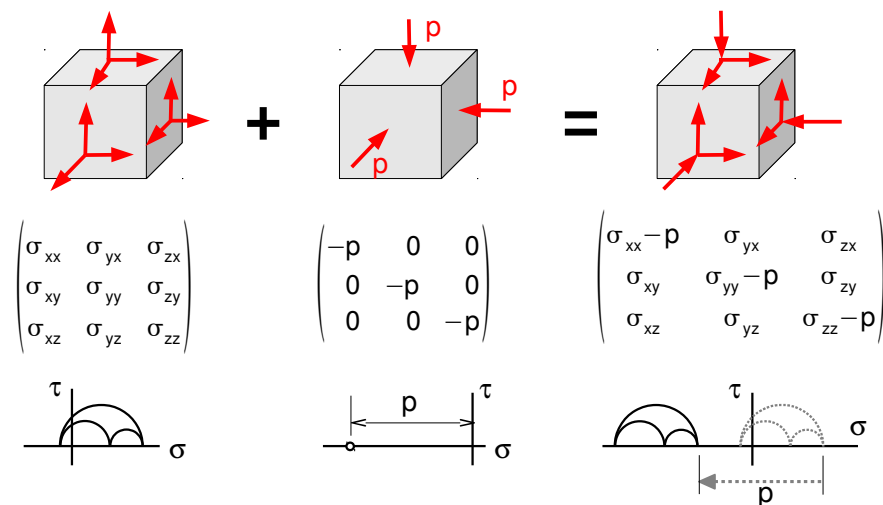


Figura 3.10: Superposición de un estado de tensión arbitrario, y otro de "presión hidrostática"

Una “compresión hidrostática” es aquel estado de tensión en que las tres tensiones principales son de igual valor,  $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$ , y negativas. Por tanto, su diagrama de Mohr se reduce a un punto del plano  $\sigma$ - $\tau$ . Esto último indica que cualquier plano de corte ideal que se considere pasando por el punto del sólido, tendrá la misma tensión normal  $\sigma$  (que será negativa), y tensión tangencial  $\tau$  nula. Recibe su nombre del hecho de que éste es el único estado de tensión que puede soportar un fluido en reposo, ya que el fluido solamente puede desarrollar tensiones tangenciales por efecto de la viscosidad, lo que requiere movimiento entre sus capas. El estado de tensión referido puede ocurrir en un solo punto del sólido, aunque es relativamente fácil conseguir que todos los puntos del sólido experimenten a la vez este “estado de presión hidrostática”. Para el estudio del comportamiento de un punto que contemplamos aquí, es suficiente pensar que el estado de presión hidrostática se aplica en el punto considerado.

Una consecuencia inmediata de las observaciones de Bridgman es que si superponemos un estado de presión hidrostática a un estado de tensión cualquiera en el que no hubiese plastificación, seguirá sin ocurrir plastificación. Dicha superposición se ilustra en la figura 3.10, junto con los tensores de cada estado y un ejemplo de sus diagramas de Mohr correspondientes. Nótese que como el estado de presión hidrostática tiene la misma tensión en todos los planos, en particular la tiene en los planos principales del estado inicial. Por ello es evidente que los planos que eran principales en el estado inicial lo seguirán siendo en la superposición (ya que sigue sin haber tensión tangencial en ellos). La conclusión es que el diagrama de Mohr inicial sólo experimenta un traslación hacia la izquierda tras la superposición, no cambios de tamaño de sus circunferencias. Esto se ilustra en la última de las figuras 3.10.

El que el estado superposición anterior nunca sufra plastificación independientemente de lo grande que sea la presión  $p$ , conduce a la consecuencia, ciertamente sorprendente, de que pueden existir tensiones arbitrariamente grandes de compresión en el punto del sólido sin que éste plastifique. A efectos de plastificación solamente importa que el estado inicial no hubiese plastificado. Esto no contradice (más bien avala) los resultados de Lode, que indicaban que la plastificación está sensiblemente relacionada con el tamaño del diagrama de Mohr (es decir,  $\tau^{\max}$  en el punto), pero no con su posición en el eje de abscisas.



En los ensayos de Lode, una de las tensiones principales ( $\sigma_{rr}$ ) es nula, por lo que sus diagramas de Mohr no se alejan mucho del origen. Las observaciones de Bridgman nos liberan de esta limitación.

Finalmente, téngase noticia de que las experiencias de Bridgman no son extrapolables al caso de equitracción, es decir de tensiones principales iguales pero de tracción: Mientras que para estados de compresión hidrostática la ausencia de plastificación ha podido observarse hasta valores de la presión tan grandes como la experimentación ha permitido, para un estado de equitracción en un acero dulce puede sobrevenir un fenómeno de rotura frágil para tensiones que, si bien son mayores que las del límite elástico, son mucho menores que las alcanzadas en equicompresión (la “rotura frágil” es el fenómeno de propagación súbita de una pequeña grieta, lo que usualmente arruina la pieza completa sin plastificación u otro síntoma previo).

### Criterio de Tresca

El Criterio de Tresca, o criterio de la tensión tangencial máxima, fue propuesto a mediados del siglo XIX por el ingeniero francés Henri E. Tresca, y conserva vigencia como uno de los dos criterios más acertados para predecir la plastificación de materiales dúctiles. Su enunciado viene a incidir en la evidencia experimental que hemos presentado anteriormente, proponiendo que



un punto del material alcanza la plastificación cuando su tensión tangencial máxima llega a cierto valor crítico.

Para establecer ese valor, se razona que si el criterio fuese absolutamente cierto, sería indiferente el ensayo utilizado para encontrar dicho límite, para cada material. Se usa el ensayo más sencillo disponible, que es el ensayo de tracción. Como muestra la figura 3.9b, al llegar la plastificación en este ensayo, la  $\tau^{\max}$  vale  $\sigma_e/2$ , luego éste será el valor que según el Criterio de Tresca puede alcanzarse en cualquier estado de tensión antes de plastificar. Por tanto, el Criterio de Tresca se reduce a considerar que no habrá plastificación en el punto si:

$$\tau^{\max} \leq \sigma_e/2 \quad (3.17)$$

Si queremos expresar el criterio en función de las tensiones principales, sin suponer que éstas estén ordenadas de ninguna forma particular, el criterio adopta la forma

$$\text{máx} \left( \frac{|\sigma^I - \sigma^{II}|}{2}, \frac{|\sigma^I - \sigma^{III}|}{2}, \frac{|\sigma^{II} - \sigma^{III}|}{2} \right) \leq \frac{\sigma_e}{2} \quad (3.18)$$

Para visualizar el criterio, pensemos en el caso límite en que el material estaría a punto de plastificar, lo que corresponde a la igualdad de los dos miembros de (3.18). La condición límite de plastificación estaría expresada por tres ecuaciones de igualdad, de las que quitando los valores absolutos resultan las 6 ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \sigma^I - \sigma^{II} &= \pm \sigma_E \\ \sigma^I - \sigma^{III} &= \pm \sigma_E \\ \sigma^{II} - \sigma^{III} &= \pm \sigma_E \end{aligned} \quad (3.19)$$

Estas seis ecuaciones representan seis planos en un espacio tridimensional en que los ejes coordenados contengan los valores de las tres tensiones principales en el punto del sólido considerado. Llamamos "Espacio de Tensiones Principales" a este espacio. Cada punto del Espacio de Tensiones Principales representa, mediante su terna de tensiones principales, un posible estado de tensión en el punto material bajo estudio. Una línea en este espacio representa los sucesivos estados de tensión que el punto material bajo estudio va adquiriendo según evolucionan las cargas en el sólido macroscópico que contiene al punto material. Este espacio resulta especialmente conveniente para visualizar los criterios de plastificación. En particular, los seis planos de las ecuaciones (3.19) son paralelos a la trisectriz de los ejes (recta que pasa por el origen y forma ángulos iguales con los tres ejes), y entre los seis planos forman un prisma hexagonal regular como indica la figura 3.11a. La figura 3.11b muestra este prisma proyectado en un plano perpendicular a la trisectriz (lo que se conoce como "perspectiva isométrica"), lo que permite apreciar la sección del prisma sin la distorsión causada por la perspectiva.

Observado en el espacio de tensiones principales, el Criterio de Tresca implica que si las tensiones principales en el punto material del sólido son tales que su representación cae dentro del prisma hexagonal, entonces no habrá plastificación. Si su representación cae justamente en la superficie del prisma, entonces el punto está plastificando. Si su representación cae fuera del prisma, entonces se ha superado la etapa de plastificación (el punto del sólido se encontraría en el equivalente tridimensional a la "etapa de fortalecimiento"). Llamamos Superficie de Plastificación según el Criterio de Tresca a la superficie de este prisma hexagonal en el espacio de tensiones principales. En general, la Superficie de Plastificación es el lugar geométrico de

puntos de este espacio que representan estados de tensión para los que se justamente se produce plastificación, o se espera que ocurra según un criterio de plastificación particular.

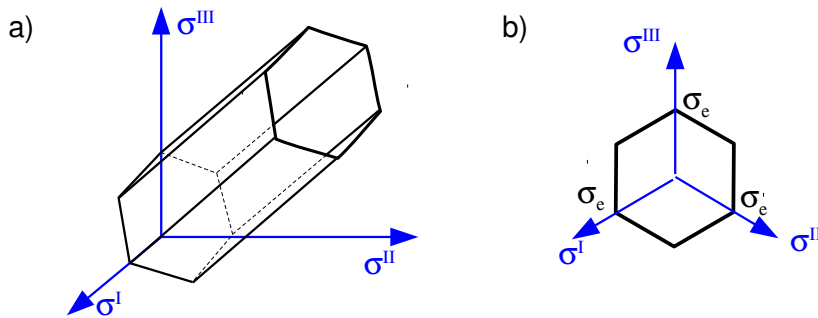


Figura 3.11: Criterio de Tresca en el espacio de tensiones principales.

Aunque se ha dibujado solamente una porción del prisma para visualizarlo, evidentemente el mismo se extiende indefinidamente en ambos sentidos. En lo que respecta al cuadrante en que las tres tensiones principales son de compresión, el que el prisma se extienda indefinidamente es coherente con las observaciones de Bridgman, pudiendo existir tensiones de compresión arbitrariamente grandes sin que el sólido plastifique, con tal que el estado de tensión no se aleje mucho de un estado de presión hidrostática.



Los estados de presión hidrosática, así como los de equitracción, cumplen  $\sigma^I = \sigma^{II} = \sigma^{III}$ , y por tanto están representados por la trisectriz en el espacio de tensiones principales.

En el cuadrante en que las tensiones principales son de tracción, no cabe dar por bueno que la superficie de plastificación se extienda indefinidamente, ya que como se apuntó, en este caso sobreviene la rotura frágil. Al final de este epígrafe volveremos a hablar sobre este fenómeno.

Establecido el criterio, nos preguntamos por su concordancia con los ensayos experimentales. Evidentemente, la concordancia con el ensayo de tracción es total, ya que hemos usado precisamente este ensayo para “calibrar” el criterio. Efectivamente, un punto de la probeta del ensayo de tracción estaría sometido a un estado de tensión que partiría de cero (el origen en el espacio de tensiones principales), y evolucionaría de forma que una de las tensiones principales creciese mientras las otras se mantienen nulas (se recorrería el sentido positivo de uno de los ejes en el e.t.p.). La plastificación llega cuando nos topemos con la superficie de plastificación, lo que ocurre exactamente a la tensión  $\sigma_e$ , ya que el prisma hexagonal corta a los ejes precisamente en  $\sigma_e$ , como muestra la figura 3.11b.

Para comprobar el grado de concordancia con otros ensayos, elegimos los ensayos de Lode. En particular elegimos el ensayo de torsión del tubo, para el que se obtenía el otro extremo de los valores observados para la  $\tau^{\max}$  al llegar la plastificación ( $\tau^{\max} = 0.56\sigma_e$ ). Como sabemos, en el ensayo de torsión, un elemento de la superficie del tubo está sometido a unas tensiones como las mostradas en la figura 3.12a. El diagrama de Mohr para este estado, que aún no habíamos dibujado, se muestra en la misma figura. Como se aprecia, el mismo está centrado en los ejes, por lo que la tensión tangencial aplicada es de igual valor absoluto que las tensiones principales.

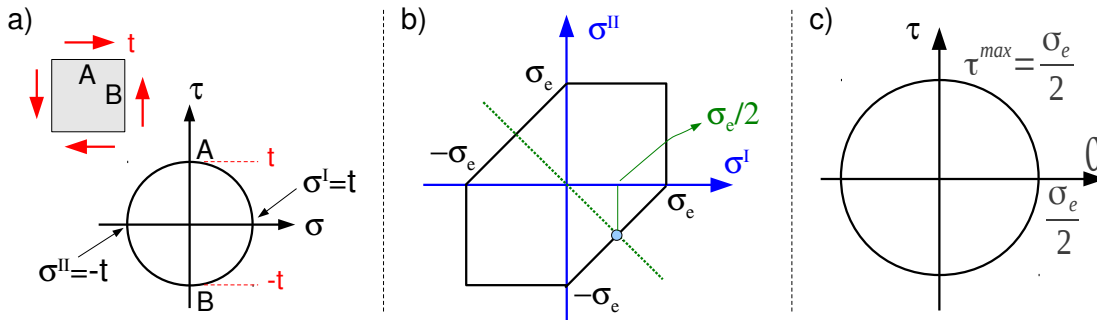


Figura 3.12: Aplicación del Criterio de Tresca a un ensayo de Lode (ensayo de torsión)

Este ensayo, al igual que el resto de los de Lode, transcurren con una de las tensiones principales nula, así que empezamos cortando la superficie de plastificación por el plano  $\sigma^{\text{III}}=0$  (por ejemplo). Los seis planos (3.19) se convierten así en las seis rectas que muestra la figura 3.12b, y que forman un hexágono distorsionado. Nuestro estado de tensión es tal que  $\sigma^{\text{I}}=-\sigma^{\text{II}}$ , así que evolucionará por los puntos de esta recta, representada también en la figura 3.20b. La plastificación llega, según el Criterio de Tresca, cuando nos topamos con la superficie de plastificación, lo que, como se muestra, ocurre cuando la tensión principal es  $0.5\sigma_e$ . Finalmente, la figura 3.12c muestra como en ese momento, al estar centrado el diagrama de Mohr, la tensión tangencial máxima tiene el mismo valor que la tensión principal, es decir  $\tau^{\text{max}}=0.5\sigma_e$ .

La conclusión es que el Criterio de Tresca predice la plastificación en este estado particular de tensión cuando  $\tau^{\text{max}}$  llegue a  $0.5\sigma_e$ , pero en realidad ocurre a  $0.56\sigma_e$ . La discrepancia no es muy grande, pero es apreciable. Por otra parte, cabe esperar que este sea el estado en que más error se obtenga, ya que era el extremo de las observaciones de Lode. Como aspecto positivo, cabe apuntar que la inexactitud del Criterio de Tresca nos dejará del lado de la seguridad cuando lo empleemos en el diseño de una pieza.

### Criterio de Von Mises

En la figura 3.12b, en el “viaje” por el espacio de tensiones principales, partiendo del origen y siguiendo la recta  $\sigma^{\text{I}}=-\sigma^{\text{II}}$ , nos topamos con la superficie de plastificación de Tresca cuando  $\sigma^{\text{I}}=0.5\sigma_e$ ,  $\sigma^{\text{II}}=-0.5\sigma_e$  (o viceversa), donde “damos por terminado el viaje”. Es decir, consideramos que el punto del sólido habría plastificado y no queremos ir más allá. Pero sabemos que este “fin de viaje” es algo prematuro, porque aún podríamos avanzar un poco más (hasta  $\sigma^{\text{I}}=0.56\sigma_e$ ,  $\sigma^{\text{II}}=-0.56\sigma_e$  o viceversa) sin que ocurriese plastificación.

Si postulamos como superficie de plastificación el cilindro que circunscribe al prisma hexagonal de Tresca, como muestran las figuras 3.13a y b, la coherencia con las observaciones experimentales es mayor. En efecto, puede obtenerse sin dificultad que la ecuación de este cilindro es:

$$(\sigma^{\text{I}}-\sigma^{\text{II}})^2+(\sigma^{\text{I}}-\sigma^{\text{III}})^2+(\sigma^{\text{II}}-\sigma^{\text{III}})^2=2\sigma_e^2 \quad (3.20)$$

Y si particularizamos la ecuación anterior para los valores del ensayo de torsión de Lode, en el cual es  $\sigma_{\text{I}}=-\sigma_{\text{II}}$ ,  $\sigma_{\text{III}}=0$ , tendremos que  $(2\sigma^{\text{I}})^2+(\sigma^{\text{I}})^2+(\sigma^{\text{I}})^2=2\sigma_e^2 \Rightarrow \sigma^{\text{I}}=0.577\sigma_e$  como indica la figura 3.13c. Este valor es mucho más próximo al observado experimentalmente, de  $\sigma^{\text{I}}=-\sigma^{\text{II}}=0.56\sigma_e$  (si bien nos deja ligeramente fuera del lado de la seguridad).

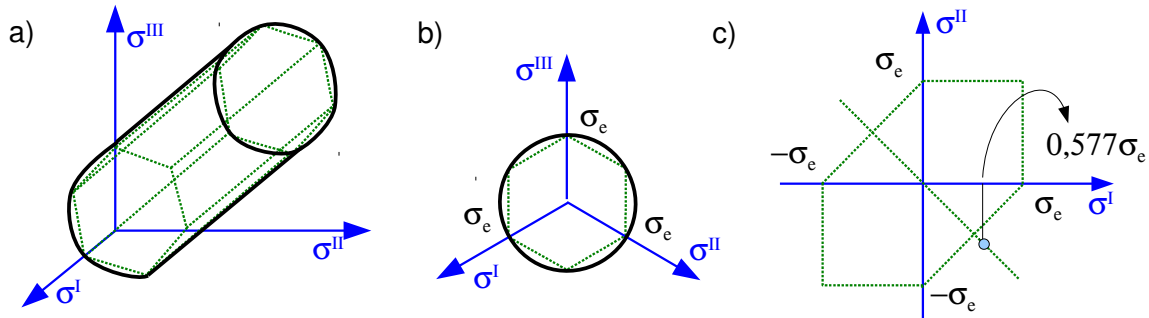


Figura 3.13: a), b), Criterio de Von Mises – Hencky. c) Predicción para el ensayo de torsión.

En realidad, el adoptar como superficie de plastificación el cilindro indicado, tiene justificaciones mejor fundamentadas que el mero argumento de conveniencia presentado aquí. En particular, este criterio equivale a postular que la plastificación del material en un punto llega cuando la “densidad de energía de distorsión”, concepto que no presentamos en este curso, alcanza cierto valor crítico. Por ello se conoce también a este criterio como “de la energía de distorsión”, de la misma forma que el criterio de Tresca es referido en ocasiones como “de la tensión tangencial máxima”. Generalmente se atribuye este criterio a Von Mises, quien lo propuso en 1912, si bien existen referencias muy anteriores al mismo (Maxwell 1865, Huber 1904), y aunque el criterio no quedó justificado en su forma definitiva hasta algunos años más tarde (Hencky 1924).

Es muy usual aplicar el Criterio de Von Mises en una forma elaborada a partir de la ecuación (3.20). Se trata de conseguir una magnitud que sea directamente comparable con el límite elástico, lo que desde el punto de vista mnemotécnico es preferible. Esto se realiza fácilmente sin más que escribir (3.20) en la forma

$$\sqrt{\frac{(\sigma^I - \sigma^II)^2 + (\sigma^I - \sigma^III)^2 + (\sigma^II - \sigma^III)^2}{2}} \leq \sigma_e \quad (3.21)$$

En la que se ha incluido la desigualdad que corresponde a la zona interior, de no plastificación, del cilindro. El miembro izquierdo es un escalar que obtenemos de la solución de tensiones en el punto del sólido, y se suele llamar abreviadamente “Tensión de Von Mises”. Es una cantidad directamente comparable con el límite elástico, como se pretendía.



Aunque no es un concepto usual en la literatura, puede pensarse igualmente en una “Tensión de Tresca”. A la vista de (3.17), el escalar dependiente de la solución de tensiones en el punto, directamente comparable con  $\sigma_e$ , sería  $2\tau^{\max}$ .

Existen algunos criterios más para predecir el fallo o la plastificación de materiales isótropos, como el Criterio de Mohr-Coulomb, apropiado para materiales que presentan diferentes propiedades a tracción que a compresión, o el Criterio de la Tensión Normal Máxima, utilizado como simplificación para materiales que presentan rotura frágil en condiciones habituales de trabajo, como es el caso de la fundición. Los criterios de Tresca y de Von Mises presentados aquí son especialmente adecuados para el acero y otros metales dúctiles como las aleaciones de aluminio y las aleaciones de cobre.

Debido a su mayor precisión, la normativa viene presentando predilección por el criterio de Von Mises, el cual recomienda para todas las comprobaciones de los cálculos que se realicen bajo

hipótesis de régimen elástico lineal de material. No obstante, no debe sacarse la conclusión de que dicho criterio es en algún sentido “el exacto”, o que está mejor fundamentado por el hecho de obtenerse de consideraciones energéticas más elaboradas (las cuales hemos omitido aquí). Simplemente es un criterio con el que suele obtenerse mejor aproximación a los valores experimentales, no pareciendo de momento posible establecer tal cosa que pudiésemos llamar “el criterio exacto” para predecir la plastificación de un material.

Respecto de lo anterior, la figura 3.14 muestra algunos resultados de ensayos realizados sobre distintos materiales. Se representan las tensiones normalizadas, dividiendo su valor real por el del límite elástico del material, o por la tensión de rotura a tracción en el caso del material frágil (fundición). Como se aprecia, tanto el criterio de Tresca como el de Von Mises predicen muy aceptablemente la plastificación del acero y de los otros metales dúctiles, quedando la mayoría de las observaciones experimentales a medio camino entre las superficies de plastificación de ambos criterios.

No cabe decir lo mismo de la fundición, que como se aprecia se aparta mucho de estos criterios, especialmente en la zona de  $\sigma^{II}$  negativa. Para predecir la rotura de un material de comportamiento frágil se utilizan otros criterios (a la vista de la figura 3.14 la “tensión normal máxima” parece un indicador aceptable; el criterio de Mohr-Coulomb que presentaremos en el tema 8 también puede ser adecuado).

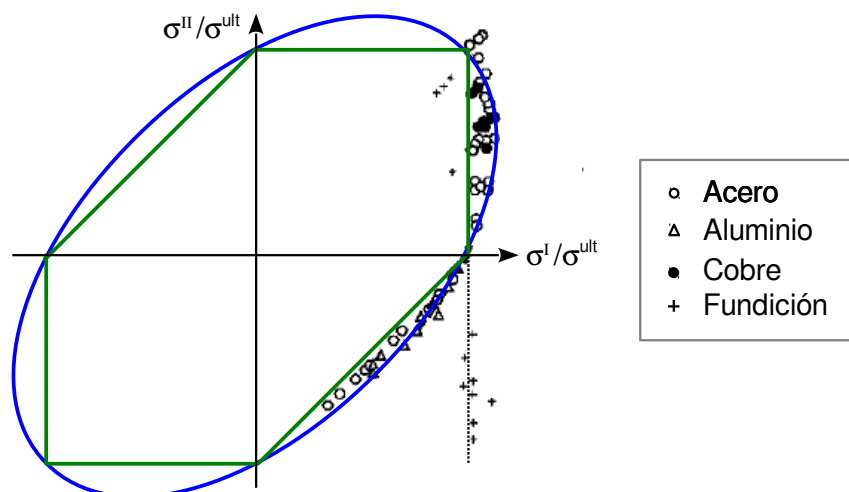


Figura 3.14: Plastificación, o rotura en su caso, de algunos materiales (resultados experimentales).

Para finalizar, retomaremos el aspecto de la posible rotura frágil de un material que normalmente tiene comportamiento dúctil, bajo un estado de equitración. Definimos la Superficie de Rotura del material como el lugar geométrico de puntos del espacio de tensiones principales que representa tensores de tensión para los cuales se obtendría la rotura del material. Si representásemos la superficie de rotura junto con la superficie de plastificación, obtendríamos una representación similar a la de la figura 3.15a, orientativamente. En ella se aprecia cómo efectivamente hay una zona de la superficie de rotura interior a la de plastificación, lo que significa que si seguimos un camino de carga que no se aleje demasiado de la trisectriz de los ejes, obtendremos rotura directamente sin haber pasado antes por la etapa de plastificación. Es decir, tendremos rotura frágil.

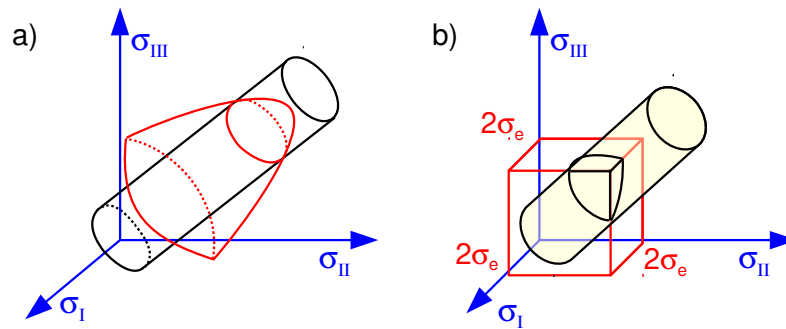


Figura 3.15: a) Superficie de rotura b) Forma de la superficie de rotura en el interior de la superficie de plastificación, según normas anteriores.

La actual norma CTE <sup>[6]</sup> no hace ninguna indicación acerca de este fenómeno, quizá porque es improbable que en estructuras de edificación aparezcan estados de equitracción (las barras metálicas utilizadas están formadas geométricamente a base de placas, por lo que al menos una tensión principal suele ser nula). No obstante, dichos estados son susceptibles de aparecer, por ejemplo como resultado de las tensiones residuales de soldadura en determinadas configuraciones. Las normas anteriormente vigentes (EA95) indicaban que a parte de satisfacerse el criterio de Von Mises, si el estado es de tracción triple, se debe satisfacer la condición adicional:

$$\sigma^I \leq 2\sigma_e \quad (3.22)$$

Siendo  $\sigma_I$  la mayor de las tensiones principales. Según esto, es posible la existencia de tensiones de tracción mayores que  $\sigma_e$  (del orden del doble) sin que el material plastifique. Pero llegado el límite marcado por (3.22), el material sufrirá rotura frágil sin plastificación previa.

Es interesante representar en el espacio de tensiones principales la condición (3.22). En este espacio, las tensiones no están ordenadas en ningún orden particular, y por lo tanto la condición se desdobra en las tres  $\sigma^I \leq 2\sigma_e$ ;  $\sigma^{II} \leq 2\sigma_e$ ;  $\sigma^{III} \leq 2\sigma_e$ . Considerando la igualdad, estas son las ecuaciones de tres planos perpendiculares a los ejes, que se cortan en el punto  $(2\sigma_e, 2\sigma_e, 2\sigma_e)$  como muestra la figura 3.15b. La superficie de plastificación no tiene validez más allá de la zona limitada por estos planos, ya que fuera de esa zona el material habría sufrido rotura frágil. Por otra parte, la forma (3.22) de la superficie de rotura no pretende ser válida más que en el interior de la superficie de plastificación, careciendo de sentido fuera de esta zona. En la figura 3.15b se muestra la intersección de la superficie de plastificación con los tres planos mencionados. El resultando a efectos prácticos es que en la zona de tracciones, la superficie de plastificación está limitada por estas superficies de rotura frágil, que dejan a la primera con terminación en una forma puntiaguda de triedro trirectángulo como se muestra.

- Para futura referencia y profundización en el estudio de la deformación, se recomienda <sup>[11]</sup>, y para lo relativo a la ley de comportamiento y criterios de plastificación <sup>[9]</sup> y <sup>[11]</sup>. Aspectos avanzados del contenido de este tema 3 también se encuentran excelentemente tratados en <sup>[10]</sup> y en <sup>[12]</sup>.

## 4.- Tracción – Flexión de Barras Rectas

### *Introducción y Concepto de Esfuerzo*

La geometría de barra recta es, con mucho, la más utilizada como elemento resistente. Comparativamente, combina una relativa sencillez de transporte y montaje con la posibilidad de conseguir las características requeridas de rigidez y funcionalidad en un gran número de situaciones. Podría decirse que cuando se necesita un dispositivo resistente, lo primero en lo que habitualmente se piensa, es en materializarlo a base de barras rectas.

Definimos la geometría de barra recta como el cuerpo obtenido al desarrollar una superficie plana a lo largo de un segmento de recta perpendicular a ella, que llamamos directriz. La superficie plana recibe el nombre de sección de la barra, y suele ser constante, aunque también pueden ejecutarse barras de sección variable. Es también frecuente denominar “perfil” a la forma de la sección de la barra, hablándose por ejemplo de una barra de perfil circular, o de perfil rectangular hueco, etc. Esto evita la ambigüedad de la palabra “sección”, que puede emplearse indistintamente para indicar un corte ideal realizado a la barra perpendicularmente a su directriz, o bien para indicar la forma de la barra obtenida en dicho corte (el “perfil”).

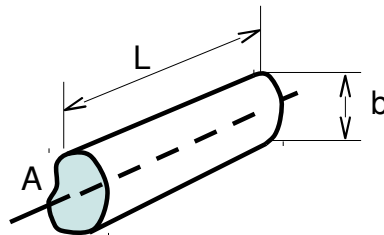


Figura 4.1: Barra recta de sección A y longitud L

En base a las particularidades de esta geometría, se realizarán un conjunto de simplificaciones. Para que las mismas no introduzcan errores excesivos, es necesario que la barra sea esbelta. Es decir, que L sea grande en relación a la mayor dimensión de la sección, que hemos llamado b en la figura 4.1. Para para que podamos considerar una barra como esbelta debe cumplir, orientativamente,  $L / b > 10$ , aunque se obtienen resultados más acordes a la realidad si esa relación es del orden de 20 o superior.

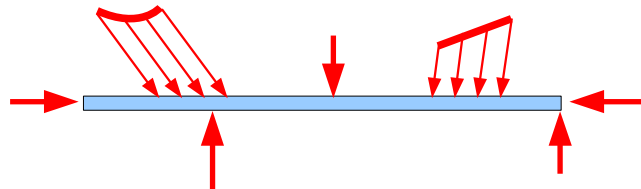


Figura 4.2: Ejemplo de cargas concentradas y distribuidas en una barra

Las cargas sobre la barra podrán ser concentradas (actúan en un punto, y tienen unidades de fuerza) o distribuidas (actúan en una porción de la longitud de la barra, y tienen unidades de fuerza dividida por longitud). Su orientación puede ser cualquiera, longitudinal, transversal o inclinada respecto de la directriz de la barra. La figura 4.2 muestra un ejemplo de barra con los

tipos de carga indicados. Pueden también existir momentos concentrados (e incluso distribuidos), aunque no se han incluido en la figura.

Considérese una porción de la barra, obtenida mediante un corte ideal transversal a la misma, a una distancia  $x$  del extremo izquierdo. En la sección de corte debemos incluir las acciones que la porción descartada de la barra ejerce sobre la porción bajo estudio, para que ésta esté en equilibrio. Como sabemos, éstas acciones consisten en una cierta distribución de tensiones en la sección, que como cualquier sistema de vectores, siempre admitirá reducción respecto de un punto. Esta reducción constará en el caso general de la resultante colocada en el punto y el momento respecto de ese punto de las fuerzas asociadas a las tensiones en la sección. La figura 4.3 muestra una porción de barra como la indicada, incluyendo una reducción de las tensiones en la sección respecto de un punto de la misma. Por conveniencia posterior, el punto de reducción que elegiremos será el centro de áreas de la sección.

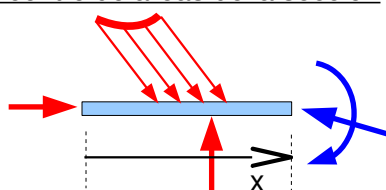


Figura 4.3: Porción de la viga anterior, con la resultante de las tensiones en la sección.

La figura 4.4a ilustra a modo de ejemplo una distribución de tensiones en la sección, e indica el punto en el que realizaremos la reducción (centro de áreas).

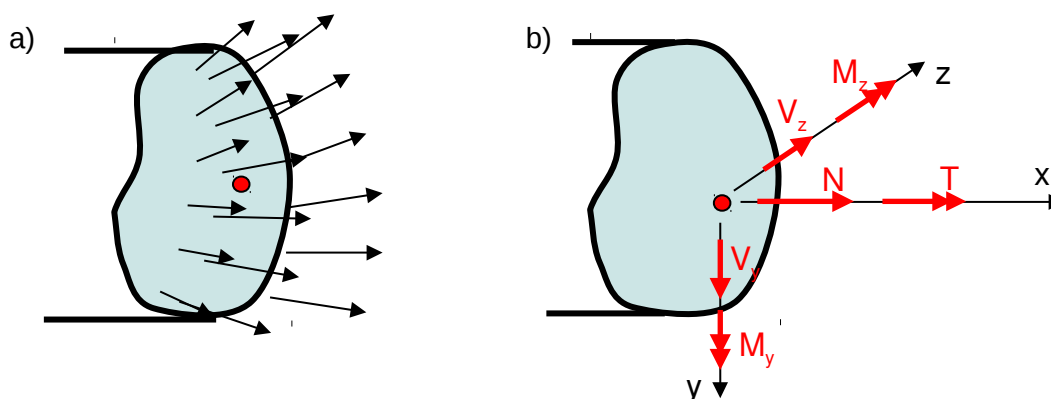


Figura 4.4: a) Tensiones en una sección. b) Reducción de las fuerzas al centro de áreas

La figura 4.4b indica las componentes de la resultante y del momento resultante de la reducción. Por supuesto, las componentes de esta reducción pueden calcularse alternativamente imponiendo el equilibrio de la porción de barra mostrada en la figura 4.3. La figura 4.4b contiene algunas notaciones y convenciones que se mantendrán a lo largo del curso. En particular, se toman unos ejes coordenados de forma que "x" es colineal con la directriz de la barra, "y" apunta hacia abajo, y "z" forma un triedro directo con los anteriores.

Definimos los esfuerzos como cada una de las tres componentes de la resultante y de las tres del momento resultante de la reducción de las fuerzas que actúan en la sección. Existen denominaciones de uso común para cada componente, según se indica:

- A la componente longitudinal de la resultante,  $N$ , se le llama esfuerzo axial. Decimos que una barra trabaja a tracción o compresión cuando sólo tiene este esfuerzo, lo que es frecuente en el tipo de estructuras llamadas armaduras, y en los pilares.



- A las componentes de la resultante contenidas en el plano de la sección,  $V_y$  y  $V_z$ , se les denomina esfuerzos cortantes. En la práctica no se dan casos de sólo esfuerzo cortante en barras completas.
- A las componentes del momento en el plano de la sección,  $M_y$  y  $M_z$ , se les llama momentos flectores. Si una barra presenta sólo esfuerzos de este tipo, decimos que trabaja a flexión pura. Este caso se presenta raramente en la práctica, ya que los momentos flectores suelen ir acompañados de esfuerzos cortantes.
- A la componente  $T$  del momento según el eje de la barra, se le denomina momento torsor. Decimos que una barra trabaja a torsión si sólo presenta este esfuerzo. En estructuras habituales, la torsión suele ser una sollicitación indeseable que trata de evitarse desde la propia concepción y diseño de la estructura.

Adicionalmente, existen unas pocas denominaciones especiales para el modo de trabajo de una barra, en función la combinación de esfuerzos que soporta, o las deformaciones que adquiere. Algunas de ellas se comentan a continuación.

La flexión simple, es el modo de trabajo, muy frecuente, en el que hay momento flector y esfuerzo cortante.

La flexión compuesta es el modo de trabajo de la barra en el que la compresión es importante, existiendo un cierto momento flector, y quizá esfuerzo cortante. Suele aplicarse esta denominación principalmente al caso de pilares, en los que la compresión es dominante. El momento flector en estos casos se considera algo a reducir todo lo posible, ya que suele ser fruto de inexactitudes (o imperativos) del montaje, como por ejemplo cierta excentricidad en la aplicación de la fuerza de compresión.

Se dice que un problema es de flexión plana (o flexión recta), cuando las cargas están contenidas en un plano y los desplazamientos de la línea de centros de áreas de la barra son paralelos a ese plano. Es el caso frecuente de problemas en que el plano de las cargas contiene a uno de los momentos principales de inercia de la sección. En oposición, se dice que el problema es de flexión esviada cuando la barra "se sale" del plano de las cargas al deformarse, si tal plano es único. Esto ocurrirá por ejemplo si el plano de las cargas no es paralelo a un eje principal de inercia de la sección.

Finalmente, la denominación de problema de tracción-flexión se utiliza frecuentemente para describir de manera genérica el modo de trabajo de la barra en el que pueden concurrir todos los esfuerzos, excepto el de torsión. La denominación es particularmente utilizada en el desarrollo de un modelo matemático general para el comportamiento de la barra, sin presuponer la preponderancia o anulación de ninguno de los esfuerzos citados.

Nos preguntamos ahora acerca de qué componentes de tensión en la sección están relacionadas con qué componentes de esfuerzo. Es evidente, por ejemplo, que las tensiones  $\sigma_{xx}$ , perpendiculares a la sección, no aportarán nada a los esfuerzos  $V_y$ ,  $V_z$ , que son las componentes de la resultante el plano de la sección. Tampoco tienen aportación al momento torsor  $T$ , ya que el mismo tiene la dirección  $x$ , y cualquier momento de una fuerza elemental asociada a  $\sigma_{xx}$  será perpendicular a  $x$ . Estas tensiones  $\sigma_{xx}$  sólo pueden producir resultante en dirección  $x$  (es decir  $N$ ), y momentos perpendiculares a  $x$  (es decir  $M_y$ ,  $M_z$ ). La figura 4.5a ilustra las componentes de esfuerzo que estarían relacionadas con  $\sigma_{xx}$  en un ejemplo bidimensional sencillo.

De forma similar, razonamos que las tensiones tangenciales en el plano de la sección ( $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xz}$ ) no pueden producir resultante de dirección  $x$  (es decir,  $N$ ), y que tampoco tienen aportación a los momentos flectores, ya que el momento respecto del Centro de Áreas de cualquier fuerza

elemental asociada a una tensión tangencial, siempre tendrá la dirección de  $x$ . Por tanto,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xz}$ , sólo pueden producir resultante en el plano de la sección (es decir,  $V_y$ ,  $V_z$ ), y eventualmente momento de dirección  $x$  (torsor  $T$ ). Ello se ilustra en la figura 4.5b mediante un ejemplo bidimensional sencillo.

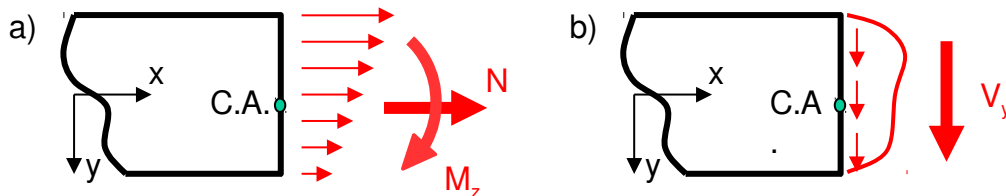


Figura 4.5: Componentes de esfuerzo relacionadas con cada componente de tensión (ejemplos bidimensionales)

Una vez establecido el concepto de esfuerzo, vamos a definir formalmente las componentes de esfuerzo a partir de las componentes del tensor de tensiones que actúan sobre la sección. Las ecuaciones (4.1) contienen esta definición formal.

$$\begin{aligned}
 N &= \int_A \sigma_{xx} dA & V_z &= \int_A \sigma_{xz} dA \\
 V_y &= \int_A \sigma_{xy} dA & M_y &= \int_A \sigma_{xx} \cdot z \cdot dA \\
 M_z &= \int_A \sigma_{xx} \cdot y \cdot dA
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Donde  $A$  es el área de la sección. La definición formal (4.1) de los esfuerzos, lleva también implícito el convenio de signos para los esfuerzos, que se hereda del de las tensiones a través de las ecuaciones correspondientes. Por ejemplo si  $\sigma_{xx}$ , es predominantemente de tracción (por tanto positivo) en la sección,  $N$  será positivo. En ese caso, y si la normal exterior al plano de la sección es contraria a  $x$ ,  $N$  tendrá sentido opuesto a  $x$ . Aun así será positivo, hecho que no debiera extrañar a la vista de la primera ecuación (4.1).



Este hecho hace de los esfuerzos unas magnitudes muy particulares. No son vectores estrictamente hablando, ya que no respetan su convenio de signos: pueden ser positivos tanto si tienen el sentido de un eje como el contrario, dependiendo del sentido de la normal en el plano de corte observado. Sin embargo, una vez aislada una porción de barra, y supuesto (o conocido) un sentido para los esfuerzos en la sección, es perfectamente posible hacerlos intervenir como vectores en las ecuaciones de equilibrio de la porción de barra. Dicha posibilidad es la que se ilustró en la figura 4.3.

Vamos a obtener a partir de sus definiciones (4.1) en qué sentido son positivas las componentes de esfuerzo. Para fijar ideas, supondremos que la normal exterior tiene el sentido del eje  $x$  como en la figura 4.6. Seguiremos la metodología de observar en cada una de las ecuaciones (4.1) una aportación diferencial en la que “todo sea positivo”, y el sentido que resulte de esa aportación será el sentido positivo del esfuerzo correspondiente (si hubiese algún signo menos en las ecuaciones, sería positivo el sentido contrario)



La metodología indicada es aplicable a cualquier fórmula en la que sólo una magnitud (que probablemente estamos definiendo) carece aún de convenio de signos. Se observa un caso en el que las magnitudes que aparecen en la fórmula sean positivas, y el sentido que resulta para la

magnitud que faltaba, será el positivo (ajustado con eventuales signos menos, si los hay).

La figura 4.6a muestra un elemento diferencial de área en la sección, con  $y, z$ , positivos (ya que estas variables aparecen en las fórmulas 4.1), y una tensión  $\sigma_{xx}$  también positiva. Los momentos respecto de los ejes  $y, z$ , que produce la fuerza diferencial debida a la  $\sigma_{xx}$  sobre el diferencial de área, son aportaciones a las integrales correspondientes, y tienen los sentidos indicados:  $dM_z$  en sentido contrario al eje  $z$ , y  $dM_y$  en el sentido del eje  $y$ . La aportación  $dN$  al esfuerzo axial tiene el sentido del eje  $x$ , como también se indica.

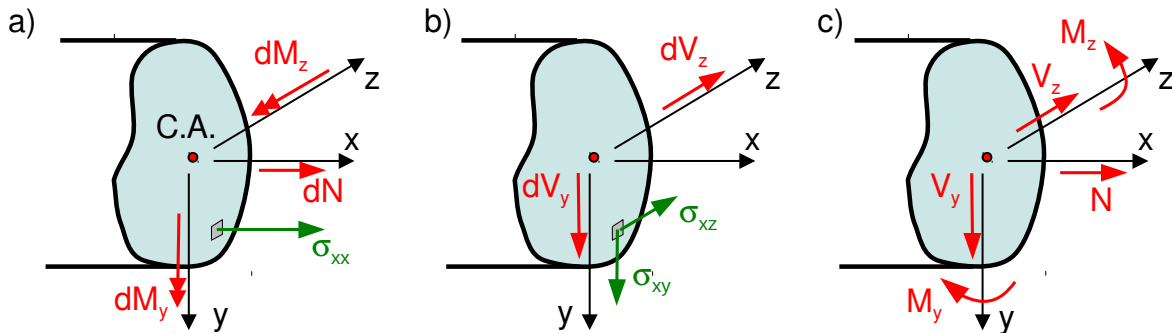


Figura 4.6: a) b) Aportaciones positivas de fuerzas diferenciales. c) Sentidos positivos que resultan para los esfuerzos

En la figura 4.6b se consideran las tensiones tangenciales  $\sigma_{xy}, \sigma_{xz}$ , en el diferencial de área. Sus aportaciones al esfuerzo cortante tienen los sentidos que se muestran:  $dV_y$  en el sentido del eje  $y$ ,  $dV_z$  en el sentido del eje  $z$ . Las aportaciones al momento torsor no se detallan, ya que el mismo se supone nulo, y en todo caso no se ha definido en (4.1)

Los sentidos indicados anteriormente, serán los sentidos positivos de los momentos flectores, el esfuerzo axial, y los esfuerzos cortantes, en una sección con sólido a la izquierda como la considerada. La figura 4.6c muestra, a modo de resumen, los convenios de signos obtenidos. Esta vez (a diferencia de la fig. 4.4b) se han representado los momentos mediante flechas de giro sin un motivo particular, salvo ilustrar esta posibilidad frecuente en la literatura y poner de manifiesto su equivalencia.

Es preciso enfatizar que para una sección de normal exterior opuesta al eje  $x$ , es decir una sección con sólido a la derecha, sería necesario repetir los razonamientos anteriores para encontrar los sentidos positivos de los esfuerzos en tal sección. Pero en lugar de repetir los razonamientos, podemos apreciar que en la nueva sección todas las componentes de tensión son positivas en sentidos contrarios a como lo eran en el caso anterior. Además, éste será el único cambio, ya que la normal  $\mathbf{n}$ , o su única componente  $n_x$ , no aparecen en las fórmulas (4.1) que hemos usado para definir los esfuerzos. La implicación inmediata, es que en tal sección, los esfuerzos serán positivos en sentidos contrarios a como lo eran en el caso anterior.

La figura 4.7a muestra los sentidos positivos de los esfuerzos en una sección con sólido a la derecha. La figura 4.7b no ofrece en realidad ninguna información nueva, sino que presenta los sentidos positivos de los esfuerzos más habituales en los problemas típicos ( $N, V_y, M_z$ ), en una proyección en el plano  $xy$  que también será la vista la más habitual. Esta representación se realiza en una rebanada diferencial de la barra, y permite visualizar de manera compacta el sentido positivo de los esfuerzos, tanto en la sección con sólido a la derecha como en la sección con sólido a la izquierda.

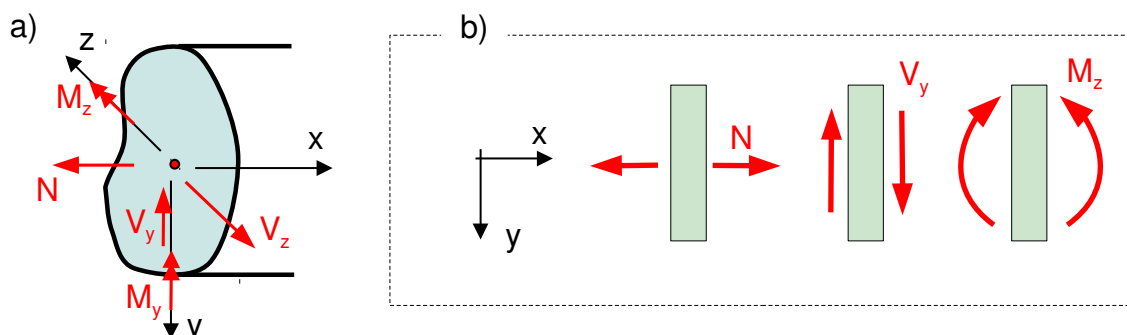


Figura 4.7: a) Esfuerzos positivos en una sección con sólido a la derecha b) Esfuerzos positivos dibujados en una rebanada diferencial de barra

No debe pensarse que lo anterior es una complicación innecesaria introducida por el modelo matemático. El que el esfuerzo cambie de sentido en una misma sección al considerar sólido a uno u otro lado de la misma es consecuencia directa del “principio de acción y reacción”, y el que en ambos casos tenga el mismo valor (incluido el signo) es algo útil y pretendido, que por ejemplo hace que exista un sólo valor de un esfuerzo para cada valor de  $x$ . Esto es muy conveniente para hacer intervenir los esfuerzos como variables en un modelo matemático.

### Hipótesis adoptadas

En el estudio de la barra a tracción-flexión se parte de las premisas básicas asumidas en el estudio inicial de la Teoría de la Elasticidad, las cuales se expusieron en el tema 1. Se reproducen a continuación como recordatorio:

- Material homogéneo e isótropo
- Pequeños desplazamientos y cambios de forma
- Ausencia de efectos dinámicos
- Comportamiento lineal y elástico

Adicionalmente, las particularidades de la tipología del problema permiten realizar un conjunto de aproximaciones razonables que simplifican su estudio. Esta tipología típicamente consta de una barra recta esbelta, sustentada en unos pocos puntos, y sometida a cargas fundamentalmente transversales a la barra. Las aproximaciones enumeradas a continuación están respaldadas tanto por una amplia evidencia experimental como por soluciones “exactas” (analíticas) obtenidas de la Teoría de la Elasticidad. Existe asimismo una amplia evidencia de que estas aproximaciones serán tanto más acordes con el comportamiento real cuanto más esbelta sea la barra. Por ello se indicó al principio de este tema que consideraríamos barras cuya relación de longitud partido por mayor dimensión de la sección fuese al menos de 10:1. Las aproximaciones a las que nos estamos refiriendo, y que aquí presentaremos de una forma axiomática por brevedad, son las siguientes:

- Las componentes de tensión  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{yz}$ , son muy pequeñas en la barra. Es decir, despreciaremos estas componentes que no tienen subíndice  $x$ .
- La componente de tensión  $\sigma_{xx}$ , tiene valores máximos mucho mayores que cualquier otra componente de tensión, y tiene un efecto ampliamente dominante sobre la deformación de la barra.

- Las componentes de tensión  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xz}$ , aun teniendo valores máximos pequeños en comparación con  $\sigma_{xx}$ , pueden tener algún efecto en la aplicación de un criterio de plasticación, y en caso de duda deben ser consideradas a tales efectos. No obstante, se puede despreciar el efecto que estas componentes tangenciales de tensión en la sección tienen sobre la deformación de la barra (hipótesis de Navier-Bernoulli).
- Las secciones inicialmente planas de la barra, permanecen planas tras la deformación.

Adicionalmente cabe recordar que estamos suponiendo nulo el momento torsor como hipótesis de trabajo.

El que las secciones permanezcan planas nos permite pensar en el movimiento de una sección como unos ciertos movimientos de los puntos en el plano de la sección, más un movimiento de sólido rígido de la misma. La figura 4.8 muestra solamente éste movimiento de sólido rígido, descompuesto en la suma de una traslación (4.8b) que lleva el centro de áreas a su posición final, más una rotación  $\Phi$  (4.8c) alrededor de una cierta recta que pasa por el centro de áreas.

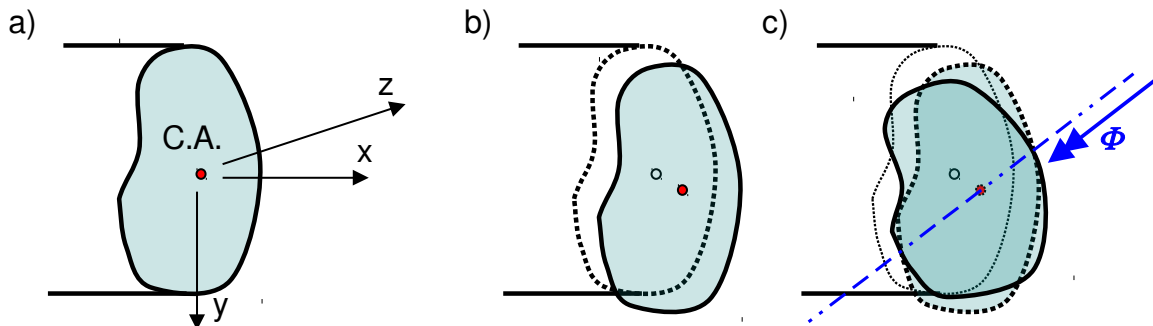


Figura 4.8: a) Posición inicial de la sección b) Traslación c) Rotación

A su vez, es posible descomponer la rotación  $\Phi$  en suma de una rotación  $\Phi_y$  alrededor del eje y, más una rotación  $\Phi_z$  alrededor del eje z, como indica la figura 4.9.

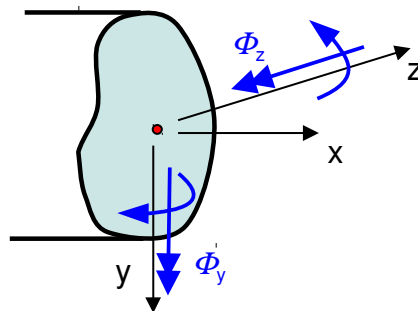


Figura 4.9: Descomposición del giro de la sección en dos componentes (se dibujan positivas)

En la teoría de pequeñas deformaciones que asumimos, el que las secciones permanezcan planas no está influido por las componentes  $u_y$ ,  $u_z$ , del desplazamiento de los puntos, ya que estas componentes mantienen al punto en el plano de la sección. Es la componente  $u_x$  la que saca al punto del plano de la sección, y por tanto la responsable de que la misma siga siendo plana o no. Por tanto esta componente  $u_x$  debe ajustarse al los movimientos horizontales implicados en el movimiento de sólido rígido descrito anteriormente. Para ello, la componente de desplazamiento  $u_x$  de un punto de coordenadas y, z, que está en la sección de coordenada x, debe tener la forma:

$$u_x(x, y, z) = u_{ox}(x) + \Phi_z(x) \cdot y + \Phi_y(x) \cdot z \quad (4.2)$$

en donde  $u_{ox}$  es el movimiento horizontal del centro de áreas de la sección, que es único para la sección de coordenada  $x$ , y por tanto depende sólo de esta coordenada. Este sumando corresponde a la traslación que lleva el centro de áreas a su posición final. Los giros  $\Phi_y$ ,  $\Phi_z$ , de la sección respecto de los ejes  $y, z$  respectivamente, son una característica de la sección, y por idéntico motivo dependen solamente de  $x$ . El término  $\Phi_z(x) \cdot y$  representa los desplazamientos horizontales de los puntos debidos al giro  $\Phi_z$  de la sección. Análogamente, el término  $\Phi_y(x) \cdot z$  representa los desplazamientos horizontales de los puntos debidos al giro  $\Phi_y$ .



Recuerde que descomponer un giro en suma ordinaria de otros, como hemos hecho, sólo ofrece buena aproximación cuando los giros son pequeños. Los giros finitos aplicados a un sólido no son conmutativos.

Nos preguntamos ahora por el convenio de de signos aplicable a los giros de la sección. Nuevamente estamos ante la situación de haber escrito ya una ecuación, la (4.2), y los convenios de signos deben ser coherentes con ella. Por tanto consideremos (por ejemplo contemplando la figura 4.9) un punto de  $y, z$ , positivos en la sección, y pensemos que experimenta un  $u_x$  positivo. Para facilitar el razonamiento, aislaremos un sólo término de (4.2) pensando adicionalmente que la sección sólo puede girar respecto de  $z$ . El sentido de giro en  $z$  implicado por el movimiento  $u_x$  positivo será el sentido positivo de  $\Phi_z$ , ya que el término aparece con signo positivo en (4.2). Puede apreciarse fácilmente que dicho sentido es precisamente el dibujado en la figura 4.9, y que por tanto  $\Phi_z$  es positivo cuando tiene sentido opuesto al eje  $z$ . Análogamente, pensando que sólo existiese giro en  $y$ , el sentido del mismo implicado por un  $u_x$  positivo en un punto de  $y, z$ , positivos, nos da el sentido positivo de  $\Phi_y$ . En este caso, se trata del sentido del eje  $y$ , que nuevamente es el dibujado en la figura 4.9. En resumen, dicha figura muestra los sentidos positivos de los giros de la sección.



Nótese que el desplazamiento  $u$  de los puntos del sólido es un campo vectorial. El valor en un punto es un vector, sin más dependencias de planos de corte, etc. Ello hace por ejemplo innecesarias otras consideraciones acerca de la sección con sólido a la derecha, etc, que en este caso conducirían a idénticos resultados. Apréciense también el carácter vectorial del propio giro de la sección, que tampoco depende del sentido de la normal exterior en la sección.

Para finalizar, realizaremos una breve reflexión acerca de la hipótesis relativa a despreciar el efecto sobre la deformación de la barra de las componentes tangenciales de tensión, y que se conoce como hipótesis de Navier-Bernoulli.

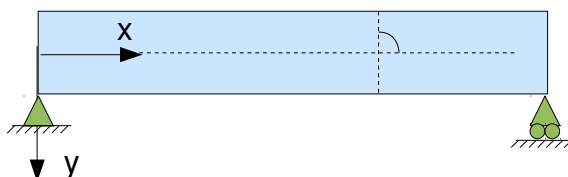


Figura 4.10: Ángulo que permanecerá sensiblemente recto tras la deformación

Como sabemos, la única componente de deformación asociada a  $\sigma_{xy}$  es  $\epsilon_{xy}$ , que a su vez representa (la mitad de) el decremento del ángulo inicialmente recto que formaban dos seg-

mentos diferenciales que pasan por el punto, y que eran paralelos a  $x$ ,  $y$ , antes de la deformación. Por tanto, la hipótesis de Navier-Bernoulli equivale a asumir que cualquier ángulo recto de lados inicialmente paralelos a  $x$ ,  $y$ , seguirá siendo recto tras la deformación. En particular, la línea de centros de área de las secciones (directriz de la barra) permanecerá perpendicular a las secciones tras la deformación (ver figura 4.10), característica de la que nos serviremos más adelante en el cálculo de desplazamientos.

### **Relación entre cargas y esfuerzos. Ecuaciones de Equilibrio.**

Como se indicó, las cargas sobre la barra pueden ser fuerzas concentradas o distribuciones de fuerza por unidad de longitud, que pueden tener cualquier orientación respecto de la barra.

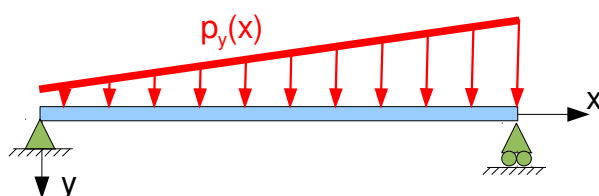


Figura 4.11: Ejemplo (con evolución lineal) de carga distribuida  $p_y$

En principio vamos a considerar solamente una distribución vectorial de fuerza por unidad de longitud de la barra  $\mathbf{p}(x)$ , que en general tendrá sus tres componentes espaciales  $p_x(x)$ ,  $p_y(x)$ ,  $p_z(x)$ . Asumiremos como buena aproximación que cada diferencial de fuerza,  $\mathbf{p}(x) \cdot dx$ , actúa sobre la línea directriz de la barra. La figura 4.11 muestra un ejemplo de carga de evolución lineal en la barra, que solamente tiene componente  $p_y$ .

Vamos a aislar una rebanada diferencial de barra, de longitud  $dx$ , que debe estar en equilibrio bajo las acciones que actúan sobre ella, que en el caso general son:

- Las que resultan de las tensiones  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xz}$ , en sus dos secciones
- Las que resultan de la carga  $\mathbf{p}$  que actúe en el diferencial



En realidad puede existir también una distribución de momentos por unidad de longitud. Puede estar asociada a cargas oblicuas que no actúan exactamente en el eje de la barra, sino típicamente en la parte superior de las secciones. Suelen ser pequeños o inexistentes, y no complicaremos esta breve exposición considerándolos.

La figura 4.12 muestra un diferencial de barra visto en el plano  $xy$ , junto con las acciones que actúan sobre él, dibujadas todas ellas como positivas. Procede hacer una aclaración respecto de un pequeño abuso de notación (por otra parte habitual) que contiene esta figura: se utiliza el símbolo de una componente de esfuerzo para representar su valor particular en la sección izquierda. Por ejemplo, donde pone  $M_z$  podemos pensar que pone 27.6 kN·m, si ése fuese el valor en la sección izquierda. El valor en la sección derecha no será ese, porque no es la misma sección. Pero será un valor muy cercano, porque las secciones están muy próximas. En las condiciones de evolución continua de las funciones que (por ahora) presuponemos, el incremento será un diferencial de momento de primer orden, que denotamos como  $dM_z$ . De esta manera, el momento en la sección derecha será el valor concreto que tuviese en la sección izquierda (los 27.6 kN·m, que denotamos de forma genérica como  $M_z$ ) más el incremento ( $dM_z$ ). En total, el momento en la sección derecha es  $M_z + dM_z$  (que interpretaríamos como “27.6

más un diferencial”), como muestra la figura. Consideraciones análogas se aplican a las demás componentes de esfuerzo ( $N$ ,  $M_y$ ,  $V_y$ ,  $V_z$ ).

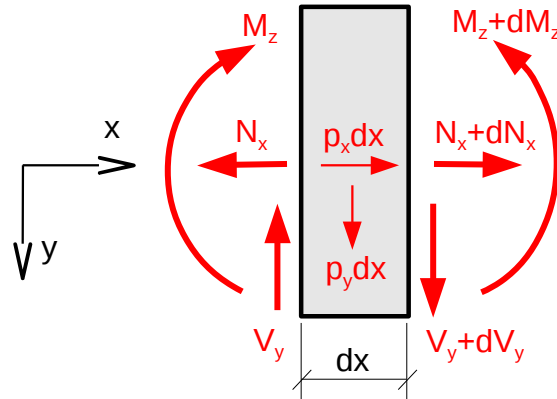


Figura 4.12: Diferencial de barra visto en el plano  $xy$ , con sus acciones

Las cargas  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$ , pueden suponerse constantes en el pequeño  $dx$ , y pueden reducirse a sus resultantes  $p_x dx$ ,  $p_y dx$ ,  $p_z dx$ , aplicadas en centro de áreas de la sección central del diferencial. Vamos a plantear el equilibrio del diferencial de barra anterior. El equilibrio de fuerzas horizontales requiere:

$$N_x = (N_x + dN_x) + p_x dx \Rightarrow 0 = dN_x + p_x dx \Rightarrow \frac{dN_x}{dx} = -p_x(x) \quad (4.3)$$

El de fuerzas verticales requiere:

$$V_y = (V_y + dV_y) + p_y dx \Rightarrow 0 = dV_y + p_y dx \Rightarrow \frac{dV_y}{dx} = -p_y(x) \quad (4.4)$$

Y el equilibrio de momentos en dirección  $z$  (tomamos momentos respecto del centro de áreas de la sección central del diferencial, por ejemplo), requiere

$$M_z + V_y \frac{dx}{2} + (V_y + dV_y) \frac{dx}{2} = (M_z + dM_z) \Rightarrow V_y dx + dV_y \frac{dx}{2} = dM_z$$

Despreciando el diferencial segundo frente a los diferenciales primeros presentes en la ecuación, se tiene:

$$\frac{dM_z}{dx} = V_y \quad (4.5)$$

Las ecuaciones (4.3), (4.4), y (4.5), son las ecuaciones de equilibrio que afectan a los esfuerzos presentes en los problemas más usuales. Adicionalmente, si se observa el problema en el plano  $x-z$ , se obtienen otras dos ecuaciones de equilibrio similares (correspondientes a fuerzas de dirección “ $z$ ”, y a momentos de dirección “ $y$ ”). Estas ecuaciones son:

$$\frac{dV_z}{dx} = -p_z \quad \frac{dM_y}{dx} = V_z \quad (4.6)$$



## Cálculo de Tensiones Normales en la Sección

Los esfuerzos, tal como los hemos definido, presentan la ventaja de ser magnitudes de variación monodimensional, ya que dependen de una única coordenada ( $x$ ). Esto hace que sean cómodas de manejar en el modelo matemático. Sin embargo, sabemos que la plastificación o no del material es una cuestión de punto. La descripción basada en las resultantes de las tensiones en la sección que nos ofrecen los esfuerzos, es demasiado grosera para determinar la posible plastificación o no de cada uno de los infinitos puntos de la sección. Ésta ocurrirá (o no) en cada punto de manera individualizada, según el nivel de tensiones particular que experimente cada punto de la sección.

Por tanto, hemos de volver sobre el concepto original de tensión para predecir si un punto concreto plastificará o no. Desde este punto de vista, podemos pensar en los esfuerzos como magnitudes intermedias, que son relativamente fáciles de manejar y calcular, y que nos sirven de ayuda en el proceso del cálculo de tensiones. En este epígrafe se obtendrá la distribución de tensiones  $\sigma_{xx}$  en la sección (usualmente las más relevantes), que se corresponden con unos esfuerzos dados.



El proceso de cálculo en un caso práctico habitual será encontrar primero los esfuerzos mediante razonamientos de equilibrio (como indicaba la figura 4.4), y después calcular las tensiones en la sección asociadas a esos esfuerzos.

Sabemos por la ecuación (3.2) que:  $\epsilon_{xx} = \partial u_x / \partial x$

Por otra parte, (4.2) indica que:  $u_x(x, y, z) = u_{ox}(x) + \Phi_z(x) \cdot y + \Phi_y(x) \cdot z$

Por lo tanto, debe ser:  $\Rightarrow \epsilon_{xx} = u_{x,x} = u'_{ox}(x) + \phi'_z(x) \cdot y + \phi'_y(x) \cdot z$

Donde se ha denotado con prima (') la derivada respecto de  $x$  cuando la magnitud sólo depende de  $x$ .

Por otra parte, la ley de comportamiento ofrece  $\epsilon_{xx} = (\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})) / E$ , que siendo  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{yy}$ , despreciables se reduce a  $\epsilon_{xx} = \sigma_{xx} / E$ . Por tanto:

$$\sigma_{xx} \approx E \cdot \epsilon_{xx} = E \left[ u'_{ox}(x) + \phi'_z(x) \cdot y + \phi'_y(x) \cdot z \right] \quad (4.7)$$

Ahora introduciremos esta expresión de  $\sigma_{xx}$  en las definiciones (4.1) de los esfuerzos, con lo que resulta:

$$N = \int_A \sigma_{xx} dA = E u'_{ox} \int_A dA + E \phi'_z \int_A y dA + E \phi'_y \int_A z dA$$

$$M_z = \int_A \sigma_{xx} y dA = E u'_{ox} \int_A y dA + E \phi'_z \int_A y^2 dA + E \phi'_y \int_A yz dA$$

$$M_y = \int_A \sigma_{xx} z dA = E u'_{ox} \int_A z dA + E \phi'_z \int_A yz dA + E \phi'_y \int_A z^2 dA$$

En donde se han sacado fuera de las integrales (que afectan a las variables  $y, z$ , que describen el plano de la sección) las magnitudes que sólo dependen de  $x$ . En las ecuaciones anteriores, las integrales de  $y \cdot dA$ , y de  $z \cdot dA$  extendidas a área  $A$  de la sección, se anulan por virtud de

haber tomado el origen de ejes en el centro de áreas de la sección (nótese que esas integrales serían las coordenadas  $y, z$ , respectivamente, del centro de áreas, multiplicadas por  $A$ ).

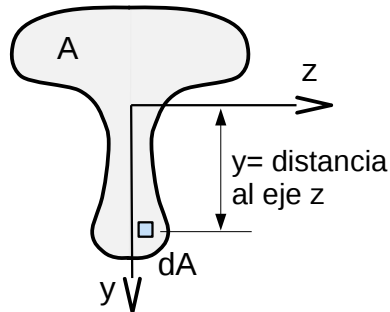


Figura 4.13: Parámetros en el caso más típico de sección simétrica ( $y, z$ , ejes principales de inercia)

Es frecuente que los ejes  $y, z$ , sean ejes principales de inercia de la sección. Por ejemplo, si la sección tiene un eje geométrico de simetría, es habitual que uno de los ejes  $y, z$ , se haya colocado coincidiendo con él, como muestra la figura 4.13. Esto asegura que ambos ejes  $y, z$ , serán principales de inercia de la sección. Por simplicidad, en esta exposición vamos a ceñirnos al caso en que los ejes  $y, z$ , sean ejes principales de inercia de la sección. Por lo tanto la integral de  $y \cdot z \cdot dA$  extendida al área  $A$  de la sección, denominada “producto de inercia”, es nula en nuestro caso.

Finalmente, la integral de  $y^2 \cdot dA$  representa el momento de inercia de la sección respecto del eje “ $z$ ” (porque “ $y$ ” es la distancia al eje “ $z$ ” del elemento  $dA$ ), que denotamos  $I_z$ . Análogamente, la integral de  $z^2 \cdot dA$  es el momento de inercia respecto del eje  $y$  (denotado como  $I_y$ ). Tras estas consideraciones, las ecuaciones anteriores se reducen a :

$$N = EA u'_{0x} \quad (4.8a)$$

$$M_z = EI_z \phi'_z \quad (4.8b)$$

$$M_y = EI_y \phi'_y \quad (4.8c)$$

Estas ecuaciones (4.8) serán de utilidad adicional en un momento próximo, cuando nos planteemos encontrar los desplazamientos transversales de la barra. De momento, nos van a servir para poner en (4.7) las derivadas de giros y desplazamientos en función de los esfuerzos:

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot z \quad (4.9)$$

Que constituye la expresión de las tensiones  $\sigma_{xx}$  en función de los esfuerzos que buscábamos. En los casos prácticos más comunes, en los que nos centraremos en este curso, la componente de momento flector  $M_y$ , será nula. Adicionalmente, si la barra sólo tiene cargas transversales a su directriz, el esfuerzo axial  $N$  será nulo. Si concurren estas circunstancias, como por ejemplo ocurrirá en el problema de la figura 4.11 si la sección es simétrica, obtenemos la expresión más simple posible para la evolución de  $\sigma_{xx}$  en el problema de flexión:

$$\sigma_{xx} = \frac{M_z}{I_z} \cdot y \quad (4.10)$$

Para una sección dada ( $x=\text{cte}$ ), los esfuerzos son constantes en ella (dependen sólo de  $x$ ), y la ecuación (4.9) es la ecuación de un plano en variables  $y$ - $z$ . Para visualizar dicho plano, representamos  $\sigma_{xx}$  en la tercera dimensión (dirección de  $x$ ). Por supuesto, el caso particular (4.10) también es formalmente la ecuación de un plano, que visualizaremos de la misma manera.



El hecho de que, para cualquier forma de la sección, las tensiones  $\sigma_{xx}$  describen la ecuación de un plano es un resultado interesante y muy fácil de visualizar mentalmente, que será útil tener presente ante cualquier duda al respecto. El mismo tiene su origen en la hipótesis (4.2) acerca de que las secciones permanecen planas.

Consideremos en primer lugar el caso más simple de la ecuación (4.10). El plano que describen las tensiones normales está descrito, en este caso, una simple proporcionalidad con la coordenada  $y$ , como representa la figura 4.14.

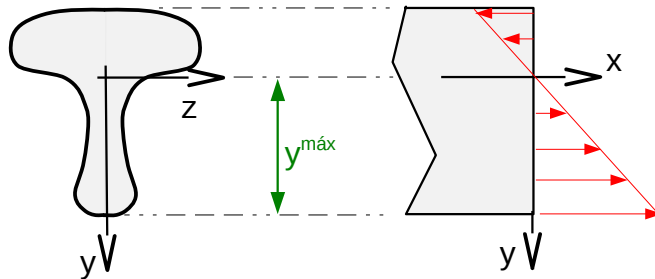


Figura 4.14: Tensiones normales en la sección cuando sólo hay  $M_z$

En este caso particular, el plano que describe la evolución de  $\sigma_{xx}$  corta al plano de la sección en una recta, que coincide con el eje  $z$  (de la ec. 4.10,  $\sigma_{xx} = 0 \Rightarrow y = 0$ , el eje  $z$ ). Este lugar geométrico de puntos de tensión normal nula en la sección, que siempre será una recta (intersección de dos planos), se llama línea neutra. Como por naturaleza la ecuación de un plano es lineal, cuanto mayor sea la distancia de un punto de la sección a la línea neutra, mayor tensión  $\sigma_{xx}$  tendrá. En nuestro caso particular, el punto más alejado de la línea neutra es el inferior de la sección, marcado con " $y^{\text{max}}$ " en la figura 4.14. Como se aprecia en la vista lateral, es efectivamente el de mayor tensión.



En este caso simplificado se aprecia que tensiones pequeñas (deseable) se corresponden con grandes momentos de inercia, y con valores pequeños de  $y^{\text{max}}$ . Ambas cosas son contrapuestas, ya que en  $I_z$  figura " $y$ " en el integrando. Pero será dominante  $I_z$ , ya que  $y$  aparece al cuadrado. En definitiva, interesan momentos de inercia grandes.

Todavía dentro del caso particular de la ecuación (4.10) y la figura 4.14, nos preguntamos por el máximo valor de la tensión normal. Éste se encuentra particularizando para  $y^{\text{max}}$  en la ecuación (4.10), resultando:

$$\sigma_{xx}^{\text{max}} = \frac{M_z}{I_z} \cdot y^{\text{max}} = \frac{M_z}{I_z / y^{\text{max}}} = \frac{M_z}{W_z} \quad \text{siendo:} \quad W_z = \frac{I_z}{y^{\text{max}}} \quad (4.11)$$

La magnitud recién definida,  $W_z$ , recibe el nombre de Módulo Resistente. Tiene dimensiones de longitud al cubo, y su valor puede encontrarse en tablas para los distintos "perfiles comerciales" (formas comerciales de la sección). Permite calcular con una sola operación el valor de la tensión normal máxima, siempre que el problema se ajuste a la tipología, por otra parte común, considerada en la ecuación (4.10).

En el caso más general en el cual no sea nulo el esfuerzo axial  $N$ , ni las componentes  $M_z$ ,  $M_y$ , del momento flector, es de aplicación la ecuación (4.9). La tensión  $\sigma_{xx}$  sigue describiendo la ecuación de un plano en las variables  $y$ ,  $z$  (es lineal en ellas), pero en este caso la línea neutra no pasará por el centro de áreas (a no ser que sea  $N=0$ ), ni será paralela a ninguno de los ejes  $y$ ,  $z$  (salvo que uno de los  $M_y$ , ó  $M_z$ , sea nulo).

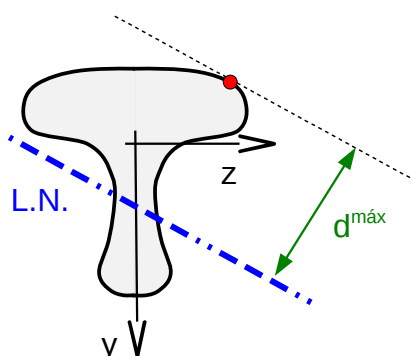


Figura 4.15: Línea neutra en un caso con  $N$ ,  $M_z$ ,  $M_y$ , distintos de cero

La línea neutra puede incluso no pasar por la sección (caso de que  $N$  sea comparativamente grande, de forma que en (4.9) el sumando asociado a  $N$  sea dominante sobre los otros dos). En este caso todos los puntos de la sección trabajarán a tracción, o bien todos ellos a compresión. La figura 4.15 representa la línea neutra en un ejemplo en el que  $N$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ , son todos distintos de cero. Se representa también el punto de la sección más distante de la línea neutra, que como se dijo, será el de mayor tensión  $\sigma_{xx}$ .

La línea neutra divide a la sección (si pasa por ella) en una zona de tracción y otra de compresión. En ocasiones, como en el estudio de ciertos fenómenos de inestabilidad, interesan principalmente las tensiones de compresión. Evidentemente, en tales casos interesa el punto de la sección que esté a mayor distancia de la línea neutra, pero en la zona de compresión, independientemente de que haya puntos más alejados (y por tanto con mayor valor absoluto de la tensión  $\sigma_{xx}$ ) en la zona de tracción. Incluso puede definirse a tal efecto un “módulo resistente a compresión” para facilitar los cálculos.

## Relación entre Giros y Desplazamientos transversales

En las condiciones usuales de trabajo, las componentes de desplazamiento de mayor valor absoluto son las transversales a la viga,  $u_y$ ,  $u_z$ . Dado que la sección de la barra es de pequeñas dimensiones comparada con su longitud, el desplazamiento transversal de cualquier punto de la sección podría servir, a efectos prácticos, para caracterizar el desplazamiento transversal de toda la sección. Elegiremos el centro de áreas de la sección como punto representativo del desplazamiento transversal de la misma. Denotaremos como  $u_{oy}$ ,  $u_{oz}$ , dichas componentes de desplazamiento.



Es frecuente en la literatura denominar a la línea que forman los centros de áreas de las secciones “línea media”. A la geometría que adopta esta línea tras la deformación se le suele identificar con “la deformada” de la barra, en la idea de que la representa suficientemente a efectos prácticos.

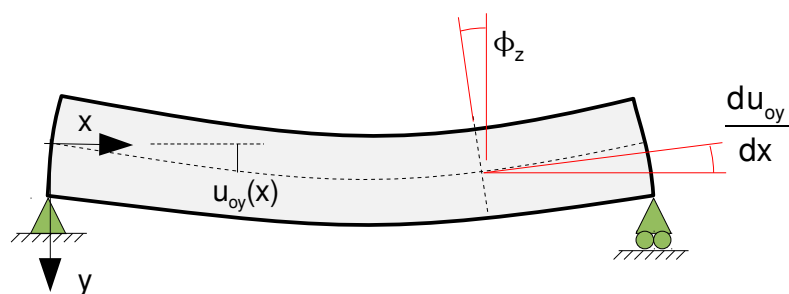


Figura 4.16: Giro de la sección y pendiente de la línea media. Según la hipótesis de Navier-Bernoulli serán de igual valor absoluto.

Aceptando la hipótesis de Navier-Bernoulli, el ángulo formado por dos segmentos de recta diferenciales, originalmente orientados según los ejes "x" e "y", permanecerá recto tras la deformación. Como muestra la figura 4.16, el segmento que originalmente tenía la orientación del eje x, tiene la orientación de la tangente a la línea de centros de área tras la deformación. El segmento que originalmente tenía la orientación del eje y, se mueve junto con la sección a la que pertenecía. Por lo tanto, para que el ángulo se mantenga recto, la sección debe girar en un valor igual a la pendiente de la línea media.

En el punto mostrado en la figura anterior, el giro  $\phi_z$  de la sección es positivo, según su convenio de signos (recordar comentarios anexos a la figura 4.9). La pendiente de la línea neutra está descrita matemáticamente por la derivada de la función  $u_{oy}(x)$ , siendo negativa en ese punto (recuérdese que  $u_{oy}$  es positiva en el sentido del eje y, es decir hacia abajo). Puede comprobarse en cualquier otro punto, o para cualquier otra deformada que el giro de la sección siempre será de signo contrario a la pendiente de la línea media. Por tanto:

$$u'_{oy} = -\phi_z \quad (4.12)$$

Análogamente, observando el problema en el plano xz se llega fácilmente a la conclusión de que las componentes de giro y desplazamiento apreciables en dicho plano (las que usaremos menos en este curso), cumplirán:

$$u'_{oz} = -\phi_y \quad (4.13)$$

Como se indicó, todas las normativas tanto vigentes como derogadas, así como el buen juicio, imponen límites admisibles para los desplazamientos. Los límites suelen expresarse como un valor límite admisible del desplazamiento transversal máximo en la barra dividido por la longitud de la misma. Orientativamente, pueden considerarse como adecuados los siguientes límites máximos:

- Elementos que no afecten a la comodidad de las personas, y para los que no haya requisitos que aconsejen un límite más exigente (soportes de anuncios publicitarios, semáforos, farolas, grúas y mecanismos similares, etc): 1/200
- Elementos que afecten a la comodidad de las personas, pero que no soporten tabiques o pavimentos rígidos (pasarelas, escaleras, vigas de edificación que no hayan de soportar tabiques directamente sobre ellas, etc): 1/300
- Elementos que soportan tabiques, pavimentos rígidos, u otros elementos susceptibles de sufrir agrietamiento: 1/400, o incluso 1/500



En la terminología al uso es frecuente denominar “flecha” al desplazamiento transversal máximo, y “luz” a la distancia entre apoyos (puntos fijos) en la barra. El parámetro a limitar es la relación flecha / luz. Téngase noticia que la norma CTE usa una definición ligeramente diferente del parámetro flecha / luz (en concreto, la diferencia de flecha entre dos puntos partido por el doble de la distancia entre ellos).

### Trazado de Diagramas de Esfuerzos y Desplazamientos

Para juzgar si una barra tiene la resistencia requerida ante unas cargas dadas, necesitamos juzgar primero cuál es la sección más solicitada (y eventualmente qué punto está más solicitado dentro de esa sección). Para juzgar si la barra es lo bastante rígida, necesitamos saber cuánto vale su desplazamiento máximo, y dónde se produce. Es conveniente disponer de la información necesaria para ello en forma de un conjunto de diagramas, cuyo trazado se realiza secuencialmente mediante integraciones sucesivas, aprovechando que:

- La derivada del cortante  $V_y(x)$  es  $-p_y(x)$  (de ec. 4.4)
- La derivada del flector  $M_z(x)$  es  $V_y(x)$  (de ec. 4.5)
- La derivada de  $EI_z \cdot \phi_z(x)$  es  $M_z(x)$  (de ec. 4.8)
- La derivada de  $EI_z \cdot u_y(x)$  es  $-EI_z \cdot \phi_z(x)$  (de ec.4.12)

El esfuerzo axial no participa de la secuencia anterior, y se traza independientemente.

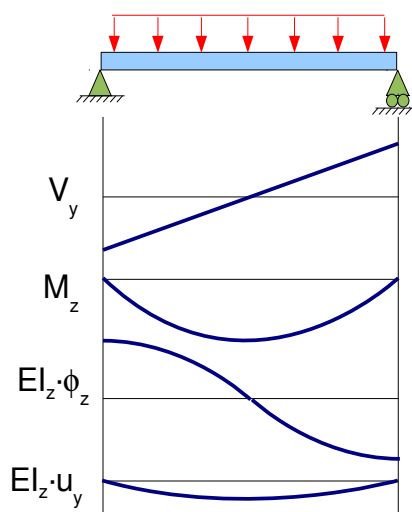


Figura 4.17: Ejemplo de diagramas de esfuerzos y desplazamientos

Lo que estamos llamando “diagramas de esfuerzos y desplazamientos”, no son otra cosa que los trazados de las funciones de variación monodimensional  $V_y(x)$ ,  $M_z(x)$ ,  $EI_z \cdot \phi_z(x)$ ,  $EI_z \cdot u_y(x)$ . Normalmente, el trazado se presenta en gráficas sucesivas, dibujadas en ese orden. En primer lugar se dibuja la barra con sus cargas y apoyos, debajo se dibuja la gráfica de esfuerzo cortante  $V_y$ , debajo la de momento flector  $M_z$ , debajo la de giros  $\phi_z$  (multiplicada por la constante  $EI_z$  de la barra por conveniencia), y finalmente la del desplazamiento  $u_y$  (también multiplicada por  $EI_z$  por conveniencia), que representará la forma que adopta la línea media de la barra tras la deformación. La figura 4.17 ilustra con un ejemplo el tipo de trazado al que nos estamos refiriendo.

Los diagramas de la figura anterior se presentan a modo de ejemplo inicial, pero evidentemente no contienen aún información suficiente como para ser útiles en un caso práctico. Los diagramas deben incluir al menos los valores de las funciones en los puntos más significativos (máximos, por ejemplo), y la información pertinente acerca de cómo son los esfuerzos y movimientos (por ejemplo, si las tracciones asociadas al momento flector ocurren en la parte superior o inferior de la barra).

Pese a ser una tarea muy típica y frecuente en el análisis y diseño de estructuras, no existe un acuerdo general, o un uso común, acerca de muchos detalles del trazado de los diagramas. De entre las muchas elecciones a realizar en el modelo matemático antes de llegar al trazado de los diagramas, cada profesional, o cada autor, pueden haber adoptado unas elecciones diferentes. Entre estas elecciones destacan:

- El sentido elegido de los ejes coordenados xyz
- El convenio de signos elegido para esfuerzos y giros

Adicionalmente, en el trazado de los diagramas propiamente dicho, existen varios aspectos susceptibles de ser elegidos a conveniencia. En particular, es posible:

- Representar las  $V_y(x)$ ,  $M_z(x)$ ,  $\phi_z(x)$ , que resulten positivas (según los convenios elegidos) en el sentido del eje "y", o en el opuesto.

Al respecto de esto último conviene entender que en los diagramas estamos representando magnitudes de distinta naturaleza. A saber:

- 1) Algunas magnitudes son una componente en el plano x-y de un vector. Éstas son  $p_y$ ,  $u_y$ . Ellas tienen por su propia naturaleza un sentido en cada punto x, el cual es visible en la proyección x-y que estamos manejando. Sería absurdo dibujarlas en sentido contrario (por ejemplo dibujar los desplazamientos  $u_y$  en sentido contrario al que ocurren, obteniendo una deformada de la viga opuesta a como realmente es). No hay alternativa razonable acerca de cómo representar estas magnitudes.
- 2) Algunas magnitudes son la componente "z" de un vector. Tal podría ser el caso de  $\phi_z$ , si se hubiese respetado la naturaleza vectorial del giro de la sección en la definición de las componentes del giro (lo cual en realidad no hemos hecho, ya que hemos preferido que no haya "signos menos" en (4.2), ni por tanto en  $\phi_z = \partial u_x(xyz)/\partial y$ , al precio de tratar las componentes de giro como magnitudes independientes). En todo caso, al representar en el plano x-y una magnitud que por su naturaleza tiene dirección z, es indiferente representar sus valores positivos "hacia abajo" o "hacia arriba" (en sentido del eje y o el contrario, respectivamente, en nuestro caso). Podemos elegir cómo hacerlo.
- 3) Algunas magnitudes no son vectores. Tal es el caso de los esfuerzos  $V_y$ ,  $M_z$ . Recuérdese que el convenio de signos para estas magnitudes se hereda del de las componentes del tensor de tensiones, y por lo tanto difiere substancialmente del convenio de signos de un vector. En concreto,  $V_y$  puede ser positivo tanto si tiene el sentido del eje y como si tiene el opuesto, dependiendo de la normal exterior en la sección. No hay una razón por la que deba representarse su valor positivo en una dirección determinada del eje y. Igualmente ocurre con  $M_z$ , con la circunstancia adicional de ser, en todo caso, un momento de dirección z. Por tanto, podemos elegir representar los valores positivos de  $V_y$ ,  $M_z$ , en el sentido de "y", o bien en el contrario.

Ante tal número de opciones a elegir, todas las cuales conviven en la literatura, la exposición que sigue intenta sobre todo transmitir un conjunto de “buenas prácticas” en relación con la elaboración de los diagramas, de manera que los mismos sean inmediatamente interpretables por cualquier profesional, sin necesidad de saber qué opciones hemos elegido en el proceso de su trazado. Tales prácticas pueden resumirse en:

- Indicar cómo son físicamente las magnitudes en cada zona de un diagrama, mediante símbolos universalmente reconocibles, como los de la figura 4.18. No poner signos, u otras marcas que necesiten interpretación, o puedan entrar en conflicto con las elecciones habituales de un posible destinatario.
- Indicar las cotas de los diagramas en valor absoluto, sin signos.

Ello no obsta para que a la hora de trazar los diagramas, inevitablemente hayamos de optar por un conjunto de elecciones concretas. Como se ha dicho, no hay un motivo definitivo para decantarse por unas u otras. En lo que sigue, evidentemente se respetarán los convenios de ejes, signos, etc, presentados hasta el momento, los cuales se resumen en la figura 4.18 por conveniencia. Adicionalmente, y aunque bien podrían hacerse elecciones individualizadas al respecto, se representará hacia abajo (sentido del eje y) cualquier magnitud que sea positiva. Y se representará hacia arriba (sentido contrario al eje y) cualquier magnitud que sea negativa. Dado que hay que proceder obligatoriamente así para las magnitudes que son vectores en x-y, el adoptar la misma decisión también para los que no lo son, puede resultar más “natural” en algún sentido para el recién llegado (al menos esa es la intención).

$$\begin{aligned}
 V_y' &= -p_y \\
 M_z' &= V_y \\
 EI_z \phi_z' &= M_z \\
 EI_z u_y' &= -EI_z \phi_z
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

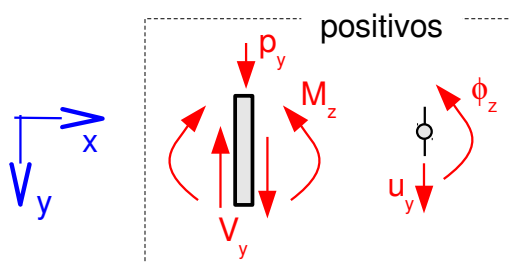


Figura 4.18: Resumen para el trazado de diagramas: Ejes adoptados y sentidos positivos de las magnitudes

Aunque todas ellas se han obtenido con anterioridad, las ecuaciones (4.14) resumen las relaciones existentes entre las magnitudes mencionadas en la figura 4.18 anterior.

Las magnitudes que solemos considerar menos comunes,  $p_z$ ,  $V_z$ ,  $M_y$ ,  $\phi_y$ ,  $u_z$ , pueden no ser nulas en un problema dado. Por supuesto, puede seguirse un procedimiento análogo para obtener los diagramas correspondientes a estas magnitudes. Para ello representaremos el problema en el plano x-z. Baste decir que se obtendrá una completa analogía entre las magnitudes correspondientes ( $p_y$  con  $p_z$ ,  $V_y$  con  $V_z$ , etc) si la vista del problema en el plano x-z se contempla desde un punto positivo del eje y (“desde abajo”).



Por otra parte puede existir esfuerzo axial  $N$ . Su trazado obedece a la ecuación  $N' = -p_x$  (según la ec. 4.3), y está desacoplado de la secuencia de magnitudes  $p_y$ ,  $V_y$ ,  $M_z$ ,  $\phi_z$ ,  $u_y$ , anterior. El desplazamiento  $u_{ox}$  en dirección  $x$  del centro de áreas de las secciones está asociados únicamente a este esfuerzo (a través de la ecuación 4.8a:  $N = EAu'_{ox}$ ), y por tanto está también desacoplado del resto de magnitudes. Cuando no es nulo, el diagrama de esfuerzo axial suele representarse en primer lugar (antes que el de cortantes). Los desplazamientos  $u_{ox}$  debidos al esfuerzo axial suelen ser muy pequeños comparados con los desplazamientos  $u_{oy}$  debidos al momento flector. No suele ser de interés dibujar el diagrama correspondiente a  $u_{ox}$ , e incluso es habitual despreciar estos desplazamientos en algunas aplicaciones prácticas.

### Trazado a mano alzada

El realizar la integración explícita del conjunto de ecuaciones en derivadas (4.14), aplicando las condiciones de contorno de nuestro problema particular, es desde luego posible, y es la manera más correcta de proceder en lo que a exactitud se refiere. Pero el proceso tiende a ser tedioso incluso en casos relativamente simples, y el elevado número de operaciones necesario lo hace propenso a errores cuando se opera a mano. Existe la posibilidad de resolver “siempre” los problemas mediante ordenador, usando un programa informático, pero es muy dudoso que, incluso supuesta su disponibilidad permanente, la dependencia del ordenador hasta para los casos más simples sea compatible con una adecuada comprensión del funcionamiento de la barra como elemento resistente. El procedimiento de trazado a mano alzada que presentamos en esta sección tiene las siguientes características:

- Requiere muy pocas operaciones, y las mismas son muy sencillas de realizar. El esfuerzo requerido para este trazado es sólo una pequeña fracción del necesario para la integración explícita.
- Suele obtenerse al menos una cifra significativa para los desplazamientos (o más, según calidad del trazado), y mejor precisión para las otras magnitudes.
- Sus resultados numéricos pueden ser útiles tanto para ser usados directamente en una fase de pre-diseño, como para detectar errores de operación en el posterior proceso de obtención explícita de las ecuaciones (si el mismo se realiza).
- El análisis de concavidad y convexidad de un polinomio de grado elevado (forma frecuente de las funciones a trazar, obtenibles mediante integración explícita), es complicado de realizar, y por tanto nuevamente propenso a errores. El trazado a mano alzada simplifica drásticamente este aspecto.

El trazado a mano alzada aprovecha la circunstancia de que, salvo una posible cuestión de signo, en cada punto del diagrama que estamos trazando, la pendiente ha de ser el valor de la función dibujada anteriormente (se presupone que el orden de los diagramas es el indicado en la figura 4.17).

A modo de ejemplo, supongamos que hemos trazado ya el diagrama de  $V_y$ , y que estamos trazando el de  $M_z$ , situación que muestra la figura 4.19. En el punto  $x=x_0$  el valor de  $V_y$  es negativo, luego la pendiente de  $M_z$  en ese punto será negativa (2ª ec. 4.14). Por tanto podemos dibujar un pequeño trazo de pendiente negativa en ese punto (nótese que una pendiente negativa es “hacia arriba” debido a que estamos representando los momentos positivos “hacia abajo”, coincidiendo con la orientación del eje  $y$ ).

A partir de  $x_0$ ,  $V_y$  sigue siendo negativo, pero cada vez más pequeño en valor absoluto, hasta llegar a  $x_1$  donde se anula. Luego hemos de seguir trazando la gráfica de  $M_z$  con pendiente cada vez más horizontal, hasta que en  $x_1$  es completamente horizontal.

A partir de  $x_1$ ,  $V_y$  es positivo, y va tomando valores mayores en puntos sucesivamente más alejados como  $x_2$ ,  $x_3$ , etc. Por tanto, a partir de  $x_1$  en que la pendiente es horizontal, debemos trazar  $M_z$  con pendientes positivas progresivamente mayores (cada vez más inclinadas "hacia abajo"), según avanzamos en  $x$  por los puntos  $x_2$ ,  $x_3$ , etc. Este trazado ha puesto de manifiesto de manera natural que en  $x = x_1$  existirá un extremo local del momento flector.

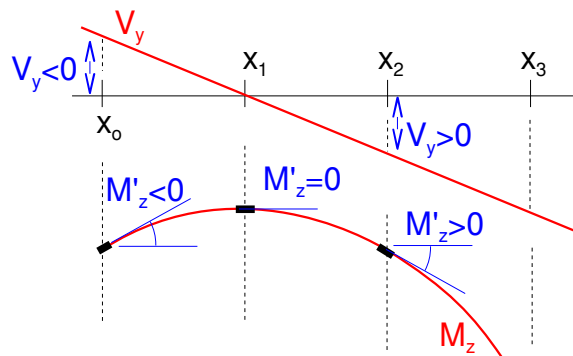


Figura 4.19: Ejemplo de trazado de un diagrama. Los valores del diagrama previo son las pendientes del actual.

Debe tenerse presente que el procedimiento anterior es útil para obtener la forma del diagrama de  $M_z$ , pero no sus valores. El proceso seguido puede entenderse como una forma de "integración analógica aproximada", en el que faltaría por determinar una constante de integración. Dicho de otro modo, sabemos la forma que tiene la gráfica, pero no dónde colocar la línea horizontal que corresponde a  $M_z=0$ , a partir de la cual mediríamos los valores de la función  $M_z$  representada. Por supuesto, es necesaria alguna condición de contorno para concretar dicha indeterminación. Un tipo de condición de contorno frecuente es que en al menos un extremo de la barra, el momento flector sea conocido.

Otra circunstancia que aprovecharemos en el trazado a mano alzada, es que, salvo una cuestión de signo, el incremento entre dos puntos de la función que estamos trazando, es igual al área del diagrama previo entre esos dos puntos. La demostración de lo anterior es inmediata sin más que plantear la integral entre dos puntos de cualquiera de las ecuaciones (4.14). Por ejemplo para el momento flector:

$$\frac{dM_z}{dx} = V_y \Rightarrow \int_{M_z(a)}^{M_z(b)} dM_z = \int_{x=a}^{x=b} V_y(x) dx \Rightarrow M_z(b) = M_z(a) + \left( \begin{array}{l} \text{área de } V_y \\ \text{entre a y b} \end{array} \right)$$

Como ejemplo inmediato de aplicación podemos considerar nuevamente la figura 4.19. A la vista de la evolución lineal de  $V_y$ , y si las cotas  $x_0$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ , están espaciadas uniformemente, el área de dicha función entre  $x_0$  y  $x_2$  es nula. Por tanto el incremento de la función  $M_z$  entre esos dos puntos debe ser nulo. Es decir:  $M_z(x_0) = M_z(x_2)$ . A falta de condiciones de contorno, ignoramos cuál es el valor, pero sabemos que será el mismo en esos dos puntos.

El cálculo, incluso aproximado, de los valores de las áreas permite también obtener estimaciones numéricas de las cotas más significativas de los diagramas. Como veremos, si se realiza la estimación con algún cuidado, los resultados pueden ser bastante precisos.

Es frecuente encontrar problemas en los que existen fuerzas concentradas. Matemáticamente cabe interpretar las mismas como puntos singulares de la función de carga  $p_y$ : en un entorno del punto tan pequeño como queramos,  $p_y$  se acerca a infinito tanto como sea preciso (y se anula fuera de ese entorno salvo que además haya cargas distribuidas), de forma que la resultante del pequeño pero intenso sistema de cargas tenga el valor finito de la fuerza concentrada. Pensando en términos de inclinación del diagrama de  $V_y$ , existirá un tramo de pendiente vertical.

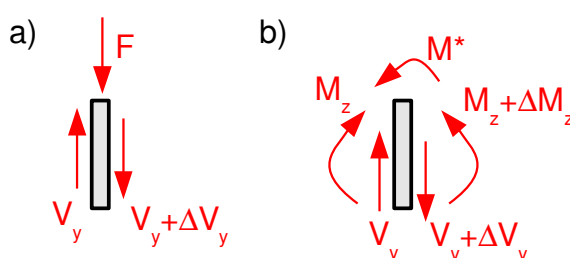


Figura 4.20: Acciones concentradas en un punto de la barra.

a) Fuerza  $F$ . b) Momento  $M^*$

Por tanto, la fuerza concentrada producirá una discontinuidad (“salto”) en el diagrama de esfuerzos cortantes. Para averiguar el sentido de dicha discontinuidad, consideramos un caso en el que “todo es positivo”, como el de la figura 4.20a. La misma muestra sólo un diferencial de barra de anchura  $dx$ , que abarca justamente la pequeña zona de aplicación de la carga  $F$ . El esfuerzo cortante, dibujado positivo a ambos lados, experimentará un incremento  $\Delta V_y$  que podemos calcular mediante el equilibrio del diferencial de barra (fuerzas “hacia arriba” igual a fuerzas “hacia abajo”):  $V_y = F + (V_y + \Delta V_y) \Rightarrow$

$$\Delta V_y = -F \quad (4.15)$$

Aunque es menos frecuente, puede darse la existencia de momentos concentrados en puntos de la barra, como el  $M^*$  representado en la figura 4.20b. En ese caso, habrá una discontinuidad en la gráfica de momentos. A falta de un convenio de signos para un momento aplicado exteriormente, se ha considerado uno del mismo sentido que un giro positivo de sección (sin que haya ningún motivo particular para ello). Las demás magnitudes se han dibujado positivas. El equilibrio de momentos de la rebanada de barra implica (se han tomado momentos respecto del punto medio de la rebanada):

$$M_z + V_y dx/2 + (V_y + \Delta V_y) dx/2 = M^* + (M_z + \Delta M_z)$$

Los valores  $M_z$  se cancelan, y los términos que contienen  $dx$  pueden despreciarse (por ser diferenciales de primer orden) frente a los términos finitos como  $M^*$ . Resulta:

$$\Delta M_z = -M^* \quad (4.16)$$



Quizá no merezca la pena intentar recordar (4.15) y (4.16). Puede obtenerse rápidamente el “salto” de un diagrama en el caso particular que se necesite reproduciendo un razonamiento como los anteriores.

Se ilustrarán mediante un ejemplo algunas otras particularidades del trazado de los diagramas. Considere el problema de la figura 4.21a. Consta de una barra con un “apoyo fijo” en su extremo izquierdo, que impide el movimiento tanto horizontal como vertical, pero permite libremente el giro de la sección. El mismo puede ejercer sobre la barra una fuerza horizontal y otra vertical, pero no un momento. En el extremo derecho existe un “apoyo móvil”, que solamente impide el desplazamiento vertical, y por lo tanto sólo puede ejercer una fuerza vertical. En general se llama “reacciones” a estas acciones que ejercen los apoyos sobre la barra. Existe una fuerza concentrada de valor  $F$  en el punto medio,  $x=L/2$ , de la barra, en el sentido que se indica.

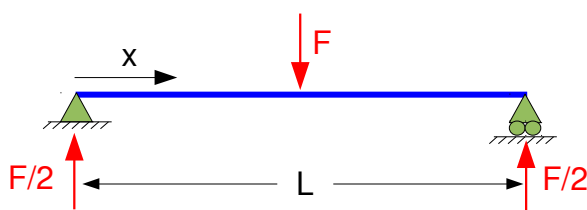


Figura 4.21a: Un problema de ejemplo para el trazado de diagramas

Comenzaremos calculando las reacciones en los apoyos, lo que en este caso es un ejercicio inmediato. La componente horizontal de reacción en el apoyo fijo debe ser nula, ya que no hay otras fuerzas horizontales en el problema con las que pudiese equilibrarse. Su componente vertical de reacción puede calcularse tomando momentos respecto del apoyo derecho. Finalmente, la reacción en el apoyo móvil se calcula con el equilibrio de fuerzas verticales. Se obtiene el mismo valor para ambas reacciones, como corresponde a la simetría del problema. Se han representado en la misma figura 4.21a.



En lo que sigue, y para el trazado de cualquier diagrama, será necesario recordar los convenios de la figura 4.18 y las ecuaciones (4.14). Un poco de práctica será la mejor ayuda en este sentido.

Trazaremos ahora el diagrama de esfuerzos cortantes,  $V_y$ . Es inmediato apreciar que el valor en  $x=0$  es  $+F/2$ , a la vista de la reacción en el apoyo. Por tanto trazamos una línea horizontal que indicará el valor  $V_y=0$ , y trazamos el primer punto de nuestro diagrama por debajo de esa línea, a una cierta distancia que acotaremos como  $F/2$ .

Pasado ese punto inicial, no actúa ninguna carga, concentrada ni distribuida hasta  $x=L/2$ . Luego hasta ese punto, es decir en puntos como  $x=L/4$ , es  $p_y=0$ . Por tanto la gráfica de  $V_y$  tendrá pendiente nula en esa zona  $0 < x < L/2$ , manteniéndose  $V_y$  en el valor constante  $F/2$ . En  $x=L/2$  actúa la fuerza concentrada  $F$ . Ello provocará un salto en el diagrama, que según (4.15) supondrá un incremento negativo. Por lo tanto el “salto”, de valor absoluto  $F$ , se produce hacia arriba, y llega a dejar a  $V_y$  en la zona de valores negativos. El valor pasado  $x=L/2$  es  $F/2 + (-F) = -F/2$ . Como hasta el final de la viga  $p_y$  es nuevamente nulo, la gráfica se mantendrá con pendiente nula, es decir horizontal, hasta  $x=L$ . En ese punto final, la reacción indica que el cortante vale  $-F/2$ , valor al que efectivamente llegamos con el diagrama. Terminamos poniendo cotas al diagrama, e indicando cómo son los esfuerzos en cada zona (representando un diferencial de barra con los sentidos de los cortantes en ambas caras). El proceso descrito da como resul-

tado el diagrama de la figura 4.21b, en la que por claridad visual se han rayado además las zonas cubiertas por la función.

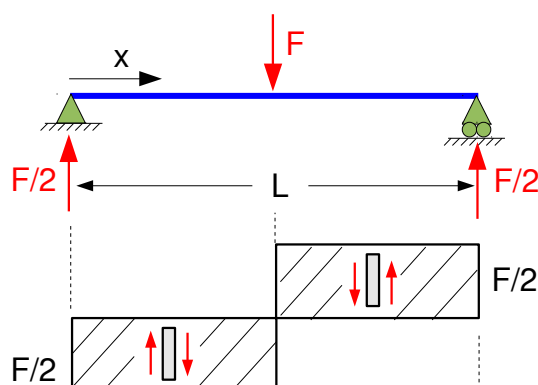


Figura 4.21b: Trazado del diagrama de esfuerzos cortantes. Nótese la discontinuidad en  $x=L/2$

El trazado del diagrama de momentos flectores no presenta ninguna complicación adicional. Se sabe que en el punto  $x=0$  es  $M_z=0$ , ya que el apoyo no puede ejercer momento, y no hay ningún otro elemento conectado o acción exterior que pudiera ejercerlo. Por tanto trazamos la línea horizontal que representará  $M_z=0$ , y empezamos trazando desde ese valor nulo con pendiente positiva y constante (de valor  $+F/2$ , el del cortante en esa zona). Esto es, trazamos una recta hacia abajo, hasta llegar a  $x=L/2$ .

En  $x=L/2$ , cambiará la pendiente de  $M_z$ , pero no su valor (ya que no existe un momento concentrado). A partir de  $x=L/2$  la pendiente es negativa y constante, según vemos en el diagrama  $V_y$  previo. Por tanto trazamos una recta hacia arriba. Su pendiente es de igual valor y sentido contrario que en la primera mitad del diagrama, luego en  $x=L$  será  $M_z=0$ . Ello debía ser así, ya que en el extremo derecho el apoyo no ejercerá momento, ni hay otro elemento capaz de ejercerlo. Todo el trazado ha quedado por debajo de la línea de  $M_z=0$ , luego los momentos son positivos en toda la longitud de la barra. Indicamos cómo son físicamente mediante el símbolo correspondiente. La diferencia del valor de  $M_z$  entre los puntos  $x=0$  y  $x=L/2$  (donde aparece el máximo), es igual al área de la función  $V_y$  entre esos dos puntos. Este área se calcula como el área del rectángulo  $F/2 \times L/2 = FL/4$ , que será el valor máximo del momento. El diagrama así obtenido para  $M_z$  se muestra en la figura 4.21c.

El trazado del diagrama de giros de las secciones aparece parcialmente en la misma figura 4.21c. En este caso no conocemos el valor del giro en  $x=0$ , ni en ninguna otra sección (vamos a asumir que no hemos apreciado que el problema es simétrico, lo que implica que la sección  $x=L/2$  no girará). No obstante podemos obtener la forma del diagrama, a falta de saber dónde colocar la línea horizontal de giro nulo. Empezamos trazando con pendiente horizontal, ya que en  $x=0$  es  $M_z=0$ . La gráfica debe continuar con pendiente positiva y cada vez mayor, ya que así es la evolución de  $M_z$ . Por tanto trazamos con inclinación "hacia abajo", y cada vez más "hacia abajo", hasta llegar a  $x=L/2$ . Hemos obtenido la convexidad de la gráfica en esa zona sin ningún esfuerzo. A partir de  $x=L/2$ , la pendiente sigue siendo positiva, pero ahora cada vez menos, hasta que termina por ser cero en  $x=L$  (nuevamente vemos esto en la gráfica previa de momentos). Por tanto seguimos trazando con pendiente "hacia abajo", pero cada vez más próxima a la horizontal, hasta que acaba por ser horizontal en el extremo derecho.

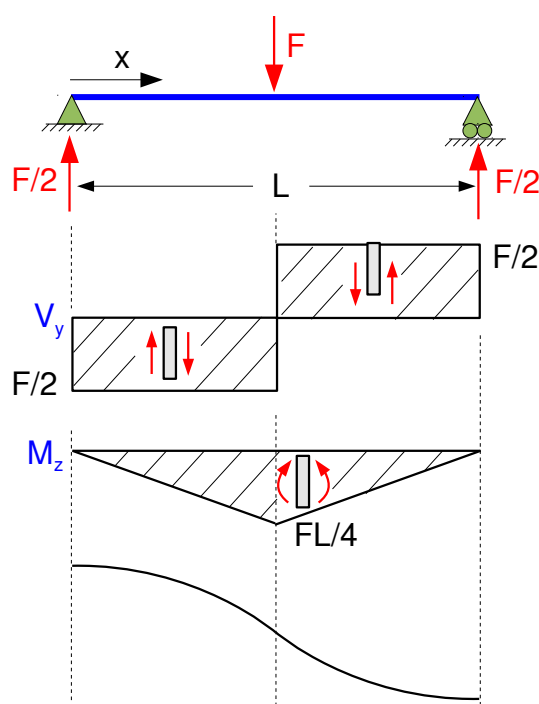


Figura 4.21c: Diagrama de momentos. Diagrama de giros parcialmente dibujado.

Este problema tiene todas sus condiciones de contorno dadas en desplazamientos (ninguna en giros), por lo que debemos obtener de los desplazamientos la información necesaria para completar el diagrama de giros. Razonamos que la diferencia de desplazamiento  $u_y$  entre  $x=0$  y  $x=L$ , que será nula puesto que en ambos puntos hay apoyos, será el área total bajo el diagrama de giros. Por tanto, en la figura 4.21c debemos situar la línea horizontal de origen de giros de tal manera que divida a la gráfica en áreas que se cancelen. En este caso, debido a la simetría del trazado, es evidente que esa línea debe pasar por el punto del diagrama que está en  $x=L/2$ . Una vez trazada (ver figura 4.21d), obtenemos una zona de giros negativos (representados “hacia arriba” de la línea), que ocupa hasta  $L/2$ , y otra de giros positivos en la mitad restante de la barra. Indicamos cómo es el giro en cada zona mediante un símbolo adecuado.

Para completar el diagrama de giros, podemos calcular el giro en  $x=0$  como la diferencia de giros entre ese punto  $x=0$ , y el de  $x=L/2$ , que ha resultado tener giro nulo (como podíamos haber anticipado por simetría). Dicha diferencia de giros es igual al área de la gráfica de momentos entre esos puntos, que vale  $\frac{1}{2} \cdot L/2 \cdot FL/4 = FL^2/16$ . En el extremo derecho tendrá el mismo valor y sentido opuesto. Se indican también estas cotas en la figura 4.21d.



Hay quien prefiere representar  $\phi_z$  en lugar de  $EI_z \phi_z$ . Esto no afecta a la forma del diagrama (en barras de sección constante), pero sí a los valores numéricos de las cotas. Es buena práctica indicar junto a la “línea de cero” de la gráfica qué variable se está representando.

Por último, trazaremos el diagrama de desplazamientos  $u_y$ . Recordemos que en este caso, la ecuación diferencial, la 4ª de (4.14), tiene un signo menos. Podemos comenzar trazando la línea horizontal de referencia, ya que conocemos el desplazamiento (que es nulo) de los puntos en  $x=0$  y  $x=L$ . En el punto en  $x=0$ ,  $\phi_z$  es negativo, luego la pendiente de  $u_y$  será positiva (debido al mencionado signo menos), es decir “hacia abajo”. La pendiente sigue siendo positiva, aunque cada vez más pequeña, hasta el punto  $x=L/2$  en donde se anula. A partir de este punto, la

función  $\phi_z$  cambia de signo, por lo que también lo hará la pendiente de  $u_y$ , que en consecuencia presentará un máximo en  $x=L/2$ . En el tramo  $x>L/2$ , mitad derecha de la barra, la pendiente es negativa (“hacia arriba”), y cada vez más pronunciada. El trazado de  $u_y$  debe terminar con valor nulo en  $x=L$ , ya que existe un apoyo en este punto.

El diagrama de desplazamientos tiene la forma de la barra tras la deformación. No está de más una comprobación visual de que el trazado obtenido es físicamente aceptable, y está en coherencia con los apoyos y cargas del problema. Por otra parte, no hemos acotado aún el diagrama de desplazamientos. Interesa el desplazamiento máximo, que se produce en  $x=L/2$ . Vamos a realizar una estimación razonable de su valor, basándonos en que el mismo coincidirá con el área de la función de giros entre  $x=0$  y  $x=L/2$ . En la figura 4.21.d se aprecia que este área es menor que lo que correspondería a un rectángulo de lados  $FL^2/16$  por  $L/2$ , y también que es mayor que el área del triángulo rectángulo cuyos catetos tienen esas mismas medidas. Estas áreas son:

- Rectángulo:  $(FL^2/16) \cdot (L/2) = FL^3/32$
- Triángulo:  $(FL^2/16) \cdot (L/2) / 2 = FL^3/64$

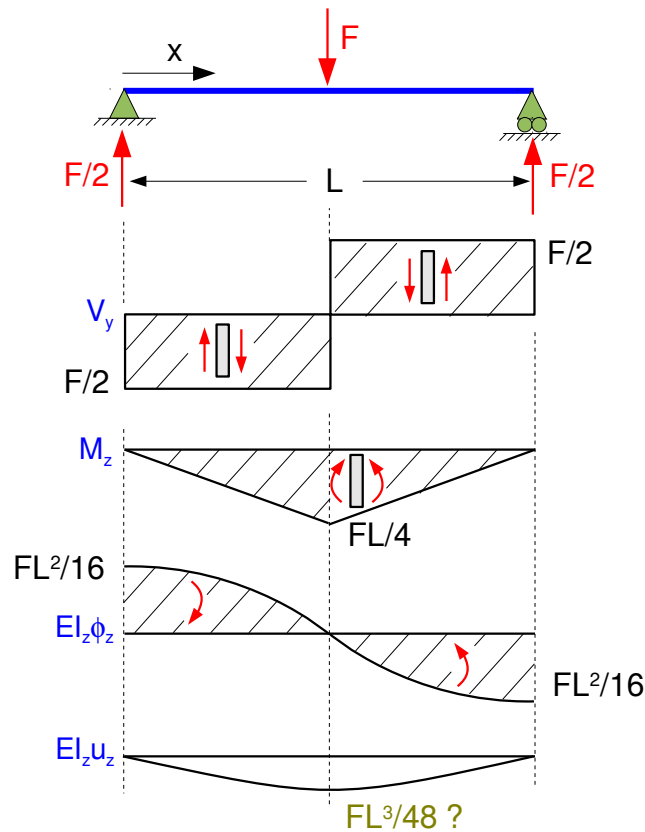


Figura 4.21d: Diagrama de giros completado, y diagrama de desplazamientos.

El valor promedio de los denominadores es 48. Adoptamos ese denominador para nuestra estimación del desplazamiento máximo, que será  $FL^3/48$ . En el diagrama de la figura 4.21d se ha puesto esta cota con un signo de interrogación, para indicar que es fruto de una estimación, a diferencia del resto de cotas de los diagramas, que se han obtenido de forma exacta.



Una integración explícita mostrará que el valor estimado anterior es, de hecho, exacto. En efecto, puede comprobarse que el procedimiento de

interpolación usado resulta exacto para parábolas como la del diagrama de giros de la fig. 4.21d. En el Apéndice D se ofrecen algunos resultados útiles para acotar diagramas. No obstante, simplemente se pretende animar al alumno a realizar "cualquier estimación razonable", cuando utilice este enfoque de trazado a mano alzada..

### Trazado mediante integración explícita de las ecuaciones

El procedimiento de trazado a mano alzada descrito en el apartado anterior implica de hecho la integración de las ecuaciones (4.14). Pero decimos que se trata de una integración "no explícita" en el sentido de que no obtenemos las ecuaciones analíticas de las funciones que representamos. Aunque en ciertos casos el conocer las ecuaciones analíticas exactas tiene un interés secundario, en otros casos no será así.

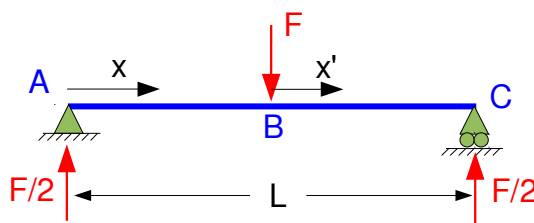


Figura 4.22: Coordenada auxiliar  $x'$  para la integración

Cuando es necesaria la obtención analítica de las ecuaciones que describen los esfuerzos y desplazamientos, es recomendable ir incluyendo en el proceso tantas comprobaciones como sea posible, basándose en las técnicas para el trazado a mano alzada descritas en el apartado anterior. Decimos esto porque el proceso de integración explícita suele requerir un cuantioso número de operaciones, lo que aumenta la probabilidad de cometer algún error cuando se opera manualmente. Por ese motivo, debe pensarse que un trazado basado solamente en ecuaciones es más bien desaconsejable, de no ser que sea realizado mediante ordenador.

Por lo demás, el proceso de integración en sí mismo, tiene pocas particularidades más allá de las manipulaciones matemáticas habituales de la integración: obtener funciones primitivas, y poner los límites de integración adecuados a las condiciones de contorno. En ocasiones, principalmente cuando hay discontinuidades, puede ser conveniente operar por tramos, definiendo una nuevo origen para la variable independiente. Esta particularidad está presente en el ejemplo analizado en el apartado anterior, que a continuación resolvemos mediante integración explícita para ilustrar el proceso.

Como existe una discontinuidad en el centro de la barra (fuerza concentrada), la expresión analítica de las funciones a representar será diferente a ambos lados de ese punto. Aunque es igualmente correcto operar únicamente con la coordenada  $x$ , resulta más cómodo definir una coordenada auxiliar  $x'$ , que usaremos para expresar las ecuaciones en la mitad derecha de la barra. También se ha dado nombre (A, B, C), a los puntos clave, al único efecto de poder nombrarlos de forma más concisa.

Esfuerzo cortante:  $V_y(A) = +F/2$

$$V_y(x) = V_y(A) - \int_0^x p_y(x) dx = (p_y = 0 \text{ en AB}) = F/2 \quad \text{en AB}$$



En el punto B existe discontinuidad. Si llamamos  $B^-$  y  $B^+$  a dos puntos tan próximos como queramos a B, a su izquierda y a su derecha respectivamente, y empleamos el mismo razonamiento que para (4.15), tenemos que  $V_y(B^+) = V_y(B^-) - F = F/2 - F = -F/2$ , luego:

$$V_y(x') = V_y(B^+) - \int_0^{x'} p_y(x') dx' = (p_y = 0 \text{ en BC}) = -F/2 \quad \text{en BC}$$

Momento flector:  $M_z(A) = 0$

$$M_z(x) = M_z(A) + \int_0^x V_y(x) dx = 0 + \int_0^x (F/2) dx = F \cdot x/2 \quad \text{en AB}$$

que en el punto B vale  $M_z(x=L/2) = M_z(B) = FL/4$

En  $M_z$  y siguientes diagramas no hay discontinuidad, pero sí cambio de expresión analítica:

$$M_z(x') = M_z(B) + \int_0^{x'} V_y(x') dx' = FL/4 + \int_0^{x'} (-F/2) dx' = FL/4 - Fx'/2 \quad \text{en BC}$$

Giros:  $\varphi_z(A)$  es desconocido. Por ahora queda como incógnita.

$$EI_z \varphi_z(x) = EI_z \varphi_z(A) + \int_0^x M_z(x) dx = EI_z \varphi_z(A) + Fx^2/4 \quad \text{en AB}$$

en  $x=L/2$ :  $EI_z \varphi_z(B) = EI_z \varphi_z(A) + FL^2/16$

Para el tramo BC partimos de ese valor en B, que contiene la incógnita  $\varphi_z(A)$  :

$$EI_z \varphi_z(x') = EI_z \varphi_z(B) + \int_0^{x'} M_z(x') dx' = EI_z \varphi_z(A) + FL^2/16 + FLx'/4 - Fx'^2/4 \quad \text{en BC}$$

De momento, no podemos expresar los giros de forma más precisa.

Desplazamientos:  $u_y(A)$  es nulo.

$$EI_z u_y(x) = EI_z u_y(A) - \int_0^x EI_z \varphi_z(x) dx = -EI_z \varphi_z(A) \cdot x - FX^3/12 \quad \text{en AB}$$

en  $x=L/2$ :  $EI_z u_y(B) = -EI_z \varphi_z(A) \cdot L/2 - FL^3/(12 \times 8)$

$$EI_z u_y(x') = EI_z u_y(B) - \int_0^{x'} EI_z \varphi_z(x') dx' = -EI_z \varphi_z(A) \cdot L/2 - FL^3/(12 \times 8) - EI_z \varphi_z(A) \cdot x' - FL^2 x'/16 - FLx'^2/8 + Fx'^3/12 \quad \text{en BC}$$

en  $x'=L/2$ , punto C, el desplazamiento es nulo, lo que permite calcular  $\varphi_z(A)$ :

$$0 = -EI_z \varphi_z(A) \cdot L/2 - FL^3/(12 \times 8) - EI_z \varphi_z(A) \cdot L/2 - FL^3/32 - FL^3/32 + FL^3/(12 \times 8)$$

Simplificando:

$$0 = -EI_z \varphi_z(A) \cdot L - FL^3/16 \Rightarrow EI_z \varphi_z(A) = -FL^2/16$$

Calculado el valor de  $\phi_z(A)$  quedan determinadas todas las ecuaciones de giros y desplazamientos calculadas anteriormente. En un problema más general, procederíamos sustituyendo este valor en la ecuación de giros en ambos tramos AB y BC, y buscaríamos la cota  $x$  (o  $x'$ ) de giro nulo, que se correspondería con un máximo del desplazamiento. Finalmente sustituiríamos esta cota en la ecuación del desplazamiento (la del tramo AB o BC, según correspondiese), para encontrar el valor máximo del desplazamiento.

En nuestro caso, es evidente por simetría que el desplazamiento máximo ocurrirá en el centro de la barra. Por tanto podemos sustituir directamente  $x=L/2$  en la ecuación de  $u_y$  en el tramo AB:

$$EI_z u_y(B) = (+FL^2/16) \cdot L/2 - FL^3/(12 \times 8) = +FL^3/48 \quad (u_y \text{ máximo})$$

El trabajo de representar (sin apoyo de los procedimientos de “mano alzada”) las funciones analíticas obtenidas, es tedioso. Ese trabajo no se realizará aquí, ni se aconseja especialmente que se realice. El trazado de las funciones ya fue obtenido en la figura 4.21d, y sería a efectos prácticos análogo al resultado de la representación obtenida por medios analíticos.

### ***Estimación de las Tensiones Tangenciales en la Sección***

Como se apuntó, las tensiones tangenciales en la sección están directamente relacionadas con los esfuerzos cortantes. Usualmente, el cálculo de la distribución de estas tensiones tangenciales suele realizarse considerando una rebanada diferencial de la barra, y aislando una porción de ella mediante un corte. Equilibrando la porción de rebanada resultante se puede obtener la tensión tangencial promedio en ese corte. Ese procedimiento conduce a fórmulas algo más complicadas y laboriosas de aplicar que las correspondientes al cálculo de tensiones normales, pero que permiten estimar con suficiente aproximación a efectos prácticos la distribución de tensiones tangenciales.

Por otra parte, las tensiones tangenciales asociadas a los esfuerzos cortantes pocas veces tienen un papel importante en los problemas comunes de barras a flexión. Por ejemplo, recuérdese que hemos presentado como razonable el despreciar la deformación asociada a ellas en nuestro modelo matemático. En cuanto al valor propiamente dicho de estas tensiones, y su posible relevancia en la aplicación de un criterio de plastificación, cabe decir que si bien no suelen suponer una diferencia substancial, sí pueden tener una influencia numérica suficiente como para ser tenidas en cuenta.

En esta exposición, necesariamente breve, sólo se presentarán algunas nociones acerca de la distribución de las tensiones tangenciales en la sección. Intencionadamente se ha evitado incluir demostraciones, e incluso fórmulas, cuando una explicación descriptiva se ha considerado suficiente. Dichas explicaciones descriptivas no intentan ser rigurosas. Aún así, el conjunto de pautas contenidas en este epígrafe debiera bastar para obtener una estimación razonable del valor de las tensiones tangenciales en los casos más comunes.

Vamos a considerar tres tipos de sección de barra a los efectos que nos ocupan:

- Secciones macizas. Secciones con su masa sensiblemente agrupada, como son el círculo, el cuadrado, o el rectángulo. Sin agujeros interiores, partes esbeltas, ni ninguna otra complicación geométrica.

- Secciones con alma. Secciones cuya geometría está formada por rectángulos como mínimo moderadamente esbeltos, estando uno o más de ellos ("almas") con su dimensión mayor orientada paralelamente a las cargas. Orientativamente, se cuenta con que dichos rectángulos tengan una relación entre sus lados superior a 2:1.
- Secciones de pared delgada. Como su nombre indica, son secciones formadas por rectángulos esbeltos u otras figuras geométricas esbeltas. Estas figuras geométricas pueden tener geometría curva. Orientativamente, se cuenta con que la relación de longitud a espesor de los mismos supere la proporción 10:1.

### Secciones Macizas

Para fijar ideas, podemos empezar considerando una sección rectangular. La figura 4.23a muestra que sería incorrecto asumir una distribución constante de tensiones, porque las superficies superior e inferior de la barra no tienen tensión tangencial, y se violaría el principio de reciprocidad de las tensiones tangenciales en los elementos diferenciales contiguos a esas superficies.

Por tanto la tensión  $\sigma_{xy}$  debe anularse en el punto superior e inferior de la sección. La evolución de tensiones más sencilla compatible con lo anterior es una de tipo parabólico como la indicada en la figura 4.23b. La distribución real tiene esta forma.

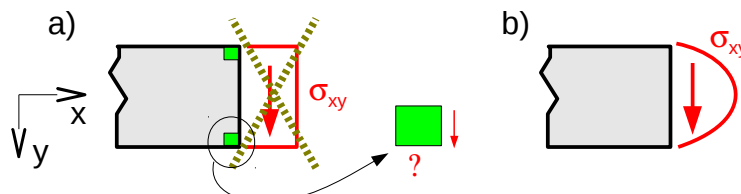


Figura 4.23: a) Imposibilidad de la hipótesis de reparto uniforme. b) Distribución aceptable

Esa forma general de la distribución de tensiones es cualitativamente similar en otros tipos de secciones macizas. La ecuación analítica de dicha distribución puede ser parabólica (caso de sección rectangular o circular), cúbica (caso de una sección triangular), o de otro tipo. La figura 4.24 muestra el valor del máximo para una sección rectangular, y para una sección circular.

Figure 4.24 shows two diagrams illustrating the maximum shear stress values for different cross-sections. The left diagram shows a rectangular section with height  $h$  and width  $b$ . A shear force  $V_y$  is applied downwards. The maximum shear stress  $\sigma_{xy}^{\max}$  is given by the equation: 
$$\sigma_{xy}^{\max} = 1.5 \frac{V_y}{b \cdot h}$$
 The right diagram shows a circular section with radius  $R$ . A shear force  $V_y$  is applied downwards. The maximum shear stress  $\sigma_{xy}^{\max}$  is given by the equation: 
$$\sigma_{xy}^{\max} = 1.33 \frac{V_y}{\pi R^2}$$

Figura 4.24: Valor de la máxima tensión tangencial en dos casos típicos

Como conclusión puede recordarse que en este tipo de secciones macizas, el orden de magnitud de la tensión tangencial mayor en la sección será de unas 1.5 veces lo que correspondería a un reparto uniforme del cortante, y que este máximo ocurre a la altura del centro de áreas de la sección.

Nótese que la tensión tangencial debida al cortante se anula justamente donde la tensión normal debida a flexión es máxima: en los puntos superior e inferior de la sección (ver fig. 4.23). En la comprobación a plastificación de estos puntos no interviene por tanto la tensión cortante.

### Secciones con Alma

En las secciones que sin ser de pared delgada poseen un “alma”, es decir, un rectángulo material más bien esbelto con su dimensión mayor orientada en la dirección de las cargas, puede suponerse que las tensiones asociadas al esfuerzo cortante existen solamente en el alma (o las almas, si hay varias).

Hay que distinguir dos casos. El primer caso es aquel en el que la sección no termina en el alma, sino que existe material tanto antes como después, en la dirección de las cargas. Tal es el caso de la sección en “doble T” de la figura 4.25a (con un solo alma), o el de la figura 4.25b (con dos almas). En estos casos, el suponer reparto uniforme del todo el cortante en el alma es buena aproximación, y no viola el principio de reciprocidad de las tensiones tangenciales, ya que es perfectamente posible que entre el alma y ese material adicional se transmitan tensiones.

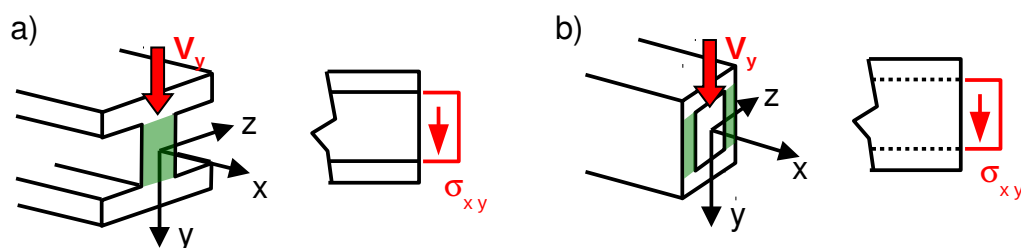


Figura 4.25: Tensiones tangenciales en secciones con material más allá del alma.



De hecho, estas tensiones tangenciales entre el alma y las alas, juegan un papel fundamental en la resistencia de, por ejemplo, una viga con sección en doble T. Se les llama “tensiones rasantes” o “tensiones de atado” de la viga.

El segundo caso es aquel en que la sección no tiene más material en uno o ambos extremos de un alma (nuevamente en la dirección de las cargas). En este caso, la hipótesis de reparto uniforme sí que violaría evidentemente el principio de reciprocidad de las tensiones tangenciales. La figura 4.26a muestra una “doble T” soportando cargas en la dirección en que presenta su momento de inercia más débil. Lo que normalmente haría la función de alas, hace en este caso la función de almas. Las mismas deben tener tensión tangencial nula en sus extremos. Es buena aproximación considerar el cortante repartido entre ambas almas, con una distribución parabólica similar a la que se propuso para las secciones macizas, como se indica.

La figura 4.26b muestra una sección “en T”, que en la parte inferior no tiene material más allá del alma. La distribución de tensiones tangenciales en este caso debe ser nula en ese extremo inferior del alma, aunque no tiene porqué serlo en el superior. Nuevamente es buena aproximación suponer el reparto de todo el cortante en el alma, si bien la forma de la distribución de dichas tensiones es un poco más complicada. Puede tomarse como buena aproximación una evolución lineal de la tensión cortante desde el extremo libre del alma hasta el centro de áreas de la sección, y constante desde el centro de áreas hasta el encuentro del alma con el ala. Por supuesto, el valor de la tensión tangencial máxima (que corresponde a la zona constante, y que

es el único parámetro a determinar) se calcula imponiendo que la distribución de tensiones  $\sigma_{xy}$  tenga como resultante el cortante  $V_y$  en la sección.

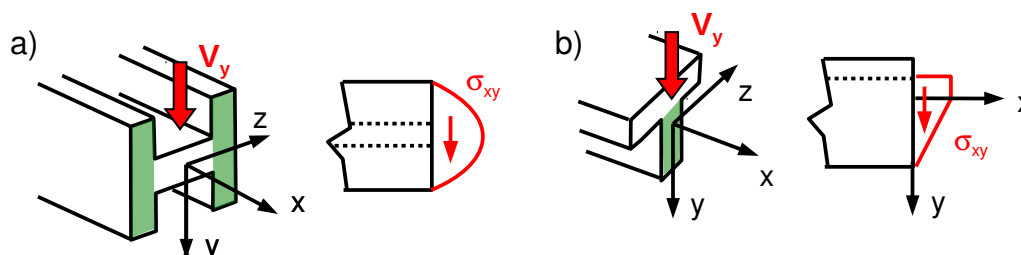


Figura 4.26: Tensiones tangenciales en secciones sin material más allá del alma.

Como nota final a este tipo de secciones, téngase presente que la hipótesis de que las alas no desarrollan ninguna tensión cortante es sólo una aproximación. En realidad, la distribución de tensiones  $\sigma_{xy}$  (y también  $\sigma_{xz}$ , ya que la supuesta direccionalidad vertical es también una aproximación) en la transición entre el alma y el ala, y en el ala mismo, es complicada.

### Secciones de Pared Delgada

Al igual que las tensiones tangenciales debidas al momento torsor, y por idénticos motivos (los cuales se expusieron al presentar el ensayo de torsión), las tensiones tangenciales asociadas a los esfuerzos cortantes también deben estar sensiblemente orientadas según la línea media del perfil en cada punto, en un perfil de pared delgada. Ello hace más conveniente en estos problemas referirse a la resultante de las componentes  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xz}$ , en vez de a cada una por separado. En la figura 4.27 se han tomado unos ejes cuya orientación varía con el punto del perfil, de forma que el eje  $s$  siempre es tangente a la línea media del mismo. Con esta convención, la única componente de tensión tangencial será  $\sigma_{xs}$  como se indica.

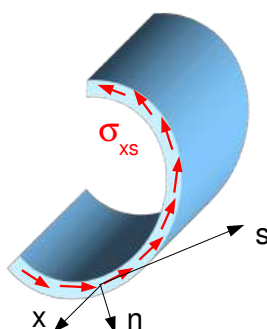


Figura 4.27: Perfil de pared delgada, y dirección de las tensiones tangenciales

En el estudio del perfil de pared delgada, se utiliza el concepto de “flujo de tensiones”. El mismo no es otra cosa que el producto  $\sigma_{xs} \cdot e$ , siendo “ $e$ ” el espesor del perfil en cada punto, que podría no ser constante. Por supuesto, el propio valor de  $\sigma_{xs}$  variará en el recorrido del perfil, independientemente de que el espesor lo haga o no, y por tanto el flujo de tensiones variará también.

Una propiedad interesante de este “flujo de tensiones” es que debe ser continuo. Cabe interpretar lo anterior como que si aislamos un trozo diferencial del perfil, el flujo saliente debe ser igual al flujo entrante (salvo en una cantidad diferencial). Esto permite sacar una conclusión interesante a aplicar en los puntos de bifurcación del perfil: si hay tensión tangencial en un ramal, debe haberla en otros en ese punto, independientemente de su orientación. La figura

4.28 muestra como ejemplo la bifurcación entre el alma y las alas en una “doble T” de pared delgada. El espesor de las alas es  $e_1$ , y el del alma  $e_2$ . Aislado un diferencial del alma y de las alas entorno a la bifurcación, y dada la simetría de la sección, cabe concluir que en las alas habrá un flujo de tensiones de valor mitad que en el alma, ya que en valores absolutos debe cumplirse  $2\tau_1 e_1 = \tau_2 e_2$

Las propiedades indicadas del flujo de tensiones se presentan aquí más bien como ayuda mnemotécnica, ya que no se incluye su justificación. No obstante, lo anterior permite inducir que en perfiles de pared delgada habrá tensiones tangenciales en las alas del mismo orden de magnitud que en el alma. Esto es cierto, al menos, en puntos de las alas cercanos al alma. En puntos de las alas más alejados del alma, el flujo de tensiones evoluciona usualmente hacia valores menores. La figura 4.29 muestra dos casos típicos de evolución de estas tensiones para una sección en “doble T” y una sección “en cajón”.

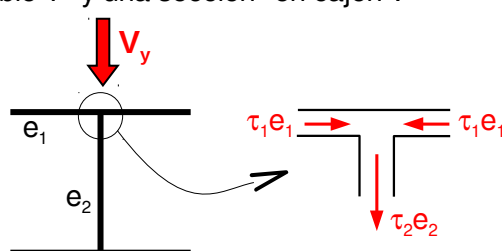


Figura 4.28: Continuidad del flujo de tensiones en una bifurcación.

En la práctica, podemos seguir dando por buena la hipótesis de que el alma desarrolla una distribución de tensiones tangenciales aproximadamente uniforme, cuya resultante es igual al esfuerzo cortante existente en la sección. Admitiendo esto, la diferencia práctica con el caso de pared gruesa es que en pared delgada puede haber tensiones tangenciales en las alas, que en pared gruesa hemos supuesto despreciables. Adicionalmente, cabe destacar que dichas tensiones tienen en general una dirección diferente que el propio esfuerzo cortante.

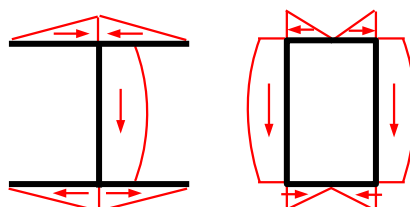


Figura 4.29: Flujo de tensiones tangenciales en dos secciones de pared delgada

- Para ampliación de lo expuesto sobre el modelo de tracción-flexión de barras, puede considerarse en primer lugar <sup>[13]</sup>, y también <sup>[14]</sup>. En las referencias <sup>[1][2]</sup> y <sup>[3]</sup> también se explica dicho modelo con diferentes enfoques, y con numerosos problemas (aunque no todos ellos son aptos para ser resueltos en el curso, debido a que sobrepasan el nivel previsto para el mismo).

## 5.- Torsión Uniforme en Barras Rectas

### Generalidades

Consideremos una barra sin ninguna limitación al movimiento de sus puntos, como la de la figura 5.1, que está sometida a momentos torsores en sus extremos, no existiendo ninguna otra sollicitación. En estas condiciones, las secciones de la barra experimentan un giro relativo de dirección "x", que será constante por unidad de longitud de la barra. En el Tema 3, "Ensayo de Torsión" ya hemos denotado como  $\Theta$  a este ángulo por unidad de longitud.

Salvo en el caso especial en que la barra sea de sección circular -hueca o maciza-, ocurrirá que las secciones ( $x=\text{cte}$ ) inicialmente planas de la barra, dejarán de ser planas. Se denomina a este fenómeno "alabeo de las secciones". En las condiciones que hemos considerado, todas las secciones de la barra tendrán el mismo alabeo, es decir, cualquier sección adoptará una forma idéntica tras la deformación, salvo un movimiento de sólido rígido (que consistirá precisamente en el giro entre secciones).

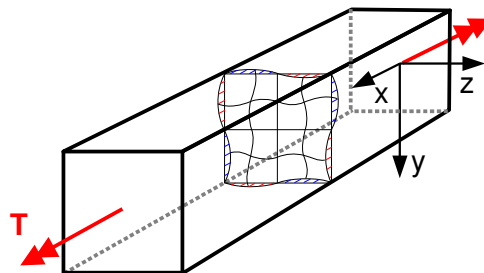


Figura 5.1: Barra cuadrada sometida a torsión uniforme. Se muestra orientativamente el alabeo de una sección cualquiera (no se muestra el giro de las secciones).

En cuanto a las tensiones, el momento torsor generará en las secciones un cierto sistema de tensiones tangenciales estáticamente equivalente a él, no existiendo tensiones normales. El modo de trabajo de la barra descrito hasta aquí se conoce como "torsión pura", o "torsión uniforme". En general se identifica como torsión uniforme aquella sollicitación de torsión que no produce tensiones normales en las secciones de la barra.

Supongamos ahora que la barra de la figura 5.1 tuviese impedidos los desplazamientos de alabeo (los de dirección x, que se muestran orientativamente) en uno de sus extremos, por ejemplo por efecto de un empotramiento en dicho extremo. Razonando a partir de la configuración de la figura 5.1, el empotramiento deberá ejercer unas tensiones  $\sigma_{xx}$  en esa sección de forma que los puntos de la misma sean restituidos a un plano. Es evidente que estas tensiones  $\sigma_{xx}$  serán autoequilibradas (de resultante y momento nulos) en la sección del empotramiento, ya que no hay otras fuerzas de dirección x (o momentos flectores) en el problema con las que puedan equilibrarse. Es también evidente, por condición de contorno del problema, que en todos los puntos de la sección opuesta al empotramiento es  $\sigma_{xx}=0$ . Por tanto, en cualquier línea paralela al eje de la barra, la tensión  $\sigma_{xx}$  evolucionará desde un valor posiblemente distinto de cero en el empotramiento, hasta un valor nulo en el extremo opuesto. Se conoce como "torsión no

uniforme” el modo de trabajo de la barra en el que la aplicación de un momento torsor provoca tensiones normales en la sección (aparte de tensiones tangenciales).

Conviene destacar que en el ejemplo anterior el impedimento al alabeo de una sección ha sido el factor decisivo que ha hecho aparecer el fenómeno de torsión no uniforme. Aunque la anterior es la más frecuente, hay otras circunstancias que pueden provocar torsión no uniforme, como por ejemplo que la barra tenga aplicado un momento torsor variable en  $x$ . En este caso, distintas porciones de la barra tenderían a tener alabeos distintos, cuya armonización hará aparecer las tensiones normales propias de la torsión no uniforme. En todo caso, la causa última de la aparición de estas tensiones es siempre algún impedimento a la tendencia al libre alabeo de la sección.

Una consecuencia de lo anterior es que las secciones que no tienen tendencia al alabeo sólo desarrollarán torsión uniforme. Como se apuntó anteriormente, las únicas secciones que en rigor disfrutan de esta característica son las circulares, tanto huecas como macizas. No obstante hay otros tipos de sección cuya tendencia al alabeo es pequeña, y generalmente pueden analizarse con suficiente aproximación bajo la hipótesis de torsión uniforme aunque tengan los desplazamientos normales impedidos en alguna sección. Tal es el caso de las siguientes formas de la sección:

- Circulares, tanto macizas como huecas (de pared delgada o no).
- Macizas, como las rectangulares, cuadradas, elípticas, etc.
- Cerradas de pared delgada, como las secciones en cajón y similares.
- Secciones formadas por rectángulos de pequeño espesor que se cortan en un punto. Como las secciones en “L” y las secciones en “T”, de pared delgada.

La brevísima introducción a la torsión que contienen los epígrafes siguientes refiere toda ella al caso de torsión uniforme.

## ***Torsión en barras de sección circular***

### **Sección circular hueca de pared delgada**

La torsión en una barra de perfil circular hueco de pequeño espesor ya fue presentada en el tema 3 al estudiar el ensayo de torsión sobre la configuración de la figura 5.2a. Reelaboramos seguidamente los resultados obtenidos allí para obtener una forma de las ecuaciones más útil para los propósitos de este epígrafe. La ecuación (3.7), de obtención inmediata, relacionaba el momento torsor  $T$  con la tensión tangencial  $\sigma_{x\theta}$ , supuesta ésta constante en  $r$ :

$$T = 2\pi r R^2 \sigma_{x\theta} \quad (5.1)$$

La fórmula anterior contiene algunas aproximaciones adicionales: por una parte el área de la corona circular se aproxima por su desarrollo en un rectángulo estrecho, y por otra la resultante de las tensiones  $\sigma_{x\theta}$  en un sector diferencial de la corona circular se toma como aplicada en  $r=R$ , que en principio hemos tomado como el radio exterior. Si se desea emplear una expresión más exacta, puede usarse la expresión original del área de la corona circular en la obtención de la fórmula, y considerar que la resultante de las tensiones pasa por el radio medio de la corona, como se indica en la figura 5.2b. Es decir:



$$T = \pi (R_e^2 - R_i^2) \sigma_{x\theta} \frac{R_e + R_i}{2} \quad (5.2)$$

No obstante, la expresión (5.2) anterior sigue conteniendo la aproximación de que  $\sigma_{x\theta}$  es constante en el espesor, por lo que sólo debe usarse para espesores delgados (y en estos casos la mejora de precisión respecto de la fórmula más sencilla (5.1) no será grande).

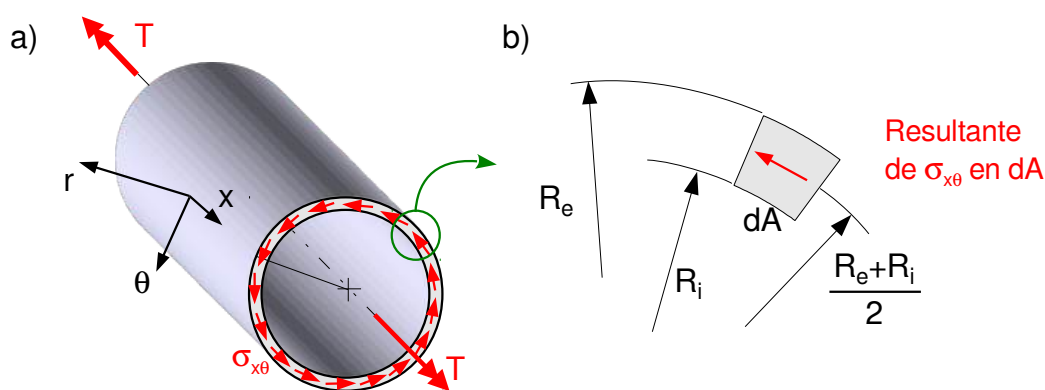


Figura 5.2: a) Barra circular hueca de pequeño espesor sometida a torsión. b) Detalle del espesor de la barra.

Por otra parte, de (3.8) y (3.9) tenemos que:

$$\sigma_{x\theta} = \gamma_{x\theta} \cdot G = \Theta \cdot G \cdot R \quad (5.3)$$

Combinando esta ecuación con la (5.1), o bien con la (5.2), se puede obtener la relación entre el ángulo girado por unidad de longitud de barra  $\Theta$  y el momento torsor  $T$ . En particular combinando (5.1) y (5.3) tenemos:

$$\Theta = \frac{T}{G \cdot 2\pi e R^3} = \frac{T}{GJ} \quad (5.4)$$

Donde  $J = 2\pi e R^3$  es el momento polar de inercia de la sección respecto del centro de áreas de la misma (que coincide con el centro de simetría geométrica de la sección).

Pensemos ahora en el problema de torsión de una barra similar al analizado hasta ahora, pero en el que el espesor no pueda suponerse delgado (figura 5.3a), o bien cuya sección sea de forma circular maciza (figura 5.3b). Existen razonamientos de tipo geométrico que justifican que en ambos casos serán nulas en todo punto todas las componentes de tensión salvo  $\sigma_{x\theta}$ . Es decir, serán  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\sigma_{xr}$ ,  $\sigma_{r\theta}$ , nulas. Dichos razonamientos pueden basarse en un concepto llamado "antisimetría", que no es objeto de estudio en este curso, combinado con algunas otras consideraciones adicionales, también de tipo geométrico. Y por supuesto también puede abordarse directamente el problema mediante un enfoque analítico basado en la teoría de la elasticidad (lo que nuevamente cae fuera del ámbito introductorio de este curso). Para los propósitos de esta exposición, simplemente téngase noticia de que la única componente de tensión no nula en este problema será  $\sigma_{x\theta}$ .

Consideremos el problema (ya sea el de pared gruesa o el del cilindro macizo) dividido en barras cuyas secciones son coronas circulares concéntricas como incida la figura 5.3c. El que sean  $\sigma_{rr} = \sigma_{rx} = \sigma_{r\theta} = 0$  implica que esas barras no se transmiten ninguna tensión entre ellas a tra-

vés de la superficie que las separa. En definitiva, cada una está sometida solamente a las tensiones  $\sigma_{x\theta}$ , trabajando de una manera análoga a la de la figura 5.2a.

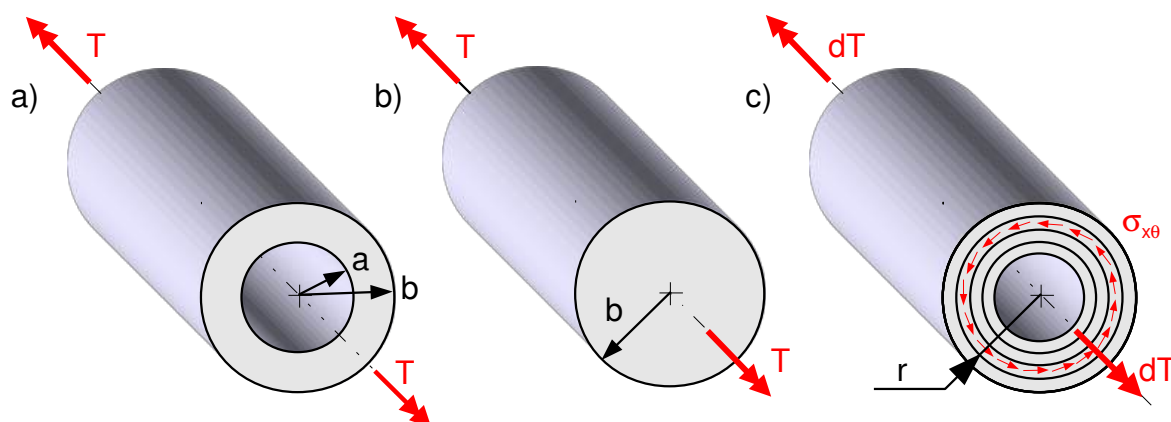


Figura 5.3: a) Sección circular de pared gruesa. b) Sección circular maciza. c) Perfiles circulares de espesor diferencial en los que puede descomponerse el problema.

Por tanto es factible concebir la solución de estos problemas como la formada por barras concéntricas superpuestas (de pared arbitrariamente delgada), que no interactúan entre sí, como indica la figura 5.3c. Para que en tal solución no existan violaciones de la continuidad del material, el ángulo girado por unidad de longitud  $\Theta$  debe ser el mismo para todas ellas. Esto implica que la tensión  $\sigma_{x\theta}$  variará con el radio, como se aprecia a partir de la ecuación (5.3), que es de aplicación a cada uno de las barras concéntricas individualmente. Cada una de estas “barras” quedaría sometida a una parte del momento torsor total.

Al considerar una de las coronas de espesor diferencial “dr”, como la mostrada en la figura 5.3c, la ecuación (5.1) es de aplicación sin más que sustituir el espesor “e” por “dr”, y el radio “R” por el valor “r” de esa corona particular. El momento torsor correspondiente será un diferencial “dT” del momento torsor total “T”. Es decir:

$$dT = 2\pi r^2 \sigma_{x\theta}(r) \cdot dr$$

Sustituyendo  $\sigma_{x\theta}$  por su valor dado por (5.3) (nuevamente para el radio “r”) se tiene:

$$dT = 2\pi \Theta G r^3 \cdot dr \quad (5.5)$$

Donde, como dijimos,  $\Theta$  ha de ser constante en r (por supuesto lo es en x). Seguidamente aplicaremos este resultado a los casos de la figura 5.3 a y b.

### Sección circular hueca de pared gruesa

Integrando la ecuación (5.5) entre los radios interior y exterior indicados en la figura 5.3a (“a” y “b” respectivamente) se llega inmediatamente a:

$$T = \pi \Theta G \frac{b^4 - a^4}{2} \quad (5.6)$$

Teniendo en cuenta que el momento polar de inercia de la corona circular vale  $J = \pi(b^4 - a^4)/2$ , la fórmula anterior admite una expresión análoga a la (5.4):

$$\Theta = \frac{T}{GJ}$$

Con el valor del giro por unidad de longitud anterior, las tensiones  $\sigma_{x\theta}$  se obtienen inmediatamente de (5.3), sin más que reemplazar R por el valor del radio:

$$\sigma_{x\theta} = \frac{T}{J} r = \frac{2T/\pi}{b^4 - a^4} \cdot r \quad (5.7)$$

Como se aprecia, las tensiones son proporcionales a la distancia "r" al centro de áreas del perfil, tal como se podía anticipar a la vista de (5.3).

### Perfil circular macizo

En este caso, hemos de integrar (5.5) entre  $r=0$  y el radio exterior,  $r=b$ . O simplemente particularizar (5.6) para  $a=0$ . Se obtiene inmediatamente que:

$$T = \pi \Theta G \frac{b^4}{2} \quad (5.8)$$

Nuevamente, dado que el momento polar de inercia del círculo vale  $J = \pi b^4/2$ , podemos escribir la ecuación anterior de la forma unificada

$$\Theta = \frac{T}{GJ}$$

Y sustituyendo ésta en (5.3) de forma análoga a como se hizo antes, o simplemente particularizando (5.7) para  $a=0$ , tenemos:

$$\sigma_{x\theta} = \frac{T}{J} r = \frac{2T}{\pi b^4} \cdot r \quad (5.9)$$

Nótese cómo los puntos centrales de la barra,  $r=0$ , no soportan tensión. Cabe decir que el material cercano a ese punto está desaprovechado, siendo desde este punto de vista más eficiente el perfil hueco. Sin embargo el hecho de que una barra maciza es más fácil de materializar contrarresta en muchos casos su desventaja en cuanto a aprovechamiento del material.

### ***Nociones sobre la torsión en barras de sección no circular***

En cuanto a la aptitud para resistir torsión, entendida como aparición de tensiones de valor moderado, bajo la acción de un momento torsor, puede decirse que las secciones más idóneas son las cerradas, de pared delgada. Cuando se compara una sección de este tipo con una sección maciza del mismo área, encontramos que el perfil hueco tiene mayor rigidez a torsión, y desarrolla menores tensiones máximas (la tensión tangencial es prácticamente la misma en todos los puntos). En particular la sección circular hueca puede ser especialmente conveniente debido tanto a que no alabea, como a que es óptima en cierto sentido, como se verá más tarde.

Las secciones huecas de pared gruesa presentarán una mayor variación de la tensión en dirección radial, con lo que presentarán mayores tensiones máximas que un perfil de pared delgada. Pero a cambio alejan el peligro de fenómenos de inestabilidad, como la abolladura de la pared

de la sección. Este tipo de secciones son también aptas para resistir torsión. Les siguen en idoneidad las secciones macizas, con los mismos inconvenientes respecto de las secciones de pared delgada que las de pared gruesa, agravados por el hecho de que los puntos más interiores de una sección maciza suelen soportar muy poca tensión en comparación con los exteriores.

Por el contrario, las secciones abiertas de pared delgada son muy poco apropiadas para soportar momento torsor, debido a que deben generar grandes tensiones. Es el caso de las secciones en "L" y en "T" (aunque tengan poca propensión a la torsión no uniforme, lo que es independiente), en "C", en "doble T", etc. Cuando se usan este tipo de secciones, muy comunes en estructura metálica, deben diseñarse las condiciones de apoyo y demás factores relevantes de forma que se evite la aparición de torsión en esas barras.

En lo que sigue presentaremos únicamente algunos resultados para torsión uniforme en barras de sección hueca, de pared delgada.

Considérese la sección cerrada de pared delgada mostrada en la figura 5.4a. Tomaremos una coordenada "s" que recorre la línea media del perfil (con un origen elegido a conveniencia), y un eje "s" que es tangente a dicha línea media en cada punto, y que tendrá el sentido creciente de la coordenada "s". El eje "n" es perpendicular al "s" en cada punto, y tiene el sentido saliente en el perfil, como se indica. El espesor de la pared en cada punto será  $e(s)$ , pudiendo variar con s. El eje "x", como es habitual, tiene la dirección longitudinal de la barra, y por tanto es perpendicular al dibujo, como se muestra en la figura 5.4b.

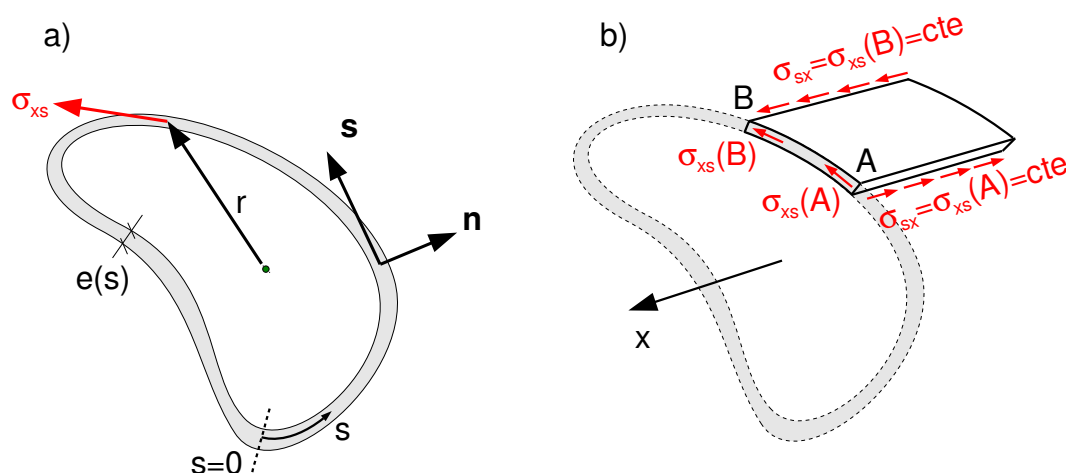


Figura 5.4: a) Coordenadas y parámetros en una sección cerrada de pared delgada. b) Trozo del perfil de cuyo equilibrio obtenemos que  $\sigma_{xs}(s) \cdot e(s) = cte$

En primer lugar, notaremos que el producto  $\sigma_{xs} \cdot e(s)$  debe ser constante a lo largo de la coordenada  $s$  del perfil. En efecto, considerando dos puntos A y B, que en general pueden tener tensiones diferentes  $\sigma_{xs}(A)$  y  $\sigma_{xs}(B)$  respectivamente, la reciprocidad de las tensiones tangenciales exige que éstas coincidan en valor con las tensiones  $\sigma_{sx}$  en las respectivas esquinas de un elemento del perfil obtenido por dos cortes  $s=cte$  y dos cortes  $x=cte$ , ambos de dimensión finita, como el mostrado en la figura 5.4b. Estas tensiones  $\sigma_{sx}$  serán constantes en  $x$  por la naturaleza del problema (en torsión uniforme las tensiones no dependen de  $x$ ). El equilibrio de fuerzas en dirección  $x$  del elemento en cuestión se expresa como:  $\sigma_{xs}(A) \cdot e(A) \cdot L = \sigma_{xs}(B) \cdot e(B) \cdot L$ , siendo "L" la dimensión en dirección "x" de la porción de perfil. Lo anterior debe suceder para dos puntos A, B, cualesquiera, por tanto se concluye que

$$\sigma_{xs}(s) \cdot e(s) = \text{cte} \quad \forall s \quad (5.10)$$

Se conoce como “flujo de tensiones” al producto  $\sigma_{xs}(s) \cdot e(s)$ , que permanece constante en  $s$ . Una consecuencia de esta propiedad del flujo de tensiones es, por ejemplo, que en secciones de espesor “ $e$ ” constante,  $\sigma_{xs}$  será también constante.

Calcularemos ahora el valor del momento torsor  $T$  producido por las tensiones  $\sigma_{xs}$ . La fuerza sobre un diferencial de área de dimensiones  $e(s) \cdot ds$  como el mostrado en la figura 5.5a, será  $\sigma_{xs}(s) \cdot e(s) \cdot ds$ , y tiene la dirección del eje “ $s$ ” en ese punto. En la expresión anterior sustituiremos  $ds$  por el vector  $\vec{ds}$ , que tendrá el sentido de “ $s$ ”, para dar carácter vectorial a la citada fuerza. El momento de esa fuerza diferencial respecto del centro de áreas será:

$$d\vec{T} = \vec{r} \times (\sigma_{xs} \cdot e \cdot \vec{ds}) = \sigma_{xs} \cdot e \cdot (\vec{r} \times \vec{ds}) \quad (5.11)$$

Como sabemos, el doble del área de un triángulo puede calcularse como el módulo del producto vectorial de dos vectores que coincidan con dos de sus lados. Por tanto el producto  $\vec{r} \times \vec{ds}$  tiene como módulo el doble del área del triángulo rayado en la figura 5.5b. Si integramos (5.11) a lo largo de toda la línea cerrada que recorre la coordenada  $s$ , tenemos el momento torsor total:

$$\int d\vec{T} = \oint_s \sigma_{xs} \cdot e \cdot (\vec{r} \times \vec{ds}) = \sigma_{xs} \cdot e \oint_s \vec{r} \times \vec{ds}$$

En donde el producto  $\sigma_{xs}(s) \cdot e(s)$  ha salido de la integral por ser constante. La integral a lo largo de la línea media del perfil de  $\vec{r} \times \vec{ds}$  representa el doble del área de todos los triángulos diferenciales similares al rayado en la figura 5.5b, y por tanto representa el doble del área interior encerrada por la línea media del perfil. Llamando  $\Omega$  a éste área, la integral tendrá el valor  $2\Omega$ .



En general se denomina “área sectorial” al área barrida por cualquier radio vector trazado desde un origen fijo, y cuyo extremo recorre una cierta porción de curva. Se trata de un tipo de magnitud que aparece con frecuencia en el estudio de la torsión. En nuestro caso, la figura 5.5b muestra que el área recién calculada se corresponde con el área sectorial barrida por “ $r$ ” al recorrer la línea media del perfil. Nos referiremos por tanto a  $\Omega$  como el “área sectorial” del perfil cerrado.

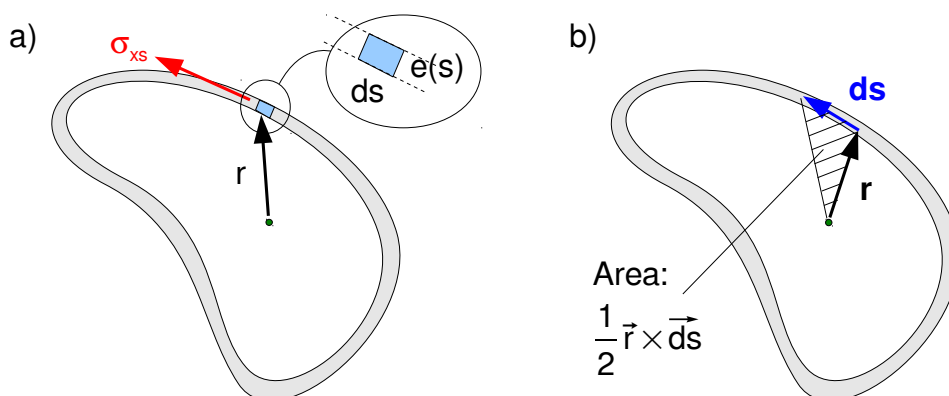


Figura 5.5: a) Elemento diferencial de área en el perfil. b) Elemento diferencial triangular de área sectorial.

En definitiva, prescindiendo del carácter vectorial de ambos miembros de la ecuación, podemos escribir el momento torsor total como:

$$T = 2\Omega \sigma_{xs} e \quad (5.12)$$

Es destacable la coincidencia entre (5.12) y (5.1). Esta última expresa que para una sección circular de pared delgada es  $T = 2\pi R^2 e \sigma_{x\theta}$ , pero el área sectorial en este perfil es  $\pi R^2$ , por lo que dicha expresión revierte a la forma  $2\Omega e \sigma_{x\theta}$  expresada en (5.12). Esto era de esperar dado que la sección tubular es un caso particular de sección de pared delgada cerrada.

Como hemos visto, el giro por unidad de longitud comparte la misma expresión (5.4), es decir  $\Theta = T/GJ$ , para todas las secciones circulares, ya sean de pared delgada, gruesa, o sección circular maciza. En esa expresión  $J$  es el momento polar de inercia. Puede demostrarse que para secciones cerradas de pared delgada el giro por unidad de longitud de barra  $\Theta$  admite una expresión similar:

$$\Theta = \frac{T}{G \cdot I_T} \quad (5.13)$$

Donde  $I_T$  es el “módulo de torsión”, que juega el mismo papel que el momento polar de inercia en la sección circular de pared delgada (tiene igualmente dimensiones de longitud elevada a la 4ª potencia), pero que no coincide numéricamente con el momento polar de inercia para formas de la sección distintas de la tubular. Los detalles de su cálculo exceden el contenido previsto de este curso, y pueden consultarse en la bibliografía [13,14]. Su valor, válido específicamente para perfiles cerrados de pared delgada, es:

$$I_T = \frac{4\Omega^2 e}{L_s} \quad (5.14)$$

Siendo  $L_s$  la longitud de la línea media del perfil cerrado, que recorre la coordenada  $s$ . Este resultado es denominado frecuentemente “Fórmula de Bredt” en la literatura.

La expresión (5.14) ciertamente no coincidirá con el momento polar de inercia de una sección cerrada de geometría general. Pero como se ha indicado, al particularizar (5.14) para una sección tubular de pared delgada, se obtiene su momento polar de inercia. Véase:  $4\Omega^2 e/L_s = 4 \cdot (\pi R^2) \cdot 2 \cdot e / (2\pi R) = 2\pi R^3 \cdot e = J$ .



Las fórmulas para sección circular, (5.4) y análogas, podían hacer pensar que es el momento polar de inercia “*per se*” la magnitud que condiciona la rigidez a torsión de un perfil cerrado en general. Pero (5.14) muestra que las magnitudes que realmente influyen en el giro relativo de las secciones en estas barras de perfil hueco de pared delgada son el área sectorial  $\Omega$  (cuanto más, mayor rigidez), y el perímetro  $L_s$  (cuanto menos, mayor rigidez). El espesor es el otro parámetro que influye (a más, mayor rigidez). La circunferencia es la figura plana que presenta una mayor relación de área a perímetro, por lo que un perfil circular de pared delgada puede considerarse el óptimo en cuanto a rigidez a torsión.

---

Los valores del módulo de torsión  $I_T$  correspondientes a perfiles comerciales normalizados (tanto abiertos como cerrados), pueden encontrarse en las tablas al uso, junto a los de otras magnitudes estáticas de la sección, como el momento de inercia, el módulo resistente, etc.

- Los contenidos acerca de la torsión presentados en este tema son muy sucintos, ya que ello es lo pretendido para el curso. Para futura ampliación pueden consultarse cualquiera de las referencias <sup>[5]</sup><sup>[9]</sup><sup>[13]</sup><sup>[14]</sup><sup>[15]</sup><sup>[16]</sup>, así como las normas <sup>[6]</sup> y <sup>[8]</sup>.

## 6.- Inestabilidad y Pandeo

### **Concepto de Inestabilidad Mecánica**

Entendemos por inestabilidad mecánica el fenómeno de pérdida de rigidez que ocurre de manera súbita en determinadas configuraciones resistentes de geometría y cargas, cuando estas últimas alcanzan un cierto valor crítico.

Según lo anterior, es claro que el sistema deja de comportarse linealmente cuando hay inestabilidad, ya que una pérdida de rigidez que ocurre “de manera súbita” es incompatible con la proporcionalidad entre cargas y desplazamientos. No obstante, el sistema se comporta usualmente de forma lineal hasta el momento de aparecer la inestabilidad (al menos en los modelos teóricos ideales), y es correcto realizar un análisis lineal de pequeños desplazamientos si la inestabilidad aún no ha aparecido.

Adicionalmente, la aplicación del modelo lineal de pequeños desplazamientos en una situación de inestabilidad suele producir predicciones extrañas que, si bien no son realistas, sirven para identificar que dicho modelo ha dejado de ser válido. De hecho el modo habitual de proceder para identificar el valor crítico de la carga, será plantear el análisis lineal de pequeños desplazamientos, y observar si para un valor concreto de la carga el modelo predice desplazamientos arbitrariamente grandes, u otro síntoma de que el modelo no es aplicable.

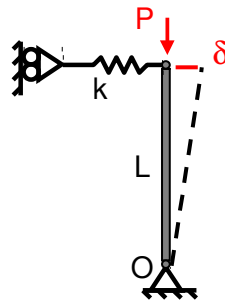


Figura 6.1: Barra rígida en una configuración susceptible de sufrir inestabilidad

Probablemente la mejor manera de comprender lo anterior es mediante un ejemplo. Considérese una barra absolutamente rígida, articulada en su extremo inferior, y sujeta en su extremo superior por un resorte, como muestra la figura 6.1. Si la geometría de la barra y el apoyo, la alineación vertical de la carga y de la barra, etc, fuesen absolutamente perfectos, sería idealmente posible aplicar una carga  $P$  de cualquier valor. Evidentemente, tal perfección no es alcanzable en la práctica, y existirán pequeñas desviaciones respecto de la configuración teórica. En nuestro problema, consideraremos por ejemplo que hay una pequeña desalineación de la barra respecto de la vertical, que hace que su extremo superior tenga un desplazamiento inicial  $\delta$ . Alternativamente, puede pensarse que la geometría es perfecta pero que ha existido una pequeña perturbación momentánea que ha desplazado el extremo superior de la barra. En cualquier caso, el equilibrio de momentos respecto de  $O$  implica:

$$P \cdot \delta = k \delta \cdot L$$



Cuya solución es, o bien la trivial  $\delta=0$ , o bien  $P=k\cdot L$ . Esta última es una solución ciertamente extraña. Por una parte,  $\delta$  no aparece, por lo que hay que pensar que es válida para cualquier valor del desplazamiento (es decir, según esto, cualquier posición es de equilibrio). Por otra parte nos impone el valor de  $P$ , cuando ésta es la carga aplicada, que podemos decidir a voluntad. Este tipo de comportamiento extraño del modelo lineal de pequeños desplazamientos, es síntoma de que existe un problema de inestabilidad. Cabe interpretar la solución del modo siguiente:

- Si  $P < kL$ , el muelle es lo bastante rígido como para restablecer la verticalidad de la barra (pensando en  $\delta$  como una perturbación). No habría desplazamiento.
- Si  $P > kL$ , el muelle no puede restablecer la verticalidad, y los desplazamientos evolucionan incontroladamente hasta valores grandes, o hasta la ruina del sistema.
- Si  $P = kL$ , entonces el muelle no puede restablecer la verticalidad, pero se da el caso límite de que tiene la rigidez justa para impedir que la pequeña perturbación  $\delta$  evolucione. En este caso, cualquier posición (valor de  $\delta$ ) es de equilibrio.

El valor  $P=kL$  es el valor crítico de la carga,  $P_{cr}$ , que produce la inestabilidad de este sistema. La figura 6.2 muestra la representación gráfica de la respuesta del sistema, correspondiendo el trazo horizontal al equilibrio indiferente encontrado para la carga crítica.

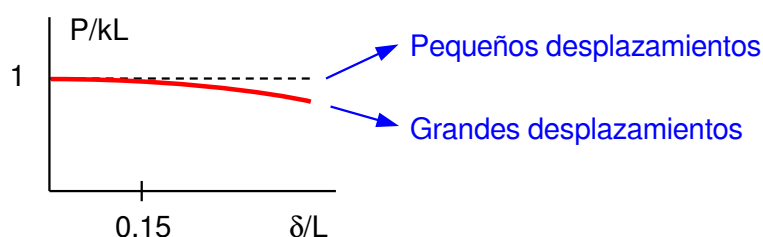


Figura 6.2: Respuesta del sistema cuando se alcanza la carga crítica

Aunque obtener la solución en régimen de grandes desplazamientos para un problema general de mecánica de sólidos puede ser muy complejo, en el sistema considerado es sencillo. Basta con no aproximar por  $L$  el brazo de par de la fuerza  $k\delta$ , sino poner su valor exacto que es ligeramente menor:  $\sqrt{L^2 - \delta^2}$ . Procediendo así, se obtiene que la gráfica no es horizontal, sino ligeramente descendente (en todo caso no lineal), como también muestra la figura. Un tramo descendente en este tipo de gráficas significa que “hace falta menos fuerza para obtener más desplazamiento”, y se recorre de forma incontrolada cuando se han aplicado unas cargas fijas.



Los fenómenos de inestabilidad están asociados a la compresión, normalmente de elementos esbeltos. La tracción tiende más bien a corregir las desalineaciones, tal como sucedería en este ejemplo.

## Carga Crítica de Euler

El problema clásico de Euler se muestra en la figura 6.3a. Consta de una barra recta biapoyada sometida a compresión centrada de valor  $N$ . Como en el ejemplo previo, supondremos una pequeña perturbación del sistema, que en este caso tiene la forma de una función  $u_{oy}(x)$ . La misma describe una pequeña desviación de la barra respecto de la geometría recta. Si damos un corte ideal a la barra por una sección  $x=cte$  como el de la figura 6.3b, y consideramos la por-

ción izquierda de la misma, es claro que el equilibrio requiere la presencia de un esfuerzo axial de compresión de valor  $N$ , y de un momento flector  $M_z = N \cdot u_{oy}(x)$ .

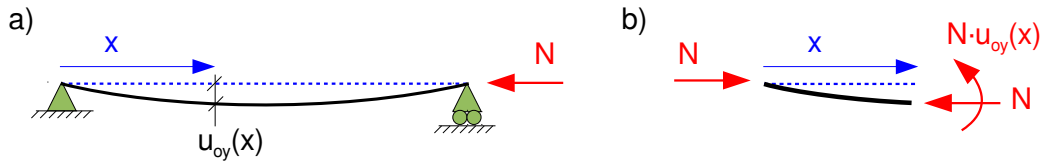


Figura 6.3: Problema clásico de pandeo de Euler

Pretendemos formular la ecuación anterior en función de los desplazamientos. Para ello podemos combinar la ecuación (4.8b) y la (4.12):

$$\begin{aligned} M_z &= EI_z \Phi_z''(x) \Rightarrow M_z = -EI_z u_{oy}'' \\ u_{oy}' &= -\Phi_z(x) \end{aligned}$$

Que llevada a nuestra expresión del momento flector permite escribir:

$$u_{oy}'' + \frac{N}{EI_z} u_{oy} = 0 \quad (6.1)$$

La anterior es una ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes, cuya solución podemos obtener fácilmente mediante las técnicas estándar aplicables a este tipo de ecuaciones. La solución es:

$$u_{oy} = C_1 \sin \left[ x \sqrt{\frac{N}{EI_z}} \right] + C_2 \cos \left[ x \sqrt{\frac{N}{EI_z}} \right] \quad (6.2)$$

Imponiendo que en  $x=0$  es  $u_{oy}=0$  (apoyo izquierdo) se obtiene  $C_2=0$ .

Imponiendo que en  $x=L$  es  $u_{oy}=0$  (apoyo derecho), debe ser o bien  $C_1=0$  (solución trivial de desplazamientos nulos), o bien

$$L \sqrt{\frac{N}{EI_z}} = n\pi \quad (6.3)$$

donde "n" es un número natural. Nótese la similitud del ejemplo sencillo del epígrafe anterior con este problema: En lugar de quedar la carga  $N$  a nuestra elección, el modelo indica que sólo existen posiciones de equilibrio para ciertos valores concretos de  $N$ . Adicionalmente, no hemos podido determinar  $C_1$ , por lo que los desplazamientos pueden tener cualquier amplitud, en este caso con la forma de seno obtenida en (6.2). Estos son los "síntomas" típicos que un modelo lineal presenta en un caso de inestabilidad. En el caso de barras comprimidas que nos ocupa, se llama "Pandeo" a dicho fenómeno de inestabilidad. Para  $n=1$ , (6.3) nos ofrece el menor valor de la carga  $N$  para la que el equilibrio es posible según este modelo lineal, y ésta será la carga crítica para el problema de Euler:

$$N^{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \quad (6.4)$$



Si no hay otros condicionantes, el pandeo se producirá de modo que la barra sufra flexión en la dirección que menor rigidez presente. Debe entenderse que el momento de inercia  $I_z$  es el menor de la sección.

La interpretación del comportamiento de esta viga es también análogo al del problema usado como ejemplo en el epígrafe anterior:

- Si  $N < N^{cr}$ , la barra tiene rigidez suficiente para restablecer su posición recta.
- Si  $N = N^{cr}$ , entonces cualquier amplitud del desplazamiento es compatible con el equilibrio, quedando aquella indeterminada.
- Si  $N > N^{cr}$ , no puede haber posición de equilibrio más que la trivial. Como se indicó no es realista pensar en este equilibrio, ya que siempre habrá imperfecciones.

Por supuesto, no deseamos que una barra de una estructura real sufra este fenómeno de inestabilidad, que llamamos pandeo. Para ello nos aseguraremos de que la misma no esté sometida a un esfuerzo axial de compresión que se acerque al valor crítico.

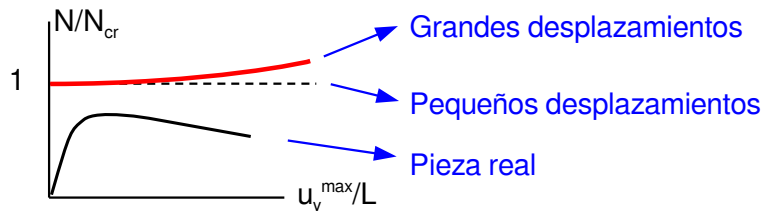


Figura 6.4: Problema de Euler: Comparación orientativa del comportamiento teórico y real.

Merece la pena apuntar que en el problema de Euler, y a diferencia del ejemplo sencillo del epígrafe anterior, el comportamiento postcrítico según un modelo de grandes desplazamientos consta de un trazo ascendente (no descendente). Pero como indica la figura 6.4, las imperfecciones de las piezas reales hacen que ni siquiera pueda alcanzarse la carga crítica.

## Longitud de Pandeo

Es de interés conocer la carga crítica de pandeo para otras condiciones de sustentación de la barra distintas de la del problema de Euler. El camino natural para ello es plantear y resolver la ecuación diferencial correspondiente, como se ha hecho en ese problema. Sin embargo, es posible obtener la carga crítica para unos cuantos casos frecuentes de sustentación de la barra, sin más que aplicar unos razonamientos sencillos que se presentan a continuación.

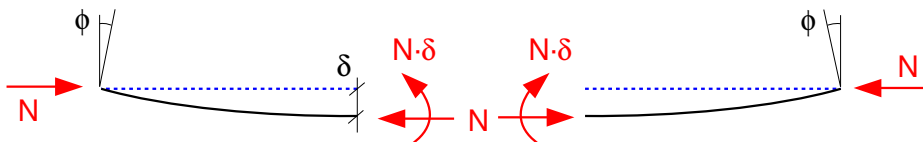


Figura 6.5: Dos mitades de la barra del problema de Euler

Como indica la figura 6.5, aislemos cada una de las dos mitades de la barra de Euler, poniendo sobre cada una las acciones que la otra parte del sólido, y en su caso el apoyo, ejercen sobre ella, y prescindamos de los apoyos. En primer lugar, observemos la mitad derecha, y pensemos en unas condiciones de contorno en desplazamientos que no alteren la forma en que está trabajando. Su extremo izquierdo tiene giro nulo, una fuerza y un momento, lo que es compatible con un empotramiento. El extremo derecho gira y se desplaza respecto del izquierdo, lo que

es compatible con un extremo libre. En resumen, la figura 6.6 muestra un problema elástico que es totalmente equivalente a esta mitad derecha considerada.

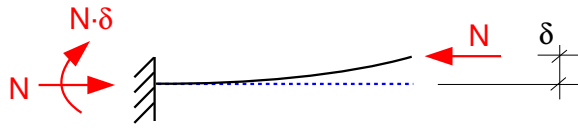


Figura 6.6: Problema equivalente a la mitad derecha de la barra de Euler

Es evidente que la mitad derecha de la barra de Euler pandeará a la misma carga crítica que la barra de Euler completa. Por lo tanto el problema de la figura 6.6 también pandeará para esa misma carga crítica. Simplemente, si llamamos  $L$  a la longitud de la barra 6.6, el problema de Euler correspondiente tendría longitud  $2L$ , y por tanto su carga crítica es

$$N^{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{(2L)^2} \quad (6.5)$$

Que es la carga crítica para una barra empotrada en un extremo y libre en el otro, y que hemos encontrado sin necesidad de aparato matemático.

Consideremos nuevamente la mitad derecha de la barra mostrada en la figura 6.5. Si damos un giro de  $180^\circ$  al problema respecto de un eje horizontal contenido en el plano del dibujo, obtenemos un nuevo problema, que en su extremo derecho presenta el axil  $N$ , y un giro de la sección de valor  $\phi$  y sentido horario. Estas son las mismas condiciones que existen en el extremo izquierdo de la mitad izquierda del problema de Euler, por tanto podríamos pensar que el axil en este último se ejerce mediante reacción del extremo derecho del problema girado, y en la unión no habría discontinuidad ya que el giro es el mismo. Esto se ilustra en la figura 6.7.

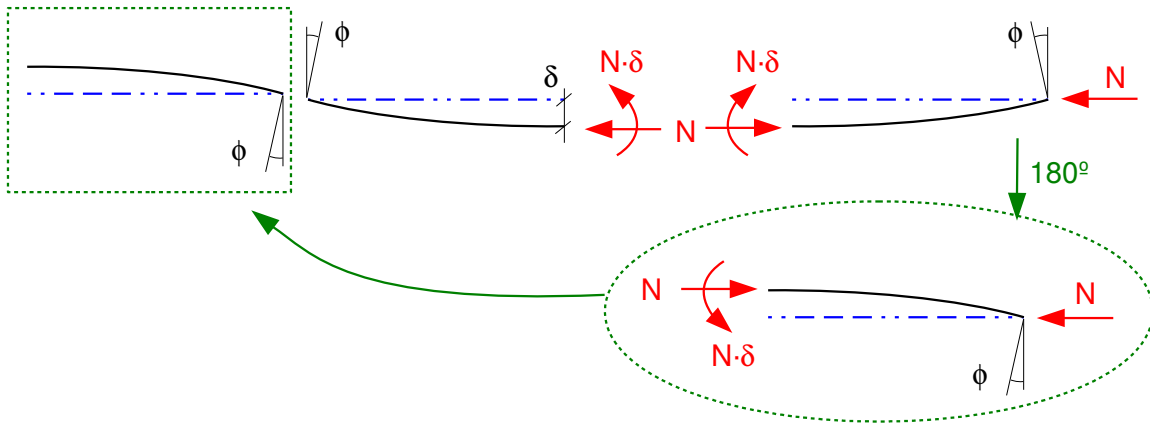


Figura 6.7: Composición de un nuevo problema a partir de las mitades del problema de Euler

Si ahora tomamos la mitad izquierda del problema de Euler, y lo giramos de nuevo  $180^\circ$ , apreciaríamos análogamente que el giro de su extremo izquierdo coincide con el del extremo derecho de la mitad derecha del problema de Euler, por lo que (dado que tienen el mismo esfuerzo) podemos “conectar” estos extremos sin que se viole la continuidad material ni el equilibrio. El problema completo así construido se muestra en la figura 6.8. En ella se han puesto como condiciones de contorno empotramientos en ambos extremos, por los mismos motivos que en la barra empotrada analizada más arriba. Adicionalmente, los dos extremos de barra quedan a la misma altura, por lo que el segundo empotramiento no viola esta condición.

Al igual que antes, razonamos que el problema de la figura 6.8 pandeará para la misma carga crítica que el problema original de Euler, ya que está construido a base de la misma solución.

Si ahora llamamos  $L$  a la longitud de la barra biempotrada, el problema de Euler tendría una longitud de  $0.5L$ , por lo que su carga crítica de pandeo es

$$N^{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{(0.5 \cdot L)^2} \quad (6.6)$$

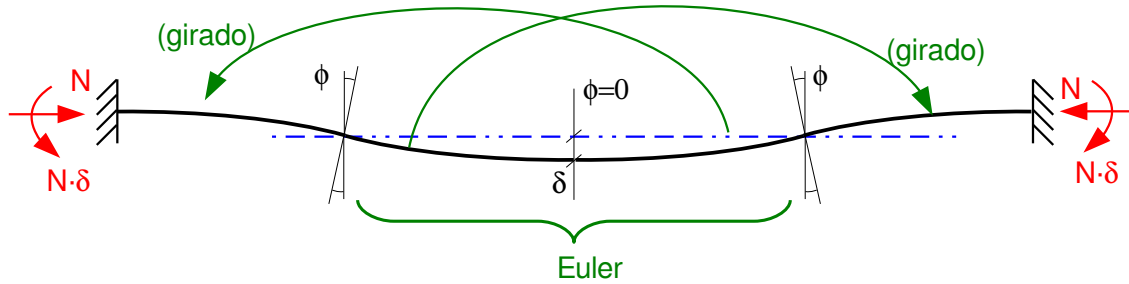


Figura 6.8: Barra biempotrada a partir de las mitades del problema de Euler

De la forma de (6.5) y de (6.6), podemos inducir que para otros tipos de sustentación, la carga crítica tendrá una forma análoga, pero poniendo la longitud de la barra multiplicada por un coeficiente  $\beta$ , que llamamos Coeficiente de Pandeo, que en el caso de barra biapoyada vale  $\beta=1$ , en el caso de barra empotrada vale  $\beta=2$ , y en el caso de biempotrada vale  $\beta=0.5$ . Por tanto, en general:

$$N^{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{(\beta \cdot L)^2} \quad (6.7)$$

Siendo  $L$  la longitud real de la barra. Al producto  $\beta L$  se le llama Longitud de Pandeo. Cabe apuntar que la longitud de pandeo de la barra tiene una gran influencia en la carga crítica, ya que aparece elevada al cuadrado. Por ello, la posibilidad (si existe) de diseñar con barras más cortas siempre es una alternativa interesante a considerar si tenemos problemas de pandeo en una estructura. También podemos modificar la longitud de pandeo, por ejemplo sujetando un punto intermedio. Otras opción es aumentar la inercia de la sección.

Para otras condiciones de sustentación, el coeficiente de pandeo  $\beta$  adopta otros valores, aunque para obtenerlo puede ser en general necesario realizar la integración de la ecuación diferencial correspondiente. Por ejemplo, se obtiene que para la configuración de barra empotrada en un extremo y apoyada en el otro, el coeficiente de pandeo vale  $\beta=0.7$ , como indica la figura 6.9. En esta figura se muestra también el hecho de que la longitud de pandeo coincide con la distancia entre puntos de inflexión (de derivada segunda nula) de la configuración deformada, los cuales se corresponden con puntos de momento flector nulo (véase el desarrollo de la ec. (6.1)).

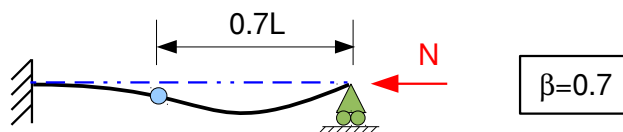


Figura 6.9: Longitud de pandeo para barra empotrada-apoyada. Coincidencia con la distancia entre puntos de momento nulo.



Nótese que aunque el problema tiene cierta similitud con el que se obtendría de “ensamblar” la figura 6.7, no se trata del mismo problema debido a la distinta altura de apoyos que resultaría en aquél.

## Esbeltez Mecánica

El modelo de Euler hace uso de las ecuaciones de flexión que hemos presentado en este curso, las cuales se basan en el comportamiento lineal elástico del material. Es evidente por tanto que el modelo de Euler no será válido si existe plastificación del material antes de ocurrir el pandeo de la barra.

Aunque generalmente desearemos que no ocurra ninguna de las dos cosas (pandeo ni plastificación), es interesante poner de manifiesto explícitamente el límite de validez del modelo de Euler, lo que es el objetivo principal de este epígrafe.

Consideremos una barra sometida a compresión centrada. Justamente antes de pandear, los puntos de la barra tienen una tensión, que llamaremos crítica, igual a

$$\sigma^{cr} = \frac{N^{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{A(\beta L)^2} = \pi^2 E \frac{I/A}{L_p^2} = \frac{\pi^2 E}{(L_p/i)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (6.8)$$

En donde hemos utilizado como magnitudes auxiliares el Radio de Giro de la sección, definido de la manera usual por  $i = \sqrt{I/A}$ , y la Esbeltez Mecánica, definida por

$$\lambda = \frac{L_p}{i} = \frac{\beta L}{\sqrt{I/A}} \quad (6.9)$$

El rango de valores de esta esbeltez en barras usuales para estructuras comprende desde 20 a 250, orientativamente. No debe confundirse esta esbeltez con la esbeltez geométrica, que es la relación de la longitud al canto (o mayor dimensión) de la sección, y que varía típicamente entre 10 y 40.

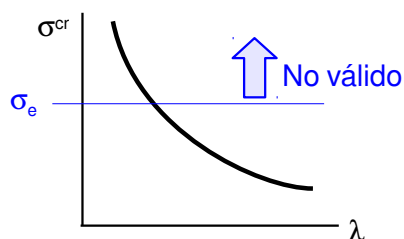


Figura 6.10: Hipérbola de Euler, y zona no válida de la misma.

De acuerdo con (6.8), si representamos la tensión crítica frente a la esbeltez, obtenemos una hipérbola, que se conoce como “Hipérbola de Euler”. Como decíamos anteriormente, el modelo de Euler no es válido si la tensión crítica de pandeo es mayor que el límite elástico. La figura 6.10 representa la hipérbola de Euler y muestra la zona de validez de la misma. Como se indica, para esbelteces pequeñas de la barra esta curva no es válida, porque la tensión crítica

predicha por el modelo supera el límite elástico. Existen otros modelos teóricos para predecir el pandeo en el rango de esbelteces pequeñas donde el modelo de Euler no es válido, pero su estudio cae fuera del ámbito de este curso.

### ***Método de coeficientes parciales***

El modelo de Euler tiene un indudable valor desde el punto de vista teórico, ayudando a comprender claramente las causas que provocan el fenómeno del pandeo. A pesar de ello, sus predicciones pueden resultar muy optimistas cuando se estudian barras reales de estructuras. Ello es debido fundamentalmente a las numerosas imperfecciones que un montaje real suele conllevar, incluyendo la desalineación de la carga respecto del eje de la barra, y las propias imperfecciones de la geometría de la barra.

Por lo anterior, y a pesar del carácter introductorio de este curso, se considera interesante dar noticia de alguno de los métodos más realistas, que tienen en cuenta las imperfecciones típicas en las que se incurre en la materialización de las estructuras. La norma vigente CTE, incluye un método (basado en “coeficientes parciales”, método usado extensivamente en muchos otros aspectos de la norma) que es válido para predecir el pandeo de barras de acero en todo el rango de esbelteces, y que es fruto de amplios trabajos tanto teóricos como experimentales. Básicamente plantea que la “Resistencia a Pandeo de la Barra”, que llama  $N_{b,Rd}$ , es una fracción  $\chi$  de la resistencia a plastificación de la misma, ésta última minorada por un coeficiente de seguridad. Es decir:

$$N_{b,Rd} = \chi \cdot A \cdot f_{yd} \quad (6.10)$$

Siendo  $f_{yd}$  el límite elástico minorado:  $f_{yd} = \sigma_e / 1.05$ , y  $A$  el área de la sección.

El coeficiente  $\chi$ , que se llama “Coficiente de Reducción por Pandeo” se obtiene a su vez de otro parámetro  $\bar{\lambda}$ , llamado “Esbeltez Reducida”, que es diferente de la esbeltez geométrica y de la esbeltez mecánica, definidas anteriormente. La esbeltez reducida se define como ( $N_{cr}$  es la carga crítica de Euler, tal como se obtuvo en la ecuación (6.7) ):

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A \sigma_e}{N_{cr}}} \quad (6.11)$$

El coeficiente de reducción por pandeo  $\chi$  se obtiene de la esbeltez reducida  $\bar{\lambda}$  a través de la gráfica de la figura 6.11. Como se aprecia, la curva  $\chi-\bar{\lambda}$  no es única, sino que hay cinco diferentes. Estas curvas permiten tener en cuenta la influencia de otros factores que pueden considerarse de menor importancia que la esbeltez reducida, pero que afectan de manera no despreciable a la resistencia a pandeo. Estos son factores tales como la calidad del acero, el espesor de las paredes de la sección, si el pandeo se produce según el eje de inercia fuerte o el débil, etc. Como idea orientativa, la mayoría de los casos usuales que involucran a perfiles comerciales, incluyendo agrupaciones soldadas de los mismos, requerirán el uso de una de las tres curvas centrales, “a”, “b”, o “c”. La curva de entrada particular que procede usar en cada caso se obtiene de otras tablas que proporciona la norma, y que se reproducen en el Apéndice D.

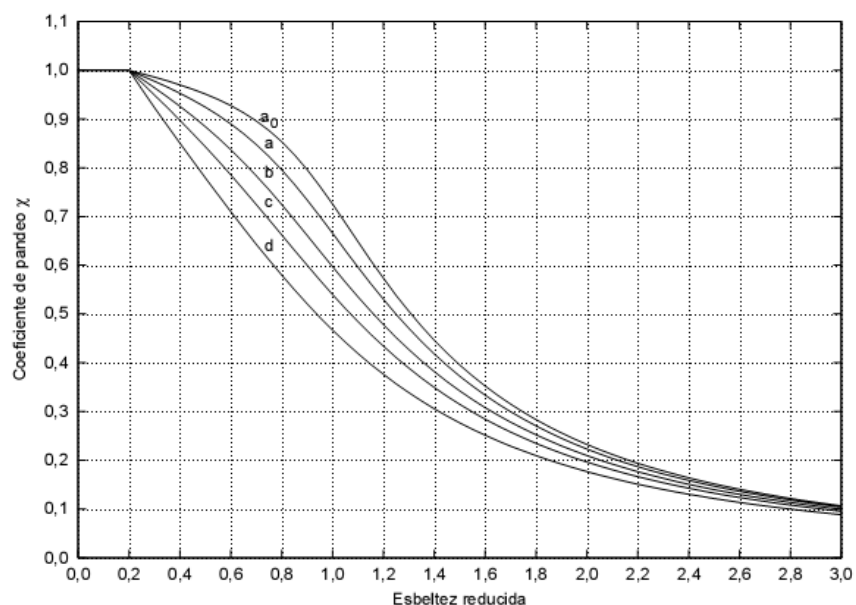


Figura 6.11: Coeficiente de reducción por pandeo en función de la esbeltez reducida (tomada del CTE)

## Otros fenómenos de Inestabilidad

En las barras de estructuras metálicas pueden existir otros problemas de inestabilidad distintos del pandeo de las barras. Los mismos siempre están asociados de una u otra manera a la compresión de elementos esbeltos. En este epígrafe daremos noticia de dos de ellos, cuales son el pandeo lateral, y la abolladura. El estudio de estos fenómenos se considera “avanzado”, y poco apropiado para ser presentado con detalle en un curso de carácter introductorio. Simplemente se intenta dar noticia aquí de la existencia de dichos fenómenos, de una manera tan sucinta e intuitiva como sea posible.

### Pandeo Lateral

También llamado “vuelco”, es un fenómeno que aparece preferentemente en vigas sometidas a flexión, y cuya rigidez a torsión sea escasa (es decir, en perfiles abiertos de pared delgada).

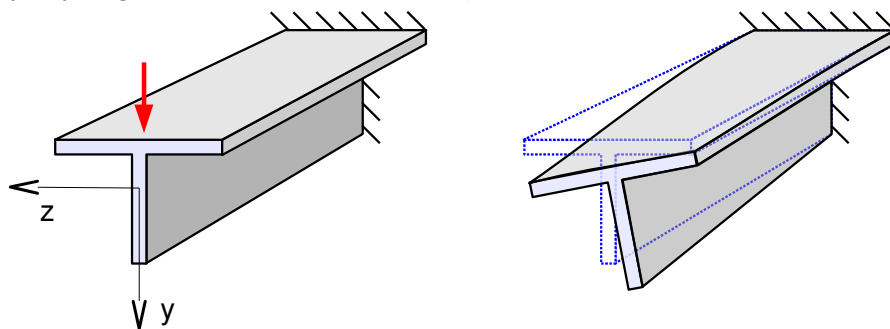


Figura 6.12: Ejemplo de vuelco de una viga en "T".

Consideremos un problema usual de flexión, con cargas de dirección “y”, y movimientos debidos a la flexión también de dirección “y”, tal como el de la figura 6.12. Sabemos que la flexión



produce compresiones en una parte de la sección, y tracciones en la otra. La zona que soporta compresiones, si es esbelta, puede tender a pandear, y puede que dicha tendencia sea a hacerlo con movimientos de dirección "z". Tal es el caso del ejemplo de la figura.

La zona de la sección que está traccionada se opondrá a estos movimientos que "sacan a la viga de su plano" (recuérdese que la tendencia de las tracciones es restablecer las geometrías rectas en lugar de lo contrario), por lo que aparece un efecto de torsión en la sección. De ahí que la rigidez a torsión de la sección influya en este fenómeno.

Si se considera una viga sometida a flexión pura, existe un valor crítico del momento flector,  $M_{cr}$ , para el cual se produce el pandeo lateral de una viga, de manera análoga a como existía un esfuerzo axial  $N_{cr}$  que provocaba el pandeo de una barra. De manera cualitativa, los parámetros que afectan fundamentalmente a este momento crítico  $M_{cr}$  son:

- La longitud de la viga. El momento crítico  $M_{cr}$  es menor cuanto mayor sea la longitud.
- La rigidez a torsión de la sección  $GJ_T$ . El momento crítico  $M_{cr}$  es mayor cuanto mayor sea la rigidez a torsión.
- La rigidez a flexión de la sección  $EI_y$ . El momento crítico  $M_{cr}$  es mayor cuanto mayor sea la rigidez a flexión. El eje "y" es en este caso el perpendicular al momento flector original (es el caso de la fig. 6.12).

Las tendencias cualitativas anteriores también se mantienen en el caso más frecuente de flexión simple.

### **Abolladura**

La abolladura es un fenómeno de inestabilidad que puede ocurrir en las placas que forman los perfiles metálicos. Típicamente es el alma el elemento más propenso a sufrir este problema, aunque puede ocurrir en cualquier placa delgada que esté sometida a compresión, incluidas las alas. Como su nombre indica, se manifiesta por la aparición de "bollos" o protuberancias que aparecen en la placa debido a que sus puntos se salen fuera del plano inicial por efecto de las compresiones en el plano (de manera análoga a como el pandeo hace que compresiones de la dirección de la barra provoquen que ésta abandone su geometría recta).

Como conocemos, es el alma quien desarrolla mayoritariamente las tensiones equivalentes al esfuerzo cortante. Puede ocurrir abolladura en la placa que hace funciones de alma cuando las máximas tensiones de compresión asociadas al esfuerzo cortante son lo bastante grandes como para que la placa "se abolle". La figura 6.13a muestra el efecto de una tensión cortante constante sobre un trozo de alma en una "doble T". Las máximas compresiones (tensión principal II) ocurren a  $45^\circ$  y serían las responsables de la abolladura. De ocurrir ésta, se manifestaría en ondulaciones orientadas en dirección sensiblemente perpendicular a la máxima compresión. Para evitar este efecto de abolladura del alma se disponen rigidizadores en forma de placas soldadas a ella, comúnmente de forma perpendicular al eje de la barra ("rigidizadores transversales"). La figura 6.13b muestra un ejemplo de estos rigidizadores, que se suelen disponer a ambos lados del alma, aunque en la figura aparecen solamente a un lado por claridad del dibujo.

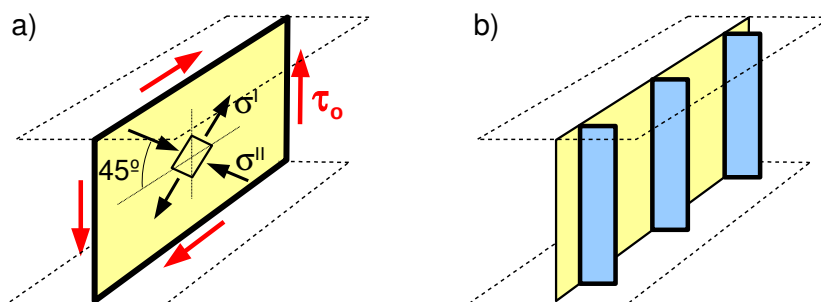


Figura 6.13: a) Máximas tensiones de compresión ( $|\sigma^i| = |\tau_0|$ ) debidas a una tensión cortante en el alma. b) Ejemplo de rigidizadores transversales.

Otra acción susceptible de producir abolladura en el alma es una carga concentrada, ya sea ésta la reacción de un apoyo u otra carga directamente aplicada, siendo especialmente propenso el caso en que el alma queda comprimida entre dos elementos. Este tipo de carga produce tensiones  $\sigma_{yy}$  (que hemos despreciado en el modelo de barras) que pueden ser localmente intensas, y provocar abolladura en la placa que ha de soportarlas, que generalmente es el alma. Estas cargas también pueden producir otros fenómenos indeseables, como por ejemplo la plastificación del alma.

- El fenómeno de inestabilidad por pandeo abarca más aspectos que los básicos contemplados aquí. Para futura profundización en el estudio teórico de dichos aspectos pueden consultarse por ejemplo las referencias <sup>[5]</sup> y <sup>[13]</sup>. Siendo los fenómenos de pandeo, y de inestabilidad en general, especialmente sensibles a los errores de tolerancia, montaje y ejecución que inevitablemente ocurren, conviene considerar la conveniencia de utilizar métodos propuestos por la normativa <sup>[6][8]</sup>, que incluyen el efecto probable de dichos errores. Es por ello que incluso en esta breve introducción se ha hecho una referencia básica a los métodos propuestos en las normas.

## 7.- Estructuras de Barras

### Concepto de Hiperestaticidad

Comenzaremos definiendo el número de grados de libertad (abreviadamente gdl) de un sistema mecánico de elementos indeformables, como el número de parámetros necesarios para especificar su posición en el espacio.

Por ejemplo, si consideremos el problema de un sólido indeformable en el plano, sin apoyos, como el de la figura 7.1a, su posición queda especificada mediante las dos coordenadas  $(x,y)$ , de un punto P, y el ángulo que forme una recta trazada en el sólido con el eje x, entre otras posibilidades. En total son tres parámetros, luego el sistema tiene tres grados de libertad. Si disponemos un apoyo fijo en el punto P, como en la figura 7.1b, sólo necesitaremos un ángulo para especificar la posición del sistema, luego éste tiene ahora un gdl. Decimos que el apoyo fijo ha restringido  $3-1=2$  grados de libertad. Si el apoyo es móvil como en la figura 7.1c (en lugar de fijo), necesitamos posicionar la coordenada x del apoyo y el ángulo, con lo que el sistema tiene 2gdl. Decimos que el apoyo móvil restringe  $3-2=1$  gdl.

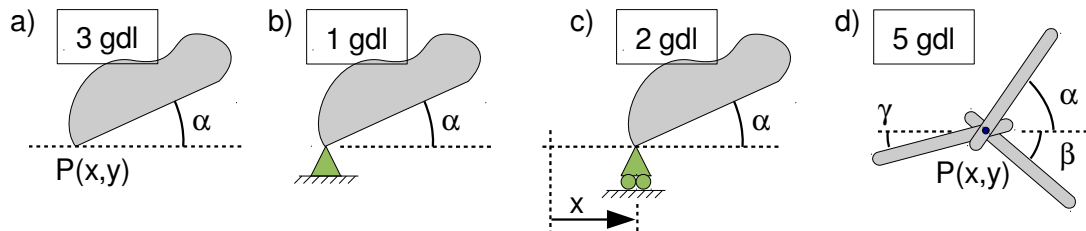


Figura 7.1: Número de grados de libertad de algunos sistemas mecánicos sencillos

Otro ejemplo más se muestra en la figura 7.1d. Consta de tres barras en el plano unidas mediante una articulación por uno de sus extremos. Necesitamos dos coordenadas  $(x,y)$  para especificar la posición del punto P de la articulación, y un ángulo para posicionar cada barra conectada al apoyo. En total el sistema tiene 5gdl. Antes de ejecutarse la articulación, las tres barras libres en el plano tenían  $3 \times 3 = 9$ gdl. Por tanto decimos que la articulación ha restringido  $9-5=4$  gdl.

Los ejemplos anteriores muestran cómo los apoyos exteriores por una parte, y las conexiones entre elementos del sistema por otra, restringen algunos de los grados de libertad de los sólidos implicados. Si el sistema tiene exactamente cero grados de libertad, se dice que es isostático.

Si el sistema tiene un número negativo de grados de libertad, se dice que es hiperestático. Se llama grado de hiperestaticidad al número de grados de libertad cambiado de signo.

La figura 7.2 muestra algunos ejemplos de sistemas isostáticos e hiperestáticos.

Los sistemas reales que tienen un número positivo de grados de libertad se corresponden con mecanismos de distintos tipos. Por supuesto, deseamos que nuestras estructuras de barras no

tengan grados de libertad, ya que precisamente tratamos de construir un sistema que tenga rigidez frente a la aplicación de cargas. Por tanto hablamos solamente de estructuras isostáticas, o bien hiperestáticas.

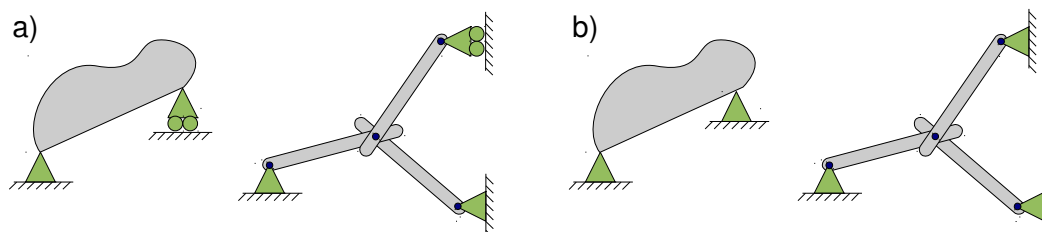


Figura 7.2: a) Sistemas isostáticos. b) Sistemas hiperestáticos (de grado 1)

Vamos a obtener una fórmula general que permita calcular el número de grados de libertad de una estructura de barras en el plano (será un número negativo, que indicará el grado de hiperestaticidad). Razonamos del siguiente modo:

- Antes de ensamblar las barras de la estructura, o poner apoyos, tenemos las “b” barras como sólidos independientes en el plano, cada una con 3 gdl. Por tanto, antes de ensamblar la estructura tenemos  $3b$  grados de libertad.
- Si tomamos  $b_i$  barras y ejecutamos entre ellas un nudo articulado (el nudo “i”, en el que confluyen esas  $b_i$  barras), podemos posicionar la primera barra libremente (no pierde gdl), pero la segunda queda con un solo gdl, luego pierde dos (ha habíamos conectado un sólido a una articulación fija en la figura 7.1b). La tercera barra queda igualmente con un grado de libertad, luego pierde dos, y así sucesivamente. La ejecución del nudo articulado restringe dos gdl por cada barra que confluya en el nudo, a partir de la primera. Luego se restringen  $2(b_i-1)$  grados de libertad. Puede compararse este resultado con la figura 7.1d.
- Un nudo rígido es aquel en el que todos los extremos de barra que confluyen comparten el desplazamiento y el giro. Si tomamos  $b_i$  barras y ejecutamos entre ellas un nudo rígido (el nudo “i”, en el que confluyen las  $b_i$  barras), como antes podemos posicionar la primera barra libremente (no pierde gdl), pero la segunda queda sin libertad de movimiento una vez conectada, luego ha perdido sus 3 gdl. La tercera que conectemos también perderá sus 3 gdl, y así sucesivamente. La ejecución del nudo rígido restringe tres gdl por cada barra que confluya en el nudo, a partir de la primera. Luego se restringen  $3(b_i-1)$  grados de libertad. La figura 7.3 ilustra un caso de ejecución de nudo rígido con cuatro barras (inicialmente teníamos  $4 \times 3 = 12$  gdl, tras ensamblar resulta un conjunto rígido, por tanto con 3 gdl, luego se han restringido  $12 - 3 = 9$  gdl).
- Finalmente, un apoyo móvil, fijo, o un empotramiento, restringen 1, 2, o 3 gdl, respectivamente.

Por tanto el número de grados de libertad de la estructura será finalmente:

$$3 \cdot b - \sum_{\text{articulados}} 2(b_i - 1) - \sum_{\text{rígidos}} 3(b_i - 1) - 3e - 2f - 1m \quad (7.1)$$

Siendo “b” el número total de barras,  $b_i$  el número de barras que confluyen en el nudo “i” (que puede ser articulado o rígido), “e” el número de empotramientos, “f” el número de apoyos fijos, y “m” el número de apoyos móviles.

Como se ha dicho, el grado de hiperestaticidad es el número de gdl cambiado de signo. El resultado dado por (7.1) es el número de gdl, y será negativo si se trata de una estructura. El grado de hiperestaticidad es ese número cambiado de signo.

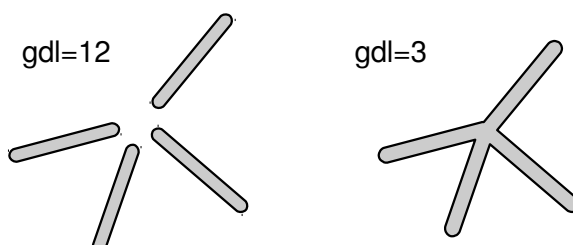


Figura 7.3: Nudo rígido. Antes de ensamblar, las barras tienen 12 gdl. Después de ensamblar forman un conjunto rígido, con 3gdl.

El mayor interés de calcular el grado de hiperestaticidad reside en que en una estructura isostática bien concebida es posible calcular las reacciones en los apoyos y los esfuerzos en las barras sin utilizar más ecuaciones que las del equilibrio estático. El simple cálculo del grado de hiperestaticidad nos permite saber de antemano si podremos realizar lo anterior o no, lo que es conveniente saber antes de abordar una resolución.

Para facilitar el cálculo mental (sin usar (7.1)) del grado de hiperestaticidad, podemos distinguir aún entre hiperestaticidad interior y exterior de las estructuras. Centrándonos en el caso de estructuras planas de barras, pueden aplicarse las siguientes definiciones:

- Hiperestaticidad exterior es el número de grados de libertad que restringen los apoyos, menos 3.
- Hiperestaticidad interior es el grado de hiperestaticidad que tendría la estructura si prescindimos de sus apoyos, más 3.

El grado de hiperestaticidad exterior se identifica fácilmente, ya que coincide con los gdl restringidos por la sustentación, a partir del tercero. La hiperestaticidad interior suele ser fácilmente apreciable si consideramos la estructura sin apoyos y realizamos mentalmente alguna operación que libere grados de libertad, como quitar (o “romper”) una barra o introducir una articulación. Si es posible hacerlo y que la estructura continúe siendo un conjunto rígido, es que es internamente hiperestática. El número de gdl que podamos liberar antes de que la estructura deje de ser un conjunto rígido, coincide con el grado de hiperestaticidad interna.

El grado de hiperestaticidad (total) de una estructura siempre puede obtenerse sumando sus grados de hiperestaticidad interior y exterior.

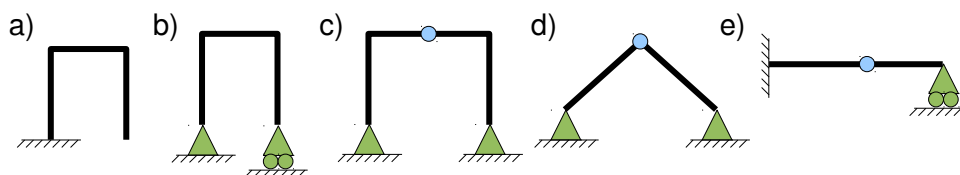


Figura 7.4: Ejemplos de estructuras isostáticas (“bien concebidas”).

Anteriormente hemos hecho referencia a que en una estructura isostática “bien concebida”, será posible calcular los esfuerzos usando sólo las ecuaciones de la estática. El apelativo de “bien concebida” refiere a que pueda resistir las cargas sin experimentar movimientos relativos de tipo mecanismo entre sus partes. Generalmente, los casos de estructuras isostáticas de tipo mecanismo entre sus partes. Generalmente, los casos de estructuras isostáticas externa e internamente (figura 7.4a, b), y algunas estructuras isostáticas que son externamente

hiperestáticas, pero que internamente son “mecanismos” (figura 7.4c, d, e), cumplen con esa condición. En todos los casos isostáticos de la figura 7.4 es posible el cálculo de reacciones y esfuerzos usando las ecuaciones de la estática, para unas cargas dadas.

Sin embargo, es difícil dar un criterio universal acerca de cuando una estructura está “bien concebida”, basándonos solamente en el grado de hiperestaticidad global interno y externo. La casuística de estructuras complejas que pueden tener uniones “sobrantes” en unas zonas y tener posibilidades de movimiento relativo en otras, es demasiado compleja. Ni siquiera el que el grado de hiperestaticidad sea mayor que cero garantiza que la estructura esté “bien concebida” en el sentido de ser un conjunto rígido capaz de soportar cargas. Por ejemplo, la figura 7.5a muestra un ejemplo hiperestático de grado 2, que está “mal concebido” como estructura. La figura 7.5b muestra una configuración isostática, también absurda si se trata de emplear como estructura (en ambos casos el grado de hiperestaticidad está calculado según (7.1)).

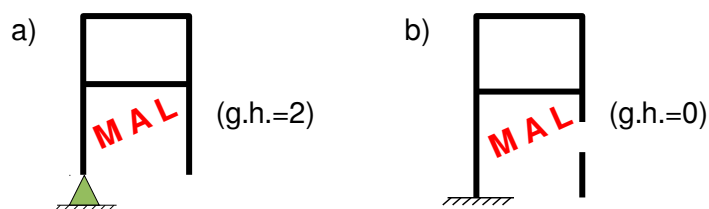


Figura 7.5: Dos ejemplos (hiperestático e isostático) de configuración “mal concebida”.

Hay que admitir por tanto que finalmente puede ser necesario un análisis individualizado de una configuración particular en casos complicados. Las pautas presentadas, basadas en el grado de hiperestaticidad, deben considerarse como un buen punto de partida, suficiente en los casos más típicos, tanto para identificar que una estructura puede trabajar como tal (el g.h. debe ser mayor o igual que cero), como para saber de antemano si podremos calcular las reacciones y esfuerzos sin más ecuaciones que las de equilibrio estático (debe ser isostático, g.h.=0).

Precisamente por lo anterior, se aconseja ejercitar la capacidad de cálculo mental del grado de hiperestaticidad a partir de alguna configuración “parecida” que ya sea familiar. Ello aumenta las posibilidades de detección de una eventual mala concepción de la estructura, y se consigue fácilmente con un poco de práctica.

### **Armaduras isostáticas**

Las armaduras son un tipo particular de estructuras, caracterizadas principalmente por que todos sus nudos son articulados, o puede suponerse que funcionan como tal, y que las cargas son únicamente fuerzas concentradas aplicadas en los nudos, no actuando cargas intermedias sobre las barras. Estas simples premisas conducen a unos modos de ejecución de las armaduras que son típicos de ellas, confiriéndoles un conjunto de características que suelen hacer patente a simple vista si una estructura es una armadura o no. Centrándonos en armaduras planas, adelantaremos que dos de esas características son el estar formadas por barras mucho más ligeras que otras estructuras (a igualdad de dimensiones), y que las barras están dispuestas formando triángulos. A continuación veremos las razones que existen para ello.

En primer lugar, si los nudos son articulados, un cuadrilátero u otro polígono de más lados formado por barras, no será un conjunto rígido. La configuración rígida bidimensional más simple

cuando los nudos son articulados, es el triángulo. Por esto la forma triangular aparece insistentemente en las armaduras.



No es que sea imposible ejecutar una estructura con, por ejemplo, un cuadrilátero de nudos articulados. La estructura tendría hiperestaticidad interna negativa (internamente sería “un mecanismo”), por lo que debiera ser externamente hiperestática (tener apoyos que restringiesen al menos 4 gdl). Pero esta no es la idea que en general hace ventajoso el uso de las armaduras.

En segundo lugar, si analizamos una barra aislada de una armadura, como la de la figura 7.6, es inmediato apreciar que la misma sólo puede trabajar desarrollando un esfuerzo axil. En efecto, los extremos de la barra son articulados así que no pueden transmitir momento a los extremos de la barra. Las dos componentes de “reacción” que puede ejercer la articulación sobre la barra pueden escribirse como un axil  $N$  y un cortante  $V$ .

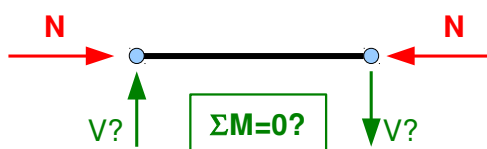


Figura 7.6: La barra de una armadura sólo puede desarrollar esfuerzo axil.

En ausencia de cargas a lo largo de la barra (recuérdese que en una armadura solamente se aplican cargas en los nudos), el equilibrio de fuerzas horizontales en la figura 7.6 requiere que los axiles sean iguales y opuestos en los extremos de la barra, como se indica. El equilibrio de fuerzas verticales requeriría que los cortantes fuesen también iguales y opuestos, pero en ese caso formarían un par de fuerzas, cuyo momento no se equilibraría (no hay nada que pueda equilibrarlo). Por tanto no puede haber esfuerzos cortantes en la barra, solamente habrá esfuerzo axil.

Éste es el motivo por el que las barras de armaduras son mucho más ligeras que las de los pórticos u otras estructuras cuyas barras trabajan a flexión: una barra desarrolla tensiones mucho menores para soportar una carga dada si trabaja a tracción o compresión que si trabaja a flexión.

Lo anterior parece otorgar grandes ventajas a las armaduras sobre otro tipo de estructuras, y desde el punto de vista puramente resistente, cabe decir que es así. Sin embargo, al proyectar una armadura es normalmente necesario llenar de triángulos de barras el espacio que ocupa, para que trabaje en buenas condiciones. Esto entra en conflicto con el requisito funcional, muy frecuente, de espacios diáfanos por los que puedan circular personas o maquinaria. Pero en caso de no entrar en conflicto con otros requisitos funcionales, el uso de una armadura es una opción ventajosa que suele preferirse sobre otras soluciones.

Existe un tipo particular de armadura plana isostática, que llamamos Armadura Simple. Una armadura simple es la que topológicamente se obtiene a partir de un triángulo inicial de barras, conectando dos barras nuevas a dos nudos ya existentes, y conectando los dos extremos de las barras nuevas entre sí, para formar un nuevo nudo. Se conectan tantos nuevos pares de barras como se requiera, siguiendo el mismo criterio. La figura 7.7 muestra dos disposiciones comunes con forma de armadura simple. Para ayudar a apreciar el hecho de que son simples, se ha denotado con “0” las barras del triángulo inicial, con “1” el primer par de barras añadidas, con “2” el segundo par de barras, etc (dicha secuencia no es única, se muestra una de las posibles).

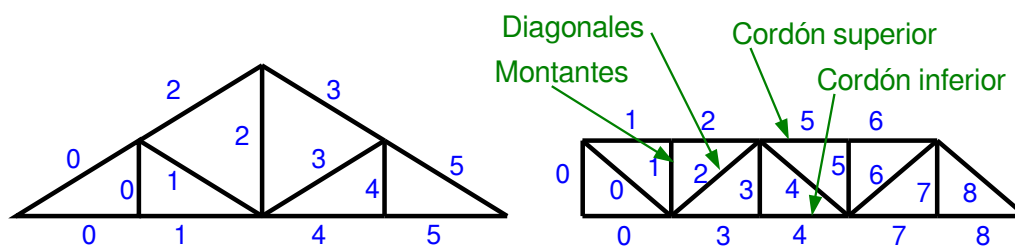


Figura 7.7: Dos armaduras simples. a) Cercha. b) Viga en celosía

La armadura de la figura 7.7a tiene una forma que puede hacerle apta para sustentar la cubierta de un tejado a dos aguas. Suele llamarse cercha a la armadura que se usa para este fin. La figura 7.7b muestra una estructura cuya forma general es esbelta, y podría ser utilizada haciendo las funciones de una viga. Se denomina viga en celosía a este tipo de armaduras. Si comparamos una supuesta viga, por ejemplo en doble T, con la viga en celosía, las barras horizontales superiores harían la función del ala superior de la viga. Se dice que estas barras forman el cordón superior de la viga. Análogamente, las barras horizontales inferiores, que realizan una función similar al ala inferior de una viga, reciben el nombre de cordón inferior. El alma de la viga estaría formada por el conjunto de barras intermedias. De ellas se llama montantes a las que son verticales, y diagonales a las inclinadas, como se muestra.

Las armaduras simples son siempre internamente isostáticas. Para comprobarlo basta observar que el triángulo inicial lo es, y que las dos barras añadidas al triángulo confieren al sistema (antes de unir las entre sí) dos gdl. Estos 2 gdl se consumen al materializar el nuevo nudo que une las dos barras, por lo que vuelve a quedar un conjunto rígido sin restricciones “sobrantes”, es decir internamente isostático. Por lo tanto, si sustentamos una armadura simple con apoyos que restrinjan 3 gdl, típicamente un apoyo fijo y uno móvil, tendremos una estructura isostática.

Como sabemos, las reacciones y los esfuerzos pueden calcularse sin más ecuaciones que las de equilibrio estático si la estructura es isostática. En una armadura isostática, las ecuaciones de equilibrio de los nudos son suficientes para calcular los esfuerzos y reacciones. Esto produce un sistema de ecuaciones simultáneas de tantas incógnitas como barras haya, más componentes de reacción en los apoyos.

Afortunadamente, en armaduras simples siempre es posible escoger un nudo que sólo presente dos incógnitas (los esfuerzos en dos barras), justamente las que pueden ser calculadas con las dos ecuaciones de equilibrio del nudo (suma de fuerzas nula en dos direcciones distintas). Podemos proceder sucesivamente resolviendo algún nudo que sólo tenga dos incógnitas, evitando así la resolución simultánea del sistema grande de ecuaciones.



Es aconsejable calcular en primer lugar las reacciones en los apoyos usando las ecuaciones de equilibrio global de la estructura. Estas ecuaciones son en realidad redundantes respecto del conjunto de ecuaciones de equilibrio de los nudos, pero por una parte nos proporcionan una posibilidad de comprobación de errores de cálculo (el equilibrio del último nudo se satisfará automáticamente si no hubo errores), y por otra parte el conocer las reacciones nos proporciona en algunos casos ese “primer nudo” con sólo dos incógnitas por el que comenzar la resolución.

La resolución de cada sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que proporciona cada nudo puede realizarse analíticamente, o bien gráficamente, trazando el polígono cerrado de fuerzas correspondiente. Si se ha de operar a mano (sin ordenador), el trazado gráfico es una



alternativa a considerar, ya que los errores operativos se hacen más evidentes, y la precisión que se obtiene suele ser sobradamente suficiente para las aplicaciones típicas. El Apéndice C muestra algunas posibles pautas e ideas para la resolución de las reacciones y de los esfuerzos en barras, tanto mediante trazados gráficos como mediante resoluciones analíticas.

### Un ejemplo

Seguidamente mostraremos a través de un ejemplo lo que se considera un conjunto posible de buenas prácticas en relación con el cálculo de esfuerzos en este tipo de armaduras, tanto si se realiza la resolución gráfica como analítica de las ecuaciones. Consideremos la armadura simple de la figura 7.8a, en que todas las barras forman 0, 45 o 90° con la horizontal. Comenzamos calculando las reacciones en los apoyos. Del equilibrio de momentos respecto del apoyo fijo, resulta que la fuerza horizontal en el apoyo móvil debe ser  $2F$  (ya que su distancia es la mitad que la de la fuerza aplicada  $F$ ). El equilibrio de fuerzas horizontales conduce a que en el apoyo fijo la componente horizontal de reacción debe ser  $2F$  (opuesta a la del apoyo móvil), y la componente vertical de reacción debe ser  $F$  (opuesta a la fuerza aplicada en el extremo derecho).

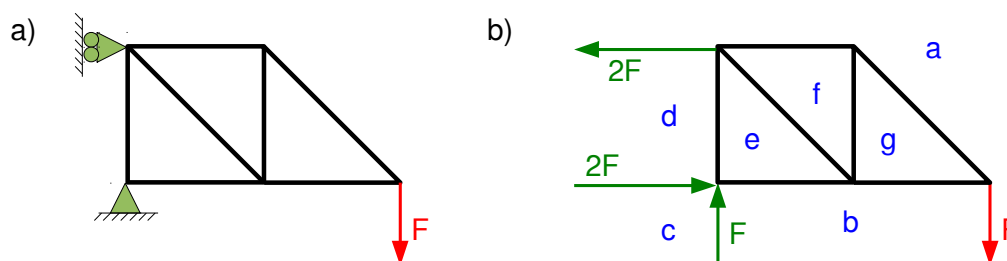


Figura 7.8: a) Ejemplo de armadura simple b) Reacciones, y nombres de áreas (para nombrar fuerzas)

Durante la resolución habremos de dar un nombre a cada fuerza que actúe sobre un nudo, ya sea proveniente de la reacción de un apoyo o del esfuerzo de una barra. Una manera de asignar dichos nombres a las fuerzas (especialmente conveniente en resoluciones gráficas) es dando en primer lugar un nombre a cada una de las dos áreas que separa cada fuerza. En nuestro ejemplo hemos dado nombres de letras, a, b, ...g, a dichas áreas. El criterio de asignación de nombres de áreas es sencillo: si necesitamos nombrar una fuerza, deberemos haber dado nombre a dos áreas adyacentes a esa fuerza.

El nombre que daremos a la fuerza, estará formado por las dos letras de las áreas adyacentes. La primera letra será la del área que encontremos antes de la fuerza, si giramos en sentido horario en torno al nudo (o en torno a la estructura completa en caso de una fuerza exterior). La segunda letra será la del área que encontremos después de la fuerza, también girando en sentido horario en torno al nudo. Por ejemplo, la carga dada (de valor  $F$ ) será “ab”, y la reacción del apoyo móvil “da” (en ese orden). La fuerza que ejerce la barra horizontal superior sobre el nudo que está a su derecha, será “fa”, mientras que la fuerza que ejerce la misma barra sobre el nudo a su izquierda será “af”.

Por lo demás, para nombrar una barra podemos usar sus áreas adyacentes en cualquier orden (la barra inclinada de la derecha será “ag” o bien “ga”), y para nombrar un nudo podemos enumerar las áreas de su entorno, en sentido horario por mera coherencia (el nudo inferior izquierdo será “debc” por ejemplo).

Procedemos a calcular los esfuerzos en las barras. Tengamos presente que estamos equilibrando los nudos, por tanto las fuerzas que representamos actúan sobre los nudos. Las fuer-

zas que los nudos hacen sobre las barras serán contrarias a las que las barras hacen sobre los nudos, siendo éstas últimas las que calcularemos.

Podríamos comenzar por el nudo inferior derecho, “gab”, o por el inferior izquierdo, “debc”, ya que en las ecuaciones de equilibrio de ambos existen solamente dos incógnitas. Comenzaremos por el primero, sin que haya un motivo particular para ello. La figura 7.9a muestra la resolución de las ecuaciones de equilibrio del nudo. Nótese cómo los extremos (punto de origen y punto de destino) de los vectores fuerza se nombran con las mismas letras que formal el nombre del vector, por su orden. Esto facilitará por ejemplo identificar más tarde el vector “gb”, que necesitaremos al equilibrar el nudo central inferior, y que será opuesto al “bg” que actúa sobre el nudo que ahora equilibramos. En el momento que tenemos calculadas las fuerzas sobre un nudo, es buena práctica dibujarlas esquemáticamente en la figura de la estructura completa, como muestra la figura 7.9b. Acto seguido, podemos también dibujar esquemáticamente las fuerzas que cada barra hace sobre su nudo del extremo opuesto, que será igual y contraria, como muestra la figura 7.9c.

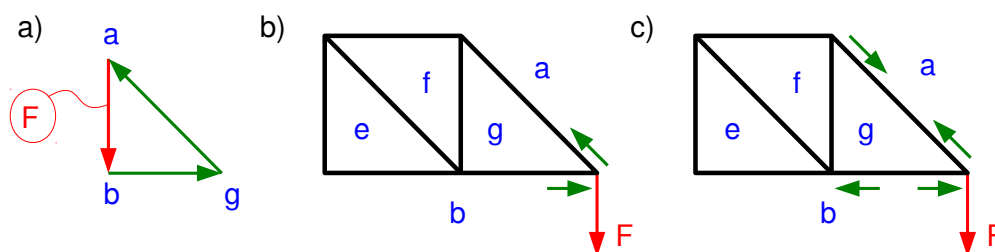


Figura 7.9: a) Equilibrio del nudo “gab”. b), c) Indicación en el dibujo de la estructura completa de las incógnitas ya calculadas.

De la observación de la figura 7.9c, apreciamos que la barra “ag” trabaja a tracción, mientras que la barra “gb” trabaja a compresión. Recuérdese que hemos calculado fuerzas sobre los nudos, y que sobre las barras serán iguales y contrarias. Si desde el punto de vista mnemotécnico sirve de ayuda, puede pensarse que la barra “ag” está tirando de los nudos (luego trabaja a tracción), mientras que “gb” está empujando a los nudos (luego trabaja a compresión).

Ahora pasamos a elegir otro nudo que tenga sólo dos incógnitas. Observando la figura 7.9c apreciamos que el nudo “fag” cumple ahora con ese requisito. Procedemos a despejar de sus ecuaciones de equilibrio las incógnitas “gf” y “fa”, lo que se realiza en la figura 7.10a. Nótese que la fuerza “ag” sobre este nudo ya fue calculada (en la figura 7.9a, como fuerza “ga”). Nuevamente, tan pronto como calculamos algunas incógnitas, hacemos una indicación esquemática en la figura de la estructura completa, y ponemos la indicación complementaria en cada nudo correspondiente a los otros extremos de barra, como se ha hecho en la figura 7.10b.

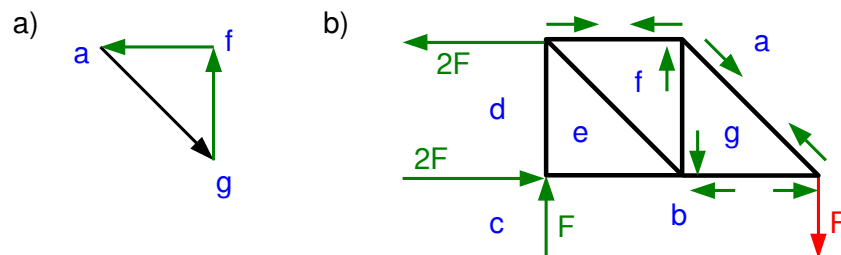


Figura 7.10: a) Equilibrio del nudo “fag”. b) Indicación en la estructura de las incógnitas ya calculadas

Las fuerzas calculadas indican que la barra “fg” trabaja a compresión, y que la barra “fa” trabaja a tracción.

Pasamos a elegir otro nudo con sólo dos incógnitas. En este momento cualquiera de los restantes cumple esta condición: tanto "afed", como "befg", o "debc" (este último podríamos haberlo elegido en cualquier momento anterior). Elegimos continuar por el nudo "befg". Calculamos las incógnitas asociadas a este nudo usando sus ecuaciones de equilibrio, como en los casos anteriores. La resolución se muestra en la figura 7.11a. Nótese que las fuerzas "fg" y "gb" ya fueron calculadas anteriormente (como las fuerzas opuestas "gf" y "bg"). Nuevamente anotamos en el dibujo de la estructura las indicaciones de las incógnitas que hemos calculado, como muestra la figura 7.11b. En ella vemos que la barra "eb" trabaja a compresión, mientras que la barra "ef" trabaja a tracción.

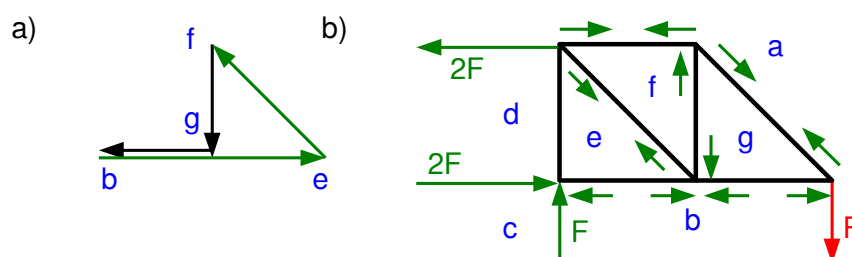


Figura 7.11: a) Equilibrio del nudo "befg" b) Indicación en la estructura de las incógnitas calculadas.

Llegado este punto, solamente queda una incógnita por calcular (el esfuerzo en la barra "de"), y aún no hemos usado las ecuaciones de equilibrio de dos de los nudos (nudos "debc" y "dafe"). Nos "sobran" 3 ecuaciones porque ya hemos utilizado las 3 ecuaciones de equilibrio global de la estructura, que son linealmente dependientes del conjunto de ecuaciones de equilibrio de los nudos. Esta superabundancia de ecuaciones nos sirve ahora para comprobar si nuestros cálculos han sido correctos hasta el momento. Por ejemplo considerando el equilibrio del nudo "dafe", al trazar el polígono de las fuerzas ya calculadas "da", "af", y "fe", el origen y el extremo deben quedar alineados en vertical, para que sea posible que el polígono se cierre con la fuerza restante "ed", que debe ser vertical. Vemos en la figura 7.12a que tal cosa efectivamente sucede. Por tanto hemos calculado esa fuerza, y hacemos las indicaciones correspondientes en la figura de la estructura, como muestra la figura 7.12b. La barra "de" trabaja a compresión.

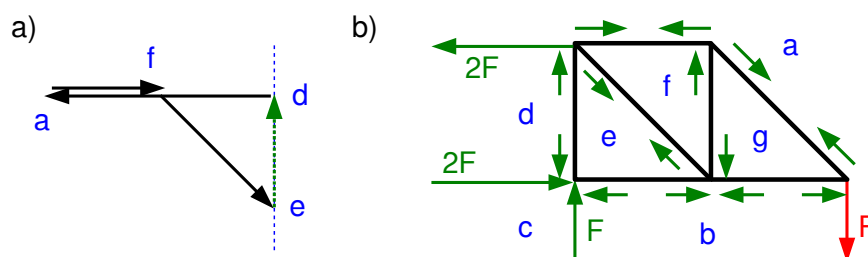


Figura 7.12: a) Equilibrio del nudo "dafe", incluyendo comprobación de la verticalidad de "de". b) Indicación sobre la estructura del esfuerzo calculado.

Finalmente, ya con todas las incógnitas calculadas, podemos realizar la comprobación final de que el nudo "debc" queda en equilibrio, lo que puede comprobarse fácilmente.



Hemos trazado por separado el equilibrio de cada nudo por claridad, pero es mucho más práctico agrupar todos los diagramas en un mismo trazado. El Apéndice C ilustra cómo hacerlo.

Una vez calculados los esfuerzos en las barras, nos preguntaremos acerca de la plastificación o el pandeo de las mismas. Para facilitar la labor de apreciar qué barras son preocupantes, es buena práctica realizar un cuadro en donde para cada barra figuren: 1º el valor numérico (sin factores como  $\sqrt{2}$ , o fracciones) del esfuerzo que se ha calculado, en valor absoluto (sin signo). 2º una indicación inequívoca (pensando en posibles terceras personas) de si la barra trabaja a tracción o a compresión. A tal efecto puede servir el símbolo que empleábamos en los diagramas de esfuerzos para indicar si el axil era de tracción o de compresión, aunque será suficiente una “T” de tracción o una “C” de compresión. 3º La longitud de las barras que trabajen a compresión, al menos de las que tengan una compresión mayor que las demás y de las que sean especialmente largas aunque su compresión sea moderada (de utilidad para analizar el pandeo).

La figura 7.13 muestra un cuadro como el descrito, incorporando el dato adicional de que la estructura tiene unas dimensiones globales de 4m x 2m.

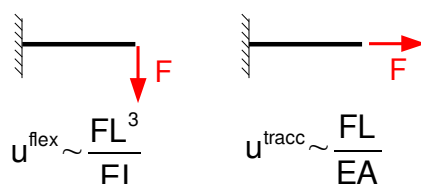
	af	ag	be	bg	de	ef	fg
esf/F	1,0	1,4	2,0	1,0	1,0	1,4	1,0
T-C	T	T	C	C	C	T	C
Long			2m	2m	2m		2m

Figura 7.13: Tabla resumen del análisis de la armadura.

A título de curiosidad, en esta armadura nos preocuparía el pandeo de la barra “be”, ya que no hay barras más largas a compresión, y ésta es la que soporta la mayor. En el caso de que los nudos puedan salirse del plano de la estructura (no estén arriostrados), también nos preocuparía el pandeo de todo el cordón inferior fuera del plano, como una única barra de 4m de longitud y compresión variable a tramos (el tratamiento del pandeo con compresión variable no es objeto de este curso).

### Notas sobre la ejecución

En realidad, los nudos de las armaduras se ejecutan frecuentemente mediante soldadura, o bien con uniones de varios tornillos, que en todo caso pueden transmitir momento. Incluso, los “cordones” superior e inferior suelen en realidad estar formados por una barra continua, por lo que evidentemente puede transmitirse el momento en ellas de un lado a otro de un nudo. Esto parece contravenir gravemente las premisas teóricas sobre las que hemos fundamentado el estudio de las armaduras. Pero trataremos de justificar brevemente que para estructuras trianguladas, en realidad no es así.



$$u^{\text{flex}} \sim \frac{FL^3}{EI} \quad u^{\text{tracc}} \sim \frac{FL}{EA} \quad \begin{matrix} I \sim b^4 \\ A \sim b^2 \end{matrix} \Rightarrow \frac{u^{\text{flex}}}{u^{\text{tracc}}} \sim \frac{L^2 A}{I} \sim \left(\frac{L}{b}\right)^2$$

Figura 7.14: Ordenes de magnitud de los desplazamientos de flexión, y de los de tracción.

En primer lugar, sabemos que los desplazamientos serán mucho mayores si una carga dada produce flexión en las barras que la soportan, que si produce tracción o compresión en ellas. Para cuantificar esta afirmación podemos tomar el ejemplo sencillo de la figura 7.14, de la que se concluye que los desplazamientos de flexión son del orden de magnitud de los de tracción

multiplicados por  $(L/b)^2$ , siendo "L" la longitud de la barra y "b" una dimensión representativa de la sección. Como es  $L/b \gg 1$ , los desplazamientos debidos a flexión serán efectivamente mucho mayores que los de tracción (unas 200 veces, para una barra en la que sea  $L/b \sim 14$ ).

Consideremos ahora la configuración de la figura 7.15a, en la que el nudo es rígido. Para soportar la carga, deben desarrollarse momentos flectores en las barras, que se deformarán de una manera como la indicada orientativamente, con desplazamientos del orden de los correspondientes a flexión. Pensemos por un momento que en la figura 7.15a no actuamos con la fuerza F, sino imponiendo un desplazamiento al extremo superior. Y pensemos que el desplazamiento impuesto es, digamos, 200 veces menor que el que aparece en la figura. Es claro que en ese caso, los momentos flectores serían también 200 veces menores, dada la linealidad del problema.

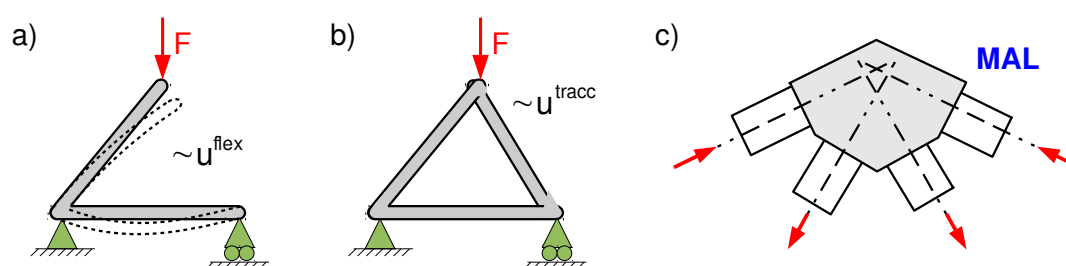


Figura 7.15: a) Carga soportada con flexión de las barras. b) Configuración en la que los momentos flectores serán del orden de  $(b/L)^2$  de los anteriores c) Nudo mal ejecutado: no se satisface la triangulación porque los ejes de barras no coinciden en un punto.

Consideremos ahora la figura 7.15b, en la que hemos añadido una barra. Ahora, para que el nudo superior se desplace, la nueva barra debe acortarse, o bien debe acortarse la barra izquierda, o bien debe alargarse la inferior, o todo ello a la vez. En todo caso, estos desplazamientos serán del orden típico correspondiente a tracciones en las barras, mucho más pequeños (quizá  $1/200$ ) que los que se necesitaban para generar los momentos flectores que equilibraban el problema en la primera figura.

La conclusión es que en la configuración de la figura 7.15b no pueden generarse momentos flectores significativos, si los comparamos con los que harían falta para contribuir a soportar la carga F. En esta configuración, las barras soportan la carga F desarrollando esfuerzos axiales, siendo despreciable la contribución de los momentos flectores. Este modo de trabajo se diferencia muy poco en la práctica del implicado por nuestra hipótesis teórica inicial, acerca de que los nudos eran articulados.

Con ello hemos mostrado que, si la estructura es triangulada, será indiferente en la práctica que ejecutemos los nudos como articulaciones o como nudos rígidos. En el último caso se desarrollarán unos momentos flectores muy pequeños, que no contribuyen prácticamente nada al equilibrio del sistema, y cuyas tensiones podremos despreciar en los casos usuales frente a las tensiones asociadas al esfuerzo axial.

A efectos de poder considerar la estructura como articulada aunque los nudos sean en realidad rígidos, es importante que la triangulación de la estructura esté ejecutada correctamente. En particular, debe ponerse cuidado en que en cada nudo, los ejes de las barras que confluyen y la fuerza exterior (si existe), pasen todas por un mismo punto, como se supone que debe ocurrir. De lo contrario será necesario que se generen momentos en las barras para que el nudo pueda estar en equilibrio. Un caso propenso a error en este sentido es el de los nudos en los que las barras no se unen físicamente entre sí, sino que se utiliza una placa (llamada "cartela") como elemento auxiliar de unión (ver figura 7.15c).

## ***Estructuras Hiperestáticas de Nudos Rígidos***

Las estructuras de nudos rígidos, en las que se cuenta desde la etapa de diseño con los momentos flectores que desarrollarán las barras y que se transmitirán a través de los nudos, son un tipo de estructuras ampliamente utilizado. Aunque se existen algunas disposiciones prácticas que son isostáticas, es frecuente que este tipo de estructuras (pórticos y estructuras similares) sean hiperestáticas. Algunas características que diferencian típicamente a una estructura isostática de este tipo de una estructura hiperestática que sea topológicamente similar, son:

- La Estructura hiperestática desarrollará menores momentos flectores máximos.
- La Estructura hiperestática será más rígida frente a las acciones.
- La estructura hiperestática tendrá una mayor reserva de resistencia desde que ocurra la plastificación del primer punto.
- La estructura isostática no desarrollará tensiones apreciables con las variaciones de temperatura.
- La estructura isostática necesitará una cimentación más sencilla.

Las estructuras isostáticas son, desde el punto de vista del álgebra, relativamente sencillas de analizar, y no incidiremos más sobre el particular en este curso. Para su análisis contamos con el modelo de flexión presentado en un tema anterior, y con lo dicho en este tema para el análisis de armaduras isostáticas. Como última nota al respecto, cabe decir que el que las estructuras isostáticas sean relativamente fáciles de analizar no constituye un argumento a su favor en cuanto a su empleo en la práctica.

Como sabemos, en las estructuras hiperestáticas (de nudos rígidos o no), no es posible calcular los esfuerzos y reacciones usando solamente las ecuaciones del equilibrio estático. Se requieren ecuaciones adicionales, ecuaciones que se obtienen de las deformaciones de los sólidos. Este es el detalle que añade complejidad al cálculo, ya que dichas ecuaciones deben obtenerse involucrando al modelo de comportamiento del sólido, que en nuestro caso se materializa fundamentalmente en el modelo de tracción-flexión de barras rectas que hemos estudiado. En este curso no se pretende profundizar en los métodos de análisis y resolución de estructuras hiperestáticas, las cuales resolveremos generalmente usando un programa de ordenador, llegado el caso. No obstante, a continuación daremos noticia brevemente de los métodos más utilizados en el análisis de estructuras, en particular hiperestáticas.

### **Fundamentos del Método de Compatibilidad**

El llamado “Método de Compatibilidad” es apropiado principalmente para la resolución manual de estructuras hiperestáticas. Se basa en liberar en la estructura tantos grados de libertad como sea necesario para conseguir un sistema isostático. Ello se consigue quitando apoyos, o bien introduciendo rótulas u otras discontinuidades en algunas barras. Estos apoyos y (o) uniones entre las barras, se sustituyen por el efecto -desconocido a priori- que los mismos tenían sobre la estructura. Por ejemplo, si se ha suprimido un apoyo, éste se sustituye por la fuerza desconocida (“reacción”) que el apoyo realizaba sobre la estructura. O si se ha introducido una rótula en una barra, lo que anula el momento flector en ese punto, se introducen momentos iguales y contrarios de valor desconocido a ambos lados de la rótula.

Al proceso de liberar grados de libertad, poniendo las acciones (fuerzas o momentos) desconocidas correspondientes, se le conoce como “elección de incógnitas hiperestáticas”. Este proceso debe basarse en lo que en el ámbito del cálculo del grado de hiperestaticidad llamábamos “estructura isostática bien concebida”. Es decir, al liberar grados de libertad (en número igual al grado de hiperestaticidad) debemos obtener una estructura isostática que pueda funcionar como tal, sin que sean posibles movimientos de sólido rígido de la misma, o entre sus partes.

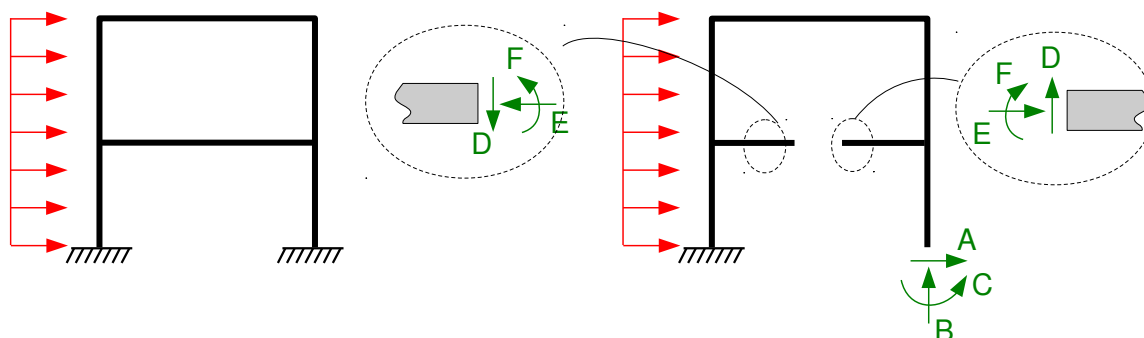


Figura 7.16: Posible elección de incógnitas hiperestáticas en un ejemplo.

Lo anterior se ilustra a modo de ejemplo en la estructura hiperestática de grado 6 de la figura 7.16. Consta de un pórtico biempotrado de dos alturas, con una cierta carga horizontal uniformemente repartida como se indica. La elección de incógnitas hiperestáticas requiere en primer lugar que liberemos 6 grados de libertad para conseguir una estructura isostática “bien concebida”. Elegimos liberar los tres gdl del apoyo derecho, y “cortar” una de las barras horizontales, con lo que se permite el giro, desplazamiento horizontal, y desplazamiento vertical relativos entre las secciones a ambos lados del corte (en la figura se ha exagerado el corte por claridad, suprimiendo un trozo apreciable de barra, pero debe interpretarse que habríamos suprimido únicamente un diferencial de barra, de manera que fuese posible restablecer su continuidad sin introducir esfuerzos adicionales por ello).

El empotramiento que hemos suprimido podía realizar fuerza horizontal “A”, fuerza vertical “B”, y momento “C” sobre la barra. Ponemos esas acciones en sustitución del empotramiento como se indica. Por otro lado, en la barra que hemos “cortado”, la parte izquierda de la sección podía ejercer sobre la parte derecha una fuerza horizontal “D”, una vertical “E”, y un momento “F”. Nuevamente ponemos estas acciones desconocidas en sustitución de la continuidad de la barra que hemos interrumpido. En la parte izquierda del corte, actúan acciones iguales y contrarias a las anteriores como se indica.



El hecho de que sea necesario elegir las incógnitas hiperestáticas, y que esta elección haya de ser juiciosa, hace que el método de compatibilidad sea poco apropiado para su implementación en ordenador. Para este fin son más apropiados los métodos sistemáticos en los que no haya que realizar elección alguna.

En este momento tenemos una estructura isostática, que en principio sabríamos resolver. Dicha resolución quedaría en función de las fuerzas y momentos desconocidos A, B, C, D, E, F, así como de las cargas conocidas. Como parte de la resolución, obtendríamos los giros y desplazamientos en toda la estructura, en particular en la sección donde actúan A, B, y C, y en las dos secciones de la barra donde actúan D, E, y F.

El último paso de la aplicación del método consiste en restituir las condiciones que se daban en la estructura original. Se habla de restablecer la compatibilidad con las condiciones de con-

torno originales. El método toma su nombre (de “compatibilidad”) de esta última operación. En este caso plantearíamos las siguientes ecuaciones escalares:

- Movimiento horizontal del empotramiento original =0.
- Movimiento vertical del empotramiento original =0.
- Giro del empotramiento original =0.
- Movimiento horizontal del mismo valor para ambas secciones de la barra.
- Movimiento vertical del mismo valor para ambas secciones de la barra.
- Giro del mismo valor para ambas secciones de la barra.

Son en total 6 ecuaciones, justamente las necesarias para calcular las 6 incógnitas A, B, C, D, E, F. Calculadas éstas, sustituiríamos su valor en la solución de la estructura isostática que habíamos resuelto previamente, obteniendo así la solución de la estructura hiperestática original.

### Fundamentos del Método de Equilibrio

El llamado “método de equilibrio” abarca en realidad una familia de métodos, o de metodologías operativas de resolución, todas ellas basadas en el estudio del comportamiento de la barra aislada, y posterior planteamiento del equilibrio de los nudos (de esta etapa final de “equilibrio” es de donde el método toma su nombre). Los programas comerciales para análisis de estructuras por ordenador se basan usualmente en uno de estos métodos, en particular el conocido como “Método Directo de Rigidez”. Al igual que se ha hecho en el epígrafe anterior con el método de compatibilidad, presentaremos seguidamente los fundamentos conceptuales del “método de equilibrio”, con propósitos informativos, y con la intención de que cuando se haga uso de una resolución por ordenador, se tenga al menos una comprensión básica de los procesos que conducen al resultado.

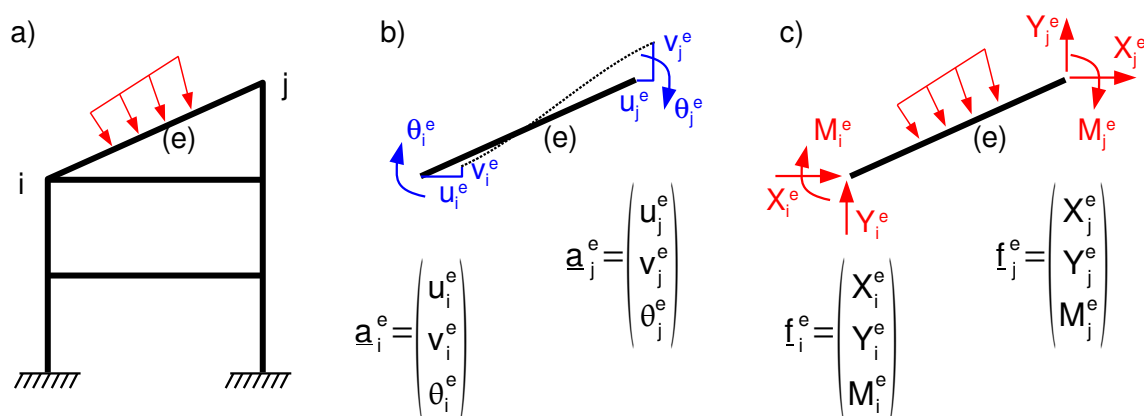


Figura 7.17: a) Barra de una estructura. b) Movimientos generalizados de los extremos de la barra, y notación. c) Acciones sobre la barra (estarán en equilibrio), y notación de las fuerzas generalizadas en los extremos de la misma.

Comencemos considerando una barra cualquiera de una estructura de nudos rígidos, como la barra “e”, que conecta los nudos “i”, “j”, mostrada en la figura 7.17a. Se dibujan solamente las cargas existentes sobre la barra, aunque podría haber otras cargas actuando en otras barras o nudos. Vamos a considerar la barra aislada del resto de la estructura mediante dos cortes ideales en sus extremos. En dichos cortes actuaría la fuerza y el momento que la otra parte de la



estructura ejerce sobre la barra. Asimismo, la barra aislada tiene el mismo movimiento y giro que tenía en cada sección extrema.

Para el extremo adyacente al nudo "i" de la barra "e", arreglaremos en una matriz columna los tres escalares que expresan el desplazamiento horizontal  $u_i^e$ , el desplazamiento vertical  $v_i^e$ , y el giro  $\theta_i^e$  de esa sección extrema de la barra. Llamamos  $\mathbf{a}_i^e$  a dicha matriz columna, que generalmente se llama de "movimientos generalizados" (la matriz  $\mathbf{a}_j^e$  para el extremo de "e" adyacente al nudo j, se define análogamente).

Sobre el extremo "i" de la barra "e" actúan la fuerza horizontal  $X_i^e$ , la fuerza vertical  $Y_i^e$ , y el momento  $M_i^e$ , que la estructura ejerce sobre la barra en esa sección. Arreglamos estos tres escalares en una matriz columna de fuerzas generalizadas  $\mathbf{f}_i^e$ . Similarmente se define  $\mathbf{f}_j^e$  para el extremo de la barra adyacente al nudo j.

Vamos a expresar las fuerzas generalizadas en los extremos de la barra,  $\mathbf{f}_i^e$ ,  $\mathbf{f}_j^e$ , como superposición de dos efectos:

- 1- El efecto de que hay movimientos (generalizados) en las secciones extremas de la barra. Se asume aquí que no hay cargas sobre la longitud de la barra.
- 2- El efecto de que hay cargas sobre la longitud de la barra. Se asume aquí que no hay movimientos de los extremos de la barra.

La figura 7.18 ilustra la superposición de efectos anterior.

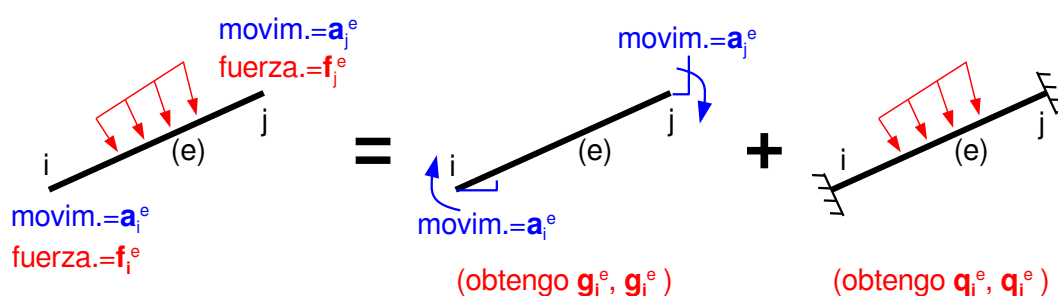


Figura 7.18: Superposición de efectos para una barra genérica

Llamamos  $\mathbf{g}_i^e$ ,  $\mathbf{g}_j^e$ , a las fuerzas que resultan del primer efecto. Hay que notar que en general la variación de una sola componente de movimiento (generalizado) en un extremo de la barra, puede producir varias componentes de fuerza (generalizada) en ambos extremos de la barra. La relación lineal más general posible siempre podrá expresarse mediante una matriz 6x6 de coeficientes que relaciona las seis componentes de fuerza generalizada con las seis componentes de movimiento generalizado en ambos extremos de la barra. Organizamos tal relación usando submatrices en la forma:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{g}_i^e \\ \mathbf{g}_j^e \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii}^e & \mathbf{K}_{ij}^e \\ \mathbf{K}_{ji}^e & \mathbf{K}_{jj}^e \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_i^e \\ \mathbf{a}_j^e \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

Llamamos  $\mathbf{q}_i^e$ ,  $\mathbf{q}_j^e$ , a las fuerzas que resultan del segundo efecto. Procede incluir en este término cualquier efecto que genere fuerzas generalizadas en los extremos de la barra sin que éstos se muevan, como los de las cargas existentes a lo largo de la barra, y los de las variaciones térmicas de la barra, entre otros. Arreglamos estas fuerzas generalizadas en forma de matriz de la manera ya habitual:

$$\begin{pmatrix} \underline{q}_i^e \\ \underline{q}_i^e \end{pmatrix} \tag{7.3}$$



La obtención de los coeficientes de la matriz 6x6 que aparece en (7.2), y de las fuerzas generalizadas “q” para los casos de carga a usar (indicadas en (7.3)), se realiza resolviendo unas pocas configuraciones hiperestáticas de la barra genérica. Esta resolución sólo hay que realizarla “una vez en la vida”, pero debe basarse en otro método ya disponible, como por ejemplo el método de compatibilidad que hemos esbozado anteriormente.

Tal como habíamos planteado, obtenemos la fuerza generalizada en los extremos de la barra aplicando el principio de superposición, sumando (7.2) y (7.3):

$$\begin{pmatrix} \underline{f}_i^e \\ \underline{f}_i^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{g}_i^e \\ \underline{g}_i^e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{q}_i^e \\ \underline{q}_i^e \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{ii}^e & \underline{K}_{ij}^e \\ \underline{K}_{ji}^e & \underline{K}_{jj}^e \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{a}_i^e \\ \underline{a}_i^e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{q}_i^e \\ \underline{q}_i^e \end{pmatrix} \tag{7.4}$$

La ecuación (7.4) describe el comportamiento de la barra aislada. La misma estará conectada en sus extremos a los nudos i,j, los cuales a su vez tendrán conectados los extremos de otras barras. La fuerza (generalizada) que la barra “e” ejerce sobre el nudo “i”, será igual y contraria a la que el nudo ejerce sobre la barra, siendo ésta última la que hemos denominado  $\underline{f}_i^e$ .

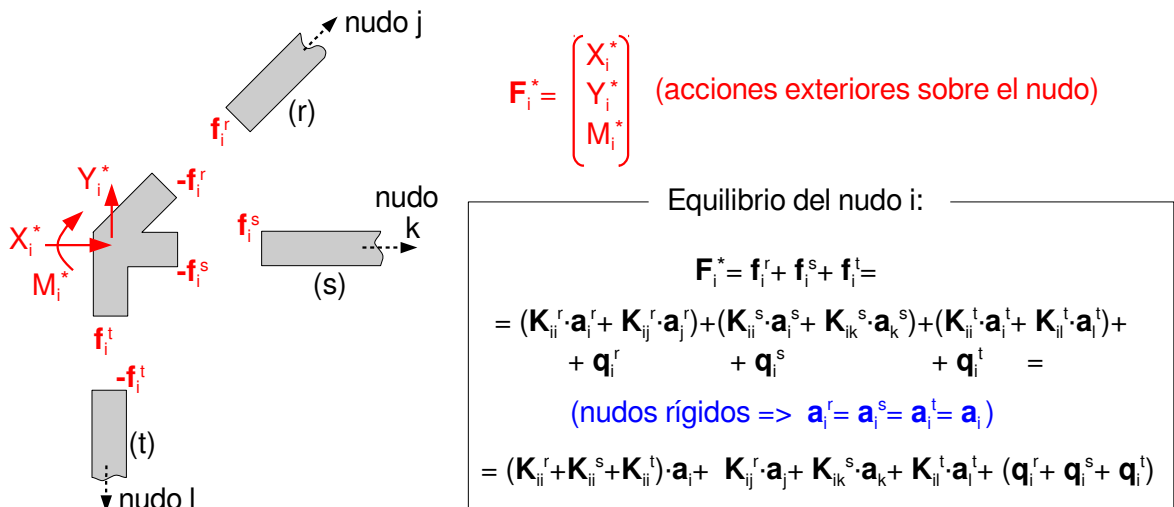


Figura 7.19: Ejemplo de equilibrio de un nudo (i) que conecta 3 barras (se suponen nudos rígidos).

Podemos plantear una ecuación como (7.4) para cada barra particular de nuestra estructura. Vamos a considerar el equilibrio de un nudo, digamos el “i”, el cual conecta un cierto número de barras. Como se ha dicho, sobre el nudo actúan fuerzas de valor  $-\underline{f}_i^e$ , provenientes de cada barra “e” que esté conectada al nudo, y además pueden actuar una fuerza y un momento aplicados directamente sobre el propio nudo. Llamaremos  $X_i^*$ ,  $Y_i^*$ , a las componentes de la posible fuerza concentrada, y  $M_i^*$  al posible momento concentrado en el nudo “i”. Arreglaremos estas componentes en una matriz columna  $\underline{F}_i^*$  de “fuerza generalizada” similarmente a como hicimos para las acciones en un extremo de barra. La figura 7.19 ilustra las notaciones indicadas, y muestra el ejemplo de un nudo “i” que conecta tres barras, “r”, “s”, y “t”, cuyos otros extremos conectan en los nudos “j”, “k”, y “l” respectivamente.

Como se indica en la figura 7.19, si los nudos son rígidos, el giro y los desplazamientos de un nudo serán los mismos que los de todos los extremos de barra que estén conectados al nudo. Por ello escribiremos en adelante  $\mathbf{a}_i$  (como una propiedad del nudo) en lugar de  $\mathbf{a}_i^e$ .

De forma general, el equilibrio del nudo "i" quedará expresado por la condición de que la suma de fuerzas generalizadas que actúan sobre el nudo sea nula (lo que incluye al momento):

$$\mathbf{F}_i^* - \sum_e \mathbf{f}_i^e = 0 \quad (7.5)$$

El sumatorio anterior abarca en principio todos los elementos de la estructura, pero debe entenderse que la fuerza generalizada de la barra "e" sobre el nudo "i" será nula en el caso en que el elemento no esté conectado al nudo (alternativamente puede pensarse que el sumatorio se extiende explícitamente a las barras que conecta en nudo "i").

Podemos escribir una ecuación de equilibrio como la (7.5) para cada nudo "i" de la estructura. Siendo "n" el número de nudos, tendremos en total 3n ecuaciones escalares. En ellas aparecen los movimientos generalizados de los nudos,  $\mathbf{a}_i$ , que tienen tres parámetros cada uno. En la figura 7.19 se muestra un ejemplo de cómo aparecen estos parámetros en la ecuación de equilibrio. Tendremos en total 3n parámetros escalares de movimientos de nudos. Casi todos ellos serán incógnitas, aunque los correspondientes a condiciones de apoyo serán conocidos. En este caso, se desconocerá la componente correspondiente de fuerza generalizada, por lo que el número de incógnitas del sistema de ecuaciones será en todo caso 3n. Por ejemplo, en un empotramiento los tres parámetros de movimiento generalizado, u, v,  $\theta$ , son conocidos (nulos), pero a cambio son desconocidos los tres de fuerza generalizada ("las reacciones"), X, Y, M.

La conclusión es que (7.5) planteada para cada uno de los "n" nudos de la estructura, produce un sistema de 3n ecuaciones con 3n incógnitas, en el que las incógnitas son los desplazamientos nodales (generalizados) desconocidos, y las reacciones en los apoyos de la estructura. El sistema de ecuaciones será resoluble para problemas bien planteados, y permite obtener los valores de las citadas incógnitas.

Una vez conocidos los mismos, la ecuación (7.4) planteada para cada elemento permite calcular las fuerzas generalizadas en cada extremo de barra, lo que a su vez permite (mediante una sencilla transformación de coordenadas) conocer los esfuerzos (axil, cortante, y momento flector) en los extremos de las barras. Sabidos éstos, es sencillo realizar cualquier cálculo que eventualmente se requiera en el interior de la barra, como trazar el diagrama de momentos flectores o el de desplazamientos. En definitiva, conocidas las incógnitas del sistema de ecuaciones obtenido a partir del equilibrio de los nudos, es sencillo realizar cualquier cálculo adicional que se desee. Todo este proceso de resolución es básicamente el implementado en los programas comerciales de análisis de estructuras por ordenador.

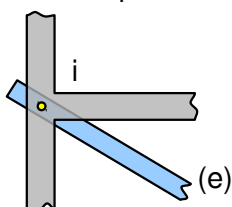


Figura 7.20: Ejemplo de nudo en el que no todas las barras comparten el giro.

Finalmente, daremos noticia de porqué hemos mantenido hasta cierto punto del desarrollo la notación  $\mathbf{a}_i^e$  para el movimiento (generalizado) de los extremos de barra. Puede pensarse que ello ha sido inútil, ya que finalmente la consideración de nudos rígidos hace que dichos movimientos sean iguales para todas las barras que confluyen en un nudo.

Sin embargo, en ocasiones un nudo está ejecutado de tal forma que varias barras comparten el giro del nudo, pero algunas otras no. La figura 7.20 muestra un ejemplo de un nudo en el que tal cosa ocurriría. En estos casos es necesario mantener las incógnitas originales de movimientos de extremos de barra. Esta es la razón de haber mantenido como incógnitas  $a_i^e$  hasta incorporar la condición de que los nudos son rígidos.

Centrándonos en el ejemplo de la figura 7.20, respecto de la situación de nudo rígido tendríamos una incógnita adicional (el giro  $\theta_i^e$  del extremo de la barra), y también el dato adicional consistente en que el momento en el extremo de esa barra,  $M_i^e$ , es nulo (usaríamos este dato incorporándolo a la ecuación (7.4) de comportamiento del elemento). Por tanto sigue siendo igualmente posible plantear un conjunto de ecuaciones resoluble para estos casos.

- Tanto el “método de compatibilidad” como el “método de equilibrio” se encuentran ampliamente documentados en la literatura. Una descripción más detallada que la presentada aquí puede encontrarse por ejemplo en <sup>[13]</sup>, y también en cualquiera de las referencias <sup>[1][2][3][4][5][14][15][16]</sup>, con diferentes enfoques, si bien no se plantea que en este curso se alcance, ni mucho menos, el nivel de profundización presentado en dichas fuentes.

## 8.- Nociones sobre temas relacionados

### ***El Hormigón***

El hormigón es un material que se utiliza fundamentalmente en construcción, tanto para cimentaciones como para materializar vigas y pilares. También para construir bancadas y soportes de maquinaria pesada, fija o móvil. Suele usarse en combinación con barras interiores de acero (“armaduras”, en diferente acepción de la palabra que la utilizada en el tema 7), que aportan la resistencia a la tracción el hormigón prácticamente no posee.

El hormigón se obtiene de la mezcla de cemento, agua, y áridos (típicamente arena, gravilla o ambos). Opcionalmente puede tener otros elementos en su composición (aditivos para conseguir propiedades particulares). La figura 8.1 muestra orientativamente unas proporciones posibles de constituyentes para un hormigón usual, aunque existen muchas posibilidades (desde emplear solamente arena como árido, o cascotes si se trata de hormigón de baja resistencia, o usar cal en vez de cemento, etc).

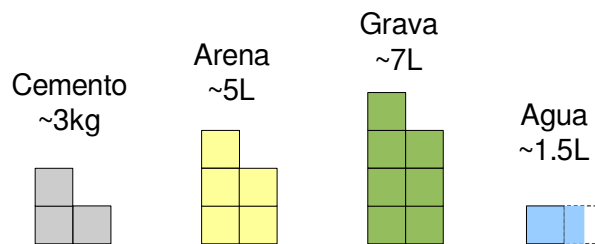


Figura 8.1: Unas proporciones posibles de los constituyentes del hormigón.

La mezcla, una vez ha fraguado (proceso químico de endurecimiento que se suele considerar concluido a los 28 días, aunque el material continua evolucionando indefinidamente), se convierte en hormigón. Alguna de sus principales características son las siguientes:

- Es barato.
- Resiste compresiones, del orden de 1/10 que el acero de construcción.
- Apenas resiste tracciones.
- Su coeficiente de dilatación térmica es muy similar al del acero.
- Durante el fraguado sufre cierto decremento de volumen (“retracción”).
- Tiene excelente adherencia al acero (favorecida por la retracción).
- Protege al acero (hasta cierto punto) de los agentes externos.
- El control de calidad del material es casi siempre necesario.
- Es difícil o caro de reciclar cuando agota su vida útil.

El hormigón es un material pesado en relación a su resistencia, en comparación con el acero de construcción. En efecto, la densidad del hormigón puede ser típicamente 1/3 de la del acero (2700 frente a 7850 kp/m<sup>3</sup>), mientras que su resistencia es del orden de 1/10 de la del acero

como se indicó anteriormente. Esto hace del hormigón un material poco apropiado para construcciones de gran dimensión en altura como los “rascacielos”, debido a la gran compresión que las zonas inferiores deberían soportar.



Téngase noticia de que los aceros utilizados en las armaduras interiores del hormigón son, en general, de mejor calidad que los aceros para estructuras, y tienen denominaciones distintas, como por ejemplo B500S, o Y1860S3. Su límite elástico nunca es inferior a 400MPa, siendo usuales valores del orden de 700MPa (para armaduras en forma de barra), aunque puede llegar a valores del orden de 1900MPa (armaduras en forma de cordón para pretensados).

La normativa vigente que rige las aplicaciones del hormigón de finalidades estructurales se llama EHE [7], “Instrucción de Hormigón Estructural”, y es una norma aparte del CTE [6] “Código Técnico de la Edificación” al que hemos hecho referencia ocasional en el curso. La EHE establece las normas para la denominación de los hormigones de la forma siguiente:

[Tipo]-[Resistencia]/[Otras...]

Donde “tipo” es un indicativo de la finalidad de uso del hormigón. Sus valores posibles son “HM” para hormigón en masa, “HA” para hormigón armado, y “HP” para hormigón pretensado. El hormigón en masa es el que se usará sin armaduras, o en todo caso sólo con armaduras destinadas a controlar el efecto de la fisuración (generalmente en forma de malla, no de barras). El hormigón armado es aquel para el que se prevé la disposición de armaduras internas de acero. Es la forma más habitual de empleo del hormigón. En el hormigón pretensado las armaduras de acero están sometidas a una tensión de tracción durante el fraguado, que una vez liberada resulta en compresiones en el hormigón y tracciones en el acero antes de la puesta en servicio del elemento estructural.

La segunda indicación, “resistencia” es un parámetro indicativo de la resistencia a compresión del hormigón, llamado “resistencia característica”, que se denota como  $f_{ck}$  y que definiremos a continuación. Se expresa en MPa, y sus valores posibles son 20, 25, 30, 35, 40, 45, y 50. El hormigón de 20 MPa de resistencia sólo debe usarse para aplicaciones en masa.

Las restantes indicaciones (“otras”), incluyen características como la consistencia, el tamaño máximo del árido, o la designación del ambiente, y prescindiremos de ellas en esta breve exposición. En resumen, nos referiremos a un hormigón mediante una denominación como HM-25, o HA-35, etc.

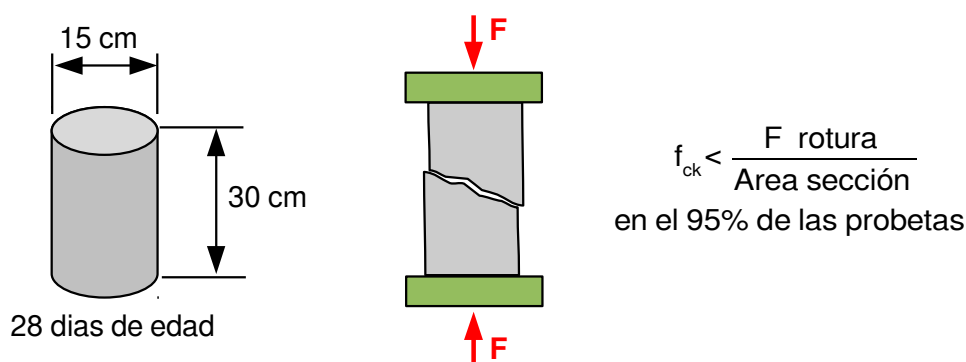


Figura 8.2: Probeta para obtención de la resistencia característica del hormigón.

La mencionada “resistencia característica”  $f_{ck}$ , que figura en la denominación anterior, se obtiene mediante ensayos de compresión realizados en probetas de geometría normalizada. Para ello se toma una pequeña parte de la amasada para fabricar las probetas. La resistencia característica se define básicamente como la tensión de compresión que resisten “casi todas” las probetas (el 95% de ellas) antes de romper. Como indica la figura 8.2, la probeta es de geometría cilíndrica de 15 cm de diámetro por 30 de altura, y se ensaya a los 28 días de edad, que es el tiempo considerado necesario para que el hormigón adquiera sus características nominales de resistencia.

Se admite que la tensión  $f_c$  a la que rompen las probetas de una amasada sigue una distribución gaussiana de probabilidad, como indica la figura 8.3. Evidentemente, la resistencia característica  $f_{ck}$  es menor que la “resistencia media”  $f_{cm}$  de las probetas. En las condiciones usuales de dispersión de las muestras,  $f_{cm}$  suele ser unos 8MPa mayor que  $f_{ck}$ .

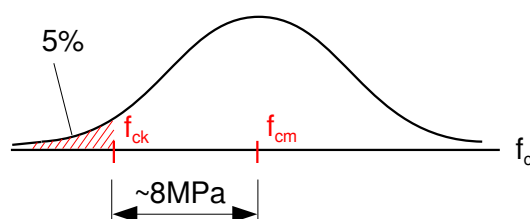


Figura 8.3: Distribución de probabilidad de la tensión de rotura de las probetas.

Adicionalmente, se utilizan algunos otros valores representativos de la resistencia del hormigón. Haremos referencia aquí a la denominada “resistencia de cálculo a compresión”,  $f_{cd}$ . Se trata simplemente de un valor convencional, que se obtiene de dividir la resistencia característica  $f_{ck}$  por un coeficiente de seguridad que típicamente toma valores entre 1.3 y 1.5.

Según el tipo de cálculo a realizar, procede utilizar unos u otros valores representativos de la resistencia del hormigón. En general,  $f_{cd}$  es usado preferentemente en cálculos de elementos estructurales de tipo barra.

Para cálculos que involucran cargas localizadas sobre grandes volúmenes de hormigón (situación habitual en cimentaciones), suelen emplearse valores representativos de resistencia que son mayores que  $f_{ck}$ . Ello obedece fundamentalmente a un efecto llamado “confinamiento”, que hace que el hormigón resista más compresión cuando la misma se aplica en una zona comparativamente pequeña de un gran macizo de hormigón (el hormigón circundante “confina” al que está en la zona donde se aplica la carga). En estas situaciones se usa ocasionalmente la resistencia media  $f_{cm}$ , aunque existe otro valor representativo llamado “resistencia efectiva”,  $f_{jd}$ , que tiene en cuenta este efecto de confinamiento. Orientativamente,  $f_{jd}$  puede tener valores del orden del doble de  $f_{ck}$ . Su valor depende de la geometría del problema, no sólo del tipo de hormigón.



El considerar el “confinamiento” de la manera mencionada responde al deseo de evitar calcular el estado de tensiones en el seno del hormigón (lo que serviría para caracterizar su resistencia en base a la tensión o deformación en cada punto, según el enfoque habitual de la Mecánica de Medios Continuos). En su lugar se persigue representar la resistencia del bloque de hormigón mediante un valor de la presión alcanzable en una zona particular de su contorno, lo que involucra inevitablemente a la geometría del problema.

Al intentar obtener una “ley de comportamiento” para el hormigón de manera similar a como se obtuvo la del acero, nos encontramos con varias dificultades que no se presentaban allí. En primer lugar, en el ensayo de compresión, no existe una zona lineal inicial clara en la gráfica tensión – deformación, siendo la misma sensiblemente curvada desde el inicio. En segundo lugar, el hormigón estructural presenta un fenómeno llamado “fluencia” (usualmente traducido así del inglés “creep”), que comparte con el escalón de fluencia del ensayo de tracción para un acero el hecho de que hay aumento de deformación bajo carga constante.

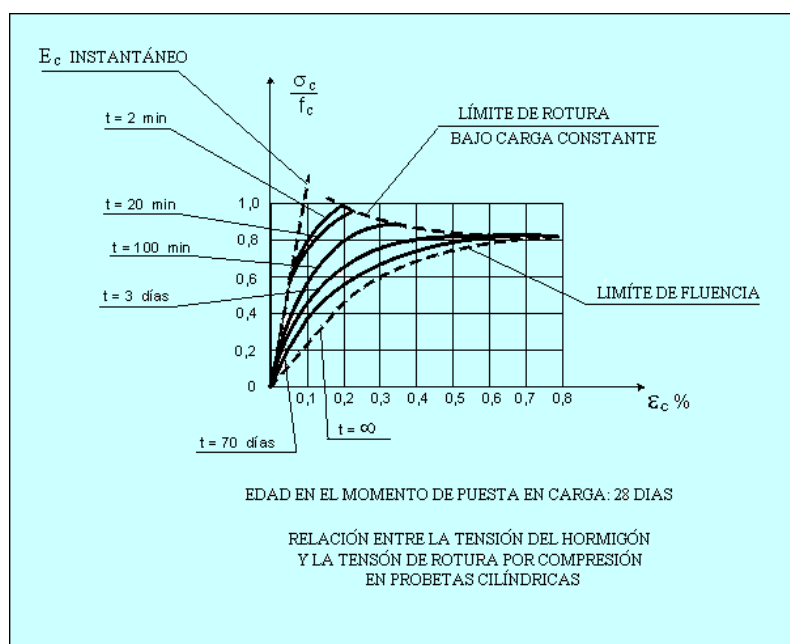


Figura 8.4: Ensayos de compresión sobre un hormigón joven (tomado de la EHE)

La figura 8.4, tomada de la norma de hormigón EHE, permite apreciar este comportamiento de fluencia (o “creep”). Imaginemos que cargamos la probeta hasta una tensión cualquiera (evitando efectos dinámicos, en cuestión de algunos segundos), y la mantenemos cargada. La deformación aumentaría al pasar el tiempo, y nos moveríamos en una recta horizontal. La gráfica permite apreciar lo anterior, ya que para un nivel de carga cualquiera, la deformación que indica a los 2 minutos es menor que la indica tras 70 días de mantener la carga. La deformación tendería asintóticamente en el tiempo a un cierto valor, que sería el correspondiente a la línea marcada como “Límite de Fluencia” (o “ $t = \infty$ ”). Para mayor complicación, este comportamiento de “fluencia” depende de más factores que los contemplados en la figura 8.4. Por ejemplo, si el hormigón es de más edad, se obtiene un conjunto de gráficas diferente (aunque con las mismas tendencias cualitativas), como se muestra en la figura 8.5.

A la vista de todo lo anterior, se puede apreciar que no es sencillo definir tal cosa como “el módulo de Young” para el hormigón. No obstante, la norma EHE [7] propone mediante fórmulas empíricas algunos “Módulos Equivalentes” (módulo tangente, módulo secante), para ser usados en contextos específicos, aunque no entraremos en detalle al respecto.



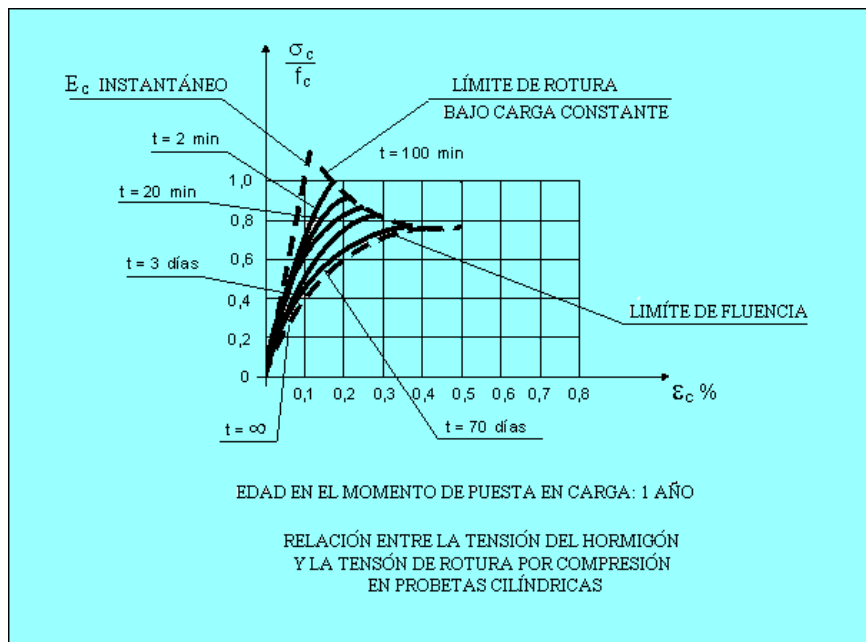


Figura 8.5: Ensayos de compresión en un hormigón de un año (tomado de la EHE)

En lo relativo a un posible diagrama de comportamiento idealizado para el hormigón, del tipo al presentado en la figura 3.4a para el acero, la figura 8.6 muestra el conocido como diagrama “parábola-rectángulo”, que es propuesto por la EHE para muchos de los cálculos. Como se aprecia, el mismo tiene un primer tramo parabólico con el vértice en  $(0,002, 0,85 f_{cd})$ , y que pasa por el origen, y un segundo tramo horizontal. Se admite como deformación de rotura el valor 0,0035. Apréciase la similitud cualitativa de este diagrama idealizado con las curvas experimentales de las figuras 8.4 y 8.5.

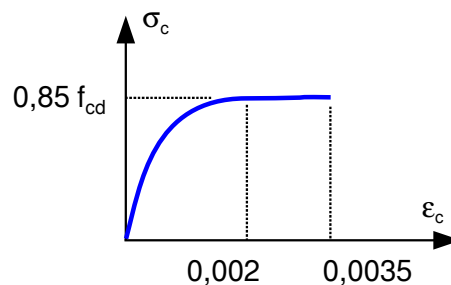


Figura 8.6: Diagrama "parábola-rectángulo" de comportamiento idealizado para el hormigón (se entiende que la tensión es de compresión, y la deformación un acortamiento).

## El Terreno

El estudio del comportamiento del terreno como sólido resistente es especialmente complicado, porque influyen muchos factores, la mayoría de ellos difíciles de modelar o cuantificar. Algunos de estos factores son:

- Heterogeneidad, con frecuencia muy irregularmente distribuida.
- Posible estratificación, que conlleva modos de fallo diversos (deslizamiento entre estratos, entre otros)
- Influencia del agua, del nivel freático, y de la permeabilidad del terreno.

- Grado de cohesividad (capacidad de resistir alguna tracción).
- Grado de compactación (relación materia/huecos en el terreno).

Una primera clasificación simplificada de los tipos de terreno desde el punto de vista resistente puede ser la siguiente:

- Terreno rocoso. Es el más ventajoso desde el punto de vista resistente. No obstante su resistencia es menor en rocas con alto grado de "meteorización" (fragmentación debida a los agentes medioambientales) que en "rocas sanas" (con poca meteorización).
- Terrenos cohesivos. Están compuestos fundamentalmente por arcillas. Sus propiedades pueden variar considerablemente según el tipo de arcillas presentes, y según factores relacionados con la presencia de agua (la saturación y la permeabilidad del terreno, fundamentalmente).
- Terrenos sin cohesión. Se trata de gravas y arenas, ya sean finas o gruesas. Son terrenos formados por partículas de tamaño mucho mayor que las micropartículas que típicamente forman los terrenos cohesivos. Están menos afectados por la presencia del agua, ya que en general presentan un buen drenaje.
- Terrenos no apropiados. Tales son los terrenos de contenido orgánico, ya que sus propiedades evolucionarán en el tiempo al evolucionar la materia orgánica (generalmente descomponerse). Los terrenos con yesos tampoco son apropiados, ya que el yeso es soluble en agua, y no es posible en la práctica el evitar permanentemente la presencia de ésta en el terreno.



Existen dos "reglas básicas" en relación con el terreno que en una primera presentación conviene mencionar explícitamente:

1) La primera capa de terreno, 50cm como mínimo, rara vez se considera utilizable. Se excava hasta cierta profundidad para encontrar terreno apropiado desde el punto de vista resistente (y para que la presión incremental en la base del cimiento sea menor).

2) A suficiente profundidad, confiamos en encontrar terreno apropiado. Incluso en el interior del cauce de un río, o en una zona portuaria. Unos 8m de profundidad podrían bastar. Hablaremos brevemente más tarde de estas "cimentaciones profundas".

### Resistencia y fallo del terreno.

El modelo habitual de resistencia del terreno parte de la concepción de que el mismo está formado por pequeñas partículas sólidas independientes entre sí, que pueden transmitir compresión por contacto entre ellos, pero no tracción. El medio así concebido puede soportar tensiones cortantes por rozamiento entre las partículas. Se considera que el rozamiento en este medio obedece la ley de Coulomb, por lo que la resistencia al deslizamiento entre dos planos será mayor cuanto más compresión exista entre dichos planos.

Las consideraciones anteriores permiten expresar las condiciones de resistencia del terreno de una manera coherente, basada en el concepto de tensión. La figura 8.7a representa una pequeña porción de dos planos contiguos del terreno, que en términos de la Mecánica de los Medios Continuos consideraríamos como un mismo plano ideal de corte, con sólido a uno y otro lado. La tensión de compresión entre ellos es simplemente el escalar  $\sigma$  tal como se definió en el Tema 2. Asimismo, la tensión tangencial es el escalar  $\tau$ .

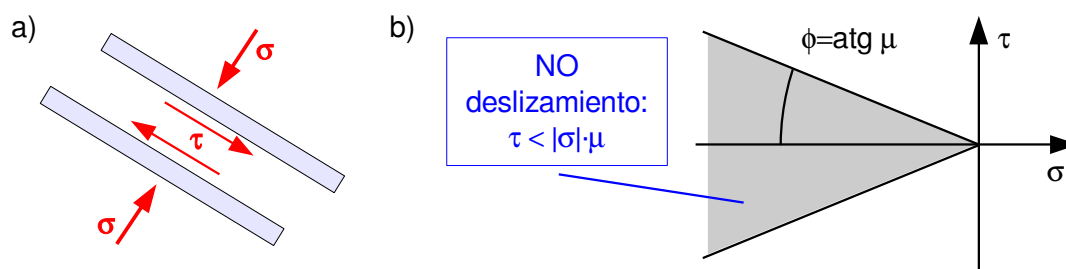


Figura 8.7: a) Tensión tangencial entre dos planos del terreno (transmitida por rozamiento).  
b) Condición de no deslizamiento, según el modelo de rozamiento de Coulomb.

Asumiendo como estamos acostumbrados que la tensión normal  $\sigma$  es positiva si es de tracción, y que la tensión tangencial  $\tau$  es un escalar sin signo, la condición de no deslizamiento entre los planos se expresa según la ley de Coulomb como:

$$\tau < |\sigma| \cdot \mu \quad (8.1)$$

Siendo  $\mu$  el coeficiente de rozamiento. Si representamos la condición anterior en el espacio  $\sigma$ - $\tau$ , teniendo en cuenta que solamente tiene sentido considerar tensiones normales de compresión, obtenemos la zona sombreada de la figura 8.7b. Cada una de las rectas que limitan esa zona forma con el eje x un ángulo  $\phi$ , que es el "ángulo de rozamiento" tal como se define habitualmente (el arco tangente de  $\mu$ ). La utilización práctica de esta figura consistiría en calcular primeramente la tensión normal y tangencial que debería haber en el punto y plano considerado, bajo la hipótesis de continuidad del terreno. Para ello se usaría algún método teórico basado en la mecánica de sólidos. Si la representación de esas componentes de tensión en la figura 8.7b cayese fuera de la zona sombreada, habría existido deslizamiento según ese plano: decimos que ha habido rotura del terreno (y la resolución teórica basada en la hipótesis de continuidad evidentemente no sería aceptable).

Pero sabemos hacer algo más eficiente que la comprobación individual de planos: el diagrama de Mohr representa las componentes normal y tangencial en todos los planos posibles que pasan por un punto dado del sólido. Es posible por tanto representar en la misma figura 8.7b el diagrama de Mohr que correspondiente a un punto del terreno según la solución teórica, para comprobar si se sale de la zona de seguridad. Si lo hace, es que existen planos en ese punto en los que se viola la condición de no-deslizamiento. En definitiva, para que el suelo no se rompa en ningún punto de una región, es necesario que los diagramas de Mohr de todos esos puntos estén contenidos en la zona sombreada de la figura 8.7b.

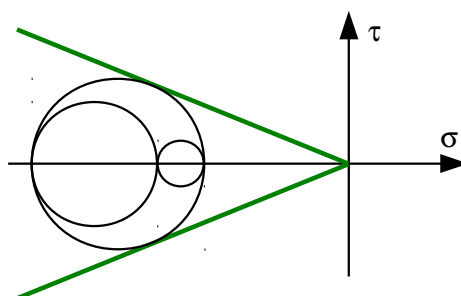


Figura 8.8: En un punto del terreno con un diagrama de Mohr como el indicado, el deslizamiento es inminente.

La condición límite de rotura de un punto del terreno ocurre cuando el diagrama de Mohr en ese punto justamente toca las líneas de la figura 8.7b. En ese caso sería inminente el deslizamiento según un plano. Tal situación se ilustra en la figura 8.8.

Observando la figura 8.8 es evidente que al aumentar las cargas sobre el terreno (y hacerse más grande el diagrama de Mohr), el primer punto en alcanzar el límite de la zona segura siempre será un punto de la circunferencia 2, tal como la definimos al estudiar la tensión. Por tanto, el deslizamiento en un punto siempre se iniciará en un plano perteneciente a la radiación del eje principal II.



Como se recordará, el criterio de Tresca para plastificación de materiales dúctiles implica también que la tensión tangencial máxima siempre corresponde a un punto de la circunferencia 2. Sin embargo, la rotura del terreno no ocurrirá según un plano de tensión tangencial máxima, como se puede apreciar en la figura 8.8.

El modelo de fallo del terreno presentado hasta aquí es adecuado para terrenos no cohesivos. Como se apuntó anteriormente, el que el terreno sea cohesivo significa a efectos prácticos que puede soportar estados de tensión que contengan tracción, lo que no ha quedado recogido en lo anterior. Para terrenos cohesivos consideraremos que la “zona segura” tiene básicamente la misma forma que hemos obtenido para terrenos no cohesivos, pero desplazada hacia la derecha en el diagrama  $\sigma$ - $\tau$  una distancia igual a la tracción que sea capaz de soportar el terreno en un estado uniaxial de tensión. De esta forma obtenemos una representación de la condición de no-deslizamiento como la de la figura 8.9.

Como se aprecia, el decir que el terreno puede soportar alguna tracción equivale según el modelo anterior a decir que puede soportar alguna tensión tangencial en ausencia de compresión. El valor de esta “tensión tangencial posible en ausencia de compresión” es el parámetro que se usa para caracterizar la “cohesión” del terreno, y es el indicado como “c” en la figura 8.9 (tanto “ $\phi$ ” como “c” son las notaciones habituales en las normas para el ángulo de rozamiento y la cohesión, respectivamente).

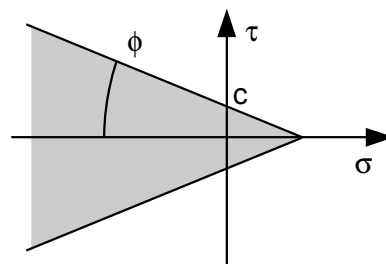


Figura 8.9: Representación de la condición de seguridad para un terreno cohesivo.

El criterio de fallo del terreno plasmado en la figura 8.9 se conoce en la literatura como criterio de Mohr-Coulomb. Este criterio depende únicamente de los dos parámetros “ $\phi$ ” y “c”. El criterio puede expresarse de forma analítica como:

$$\tau < c - \sigma \operatorname{tg} \phi \quad (8.2)$$

En donde la tensión normal  $\sigma$  se considera positiva si es de tracción, y la tensión tangencial se considera sin signo, como hacemos habitualmente. Un rango de valores típicos para los parámetros “ $\phi$ ” y “c” en terrenos no rocosos, puede ser el siguiente:

$$0 < c < 20 \text{ kN/m}^2 \text{ (} \sim 0.2 \text{ Kp/cm}^2 \text{)}$$

$$5 < \phi < 30^\circ$$

Téngase noticia de que cuando se modela la presencia de agua, el estudio del comportamiento y fallo del terreno presenta mayores complicaciones que las mencionadas aquí. Básicamente, el fenómeno relacionado es que el agua puede resistir mediante presión hidrostática una parte de las cargas que estemos aplicando al terreno, mientras no se evacue. En este contexto aparecen conceptos adicionales (comportamiento a corto y largo plazo, ángulo de rozamiento aparente...), que no se presentan aquí.



El criterio de Mohr-Coulomb se usa también para predecir el “fallo” de otros materiales que presentan distinto comportamiento a tracción que a compresión. De hecho, puede considerarse que matemáticamente, el criterio de Tresca para materiales dúctiles es un caso particular degenerado del de Mohr-Coulomb, haciendo en la ecuación (8.2)  $c = \sigma_c/2$ ,  $\phi = 0$  (en la figura 8.9 resultan así dos líneas paralelas al eje  $\sigma$ ). En el espacio de tensiones principales -recordar la figura 3.11-, el criterio de Mohr-Coulomb quedaría representado por una “pirámide de base hexagonal” y eje la trisectriz, en lugar del prisma hexagonal de Tresca. También existe la versión “suavizada” de ese criterio, representada en ese espacio por un cono inclinado (se llama criterio de Drucker-Prager).

El criterio de Mohr-Coulomb puede considerarse muy acertado para terrenos de grava, arena o arcilla asimilables a un medio continuo e isótropo. Pero como se ha mencionado, el terreno real rara vez tiene las citadas propiedades de homogeneidad e isotropía (o incluso de continuidad). Ello hace esperar que la precisión obtenida al aplicar dicho criterio a casos reales no sea muy grande.

Por ello, no es usual calcular rigurosamente la solución elástica en el terreno (solución tridimensional, de obtención en absoluto trivial) para realizar una comprobación según el criterio de Mohr-Coulomb. En su lugar se suele recurrir a modelos más simples y groseros, pero que en general hacen intervenir también los parámetros  $c$  y  $\phi$ . En este sentido, las normas ofrecen una clasificación de posibles “modos de fallo” del terreno, que se corresponden con situaciones de carga frecuentes en la práctica, con la intención de que identifiquemos cuáles son preocupantes en nuestro caso y apliquemos una pauta de cálculo simplificada específica para cada uno.

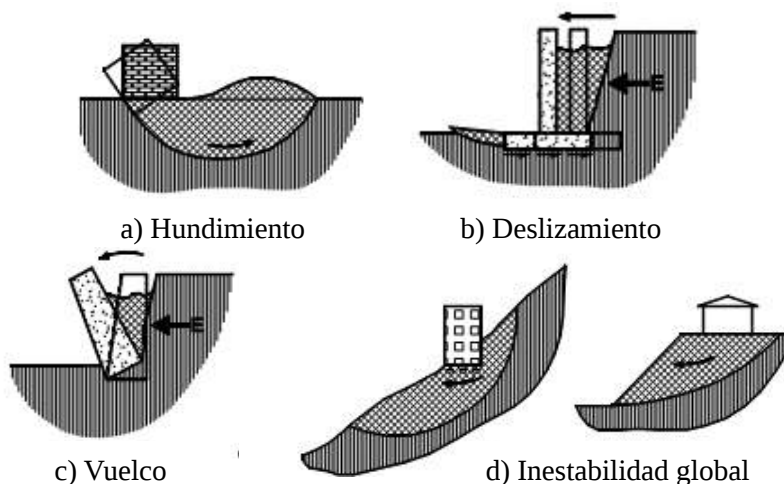


Figura 8.10: Algunos “modos de fallo” del terreno (figuras tomadas del CTE)

Las figuras 8.10 muestran algunos modos de fallo del terreno en situación de “estado límite último”, tal como se describen en el Código Técnico de la Edificación [6]. Las zonas sombreadas corresponden a terreno que no se ha movido, y las cuadriculadas a terreno que experimenta movimiento. La línea que las separa sería la superficie de fallo por cortadura, una vez que el deslizamiento puntual estudiado anteriormente ha progresado hasta formar esa superficie.

La figura 8.10a ilustra el “hundimiento” del terreno debido al empuje vertical de un elemento estructural (típicamente de cimentación). La configuración asimétrica mostrada no es la más frecuente en cimentaciones, siendo más usual (y quizá más sencilla a efectos ilustrativos) una configuración simétrica como la que mencionaremos más tarde. La figura 8.10b representa el “deslizamiento” producido por el empuje horizontal del propio terreno sobre un muro de contención de tierras. La figura 8.10c ilustra el posible “vuelco” del muro de contención, también debido al empuje horizontal del terreno. Finalmente, la figura 8.10d muestra dos posibles casos de “inestabilidad global” en los que una gran porción de terreno se mueve conjuntamente, sin que haya fallo local del terreno próximo a la edificación. Como se ilustra, este tipo de rotura del suelo sólo es preocupante en cimientos próximos a taludes, o en laderas inclinadas.

Hablaremos algo más sobre el fenómeno físico del hundimiento, ya que es el modo de fallo más frecuentemente asociado a las cimentaciones superficiales, de las que se presentan unas breves nociones en el epígrafe siguiente.

Existe un ensayo normalizado para el terreno consistente en comprimirlo progresivamente, típicamente con una placa rígida cuadrada o redonda, y medir el “asiento” (desplazamiento vertical) de la superficie comprimida según aumenta la carga. Encontraremos que hasta cierto nivel de carga existe proporcionalidad entre la presión aplicada y el asiento. Pero para niveles de carga superiores, la relación deja de ser lineal. Esa no linealidad indica que ha comenzado la rotura del suelo, la cual se produce idealmente en un punto por debajo de la superficie comprimida, a cierta profundidad. Si seguimos aumentando la presión, el asiento también aumentará (ya de manera no lineal), y nuevos puntos del terreno sufrirán deslizamiento, formando una la superficie de rotura creciente en el interior del terreno. Continuando el proceso, la superficie de rotura puede alcanzar la superficie del terreno y ser visible a simple vista. La figura 8.11 muestra cualitativamente la superficie de rotura en el estado final del proceso descrito.

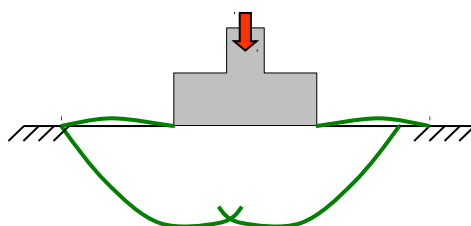


Figura 8.11: Superficie de rotura del terreno debida a una compresión localizada.

La “presión de hundimiento” o “resistencia característica del terreno”, denotada en el CTE como  $q_n$ , es la presión a la que deja de observarse la mencionada linealidad en la respuesta del terreno en las condiciones de carga descritas. La presión de hundimiento está afectada por varios factores, entre los que cabe destacar (ver tabla en el Apéndice E):

- Parámetros geométricos, como la relación ancho/largo del elemento que causa la compresión, y la profundidad en el terreno a la que se aplica la compresión.
- Parámetros propios del terreno, como su composición (terreno rocoso o no), y el valor de los parámetros de cohesión “ $c$ ” y de rozamiento “ $\phi$ ”.

- Otras circunstancias, principalmente asociadas a la presencia de agua (profundidad del nivel freático, saturación del terreno).

Orientativamente, para terreno uniforme aproximadamente horizontal, los valores que cabe esperar para la presión de hundimiento están comprendidos entre 1 y 5 Mpa para rocas (con meteorización moderada), y entre 0.1 y 0.5 MPa para otros suelos (arcillas, gravas...).

### Comportamiento en servicio del terreno

Como hemos indicado, la presión de hundimiento está relacionada con la rotura del terreno, situación que en todo caso trataremos de evitar. Para fines de cálculo y diseño de una cimentación, interesa igualmente caracterizar el comportamiento del terreno antes de que se produzca la rotura. En las mismas condiciones de carga de compresión sobre terreno horizontal consideradas en los párrafos anteriores, se define el “módulo de balasto” o “coeficiente de balasto”  $k_s$ , como la presión vertical aplicada dividida por el desplazamiento vertical que produce:

$$k_s = \frac{\text{presión aplicada}}{\text{desplazamiento}} \quad (8.3)$$

Como se observa, el coeficiente de balasto tiene dimensiones de peso específico, es decir de fuerza partido por volumen. Con este coeficiente se intenta establecer una relación sencilla entre cargas y desplazamientos para el tipo de carga que venimos considerando, aunque en realidad es difícil reducir a un solo parámetro dicha relación debido a lo complicado del comportamiento del terreno (se manejan conceptos tales como “asiento instantáneo”, “asiento de consolidación primaria”, y “asiento de consolidación secundaria”, difíciles de agrupar en un único parámetro, y que no entramos a detallar aquí).

Para mayor complicación, el coeficiente de balasto está influido por el tamaño de la placa con la que se realiza el ensayo. Es muy frecuente que la placa de ensayo no coincida con las dimensiones del elemento de cimentación (zapata) a proyectar, así que es preciso corregir este coeficiente mediante fórmulas estimativas (que también proporcionan las normas).



“Balasto” no es un señor. Se llama “balasto” a la capa de grava que se extiende bajo las carreteras y las vías de ferrocarril, para colocar sobre ella el pavimento, o las traviesas. El coeficiente que hemos definido toma su nombre de esta palabra por razones de tradición.

Finalizaremos esta breve exposición acerca del comportamiento del terreno explicando la mencionada influencia del tamaño de la placa en el coeficiente de balasto  $k_s$  medido. El concepto relevante al respecto es el llamado “bulbo de tensiones”. El mismo se define como la zona del terreno en la que la presión vertical es mayor que el 10% de la presión existente bajo el elemento que causa la compresión. Cualitativamente puede pensarse que se trata de la zona en que la carga que aplicamos tiene una influencia apreciable. El bulbo de tensiones tiene la forma aproximada que se muestra en la figura 8.12, y su profundidad “Z” es del orden de 1.5 a 2 veces el ancho “B” del elemento que causa la compresión (nótese que no depende del valor de la compresión).

Ocurre que el asiento (desplazamiento vertical de la zona comprimida) es mayor cuanto mayor sea el bulbo de tensiones, a igualdad de presión aplicada. Por supuesto, también ocurre que el asiento será mayor cuanto más presión se aplique. Teniendo en cuenta lo anterior, podemos concluir que a igualdad de presión, cuando usemos una placa más grande (o un elemento de cimentación real), el bulbo será mayor, y obtendremos un asiento mayor, y por tanto un coeficiente de balasto menor, que cuando usemos una placa más pequeña. De ahí la necesidad de “corregir”, en general a la baja, el coeficiente de balasto obtenido de ensayos con placa para su aplicación a problemas reales de cimentación.

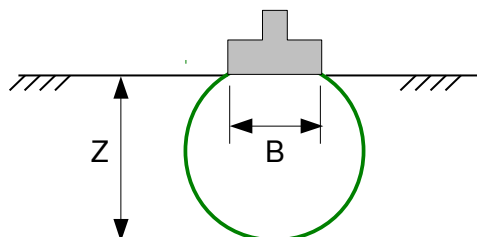


Figura 8.12: Bulbo de tensiones.

Notemos finalmente que dicha “corrección” del coeficiente de balasto presenta la incertidumbre adicional asociada a la posible no homogeneidad a gran escala del terreno. Por ejemplo, la figura 8.13 ilustra un caso de terreno con estratos “A” y “B” de propiedades distintas. El ensayo con placa “P” tiene su bulbo de tensiones contenido en el estrato “A”, mientras que el elemento de cimentación “C” (que es mayor que la placa) tiene su bulbo parcialmente contenido en el estrato “B”. La “corrección” del coeficiente de balasto asumiendo que todo el terreno implicado es del tipo “A”, podría suponer un error apreciable.

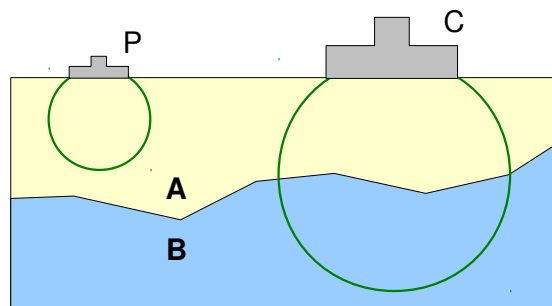


Figura 8.13: Bulbos de tensiones y heterogeneidad del terreno a gran escala

De lo anterior cabe entender que la fiabilidad de los módulos de balasto obtenidos a partir de ensayos de carga puede resultar insuficiente, especialmente si se van a utilizar elementos de cimentación muy grandes (como losas y emparrillados, de los que hablaremos brevemente más tarde), cuyo bulbo será mucho más grande que el del ensayo.

## La Cimentación

Entendemos por cimentación el conjunto de elementos intermedios que se disponen para que la interacción mecánica entre la estructura y el terreno se realice en buenas condiciones. Dichos elementos intermedios son necesarios porque el terreno presenta una resistencia y rigidez enormemente menores que las de las barras de la estructura.

Si permitiésemos la interacción directa entre ambos (por ejemplo enterrando o apoyando directamente los extremos de las barras en el terreno), las grandes tensiones previstas en las barras



no podrían ser localmente soportadas por el terreno, que se rompería y no realizaría sobre la estructura las reacciones que habíamos previsto para equilibrarla.

La cimentación ha de cumplir por tanto la doble función de resistir localmente las grandes tensiones necesarias para materializar las condiciones de apoyo en los extremos de las barras (posiblemente metálicas), y de repartir en superficies mucho mayores las acciones sobre el terreno, para que no haya tensiones localmente grandes en el mismo.

## Zapatas

El tipo más común de cimentación es el denominado “cimentación directa”. Se trata de repartir la carga vertical sobre una superficie horizontal amplia del terreno, de forma que la presión sobre el mismo no supere la presión admisible (que será la de hundimiento  $q_h$ , o la que provoque asientos inadmisibles). Son cimentaciones que se realizan excavando a poca profundidad, generalmente menos de 2m, y cuyo elemento fundamental es la “zapata”. Básicamente, una zapata es un bloque de hormigón que ha fraguado en una cavidad excavada al efecto en el terreno. Previamente se colocan las armaduras metálicas oportunas, que quedan embebidas en el hormigón.

Habitualmente, si se dispone de un buen terreno para el que no se esperan asientos importantes, cada zapata recibe un pilar de la estructura. Se llama “zapata aislada” a esta configuración, que se ilustra en la figura 8.14.

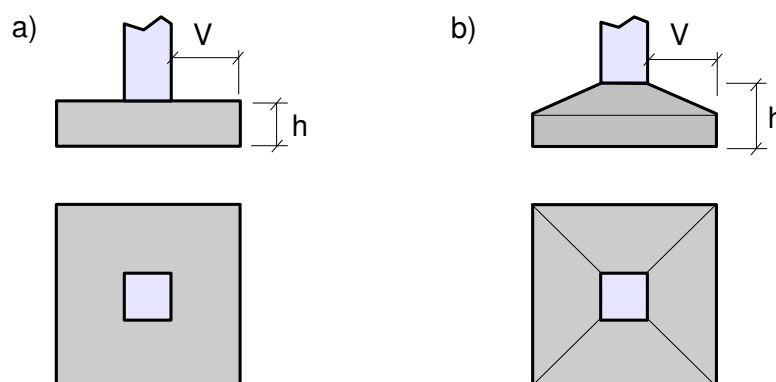


Figura 8.14: Zapata aislada (dos geometrías posibles).

Se distingue entre zapatas flexibles y zapatas rígidas. Una zapata se llama flexible si su “vuelo”  $V$  es mayor que el doble de su altura  $h$  (ver fig. 8.14):  $V > 2h$ . Se llama rígida en caso contrario. Una zapata flexible (según la denominación anterior) tiende a deformarse más frente a las presiones comunicadas por el terreno, y por tanto a producir una distribución de presión más próxima a la uniforme, lo que en principio es deseable. La tendencia de una zapata rígida es a “hincar” sus extremos en el terreno, produciendo presiones de mayor valor en esos extremos, y menores en el centro. Esta tendencia se ilustra cualitativamente en la figura 8.15.

La forma de la distribución de presiones bajo la zapata también se ve influida por el tipo de terreno. En un terreno arenoso, y más acusadamente cuanto menos profunda sea la cimentación, el terreno circundante ejerce sobre el que está bajo la zapata un confinamiento débil. Esto provoca que la presión en los bordes de la zapata tienda a ser menor, como indica la figura 8.16a (como si la arena se “escapase” hacia los lados).

En un terreno arcilloso, por el contrario, la cohesividad favorece el efecto de confinamiento del terreno bajo la zapata, y la distribución de presiones tiende a parecerse más a la solución teórica de un punzón rectangular rígido presionando sobre un medio elástico (dicha solución predice presión infinita en los bordes del punzón). La tendencia es que existan presiones mayores

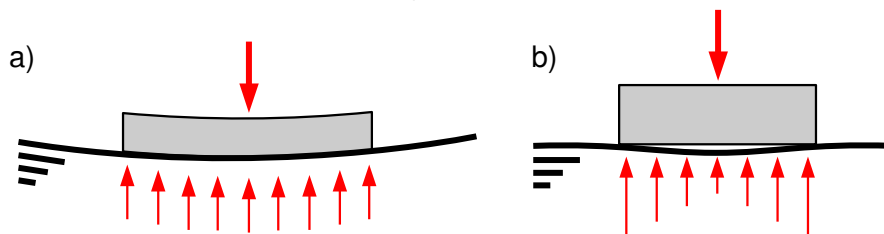


Figura 8.15: Distribución de presión bajo una zapata. a) Flexible. b) Rígida.

en los bordes de la zapata, contrariamente a lo que ocurre con los suelos arenosos. Ambas tendencias se ilustran cualitativamente en la figura 8.16.

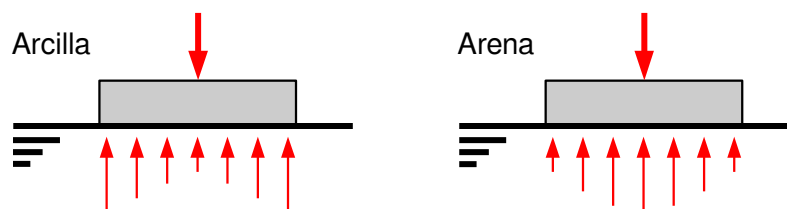


Figura 8.16: influencia del tipo de terreno en la presión bajo la zapata.

En la práctica, y salvo que se esperen efectos de los tipos anteriores especialmente acusados, es frecuente asumir una distribución lineal de presión bajo la zapata, de forma que ésta quede en equilibrio teniendo en cuenta las acciones que le transmite el pilar, y el propio peso de la zapata. La figura 8.17 muestra de forma cualitativa cómo se supondría dicha distribución de presiones para una columna centrada en la zapata, que solamente trabajase a compresión (caso a), o que además soportase un pequeño momento flector (caso b).

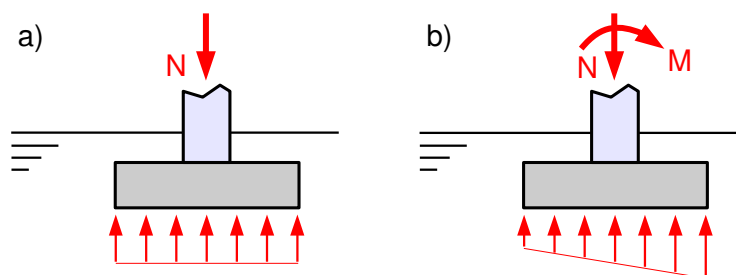


Figura 8.17: Normalmente se supone distribución lineal de presión bajo la zapata.

Con lo anterior, se da solución al aspecto de la cimentación relativo a la resistencia del terreno. En cuanto a la conexión del pilar con la zapata, y asumiendo que el pilar es metálico, el problema fundamental es que el hormigón es aún mucho menos resistente que el acero, aunque lo sea más que el terreno. En el extremo del pilar deben actuar localmente grandes tensiones para materializar las condiciones de apoyo previstas (típicamente un empotramiento). Estas tensiones no podrían ser soportadas directamente por el hormigón en la mayoría de los casos prácticos.

Para dar solución a lo anterior, se recurre a la misma idea empleada para el problema de la resistencia del terreno: repartir las acciones en superficies más grandes. En este caso, usaremos una “placa base”, “placa de anclaje” o “placa de reparto” metálica, unida a la base del pilar, siendo esta placa la que estará en contacto con el hormigón. La figura 8.18a muestra un

ejemplo de placa base. En los casos usuales en los que el pilar trabaja fundamentalmente a compresión (con un momento flector pequeño o nulo), toda la superficie de la placa quedará en contacto con el hormigón. En este caso se supone para los cálculos una distribución lineal de la presión de contacto como se indica en la figura 8.18b. En esa misma figura se aprecia que la placa base trabajará a flexión. Si la misma sobresale mucho de la sección del pilar, las zonas más alejadas (en las que el desplazamiento es mayor) tienden a no contribuir significativamente a soportar la carga, pudiendo incluso perder el contacto con el hormigón. Para evitarlo se pueden disponer refuerzos en forma de cartela como los mostrados en la figura 8.18a. Estos refuerzos evitan la deformación de la plaza base en las zonas mas alejadas, asegurando que toda su superficie contribuirá a soportar la presión en las condiciones previstas.

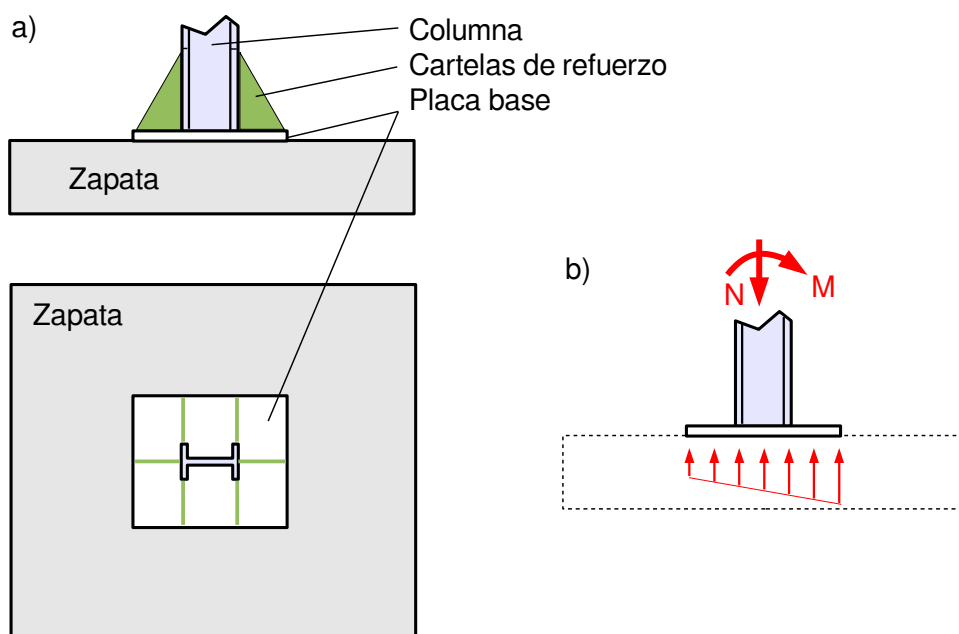


Figura 8.18: Placa base con sus posibles cartelas de refuerzo.

Por supuesto, es necesario unir firmemente la placa base a la zapata, ya que el simple contacto entre ellas no garantiza un correcto posicionamiento a largo plazo, y sobre todo porque pueden existir acciones horizontales (transmitidas como esfuerzo cortante en el pilar), o tracciones (asociadas a momento flector importante en el pilar, o a esfuerzo axial de tracción), que el simple contacto no puede equilibrar. Para unir la placa base a la zapata se utilizan “pernos de anclaje”.

Los pernos de anclaje son barras de acero parcialmente embebidas en el hormigón de la zapata, y cuya parte saliente se utiliza para materializar la sujeción de la placa base. Ésta parte saliente de los pernos está generalmente roscada, en previsión de colocar unas tuercas que finalmente sujetarán la placa base. La misma ha sido previamente taladrada para hacer pasar los pernos a su través, como indica la figura 8.19. En esta figura se indican algunos detalles adicionales de la ejecución de la unión (y se han omitido las posibles cartelas de refuerzo). En primer lugar, se aprecia que la placa base no apoya directamente sobre el hormigón de la zapata, sino que se colocan unas “tuercas de reglaje” cuya altura puede ajustarse con precisión. Sobre ellas se coloca la placa base (probablemente con el pilar ya soldado), que se sujeta al perno con tuerca y contratuerca. El espacio existente entre la placa base y la zapata queda relleno con un “mortero de reglaje”, que es el que realmente transmite a la zapata (o así se considera) una distribución de compresiones por contacto como la que se mostró en la figura

8.18b. Para el mortero de reglaje se utiliza un mortero rico de cemento (cemento, arena y agua con gran proporción de cemento).

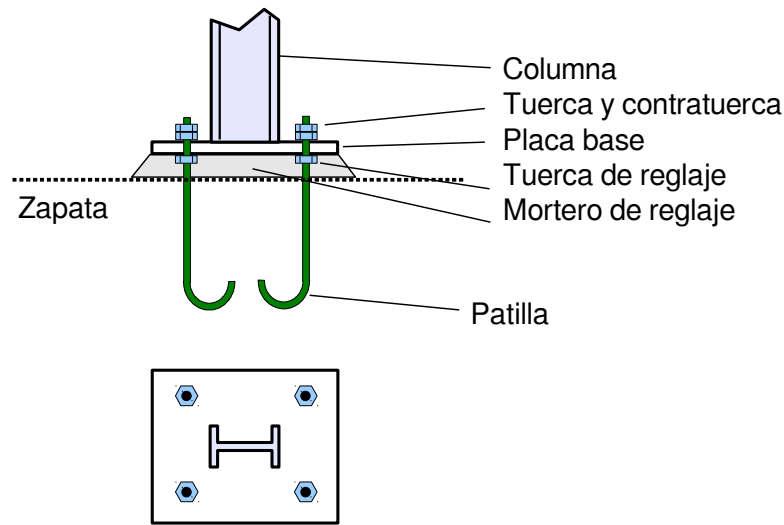


Figura 8.19: Unión de la placa base a la zapata mediante pernos de anclaje.

En la figura 8.19 se aprecia también que el extremo inferior del perno está curvado. Se llama “patilla” a esta curvatura, que tiene por función aumentar la resistencia de la unión entre el perno y el hormigón, especialmente frente a tracciones en el perno.

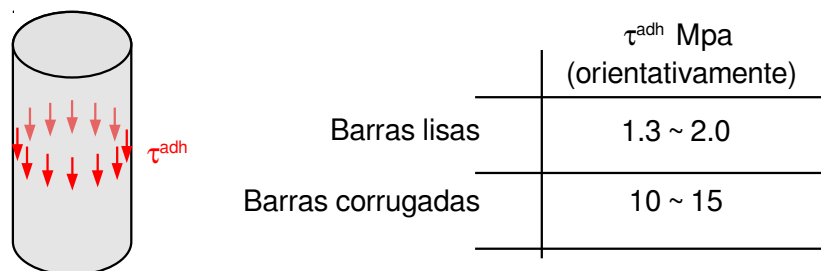


Figura 8.20: Tensión de adherencia de los pernos al hormigón.

A pesar de la existencia de la patilla, que la normativa obliga a usar, se supone que la sujeción del perno al hormigón corre a cargo solamente de la adherencia entre el hormigón y la superficie lateral del perno (no obstante se admite una mayoración respecto de la tensión de adherencia obtenida en ensayos sin patilla). En la figura 8.20 se indica de forma orientativa el orden de magnitud de la tensión de adherencia con la que se cabe contar para los cálculos. Los valores presentados corresponden a estados límite últimos, y tienen en cuenta la aportación de la patilla. Aunque influyen otros factores (por ejemplo el diámetro del perno), el factor más destacado es si el perno es “corrugado” o es “liso”. Se dice que el perno es corrugado cuando presenta irregularidades de forma continua en toda su superficie lateral, lo que aumenta en un factor de hasta 8 la adherencia aparente. El empleo de barras de acero corrugadas es habitual en la práctica de las aplicaciones de hormigón armado.

Como se ha mencionado, si los cálculos indican que toda la placa base quedará comprimida, se supone que esa compresión es transmitida por el contacto entre la placa y el hormigón, sin intervención significativa de los pernos. En este caso se asume que la distribución de presión es lineal, como ilustra la figura 8.21a, en la que aparece aislado el sólido formado por un pequeño trozo del pilar y la placa base. Matemáticamente, el cálculo de la distribución de presiones es el mismo problema implicado en la figura 8.17b. Puede plantearse en función de dos

incógnitas, por ejemplo la presión máxima y la presión mínima, que ocurrirán en los extremos de la placa, y se cuenta con dos ecuaciones: la de equilibrio de fuerzas verticales, y la de equilibrio de momentos (ya que no estamos considerando fuerzas horizontales). Por tanto podemos determinar la distribución de presión fácilmente en este caso.

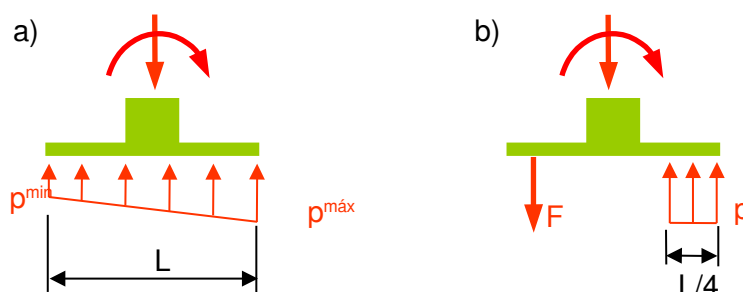


Figura 8.21: a) Modelo cuando toda la placa transmite compresiones. b) Aproximación para el caso en que existan tracciones de importancia.

El caso en que los cálculos indicasen que una parte de la placa deba transmitir tracciones, procede plantear que esas tracciones se transmiten en realidad a través de algunos de los pernos, ya que evidentemente el contacto placa - hormigón no puede soportar dichas tracciones. Desde el punto de vista del álgebra, esta situación presenta alguna complicación adicional, ya que contamos con las dos ecuaciones de la estática mencionadas anteriormente, pero tenemos tres incógnitas: la fuerza resultante sobre los pernos de tracción, el valor de la presión máxima, y la longitud de la zona de compresión (suponiendo por ejemplo que la presión evoluciona desde el valor máximo hasta cero en esa zona de compresión, o bien que tuviese un valor constante en dicha zona). Se puede dar salida al problema obteniendo una ecuación adicional basada en la hipótesis de que la placa es rígida, y suponiendo que cierta profundidad de perno y de hormigón se deforma conjuntamente. No se considera oportuno entrar aquí en detalles al respecto, para no complicar innecesariamente esta breve exposición con cálculos cuyo realismo es en todo caso moderado.

En su lugar, y para casos en los que las tracciones sean importantes, puede aplicarse la "receta" aproximada indicada en la figura 8.21b. Como se indica, se considera que la longitud de la zona de compresión es L/4 (cuando en rigor sería desconocida a priori), con lo que la resultante en los pernos de tracción, y la presión (que se supone constante), pueden calcularse con las ecuaciones de equilibrio.

La comprobación más importante a realizar es que la presión máxima sea admisible para el material más débil, que en este caso es el hormigón. Análogamente en la comprobación del contacto entre la zapata y el terreno considerado en la figura 8.17, la presión máxima debe tener un valor admisible para el terreno (material más débil en este caso). Nótese que en el caso del contacto de la zapata con el terreno, no se debe admitir otra cosa que el que toda la superficie experimente compresión. El propio peso de la zapata favorece que ello ocurra, pero si de los cálculos resultase una pérdida de contacto de la zapata con el terreno, habría que reconsiderar el diseño de la zapata.

### Otros elementos de cimentación directa

Las zapatas aisladas pueden unirse entre sí mediante "vigas de atado". Se trata de barras horizontales de sección moderada que conectan las zapatas, y cuya finalidad principal es prevenir movimientos horizontales relativos entre las mismas. Por tanto el modo de trabajo previsto de

estas barras no es en realidad el típico de una viga (es decir, flexión), sino más bien de tracción – compresión, como indica la figura 8.22. La necesidad de “atado” de las zapatas está fundamentalmente relacionada con la prevención de los efectos de las acciones sísmicas.

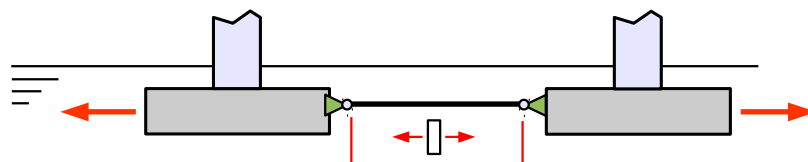


Figura 8.22: Modo de trabajo previsto de una "viga de atado" (representación esquemática).

Las zapatas aisladas también pueden unirse entre sí mediante “vigas centradoras”. Su finalidad principal es uniformizar la distribución de presión bajo la zapata (ver figura 8.23). Esto tiene especial importancia cuando el pilar no está situado en el centro de la zapata, lo que ocurre por ejemplo en zapatas situadas en el contorno de la edificación (en una esquina o junto a una pared), cuando el terreno adyacente no es de nuestra propiedad.

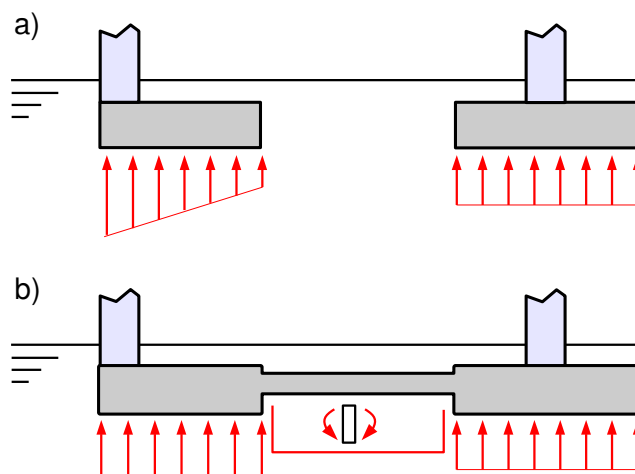


Figura 8.23: a) Situación sin viga centradora. b) Efecto deseado de la viga centradora.

La viga centradora debe tener mayor rigidez a flexión que una viga de atado, ya que debe impedir el giro de la zapata (en el sentido del vuelco) para conseguir un reparto mas uniforme de la presión de ésta sobre el terreno. El efecto deseado de una viga centradora se ilustra esquemáticamente en la figura 8.23. En ella se muestra también el modo de trabajo previsto de éste elemento.

Cuando el terreno es poco resistente, o se prevean asientos diferenciales importantes, o bien cuando del dimensionado de las zapatas resulte que fuesen a quedar muy juntas, se pueden agrupar varias zapatas en una sola. Se llama “zapata combinada” a la que recibe dos pilares, o más si no están alineadas (fig.8.24a), y “zapata corrida” a la que recibe tres o más pilares alineados (fig. 8.24b). Para cimentar un muro de carga es apropiada una zapata alargada, de geometría similar a la que tendría una zapata corrida. Se llama “zapata corrida bajo muro” (fig. 8.24c).

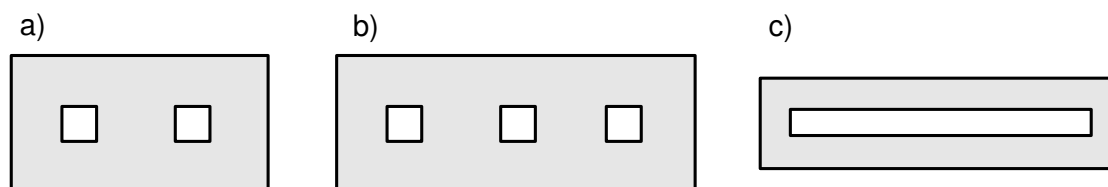


Figura 8.24: Zapatas especiales a) Combinada. b) Corrida. c) Corrida bajo muro.

Cuando esperamos que pueda haber asientos diferenciales en distintas zonas de la estructura (porque el terreno presente variaciones de rigidez en el área a cimentar), y en general en terrenos de características especialmente deficientes, puede hacerse que todos los pilares de la estructura queden recogidos en una única cimentación, que se llama “emparrillado”. Se trata de una disposición de la cimentación en zapatas corridas entrecruzadas, en general ortogonalmente, que forman un conjunto de gran rigidez (evidentemente mayor que el que se consigue con vigas centradoras). Una disposición de este tipo se muestra en la figura 8.25.

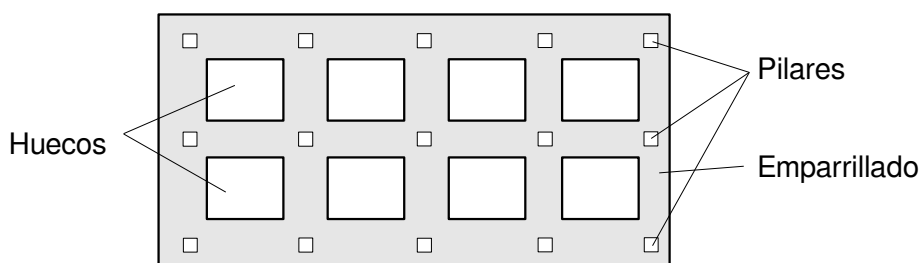


Figura 8.25: Cimentación mediante emparrillado.

Finalmente, cuando la superficie cubierta por los elementos aislados de cimentación (o eventualmente por un emparrillado), fuese a suponer un gran porcentaje de la superficie en planta de la estructura, es posible utilizar una “losa de cimentación”. Como su nombre indica, se trata de una gran losa continua que recoge todos los pilares. La cimentación mediante losa es también empleada frecuentemente en edificaciones con sótanos de varios pisos.

Cabe insistir en que todos los elementos de cimentación mencionados se ejecutan en hormigón, con las armaduras de acero oportunas (aspecto en el que no entramos en el curso).

### Cimentaciones profundas

Como se mencionó en un apartado anterior, en ocasiones no se encuentra terreno con buenas características resistentes hasta una profundidad tal que haría impracticable la ejecución de una cimentación directa, debido entre otras razones a que el vaciado del terreno hasta esa profundidad para el solo propósito de cimentar, tendría un coste desproporcionado. En estos casos se plantea el uso de las denominadas “cimentaciones profundas”.

El elemento fundamental de la cimentación profunda es el “pilote”. Geométricamente, un pilote es una gran barra recta que penetra verticalmente en el terreno, hasta profundidades en las que éste presenta mejores propiedades resistentes. Lo más habitual es que los pilotes sean de hormigón armado, aunque es posible utilizar pilotes metálicos (secciones tubulares, o en H), o de madera.

Normalmente, no se considera que el diámetro de un pilote de hormigón pueda ser menor que 0.5m. Típicamente, su diámetro es del orden de 1m (1.5m es igualmente posible, siendo difícil

aventurar un límite superior). La longitud requerida de un pilote de este tipo suele estar en el orden de 6 a 12m, orientativamente. Será mayor que 8 veces su diámetro.

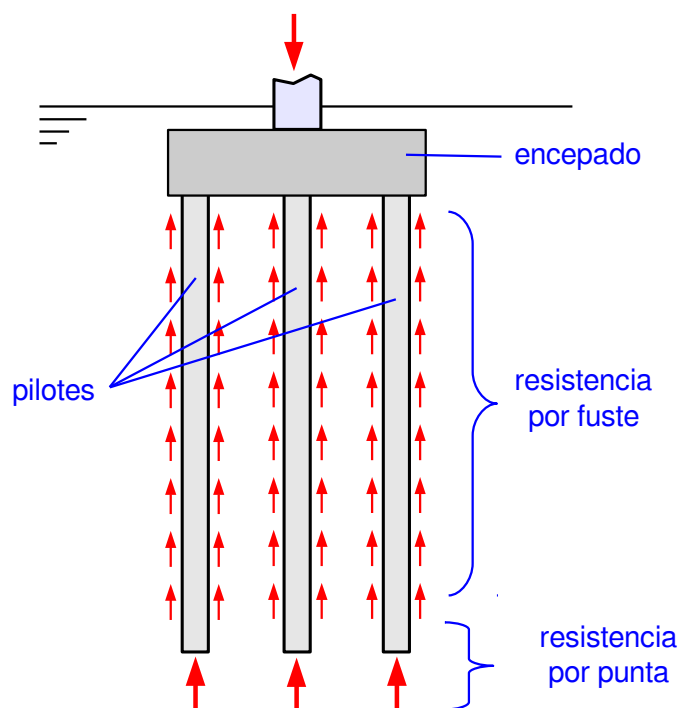


Figura 8.26: Ejemplo de cimentación profunda.

En cuanto a la forma de construir los pilotes de hormigón, podemos resumir su clasificación en pilotes prefabricados y pilotes hormigonados *in situ*. Los pilotes prefabricados se hincan en el terreno mediante golpes de maza o mediante vibraciones, sin excavación previa en el terreno.

Existe una variedad de métodos posibles para hormigonar un pilote *in situ*. Un procedimiento básico es la perforación del terreno mediante barrena (usando una máquina de barrenar de grandes dimensiones), y verter el hormigón a la vez que se va extrayendo progresivamente la barrena. En este caso la "entibación" (sujeción de las paredes del terreno) la produce la propia barrena. Mencionaremos también la posibilidad de emplear entubaciones metálicas. En este caso la entibación del terreno está garantizada por el tubo metálico. El procedimiento básicamente consiste en la colocación del tubo en el agujero que se barrena en el terreno, y el posterior vertido de hormigón en el tubo. Lo habitual es ir retirando la entubación a medida que el hormigón es vertido ("camisa recuperable"), siempre conservando una altura prudencial de hormigón fresco por encima del extremo inferior del tubo durante el proceso. También es posible no retirar la entubación ("camisa perdida"), lo que puede ser conveniente si existe agua subterránea que pudiera "lavar" el hormigón antes de fraguar, o si se quiere conseguir una mayor resistencia del pilote frente a futuras acciones laterales inducidas por el terreno (que producirán flexión en el pilote).

En todo caso, las armaduras metálicas del pilote se colocan habitualmente hincándolas en el hormigón aún fresco, hasta alcanzar la profundidad deseada (que puede ser algo menor que la longitud del pilote).

En cuanto a su forma de trabajo, los pilotes pueden equilibrar la fuerza vertical que les transmite la estructura mediante rozamiento de la pared lateral del pilote con el terreno circundante, y por apoyo del extremo inferior del pilote en un estrato del terreno de buenas características.



Atendiendo a lo anterior, los pilotes se clasifican en “pilotes por fuste” y “pilotes por punta” (se llama “fuste” a la superficie lateral del pilote), según predomine uno u otro efecto en su modo de trabajo.

Es usual disponer los pilotes en grupos de varios de ellos, con sus extremos superiores unidos mediante un elemento llamado “encepado”. Éste es de hormigón armado, de geometría similar a la de una zapata, y al igual que ésta proporciona los puntos de anclaje para los pilares de la estructura. No obstante, es un elemento estructural que tiene un modo de trabajo diferente que la zapata, y que requiere armaduras diferentes. Es frecuente proyectar el encepado de forma que sea lo bastante rígido como para poder suponer que el mismo es infinitamente rígido en lo relativo a los cálculos de los pilotes. En ese caso, se supone que la conexión de los pilotes con el encepado es articulada, y que el encepado no se deforma, aunque evidentemente pueda experimentar movimientos (como sólido rígido). El peso del encepado debe considerarse en el cálculo de los pilotes.

## ***Uniones en Estructura Metálica***

Para que el modelo de comportamiento de barras a tracción-flexión estudiado en el tema 4, y los modelos de comportamiento de estructuras que se han mencionado en el tema 7, sean aplicables con buena aproximación, es necesario que las conexiones de la estructura (tanto de las barras entre sí como con la sustentación) reproduzcan en la práctica el comportamiento que se ha asumido en el modelo. El estudio detallado de la problemática y ejecución de las uniones se sale con mucho del ámbito de este curso. La intención del presente epígrafe se limita a ofrecer unas nociones muy sucintas acerca de las uniones en estructura metálica, con la intención de que este importante aspecto de las estructuras no pase desapercibido, o quede oculto a los ojos del estudiante, entre los modelos de comportamiento de barras que se estudian.

### **Medios de unión**

Los medios de que disponemos para unir entre sí elementos metálicos son básicamente dos: tornillos (o remaches, o roblones), y soldadura. Cada uno tiene su problemática y sus ventajas específicas. No debe prejuzgarse que la soldadura ofrece una unión de mejor calidad por el hecho de que es más ampliamente utilizada en la práctica. De hecho, la soldadura induce cambios en la estructura microscópica del acero circundante, tensiones residuales, y propensión a la formación de grietas, que son indeseables. En el lado positivo, la soldadura es muy versátil, y en general más sencilla de ejecutar que las disposiciones con tornillos o remaches. En muchas situaciones, la versatilidad y la sencillez de ejecución de la soldadura la hacen preferible, pero en otras (especialmente las de gran responsabilidad, como en aplicaciones aeronáuticas), una unión con tornillos o remaches puede estar más indicada.

Como regla general, el material utilizado para la unión debe ser de mejor calidad que el material base a unir. En particular, no se emplea acero de construcción como material de unión, sino aceros de mayor resistencia y mejores propiedades mecánicas. Lo anterior se aplica tanto al acero de aportación de la varilla en la soldadura, como al acero de los tornillos o remaches.

Como muestra la figura 8.27, los tornillos constan de un cuerpo cilíndrico roscado en un extremo en previsión de colocar una tuerca (eventualmente con arandela y contrartuerca para asegurar la unión), y provisto de una cabeza de mayor diámetro en el otro extremo, generalmente de la misma geometría y tamaño que la tuerca correspondiente (hexagonal, al objeto de

poder usar una llave para el apriete). Por su parte, los remaches (o roblones) poseen también un cuerpo cilíndrico que en un extremo acaba en una cabeza de mayores dimensiones, no teniendo el otro extremo ningún tallado especial antes del montaje. En el momento de su colocación, ese extremo se deforma plásticamente con una máquina adecuada (generalmente en caliente), conformando una segunda cabeza. Las cabezas de los remaches no tienen geometría hexagonal ya que no está previsto su apriete con llave.

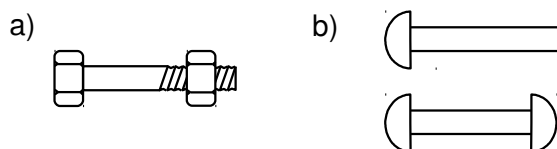


Figura 8.27: a) Tornillo con tuerca. b) Remache antes y después del conformado de la segunda cabeza.

Los tornillos y los remaches tienen un modo de trabajo similar. Habitualmente unen varias chapas previamente taladradas, siendo su función fundamental evitar el deslizamiento relativo entre dichas chapas, aunque también evitan la separación de las chapas en caso de que ésta tienda a producirse. La figura 8.28a muestra como ejemplo una unión de tres chapas realizada con tornillos o con remaches. Entre los problemas que puede tener una unión como la indicada, mencionaremos en primer lugar en mostrado en la figura 8.28b, que es el fallo de los tornillos por cortadura. En este caso, las chapas actúan como unas enormes tijeras que “cortan” el vástago de los tornillos de la misma manera que unas tijeras normales cortarían por ejemplo un palillo. Otro posible problema es el aplastamiento de la chapa contra el tornillo, como indica la figura 8.28c. Las tensiones de contacto entre ambos elementos son localmente grandes, y pueden producir plastificación de la chapa en la zona próxima al contacto, tendiendo a “rasgar” los agujeros como se indica. Otro posible modo de fallo de la unión es la rotura de la chapa por la línea de los agujeros, como muestra la figura 8.28d. Este fallo se debe a la disminución de la superficie transversal útil de la chapa, que debe transmitir las tensiones aplicadas, y es similar a la rotura del papel del rollo de cocina por la línea perforada.

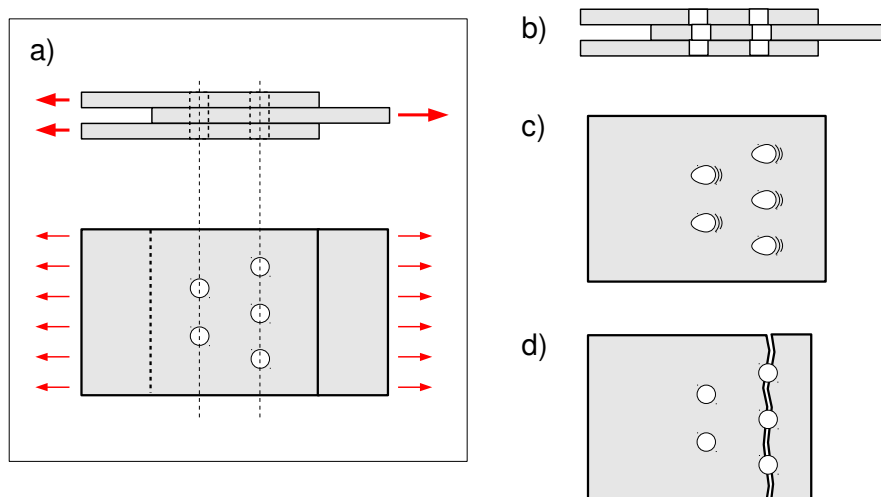


Figura 8.28: a) Ejemplo de unión de tres chapas con tornillos o roblones. b) Fallo de los tornillos por cortadura. c) Fallo de la chapa por aplastamiento contra el tornillo. d) Fallo de la chapa debido a la disminución de sección útil.

Por supuesto, la unión debe diseñarse de modo que en las condiciones de trabajo previstas no suceda ninguna de las situaciones de fallo mencionadas (ni cualquier otra). El cálculo “exacto” del estado de tensión en los elementos afectados suele ser muy complicado, por lo que gene-

ralmente se recurre a simplificaciones avaladas por los ensayos, y recogidas en la normativa, para predecir si cada uno de los tipos de fallo descritos sucederá o no. Los detalles al respecto no son ya objeto de estudio en este curso.

La soldadura es un procedimiento de unión para metales basado en fundir una pequeña zona de material próximo a la zona de unión, en ambas piezas a unir. Al enfriarse, el material de ambas piezas que estuvo fundido (y que se mezcló de manera natural), vuelve al estado sólido, formando la unión entre dichas piezas. La soldadura suele ejecutarse con “materia de aportación”, es decir que además de fundirse una cierta zona de las piezas, se aporta en el proceso material fundido adicional. Este material típicamente proviene de una varilla que se funde progresivamente empleando la misma fuente de calor usada para fundir las piezas a unir. La necesaria elevación de temperatura del material puede conseguirse mediante una corriente eléctrica, o mediante la combustión de un gas, en ambos casos de forma controlada para que el aumento de temperatura no afecte a una zona mayor de lo necesario. En el caso del empleo de corriente eléctrica, es común la denominada “soldadura por arco”. En este procedimiento, se hace saltar un arco eléctrico entre una varilla (que se va consumiendo y que sirve de material de aportación), y la zona de unión de las piezas. Cuando se emplea la combustión de un gas, lo más común es hacer circular por el soplete una mezcla de oxígeno y acetileno. La boquilla del soplete es muy estrecha, para localizar la aportación de calor a una zona pequeña. Aunque este procedimiento puede realizarse sin material de aportación (“soldadura autógena”), suele emplearse una varilla metálica cuyo extremo se mantiene junto a la llama del soplete para que aporte material fundido. Independientemente del procedimiento de soldadura, se recomienda que las piezas a unir tengan espesores mayores de 4mm, y que las superficies que han de fundir formen un ángulo menor de 120°.

La “garganta” es el concepto fundamental en el cálculo resistente de una soldadura. Como ejemplo, la figura 8.29 muestra esquemáticamente un cordón de soldadura que une dos placas perpendiculares entre sí. El espesor de la garganta “a”, es la distancia desde el vértice que forman las superficies de las placas, hasta una línea que esté lo más alejada posible de ese vértice, pero que esté totalmente contenida en el cordón de soldadura, como se indica.

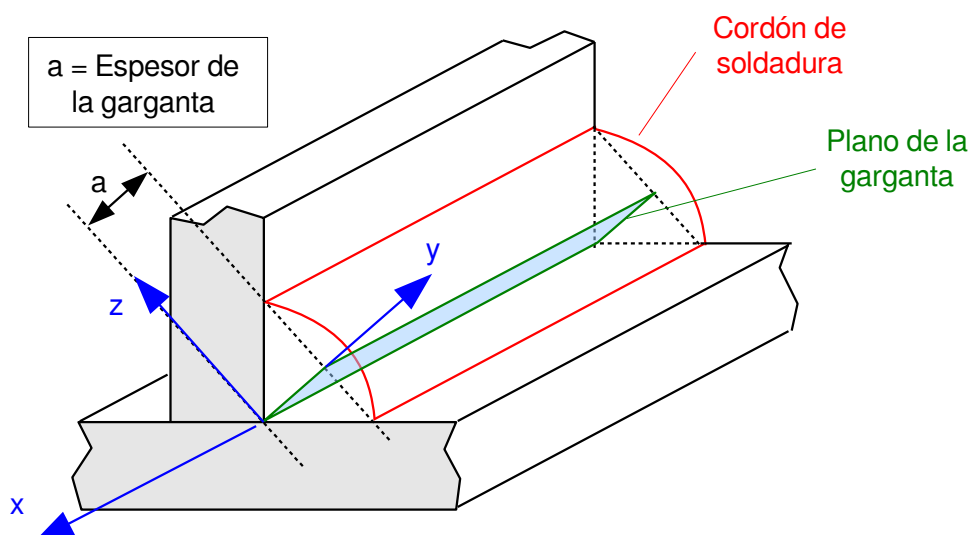


Figura 8.29: Cordón de soldadura entre dos placas.

Se llama “plano de la garganta” a la superficie que resulta de desarrollar la línea del espesor de la garganta a lo largo de la longitud del cordón de soldadura. En la figura, se han tomado unos ejes coordenados de forma que el plano de la garganta está contenido en el x-y, siendo por tanto el eje z perpendicular al plano de la garganta.

Al igual que en caso de uniones con tornillos, en el cálculo resistente de las soldaduras se emplean aproximaciones que han demostrado su utilidad en la práctica (en lugar de calcular “exactamente” el estado de tensiones, lo que en general sería muy complicado). Una simplificación habitual consiste en calcular las tensiones promedio que debe haber en el plano de la garganta, para lo que frecuentemente sólo se necesitan planteamientos de equilibrio. De acuerdo con la figura 8.29, dichas tensiones serían  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{zx}$ ,  $\sigma_{zy}$ . Seguidamente se aplica el criterio de Von-Mises a un hipotético punto del material en el que solamente actuaran esas componentes de tensión (despreciando por tanto las tensiones en otros planos, como por ejemplo la  $\sigma_{xx}$  aunque en realidad pueda ser importante). El criterio de Von-Mises se aplica afectado de unos ciertos coeficientes de seguridad y de corrección. Otra simplificación aún más grosera, y también generalmente admitida, consiste simplemente en dividir la fuerza resultante que deba transmitir el cordón, sea cual fuere su orientación, entre la superficie de la garganta, y considerar la resistencia de un hipotético punto del material que estuviese sometido a un estado de tensión con sólo  $\sigma_{zx}$ , del valor promedio anterior. Nuevamente, el límite para dicho estado se obtiene aplicándole el criterio de Von-Mises afectado de unos coeficientes de corrección y de seguridad.



Manteniendo esta explicación en su intención original, nos hemos limitado a mostrar algún detalle de un caso común de soldadura. Debe entenderse que hay muchos otros aspectos y detalles que no se mencionan. Por ejemplo, puede convenir tener noticia de que para cierto tipo de soldadura, llamada “de penetración completa”, y en ciertas configuraciones, ni siquiera es necesario realizar cálculos de resistencia de la soldadura.

## Nudos

Como se ha indicado, la unión entre las barras debe materializar en la práctica el comportamiento que hubiese sido asumido en la fase de diseño. Lo anterior presenta mayores dificultades cuanto más rígida es la unión. Por ejemplo, un empotramiento o un nudo rígido necesitan una ejecución práctica más complicada que un apoyo móvil o un nudo articulado.

Adicionalmente, las soluciones basadas en el modelo de tracción flexión de barras que hemos estudiado, no son válidas en las zonas de las barras muy próximas a los nudos, siendo necesario un estudio más minucioso de los detalles de la unión para predecir su comportamiento y eventual fallo.

Los aspectos que nos preocupan en la ejecución de un nudo son su resistencia y su rigidez:

- La resistencia del nudo está caracterizada por el nivel de carga (usualmente una combinación de esfuerzo cortante y momento flector) que puede transmitir. Se dice que el nudo es de “resistencia completa” cuando está diseñado para que su fallo se produzca a un nivel de carga mayor que el que podrían transmitir las barras. En caso contrario se denominan de “resistencia parcial”.
- La rigidez de un nudo está caracterizada por el nivel de carga necesario para producir un giro relativo apreciable entre las secciones de las barras que une. Un nudo es “rígido” si dichos movimientos no influyen apreciablemente en el estado de tensiones. Un nudo es “articulado” si no se desarrollan momentos que influyan apreciablemente en el estado de tensiones. Existen también nudos “semi rígidos”.

Para ilustrar algunos aspectos de la ejecución y modo de trabajo de un nudo, consideraremos la unión en un nudo rígido de una viga y un pilar de una estructura metálica. Ambas barras tie-

nen sección “doble T”. La unión puede ejecutarse con soldadura (fig. 8.30a) o con tornillos (fig. 8.30b), en cuyo caso se emplean unos angulares metálicos como se indica, al objeto de materializar la unión.

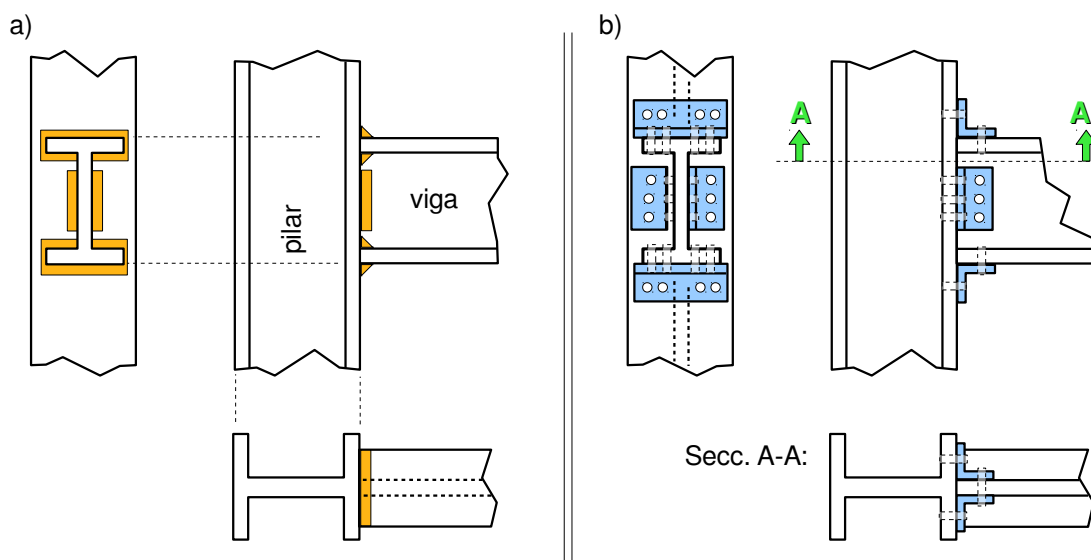


Figura 8.30: Ejemplo de unión de una viga con un pilar. a) Unión con soldadura. b) Unión con tornillos.

A efectos de cálculo de las uniones, se suele considerar que el momento flector  $M$  en la viga (fig. 8.31a) se transmite fundamentalmente a través de sus alas, mediante un par de fuerzas  $P$  y  $Q$  (fig. 8.31b), y que el cortante  $V$  (fig. 8.31a) se transmite fundamentalmente a través del alma de la viga, mediante una distribución de tensiones tangenciales “ $t$ ” (fig. 8.31b). Si consideramos el caso de unión soldada, esas fuerzas y tensiones actuarán por acción-reacción en el pilar a través de las soldaduras correspondientes (fig. 8.31b).

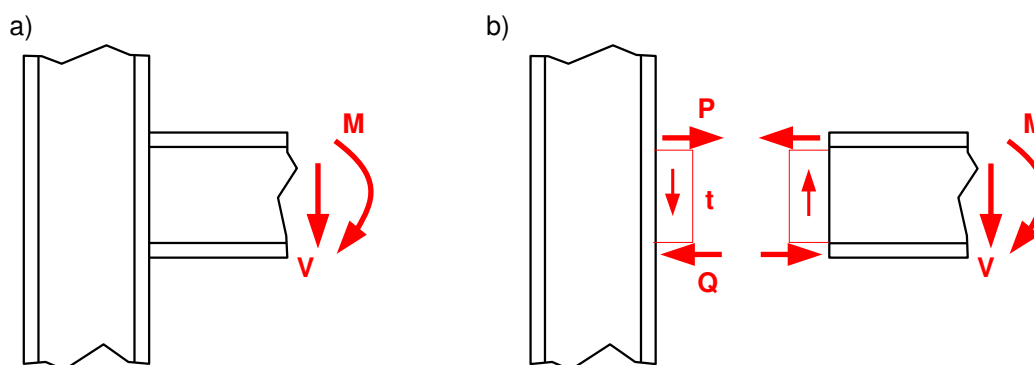


Figura 8.31: a) Cortante y flector en el extremo de la viga. b) Acciones que aproximadamente se transmiten en la unión, y que se pueden usar en los cálculos.

Por tanto, las soldaduras de las alas de la viga deben calcularse para resistir las fuerzas  $P$  y  $Q$  respectivamente, mientras que las soldaduras del alma de la viga deben resistir la tensión “ $t$ ”. No obstante, la resistencia de las soldaduras no es lo único a comprobar, ya que pueden existir otros problemas en la unión que afecten a su capacidad resistente o a su rigidez. La figura 8.32 muestra algunos de estos problemas a título de ejemplo. En primer lugar (fig. 8.32a), la fuerza  $P$  o  $Q$  transmitida por el ala de la viga, que ataca perpendicularmente al ala del pilar, puede hacer que ésta flexione, especialmente en las zonas más alejadas del alma del pilar. Otro posible problema es que en la zona de compresión (a la altura de la fuerza  $Q$ ), el alma del pilar sufra abolladura. Este efecto es el indicado en la figura 8.32b, y es más preocupante cuando existen

vigas tanto a la derecha como a la izquierda del pilar. También existe la posibilidad de que en la zona de tracción, a la altura de la fuerza  $P$ , las tracciones transmitidas al alma del pilar lleguen a producir plastificación en la zona indicada (fig 8.32c). El mismo peligro existe evidentemente en la zona de compresión, en caso de no producirse antes la abolladura.

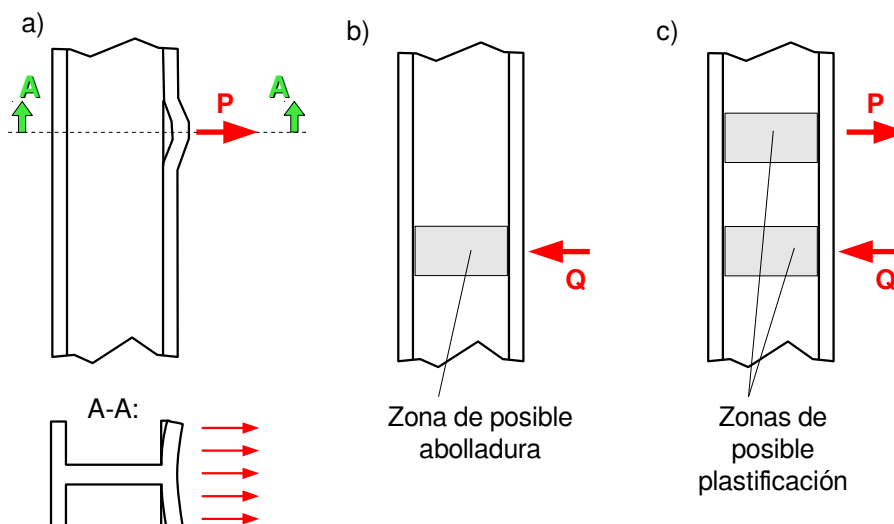


Figura 8.32: Algunos posibles problemas en el pilar inducidos por el nudo. a) Flexión del ala. b) Abolladura del alma. c) Plastificación del alma.

En general, los problemas de resistencia y rigidez del nudo se solucionan añadiendo placas adicionales, llamadas rigidizadores, adecuadamente. Por ejemplo, los tres problemas indicados en la figura 8.32 admiten una solución común, consistente en colocar rigidizadores transversales al alma del pilar, como indica la figura 8.33. En efecto, estas placas (que se sueldan al pilar) disminuirán drásticamente la flexión de las alas del pilar, ya que dicha flexión implica deformación de la placa rigidizadora en su plano (y una placa es muy rígida frente a acciones en su propio plano). Asimismo, la abolladura del alma del pilar necesita de movimientos perpendiculares a ella, que nuevamente implicarían deformaciones de la placa rigidizadora en su plano. Finalmente, frente al problema de plastificación, los rigidizadores añaden área adicional de material para soportar las fuerzas  $P$  y  $Q$  (se considera que el área útil de alma del pilar a estos efectos es una cierta porción similar a la mostrada en la figura 8.32c; al colocar el rigidizador, su área transversal colabora igualmente a soportar estas fuerzas). Como se ha indicado, éste efecto es más notorio cuando existen vigas a ambos lados del pilar.

Existen algunos otros aspectos que pueden preocuparnos en la ejecución de un nudo de estructura metálica similar al considerado, pero los que se han presentado aquí serán probablemente suficientes para ilustrar el tipo de problemática asociada a la ejecución de nudos, y para dar una idea del tipo de solución que cabe plantear para los mismos. Cada uno de los modos de fallo indicados de un nudo (y otros que no se han indicado), requieren de comprobaciones numéricas de resistencia individualizadas, y la colocación en su caso de rigidizadores requiere asimismo del cálculo de la sección necesaria, sus soldaduras correspondientes, y demás detalles relevantes. Ello hace que el diseño de un nudo, incluso poco complicado como el que se ha tomado de ejemplo, requiera un volumen de cálculos mayor del que se podría pensar en un principio. Las comprobaciones numéricas al efecto, se realizan generalmente mediante expresiones simplificadas que están recogidas en las normas.

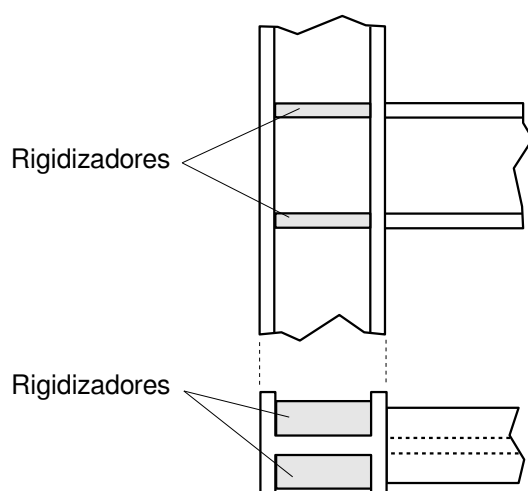


Figura 8.33: Posibles rigidizadores en un nudo.

En lo anterior se ha asumido que las uniones se ejecutan con soldadura. Cabe apuntar que si la unión está ejecutada con tornillos, la problemática básica en el nudo es similar, si bien las comprobaciones de los modos de fallo asociados a los tornillos (recordar la fig. 8.28), y a la rigidez y resistencia de los angulares metálicos complican ligeramente los cálculos. Asimismo, por su naturaleza, las uniones atornilladas requieren de un mayor espacio físico que las soldadas. Por ello debe tenerse un mayor cuidado en la fase de diseño para que el nudo proyectado sea ejecutable en la práctica, incluyendo la previsión de que el montaje y apriete de los tornillos puede requerir un espacio extra al simplemente ocupado por los elementos en su estado de servicio.

Finalizaremos esta breve presentación de las uniones en estructuras con una advertencia particular acerca de las uniones soldadas: Un cordón de soldadura ha estado muy caliente mientras el material circundante no lo estaba. Al enfriarse hasta la temperatura ambiente, el cordón tiende a contraerse, en particular en su dirección longitudinal. Pero el material circundante le impide contraerse libremente, por lo que el cordón queda sometido a tracción (y el material circundante a compresión, lo que puede producir otro tipo de efectos que no nos ocupan ahora). La figura 8.34a ilustra la tracción a que quedaría sometido un punto de un cordón de soldadura, tomando como ejemplo la unión entre dos placas coplanarias por sencillez.

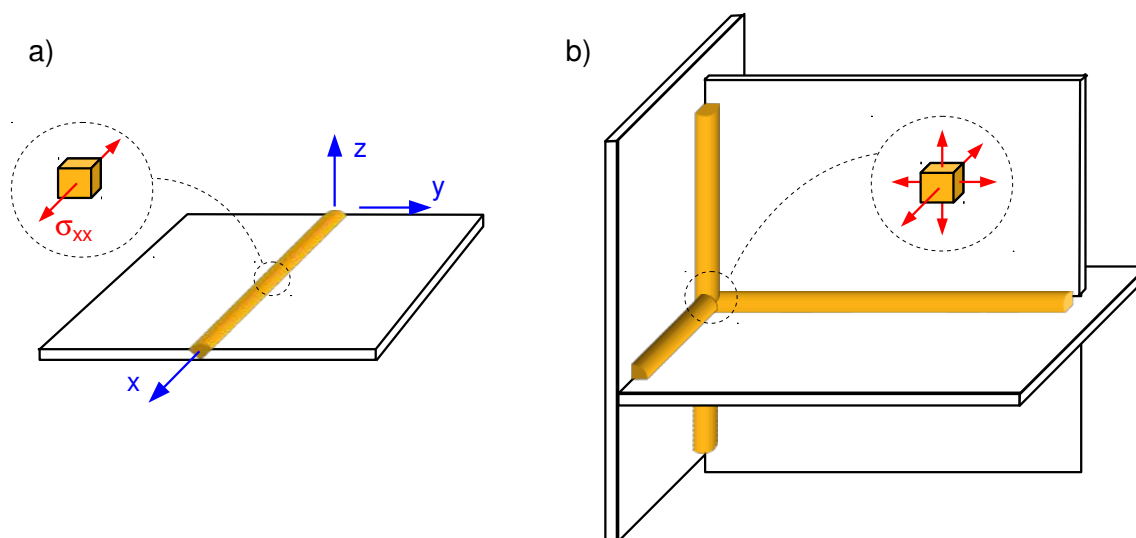


Figura 8.34: a) Tracción longitudinal en un cordón de soldadura. b) Situación no deseada de tres cordones de soldadura perpendiculares entre sí.

Si se ejecutan tres cordones de soldadura perpendiculares entre sí, como indica la figura 8.34b, el punto de encuentro de los cordones quedará sometido a tracción en tres direcciones perpendiculares. Esta es una situación indeseable para el material, debido al peligro de rotura frágil (recuérdense los comentarios a la figura 3.15 y la ecuación 3.22 relativos a los estados de equitración). Aunque no ocurriese la rotura frágil en el momento de ejecutar las soldaduras, el citado punto de encuentro es propenso a desarrollar grietas en estado de servicio, siendo en todo caso ésta una disposición a evitar.

La ejecución de un nudo complicado en estructura metálica puede requerir un número elevado de cordones de soldadura en las tres direcciones del espacio, especialmente si se necesita disponer rigidizadores. Por ello no es difícil que la situación descrita anteriormente pueda pasar desapercibida al proyectar el nudo. En general, cuando no se puede diseñar de modo que se evite la disposición de tres cordones perpendiculares, se puede considerar la utilización de alguna solución de compromiso como por ejemplo la indicada en la figura 8.35, aunque ello suponga sacrificar en alguna medida la rigidez de la unión.

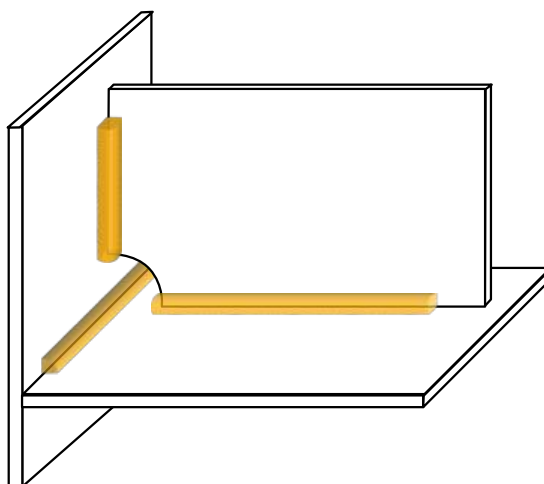


Figura 8.35: Posible disposición para evitar la confluencia de tres cordones de soldadura perpendiculares entre sí.

### Perfiles compuestos

En muchas ocasiones, se necesitan barras de una sección tal que su momento de inercia excedería de lo disponible entre los perfiles normalizados. En estos casos, se pueden unir varios de éstos perfiles normalizados, de forma que trabajen en conjunto como un nuevo perfil de momento de inercia mayor. La figura 8.36 muestra como ejemplo la unión de dos perfiles de tipo IPE, utilizando dos sistemas diferentes de unión.

La figura 8.36a muestra el perfil compuesto unido mediante “presillas”. Las presillas son placas que se unen a los perfiles originales de la manera que se indica, generalmente mediante soldadura. La longitud de la presilla (dimensión en dirección “y” en la figura) en relación a su canto (dimensión en dirección “x”) suele ser bastante mayor que 1/10, indicando por tanto que la presilla no es en rigor lo bastante esbelta como para ser considerada como una viga trabajando en su plano. A pesar de ello, la hipótesis de cálculo habitual para las presillas se basa en aproximar su modo de trabajo al de una barra a flexión en el plano xy.



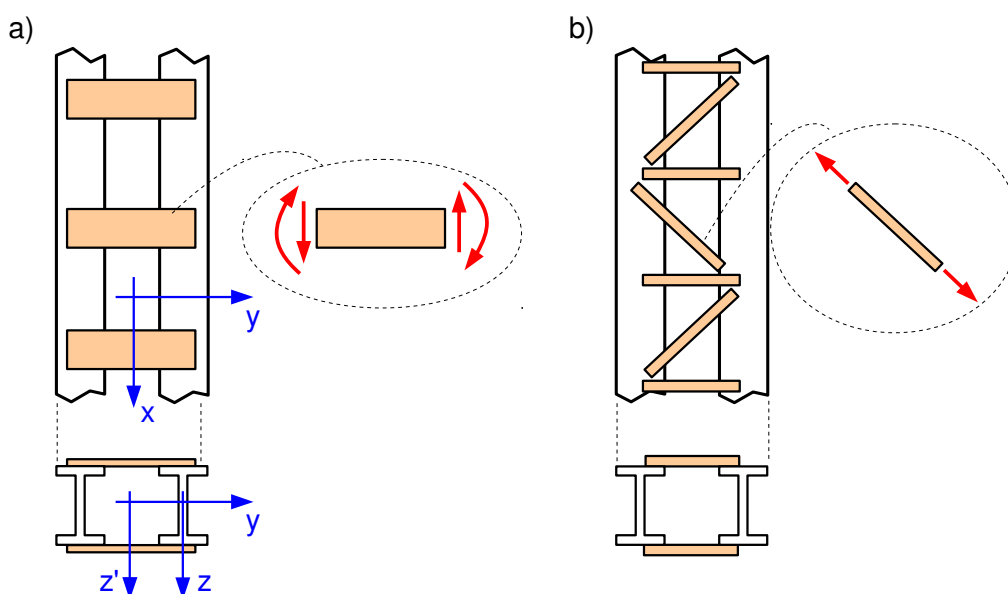


Figura 8.36: Perfil compuesto. a) Unión con presillas. b) Unión con celosía.

La intención de usar un perfil compuesto como el mostrado es conseguir un momento de inercia respecto del eje  $z'$  mayor que el que tenía un perfil IPE sencillo respecto del eje  $z$ . El momento de inercia de la sección compuesta respecto del eje  $z'$  (para cuyo cálculo nos ayudaremos del teorema de Steiner), es frecuentemente mayor incluso que respecto del eje “ $y$ ”, lo cual depende de cuánto hayamos separado los perfiles originales en la dirección “ $y$ ”. En ese caso, que asumiremos, lo razonable es que la barra de perfil compuesto se haya diseñado para soportar cargas de dirección “ $y$ ”, que producirán flexión en el plano “ $xy$ ”, caso en que el momento de inercia respecto a  $z'$  es el relevante.

Volviendo a la presilla, y asumiendo el mismo modo de trabajo de la barra de perfil compuesto que en el párrafo anterior, la figura 8.36a muestra las acciones típicas que se consideran. Consisten en unos momentos flectores, generalmente del mismo sentido, y unos esfuerzos cortantes como se indica, aplicados en los extremos de la presilla (nótese que la presilla estará en equilibrio bajo dichas acciones). Estos esfuerzos son transmitidos a la presilla a través de las soldaduras (no mostradas), las cuales se calculan a su vez de la manera habitual. Como se apuntó anteriormente, en el cálculo de la presilla en sí misma, básicamente se asume el modelo de flexión de barras que hemos estudiado en el curso, bajo las acciones citadas. Para dicho cálculo, así como para encontrar la separación necesaria entre presillas, etc, las normas ofrecen fórmulas prácticas de uso común.

La unión con “celosía”, mostrada en la figura 8.36b, permite obtener en general una unión de mejor calidad que las presillas. Esta unión consiste en ejecutar una celosía (sinónimo de lo que hemos denominado “armadura” en el curso), con los mismos criterios generales de ejecución de las mismas, en particular observando la coincidencia de los ejes de las barras en un punto para cada nudo. El cálculo de las barras de unión entre los perfiles originales se basa en asumir que solamente transmiten esfuerzo axial, como es habitual en las armaduras y como se indica en la figura. Este esfuerzo axial es transmitido a través de las soldaduras o tornillos que se hayan dispuesto al efecto, cuyo cálculo también es requerido. Por lo demás, son igualmente de aplicación las observaciones generales realizadas en los párrafos anteriores acerca de las barras de perfil compuesto.

Finalmente cabe apuntar que la unión con presillas o celosía no será en general totalmente efectiva para hacer trabajar a los dos perfiles individuales como si fuesen uno sólo. En particu-

lar, la hipótesis de que la sección transversal del perfil compuesto permanezca plana bajo sollicitaciones de flexión, será menos realista que si se tratase de un perfil habitual, con material en todo el plano de sus secciones. Asimismo, cuando una barra de perfil compuesto trabaja a compresión, es de esperar que su resistencia a pandeo respecto del eje  $z'$  (es decir, el pandeo que se produciría con la sección girando en torno al eje  $z'$ , ver fig. 8.36a) no sea en realidad tan grande como calcularíamos con nuestros modelos habituales usando el momento de inercia respecto del eje  $z'$ . Para tener en cuenta este efecto pueden emplearse correcciones de naturaleza semiempírica recomendadas en la normativa. En cuanto al pandeo en el otro plano (en el que el momento de inercia respecto de “ $y$ ” es el relevante), no se considera que la unión con presillas o celosía tenga ningún efecto especial. Típicamente la carga de compresión se repartirá entre los perfiles simples, y se calculará del modo habitual la resistencia a pandeo de cada uno de ellos por separado respecto del eje “ $y$ ”.

### ***La Nave Industrial***

La edificación más habitual destinada a albergar procesos industriales, en la que además desempeñan sus puestos de trabajo las personas implicadas en el proceso en cuestión, se denomina “nave industrial”. Aunque existen muchas variantes posibles, algunas de las pautas comunes a lo que entendemos como “nave industrial” son: ser una construcción cerrada (con paredes y cubierta), tener planta rectangular, constar de una sola altura (no de pisos), tener la mayor parte del espacio interior diáfano (con pocos o ningún pilar interior, y sin tabiques, aunque suele haber algún espacio dedicado a oficinas), y tener una dimensión en altura de más de cinco metros (la posibilidad de entrada de un camión es un requisito frecuente). Los fines a los que puede estar destinada una nave industrial son muy diversos, y el término “proceso industrial” debe entenderse en un sentido amplio en este contexto. Una nave industrial puede albergar una compleja cadena de producción en la que se elaboran unos ciertos productos a partir de ciertas materias primas con la producción de residuos, y con la intervención de maquinaria pesada que requiere ser desplazada periódicamente para su mantenimiento, mientras que otra nave industrial puede servir como simple lugar de almacenamiento temporal para una empresa de mensajería, por ejemplo. En este epígrafe daremos noticia brevemente de algunos de los aspectos relacionados con la estructura resistente de la nave industrial, y sus cerramientos.

### **Las cerchas y los pórticos**

Para mantener en posición los demás elementos estructurales de la nave, y para que sirva como elemento resistente básico y fundamental, se implantan unas cuantas estructuras planas. Existirán varias de ellas a lo largo de la longitud de la nave (dos como mínimo), normalmente idénticas entre sí y dispuestas a intervalos regulares (de unos 6m orientativamente). En el proyecto de estos elementos existen como alternativas el empleo de cerchas, o bien de pórticos. La figura 8.37 muestra un ejemplo de ambas posibilidades.

Si se trata de una nave con cerchas, éstas apoyarán en los pilares de la nave, o bien en los muros de carga si la nave cuenta con ellos (más infrecuente). La ejecución de los apoyos de la cercha suele ser del tipo “apoyo fijo y apoyo móvil”, por lo que la cercha no inducirá acciones horizontales en los pilares debido a los cambios de temperatura, lo que es una ventaja. Una cercha es en general más ligera que un pórtico que cumpliera la misma función, lo que también es ventajoso. Entre los inconvenientes del uso de cerchas están el que hacen que la altura útil (gálibo) de la nave sea menor, el que la estética se considera peor que la que se consigue con pórticos, y que como sabemos, las cerchas son estructuras pensadas para trabajar exclusiva-

mente en su plano, por lo que el diseño de la nave debe asegurar que cualquier acción perpendicular a ese plano sea íntegramente resistida por otros elementos estructurales.

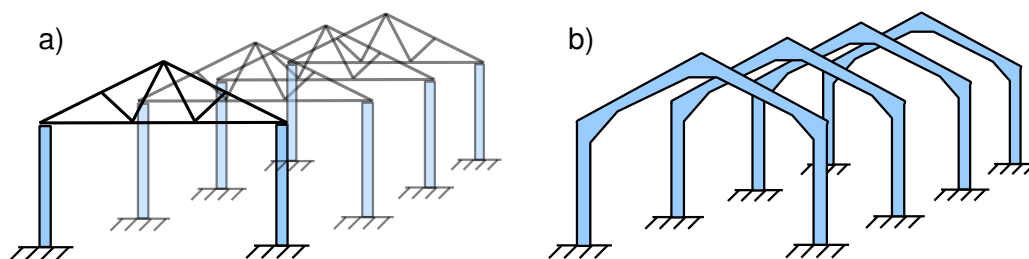


Figura 8.37: Estructura básica de una nave. a) Con cerchas. b) Con pórticos.

Si se trata de una nave con pórticos, lo habitual es que dichos pórticos sean de nudos rígidos. En este caso, los pilares trabajarán a flexión bajo prácticamente cualquier estado de carga (aparte de soportar compresión, que se espera sea su sollicitación dominante). Los momentos flectores en el vértice superior (llamado “clave” del pórtico), y en los “nudos de esquina” (los que conectan con la cabeza de los pilares), suelen ser grandes, por lo que es habitual reforzar estos nudos aumentando localmente la sección, detalle que se puede apreciar en la figura 8.37b. El perfil usado para las barras del pórtico es frecuentemente del tipo “doble T” con el alma paralela al plano del pórtico. Por ello, y como ya se ha apuntado, el pórtico será mucho más resistente frente a acciones contenidas en su plano que frente a acciones perpendiculares al mismo. Los aspectos ventajosos del uso de pórticos (en comparación con las cerchas), son que la nave contará con mayor altura útil, la estética será mejor, y también que la nave resulta más apta para la colocación de un puente-grúa, dispositivo del que hablaremos más tarde.

En el curso se han presentado a nivel introductorio algunos de los procedimientos comúnmente empleados para el análisis resistente de las cerchas y de los pórticos.

## La cubierta

La estructura básica mostrada en la figura 8.37 servirá para dar soporte a otros elementos estructurales intermedios, que a su vez darán finalmente soporte a los cerramientos. Nos ocupamos ahora del conjunto de elementos habituales que forman parte de la cubierta de la nave. Los elementos resistentes más característicos de la cubierta son las “correas”. En contra de lo que su nombre parece sugerir, no se trata de elementos flexibles, sino de barras de acero, que pueden ser de sección tipo IPN, rectangular hueca, o cualquier otra. Las correas apoyan sobre los pórticos o cerchas, siendo perpendiculares a ellos, y por tanto paralelas a la dirección longitudinal de la nave. Debe cuidarse de que las correas apoyen en los nudos de la cercha (en caso de tratarse de nave con cercha). La figura 8.38 muestra un ejemplo de disposición de correas en una nave con pórtico.

Las correas soportan el peso de los elementos superiores de la cubierta (y demás acciones que éstos transmitan), y trabajan como vigas continuas en las que los apoyos son los pórticos o cerchas, y la carga se supone uniformemente distribuida en la longitud de la correa. Es de destacar que, en general, la carga sobre la correa no tendrá la dirección de un eje principal de inercia de la sección, por lo que se trata de un problema de “flexión esviada”, como se ilustra en la figura 8.39 para un caso de carga vertical y correa con perfil tipo IPN.



No hemos visto en este curso las fórmulas para flexión en ejes no principales. No obstante, con las herramientas proporcionadas en el curso, podría descomponerse la carga en las direcciones de los ejes principales de la sección, y resolver dos problemas, cada uno con la carga dirigida según un eje principal. Finalmente habría que superponer (sumar) las soluciones de tensiones y desplazamientos de ambos problemas.

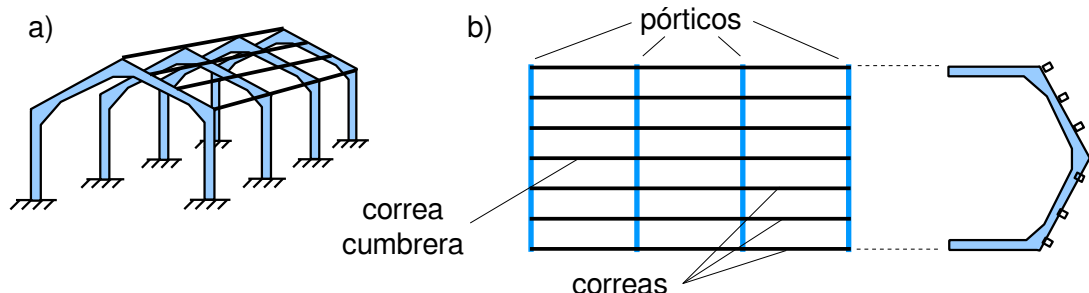


Figura 8.38: a) Algunas correas de la nave. b) Vista en planta y alzado.

Modernamente, lo más frecuente es que sobre las propias correas se coloque un cerramiento prefabricado de paneles tipo sandwich, que son lo bastante grandes y rígidos como para apoyar en las correas a la distancia a la que éstas suelen colocarse. Dichos paneles llevan aislante térmico en su interior, su superficie exterior está preparada para soportar las acciones climáticas, y su colocación es relativamente sencilla. Cuando los elementos de cerramiento no son lo bastante rígidos (puede ser el caso de las láminas onduladas de fibrocemento), o no son lo bastante grandes (caso de cerramiento con tejas) como para salvar la distancia entre correas, se puede disponer encima de las mismas de un entramado de barras perpendiculares a las correas (más ligeras que éstas, denominadas “cabios”), y aún encima de éstos otro entramado de barras paralelas a las correas (todavía más ligeras, incluso de madera, que sólo suelen ser necesarias para la colocación de tejas, y que se llaman “listones”).

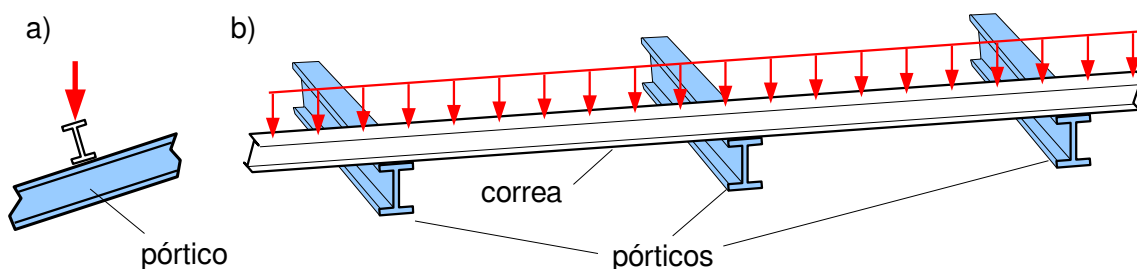


Figura 8.39: La correa como viga continua trabajando en flexión esviada. a) Vista en el plano del pórtico. b) Vista en perspectiva.

Aún existe otro elemento estructural importante bajo la cubierta de la nave, aunque éste no tiene la finalidad directa de soportar el cerramiento. Identifiquemos en primer lugar el problema: en la figura 8.38a, los pórticos tienen poca rigidez frente a acciones en la dirección longitudinal de la nave. Frente una acción tal (por ejemplo viento frontal sobre la nave) los pórticos tendrían movimientos fuera de su plano. Es ésta la componente de desplazamiento que nos preocupa y a la que nos referimos en lo sucesivo. En la cubierta, las correas aseguran que los puntos homólogos de los pórticos tengan el mismo desplazamiento, ya que las correas están unidas por soldadura u otros medios a los pórticos. Pero dicho desplazamiento podría ser distinto para cada correa. Esto no es tan extraño como pudiera parecer, ya que por ejemplo acciones como el viento pueden provocar fácilmente movimientos ondulatorios en cuerpos de poca rigidez. No

hay que decir que el que las correas tuvieran movimientos distintos sería nefasto para el cerramiento de la cubierta.

Para más abundar en la cuestión, considérese una nave con cerchas, como la mostrada en la figura 8.37a (puede imaginarse que ya estuviesen colocadas las correas). Cualquier pequeña acción longitudinal con la nave haría que todas las cerchas cayeran a la vez, ya que las correas no son efectivas para impedir el movimiento implicado. El problema está relacionado con los desplazamientos de las cerchas fuera de su plano, similarmente al expuesto en el párrafo anterior. Ambos problemas comparten la característica de que el rectángulo inicial formado por dos correas y las barras superiores de dos pórticos (o las de dos cerchas), se convierte en un romboide al producirse la situación indeseada.

Por tanto, nos planteamos incorporar un elemento estructural que impida que los rectángulos antedichos se deformen. Podemos conseguirlo fácilmente introduciendo barras diagonales en dichos rectángulos. En realidad es innecesario introducirlas en todos ellos, ya que la continuidad de las correas asegura que si uno de los rectángulos no se deforma, no lo hará ninguno de los que participan del mismo par de correas. Esto indica que cinemáticamente sería suficiente colocar estas barras diagonales en los rectángulos existentes entre dos pórticos (o cerchas). No obstante, es aconsejable disponer dichos elementos en más de un vano entre pórticos, como indica la figura 8.40. Como también se aprecia en la figura, es innecesario rigidizar individualmente todos los rectángulos de un vano entre pórticos, pudiendo colocarse las diagonales a un grupo de varios rectángulos que se encuentren en el mismo plano.

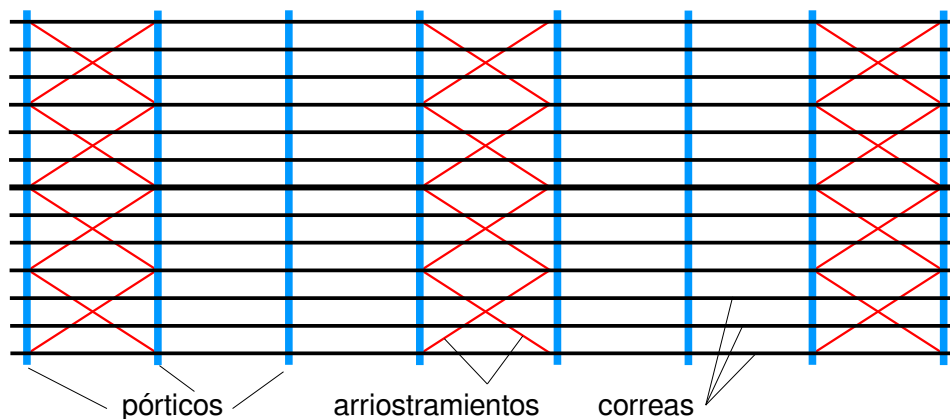


Figura 8.40: Vista en planta de la cubierta de una nave industrial: arriostramientos en el plano del faldón.

Como también muestra la figura, es habitual colocar barras en ambas diagonales de los rectángulos, formando lo que se conoce como “Cruces de San Andrés”. Frecuentemente, las barras de estas cruces son muy esbeltas, incluso pueden ser cables, con la intención de que en un instante dado, solamente trabaje aquella barra que lo haga a tracción (lo que es suficiente para mantener la geometría del rectángulo). Estos elementos de rigidización de la cubierta se conocen como “arriostramientos en el plano del faldón” (Nota: “arriostrar” es impedir el movimiento de un sistema estructural, generalmente en una dirección en la que el mismo no está preparado para asumir carga; el “plano del faldón” es cada uno de los planos inclinados de la cubierta).

### Los entramados laterales y la viga contraviento

Los arriostramientos en el plano del faldón rigidizan la cubierta y previenen movimientos relativos entre sus puntos, pero no resuelven el problema de rigidez y resistencia de los pórticos

frente a acciones perpendiculares a su plano. Deseamos que éstas acciones, longitudinales con la nave, sean resistidas por otros elementos estructurales. Para ello, planteamos la colocación de arriostramientos en los planos de las paredes de la nave, por ejemplo de la manera que indica la figura 8.41a. Puede tratarse de nuevo de “cruces de San Andrés”, o de otras configuraciones que resulten trianguladas en condiciones de servicio. Como anteriormente, resulta innecesario rigidizar todos los rectángulos de las paredes entre pórticos, ya que la existencia de la correa de esquina asegura que si uno de ellos no se deforma, no lo hará ninguno. No obstante, también en este caso es aconsejable rigidizar más de un vano entre pórticos, como se muestra.

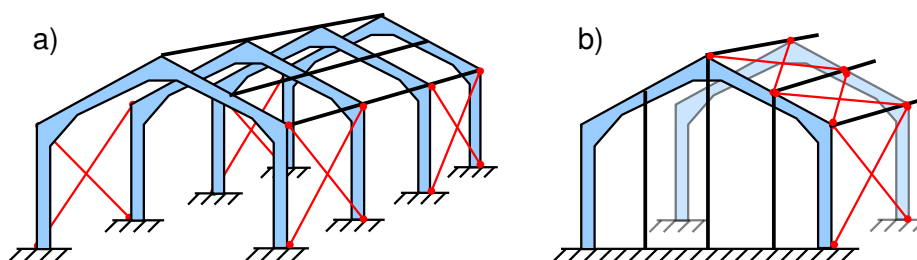


Figura 8.41: a) Arriostramiento de los pórticos en las paredes de la nave. b) Vigas verticales en el frontal de la nave, y arriostramiento en el plano del faldón actuando simultáneamente como viga contraviento.

Entre las acciones longitudinales a la nave de la que nos estamos ocupando, el viento frontal es una de las más frecuentes. Para soportarlo, se colocan vigas verticales en el frontal de la nave (su modo de trabajo fundamental no es como pilares a pesar de su orientación en el espacio), sobre las cuales se montarán los paneles de cerramiento. Si éstos lo precisan, pueden colocarse sobre las vigas verticales, y exteriormente a ellas, otras vigas horizontales (no mostradas) sobre las que finalmente se colocará el cerramiento. La figura 8.41b muestra estas vigas verticales, que serán las que soporten el empuje del viento transmitido por los paneles de cerramiento. Las mismas apoyarán en la cimentación y en el pórtico, pero en general no deseamos que sea la barra del pórtico la que haya de soportar la fuerza de ese apoyo (ya que produciría flexión según su eje débil). Por ello es frecuente que el apoyo se produzca en el punto de confluencia con una correa, para que el arriostramiento del plano del faldón sea el que mayoritariamente colabore en mantener ese punto en posición, transmitiendo la fuerza al arriostramiento lateral y a la cimentación. Es de destacar que lo anterior requiere que cada correa en la que se produzca el apoyo de una viga vertical, participe de una cruz de San Andrés (de las del plano del faldón), para que la misma efectivamente pueda colaborar. Compárese al efecto la cubierta de la figura 8.41b con la de la figura 8.40, en la que no todas las correas participan de un arriostramiento en el plano del faldón.

En general, se llama “contraviento” a cualquier dispositivo resistente que, en primera instancia, evite que la acción de apoyo de las vigas verticales actúe sobre los pórticos. Fundamentalmente, dicha acción es debida al viento, y de ahí su nombre. Es por tanto correcto decir que en la figura 8.41b, el arriostramiento en el plano del faldón hace además la función de viga contraviento. Sin embargo, la forma más típica de lo que suele entenderse por “viga contraviento” es la mostrada en la figura 8.42. Suele usarse en naves de gran altura, en las que las vigas verticales cubrirían un vano excesivo. Su función es proporcionar un apoyo intermedio a las vigas verticales, por lo que éstas funcionarían ahora como vigas continuas con tres apoyos (el apoyo en la cimentación y en la barra superior del pórtico siguen existiendo). Evidentemente, no deseamos que sean los pilares del pórtico quienes transmitan las reacciones de la viga contraviento, por lo que los entramados laterales deben disponerse de forma que uno de sus nudos coincida con el extremo de la viga contraviento, por ejemplo como se muestra en la figura

8.42a, en la que dicho entramado lateral tiene dos alturas. La barra horizontal de este entramado lateral (apréciese en la figura) puede ser una de las barras que de todas formas habría que colocar para sujetar los paneles de cerramiento de las paredes laterales de la nave.

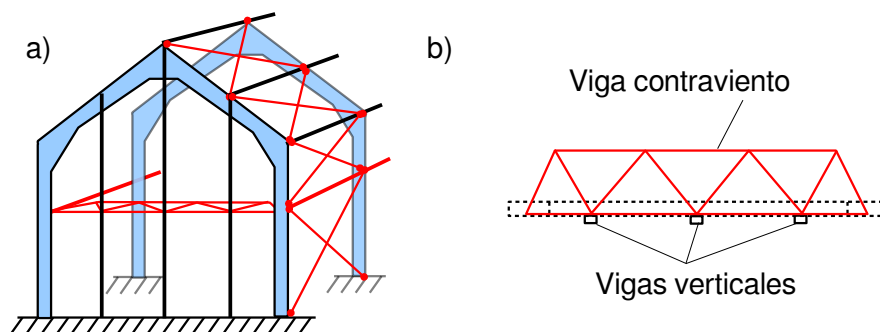


Figura 8.42: Viga contraviento en el pórtico de fachada, ejecutada como viga en celosía. a) Vista general. b) Vista en planta.

La viga contraviento trabaja como viga biapoyada (en los entramados laterales), y sometida a tantas cargas concentradas debidas a la acción del viento como vigas verticales apoyen en ella. Como la luz de esta viga debe ser todo el ancho de la nave, es frecuente ejecutar la misma en forma de celosía como se ha dibujado en la figura. Dado que el empleo de este tipo de viga contraviento suele ir asociado a naves de grandes dimensiones, es también frecuente que las propias vigas verticales sean asimismo vigas en celosía (aunque no se ha supuesto así en la figura).

La acción del viento lateral a la nave produce flexión en los pórticos, en su propio plano. Siendo éste el modo de trabajo para el que los pórticos están diseñados, no es preciso disponer un arriostramiento especial para este efecto. Simplemente se deben colocar algunas barras horizontales unidas a los pilares de los pórticos (del tipo a la mostrada en la figura 8.42a), para poder sujetar a ellas el cerramiento lateral. Generalmente, estas barras horizontales no soportan el peso de dicho cerramiento (que apoya en la cimentación), y por tanto deben considerarse como vigas continuas con tantos apoyos como pórticos, sometidas a la acción horizontal del viento que les transmiten los paneles de cerramiento de las paredes.

### El puente grúa

Entre los accesorios más típicos de una nave industrial, destaca un aparato llamado “puente grúa”. Se trata de una gran viga horizontal móvil, que se mantiene paralela a los pórticos a varios metros de altura desde el suelo, y cuyos extremos apoyan en unas “vigas carril” que están sujetas a los pilares de la nave. El puente grúa está dotado de un “carretón” que puede moverse a su vez a lo largo de la gran viga horizontal (y por tanto a lo ancho de la nave). Un polipasto en el carretón permite la elevación de cargas pesadas, así como su eventual transporte dentro de la nave.

La “viga carril” suele tener perfil de “doble T”, y soporta en su ala superior la rodadura de las ruedas del puente grúa. Trabaja como una viga continua con tantos apoyos como pórticos haya, y una carga concentrada en la posición del puente grúa (en realidad hay dos cargas concentradas, ya que existen dos ruedas por carril separadas una distancia apreciable en sentido longitudinal, por motivos de estabilidad de la rodadura).

La viga del puente grúa trabaja como viga biapoyada en sus extremos (en las vigas carril), y sometida a la carga puntual del peso del carretón más el de la carga que se esté transportando. La figura 8.43 muestra esquemáticamente un puente grúa de viga doble, cada una de

ellas con sección en cajón. Se indica la denominación de los elementos más característicos, se representan sombreados los elementos de rodadura (del carretón sobre la viga puente, y de la viga puente sobre las vigas carril), y la dirección de los movimientos del puente grúa (con flechas gruesas).

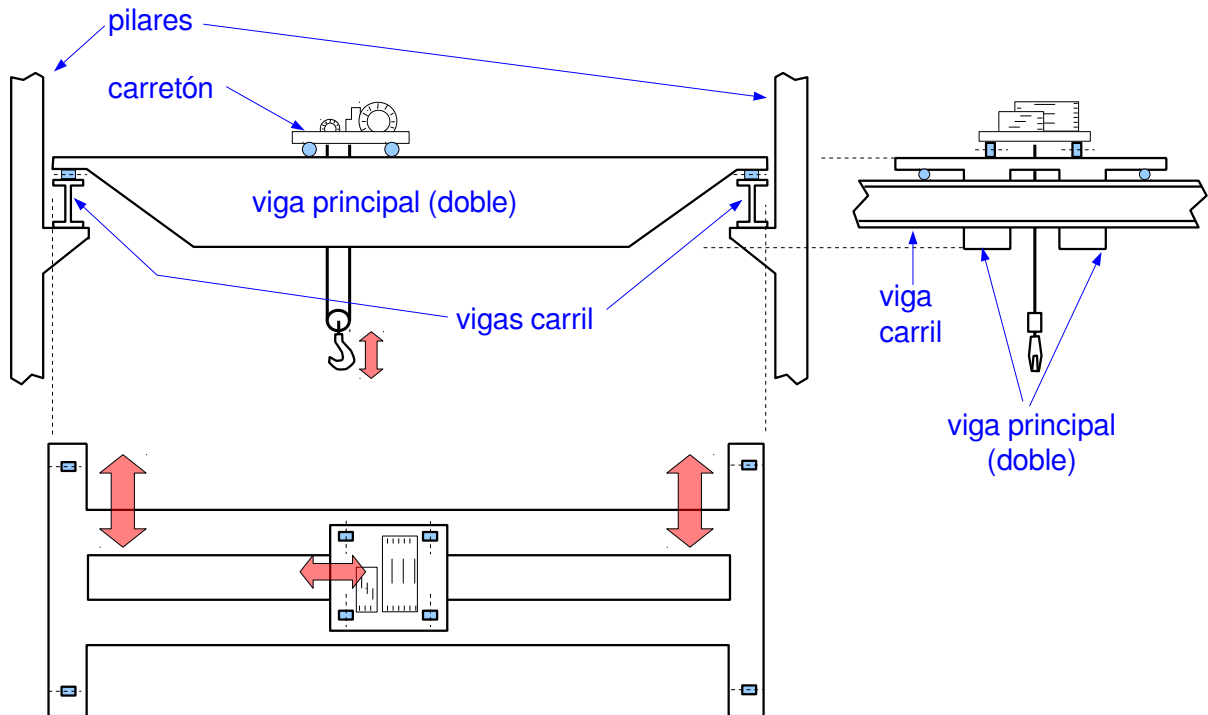


Figura 8.43: Representación esquemática de un puente grúa.

El puente grúa, incluso descargado, es un elemento de gran masa cuyos movimientos en las tres direcciones del espacio están controlados por motores eléctricos, y que cuenta con diversos sistemas de control y de seguridad, algunos de los cuales se accionan automáticamente (por ejemplo la frenada en el caso de que el puente grúa se acerque al final de su carrera). Para detener sus movimientos, se dispone de frenos, siendo la frenada longitudinal del puente grúa una acción importante a tener en cuenta sobre la estructura de la nave. Su dirección es la misma que el viento frontal (aunque generalmente más intensa), siendo por tanto los arriostramientos laterales de la nave los que han de soportar este empuje de frenada. Dichos arriostramientos deben dimensionarse adecuadamente para resistir este empuje.



# Apéndice A.

## Álgebra de Vectores Deslizantes

Este apéndice describe de manera breve, a modo de repaso, algunos resultados del álgebra vectorial. Aunque no pretende ser completo o exhaustivo, su contenido debiera ser suficiente para plantear el equilibrio de los sólidos en el ámbito de este curso. Muchas de las fórmulas y figuras siguientes refieren a casos bidimensionales a título de ejemplo, aunque son directamente extrapolables a tres dimensiones, salvo indicación en contrario.

### **Generalidades**

Distinguimos tres tipos de vectores. Su definición obedece principalmente a nuestra necesidad de representar matemáticamente magnitudes vectoriales de distinta naturaleza física. El objetivo es que la representación que elijamos sea útil para elaborar el modelo matemático que necesitemos.

- Llamamos Vector Deslizante al vector cuya posición nos es indiferente a efectos de cálculo, siempre que se mantenga en su recta de acción original.
- Llamamos Vector Ligado al vector cuya posición nos interesa considerar (a efectos de cálculo) asociada un punto concreto, llamado punto de aplicación.
- Llamamos Vector Libre al vector cuya posición en el espacio nos es indiferente a efectos de cálculo. Sólo interesa su módulo y dirección, no su posición. Se define el vector libre asociado a un vector deslizante (o ligado) como el vector libre que tiene el mismo módulo y dirección que el original. Decimos que dos vectores son equipolentes si tienen el mismo vector libre asociado.

Cuando se estudia el equilibrio de un sólido indeformable independientemente de su resistencia, la representación de las fuerzas mediante vectores deslizantes es ventajosa. Por el contrario, si se está estudiando la resistencia del sólido, tiene poco sentido considerar las acciones como vectores deslizantes, siendo más apropiado considerarlas como vectores ligados al punto de aplicación en el que actúan (por ejemplo, a efectos de resistencia de un cuerpo humano, es relevante si una fuerza se aplica comprimiendo la planta de los pies o tirando del cabello). Finalmente, suele ser conveniente considerar que las operaciones entre vectores (como la suma, o el producto vectorial, etc) están definidas entre vectores libres, aunque en condiciones especiales es posible definir las entre vectores deslizantes o ligados, según se indica más adelante.

Denotaremos los vectores con una flecha superior, como en  $\vec{F}$ ,  $\vec{v}$ , o bien usando letra negrita, como por ejemplo **F**, **v**. Ambas notaciones servirán indistintamente para representar a cualquier vector, sea libre deslizante o ligado.

Los puntos del espacio se denotarán mediante letras mayúsculas como M, N, etc. Entre otras muchas magnitudes físicas, un vector puede usarse para representar el segmento de recta

orientado que delimitan dos puntos del espacio. Si dichos puntos son M y N, denotaremos como **MN** al vector que tiene origen en M y extremo en N.

## Operaciones básicas

### Adición (o suma) de vectores

La suma (o adición) de dos vectores libres **a**, **b**, es otro vector libre **s**, que puede obtenerse gráficamente como diagonal de un paralelepípedo tal que dos de sus lados son los vectores dados, colocados en un origen común (fig A1 a). Equivalentemente, **s** puede obtenerse como el vector que une el principio y el final de un polígono trazado colocando los sucesivos vectores a sumar uno tras otro (fig A1 b).

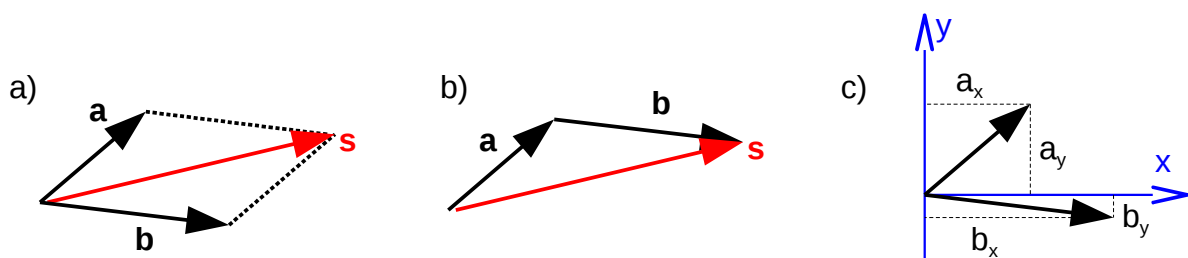


Figura A1: Adición de dos vectores

Proyectando sobre cada uno de los ejes cartesianos x,y, es inmediato demostrar que las componentes de **s** en esos ejes pueden obtenerse de manera analítica mediante adición de las correspondientes componentes de los vectores a sumar (ver fig. A1 c):

$$s_x = a_x + b_x ; s_y = a_y + b_y \quad (A.1)$$

La adición de más de dos vectores libres puede realizarse gráficamente por adición sucesiva de la suma de dos de ellos con un tercero, o dibujando el polígono que forman todos ellos en la manera mostrada en la figura A1 b. Analíticamente, pueden sumarse las componentes correspondientes de todos los vectores para obtener las componentes cartesianas del vector suma, mediante generalización inmediata de la ec. (A.1) anterior.

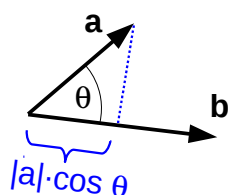
En rigor, la suma de dos vectores deslizantes sólo está definida si las rectas de acción de ambos se cortan en un punto (lo que puede no ocurrir en un problema tridimensional). En caso de estar definida, la suma será otro vector deslizante, cuya recta de acción pasará por el punto de corte de los anteriores. El que eventualmente la suma de dos vectores deslizantes no sea posible como tal, no obsta para que podamos sumar los vectores libres asociados (que siempre estará definida), a los efectos que pueda resultar conveniente.

### Producto escalar de dos vectores

Es el escalar que se obtiene de multiplicar el módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre la dirección del primero. Si esa proyección tiene el mismo sentido que el primer vector, el producto escalar es positivo, y negativo en otro caso. La figura A2 muestra que este producto puede calcularse como  $a \cdot b \cdot \cos \theta$ , siendo  $\theta$  el ángulo que forman los vectores.

Es posible también obtener el producto escalar a partir de las componentes cartesianas de los vectores, mediante:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$



$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \theta$$

Figura A2: Producto escalar de dos vectores

### Producto vectorial de dos vectores

El producto vectorial de dos vectores (libres)  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ , es un vector libre  $\mathbf{p}$  cuyo módulo viene dado por el producto de los módulos multiplicado por el seno del ángulo que forman los vectores originales, cuya dirección es perpendicular a ambos vectores, y cuyo sentido está dado por la “regla del tornillo” cuando se hace girar el primer vector del producto hacia el segundo, por el camino angular más corto (fig A3a).

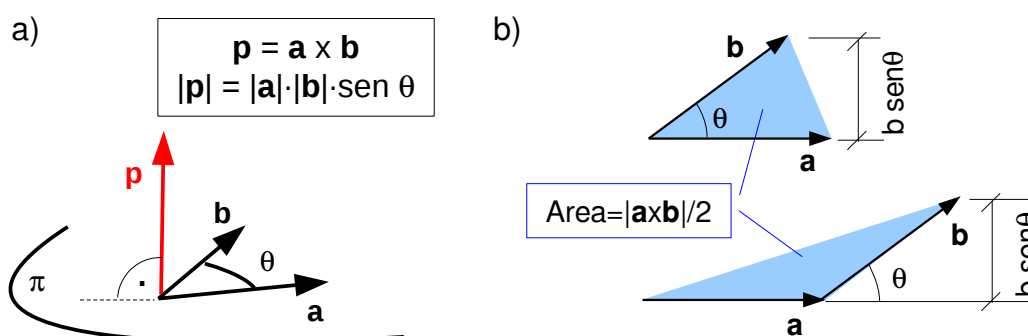


Figura A3: a) Producto vectorial de dos vectores (se representa el plano  $p$  que los contiene). b) Área del triángulo que definen los dos vectores.

Es inmediato comprobar que el módulo del producto vectorial coincide con el doble del área del triángulo que definen los vectores. La figura A3b muestra que, efectivamente, el módulo de uno de ellos por el seno del ángulo que forman, siempre será la altura de dicho triángulo, haciendo el otro vector las veces de base del triángulo, y que ello ocurrirá independientemente de cómo se dispongan los vectores. El producto vectorial siempre resulta ser de módulo “base por altura”, es decir el doble del área del triángulo.

Las componentes cartesianas del producto vectorial pueden obtenerse analíticamente, desarrollando el determinante de la ecuación (A.2), donde  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , son vectores unitarios en la dirección de los ejes coordenados  $x, y, z$ .

$$\vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \tag{A.2}$$

### Momento de un vector deslizante respecto de un punto

Sea  $\mathbf{v}$  un vector deslizante,  $A$  un punto de su recta de acción, y  $O$  otro punto cualquiera del espacio (ver figura A4). Se define el momento de  $\mathbf{v}$  respecto de  $O$  como el vector que resulta de

realizar el producto vectorial del vector **OA** por el vector **v**. Es inmediato demostrar que el momento así definido no depende de si eligiésemos otro punto B de la recta de acción, en lugar de A:

$$\vec{M}_o = \vec{OA} \times \vec{v} = (\vec{OB} + \vec{BA}) \times \vec{v} = \vec{OB} \times \vec{v} + \vec{BA} \times \vec{v} = \vec{OB} \times \vec{v} \quad (\text{A.3})$$

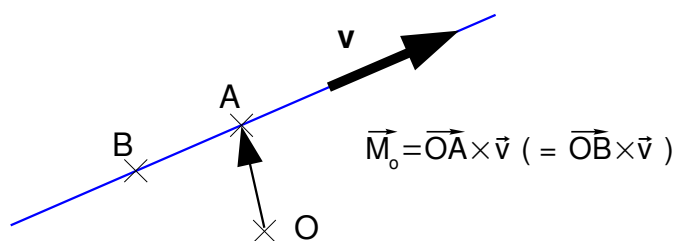


Figura A4: Independencia del momento respecto del punto de la recta de acción

### Momento de un vector deslizante respecto de una recta

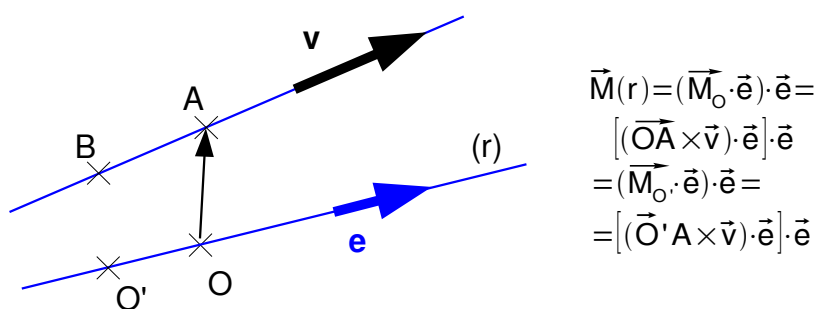


Figura A5: Momento de un vector respecto de una recta

Es un vector deslizante **M(r)** sobre la recta (r). Se obtiene proyectando sobre ella el momento del vector **v** respecto de uno de sus puntos O, siendo indiferente el punto de la recta elegido. Si definimos un vector unitario **e** colineal con la recta (r), dicha proyección puede expresarse como **(M<sub>o</sub>·e)·e** como indica la figura A5. Nótese que en la figura A5 la recta (r) y el vector **v** han de estar en planos distintos para que el momento respecto de la recta sea distinto de cero (hay que entender por tanto que la figura es tridimensional; no se dibuja **M(r)** para no inducir a error, ya que la perspectiva no permite saber el sentido que tendría el momento).



Una regla mnemotécnica para apreciar el sentido del momento respecto de una recta sin realizar operaciones mentalmente, es imaginar un sólido que puede girar en torno a la recta (r). Puede imaginar que se trata de una puerta que tiene sus bisagras sobre la recta, por ejemplo. Imagínese que el vector **v** es una fuerza aplicada al sólido, que le hará girar en torno a la recta. El sentido de ese giro según la “regla del tornillo” será el sentido del momento **M(r)**.

Una propiedad inmediata es que si consideramos como rectas respecto de las que tomar momento a los tres ejes coordenados x, y, z, los momentos respecto a esas rectas coinciden con las componentes del vector momento de **v** respecto del origen de coordenadas (a estos efectos hay que considerar componente positiva al momento que tenga el sentido de un eje, y

componente negativa en caso contrario). Esta propiedad puede hacer más cómodo el cálculo del momento respecto de un punto en algunas circunstancias.

Acercas de la representación de un momento, su carácter vectorial hace que no sea necesaria otra representación diferente que la usual para un vector (es decir “una flecha”). La figura A6a muestra la representación del momento del vector “ $\mathbf{v}$ ” respecto del punto “O” mediante esta figuración habitualmente empleada para un vector.

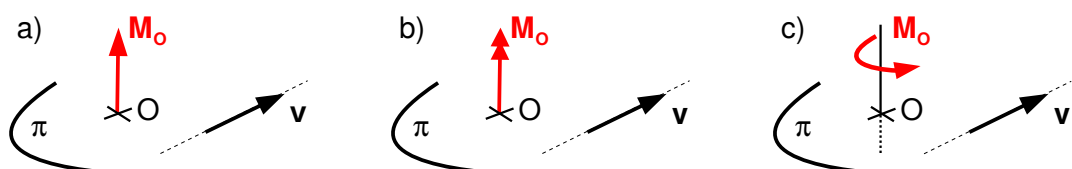


Figura A6: Distintas representaciones usuales de un vector momento.

No obstante, es frecuente en la literatura el empleo de alguna otra simbología para enfatizar que se trata de un vector momento (la misma simbología también se usa habitualmente para vectores giro). Es por ejemplo habitual representar el momento mediante una flecha de doble punta como muestra la figura A6b, o también mediante una “flecha de giro” como indica la figura A6c, siendo ésta última muy empleada en representaciones bidimensionales. En el curso emplearemos indistintamente todas ellas, con preferencia de la flecha de doble punta cuando se trate de representaciones tridimensionales.

### Sistemas de vectores deslizantes

Un sistema de vectores deslizantes es cualquier conjunto de vectores deslizantes, que llamaremos  $\mathbf{v}_i$ , con  $i=1\dots n$ , actuando en sus respectivas rectas de acción. Llamaremos  $A_i$  a un punto de la recta de acción del vector  $\mathbf{v}_i$ .

La resultante de un sistema de vectores deslizantes es el vector libre que se obtiene sumando los vectores libres asociados a los vectores del sistema:

$$\vec{R} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_n = \sum_i \vec{v}_i$$

El momento del sistema de vectores deslizantes respecto de un punto O, es la suma de los momentos de todos los vectores del sistema respecto de ese punto. Es un vector libre, pero puede considerarse ligado al punto O si ello conviene para un propósito particular.

$$\vec{M}_O = \sum_i \vec{OA}_i \times \vec{v}_i$$

### Campo de momentos

Un sistema de vectores deslizantes produce un momento distinto en cada punto del espacio, por lo que se engendra un campo de vectores momento. Conocido el momento respecto de un punto O, es inmediato calcular el momento respecto de otro punto O', ya que:

$$\begin{aligned} \vec{M}_{O'} &= \sum \vec{O'A}_i \times \vec{v}_i = \sum (\vec{O'O} + \vec{OA}_i) \times \vec{v}_i = \vec{O'O} \times \sum \vec{v}_i + \sum \vec{OA}_i \times \vec{v}_i \Rightarrow \\ \vec{M}_{O'} &= \vec{M}_O + \vec{O'O} \times \vec{R} \end{aligned} \tag{A.4}$$

La ecuación anterior es la expresión del campo de momentos. Para calcular dicho campo no es preciso conocer todos los vectores del sistema, sólo hace falta saber el momento en un punto O y la resultante del sistema.

El campo de momentos presenta algunas propiedades interesantes que enumeramos a continuación. Su demostración es prácticamente inmediata, y puede realizarse como ejercicio.

- El momento en dos puntos O y O' es el mismo si ambos están en una recta paralela a **R**
- La proyección del momento en dos puntos O y O' sobre la recta que une dichos puntos, es la misma (esto da sentido al concepto de momento del sistema respecto a una recta).
- Un sistema de resultante nula, genera un campo uniforme de momentos
- El producto escalar de la resultante por el momento en un punto, es independiente del punto elegido:

$$\vec{M}_O \cdot \vec{R} = \vec{M}_{O'} \cdot \vec{R} \tag{A.5}$$

Otra manera de enunciar esta última propiedad es que “la proyección del momento sobre la resultante es constante para cualquier punto”. La figura A7a muestra los vectores momento respecto de algunos puntos O1, O2, O3, dibujados en esos puntos, y la figura A7b dibujados como vectores libres con un origen común. En esta última representación se aprecia claramente cómo la proyección del momento sobre la resultante es constante.

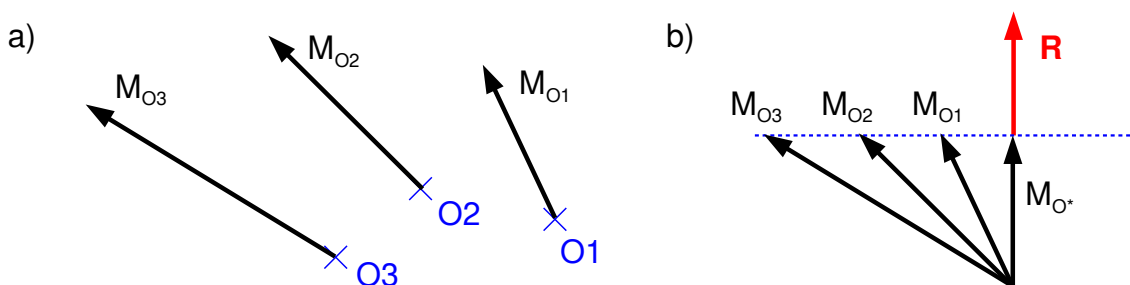


Figura A7: a) Vectores momento respecto de algunos puntos del espacio.  
 b) La proyección sobre la resultante es constante.

### Momento Mínimo y Eje Central

Llamamos “Momento Mínimo” al vector momento de menor módulo, de entre todos los posibles vectores momento respecto de los puntos del espacio. Si el momento mínimo no es nulo, la figura A7b permite apreciar que será paralelo a la resultante. Es decir, existirá un punto O\* cuyo momento  $\vec{M}_{O^*} = \vec{M}_{\min}$  es paralelo a la resultante. Éste es el momento mínimo, que tendrá la expresión

$$\vec{M}_{\min} = (\vec{M}_O \cdot \vec{R}) \cdot \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|^2} \tag{A.6}$$

Siendo O cualquier punto del espacio. Para determinar un punto O\* de momento mínimo en el espacio, podemos por ejemplo usar la ecuación del campo de momentos, e imponer que el

momento sea paralelo a  $\mathbf{R}$ , igualando (A.4) a  $\lambda\mathbf{R}$ , siendo  $\lambda$  un escalar. El sistema de ecuaciones obtenido no tendrá solución única porque como veremos a continuación hay muchos puntos de momento nulo, lo que no obsta para que podamos elegir uno de los (infinitos) puntos. Por ejemplo si es  $R_z \neq 0$ , puede buscarse el punto de momento mínimo que tenga  $z=0$ .

El “Eje Central” es el lugar geométrico de puntos de momento mínimo. Una vez encontrado un punto de momento mínimo, aplicando la primera de las propiedades enumeradas más arriba (el momento en dos puntos  $O$  y  $O'$  es el mismo si ambos están en una recta paralela a  $\mathbf{R}$ ), habremos encontrado en realidad toda una recta de puntos de momento mínimo. Por lo tanto el eje central es una recta paralela a la resultante.



Concurre el hecho, también cierto (ver (A.6)) pero no directamente relacionado con lo anterior, de que el momento en esos puntos del eje central es paralelo a  $\mathbf{R}$ , y por tanto al propio eje central. Así que la resultante, el momento mínimo y el eje central, son paralelos.

Si el momento mínimo es nulo, caso particular que hasta ahora no hemos mencionado, se mantiene el hecho de que el eje central es paralelo a la resultante (el razonamiento que condujo a esa conclusión no se ve afectado). La particularidad de estos sistemas es que su momento respecto de cualquier punto siempre es perpendicular a la resultante. Hay dos casos destacados, que son del mayor interés en este curso, en los que se puede garantizar que el momento mínimo es nulo. Son los siguientes:

- Sistemas de vectores paralelos. Llamando  $\mathbf{n}$  a un vector unitario en la dirección de los vectores, el momento de cada vector respecto de un punto será perpendicular a  $\mathbf{n}$ , y por lo tanto a la resultante (que evidentemente tendrá la dirección  $\mathbf{n}$ ). El momento  $\mathbf{M}$  del sistema es la suma de los momentos de cada vector, que seguirá siendo perpendicular a  $\mathbf{n}$  (y por tanto a  $\mathbf{R}$ ). Por tanto  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{R}$  será nulo, luego el momento mínimo es nulo.
- Sistemas de vectores coplanarios. Llamemos ahora  $\mathbf{n}$  a un vector perpendicular al plano de los vectores, y sea  $O$  un punto de ese plano. El momento de cada vector respecto de  $O$  será perpendicular al plano, luego tendrá la dirección de  $\mathbf{n}$ . El momento  $\mathbf{M}_O$  del sistema, que es la suma de ellos, también tendrá la dirección  $\mathbf{n}$ . La resultante  $\mathbf{R}$  estará evidentemente contenida en el plano, luego será perpendicular a  $\mathbf{n}$ . Por tanto  $\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R}$  será nulo, luego el momento mínimo es nulo.

## Equivalencia y Reducción de sistemas de vectores deslizantes

Decimos que dos sistemas de vectores deslizantes son iguales si contienen los mismos vectores deslizantes. Esta definición no va a ser de mucha utilidad práctica.

Decimos que dos sistemas de vectores deslizantes son equivalentes si generan el mismo campo de momentos. Llamamos reducción de un sistema de vectores deslizantes, a otro sistema de vectores que sea equivalente, y nos resulte más sencillo de manejar para un propósito determinado. A la vista de la ecuación del campo de momentos, la condición (necesaria y suficiente) para que dos sistemas sean equivalentes es que tengan la misma resultante, y el mismo momento respecto de un punto. La clasificación siguiente identifica las reducciones más habituales en cada situación:

$\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$  (resultante no nula)

$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O \neq \mathbf{0}$  (momento mínimo no nulo)

Sistema más general. La reducción más sencilla es la resultante  $\mathbf{R}$  aplicada en un punto  $O$  (del eje central o no), y un par de momento  $\mathbf{M}_O$  (el par puede estar situado en cualquier lugar, pero debe producir el momento  $\mathbf{M}_O$ ).

$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O = \mathbf{0}$  (momento mínimo nulo)

La reducción más sencilla es la resultante  $\mathbf{R}$  aplicada en un punto del eje central.

$\mathbf{R} = \mathbf{0}$  (resultante nula) El campo de momentos será uniforme.

$\mathbf{M} \neq \mathbf{0}$  (momento mínimo no nulo)

La reducción más sencilla es un par cualquiera que proporcione un momento de valor  $\mathbf{M}$ .

$\mathbf{M} = \mathbf{0}$  (momento mínimo nulo)

Se llama sistema nulo de vectores, por tener resultante y momento nulos.

Nota.- Con cierto abuso de lenguaje, es frecuente referirse a un par, o a cualquier subsistema de vectores que tenga resultante nula y momento no nulo, como “un momento”. Y para abreviar, en ocasiones damos directamente el vector momento sin especificar qué vectores lo producen. Entendiendo el momento en este sentido, como un subsistema de vectores de resultante nula, éste genera un campo uniforme de momentos (con el valor del propio momento), y por tanto es indiferente el punto del espacio donde lo posicionemos. Por tanto, si estamos interesados solamente en el campo de momentos, como puede ser el caso en problemas de equilibrio de sólidos, es conveniente considerar al vector momento como un vector libre.

## ***Aplicación a la Estática***

El hecho básico que hace interesante la aplicación del Álgebra de Vectores Deslizantes a los problemas de estática mecánica, es que un cuerpo indeformable no altera su estado de movimiento o reposo si las fuerzas aplicadas sobre él se mueven dentro de sus rectas de acción. Esta observación física fue precisamente la que promovió el establecimiento de un álgebra de vectores que se ajustase a este tipo de problemas.

Por otra parte, las ecuaciones de la estática (1.2) equivalen a decir que un sólido indeformable estará en equilibrio estático si las fuerzas que actúan sobre él forman un sistema nulo de vectores, ya que así hemos definido al sistema que tiene resultante nula y momento nulo.

Una consecuencia inmediata es que si un sólido está en equilibrio bajo un sistema de fuerzas, también lo estará también bajo uno equivalente. Ya que ambos serían sistemas nulos de vectores fuerza.

En la práctica frecuentemente nos interesa pensar que el sistema de fuerzas que actúan está formado por sistemas parciales, o subsistemas, de vectores. Es inmediato demostrar que si un sólido está en equilibrio bajo varios subsistemas de fuerzas que actúan simultáneamente (y que en conjunto formarán un sistema nulo), el sustituir un subsistema de fuerzas por otro equivalente no altera el estado de equilibrio del sólido.



Como caso particular frecuente de lo anterior, puede interesar considerar las reacciones desconocidas (o cada una de ellas por separado) como un subsistema, y las fuerzas conocidas como otro subsistema, al cual podremos por ejemplo aplicar una reducción.

Este pequeño conjunto de ideas acerca del equilibrio estático es en realidad muy versátil, y resume lo necesario para plantear los casos de equilibrio que se presentan en la asignatura.

# Apéndice B. Propiedades estáticas

## Centros de Gravedad

El peso de un cuerpo es el resultado de una distribución de fuerzas diferenciales paralelas provocadas por la gravedad. Sobre cada diferencial de volumen del sólido,  $dV$  actúa una fuerza diferencial de módulo  $\gamma dV$ , donde  $\gamma$  es el peso específico en unidades de fuerza dividida por volumen (por ejemplo  $N/m^3$ ). Si llamamos  $\mathbf{h}$  al vector unitario en la dirección de la gravedad, la fuerza diferencial será  $\mathbf{h}\gamma dV$ , como muestra la figura B1.

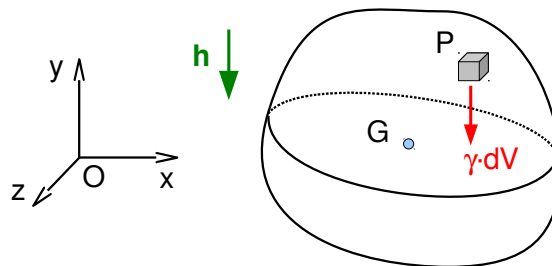


Figura B1: Fuerza diferencial debida a la gravedad sobre un elemento de volumen del sólido.

Al tratarse de un sistema de vectores paralelos, el momento mínimo es nulo, y el sistema admitirá reducción a su resultante aplicada en el eje central. Si  $G$  es un punto del eje central, y  $P$  el punto genérico donde se encuentra el diferencial de volumen, debe cumplirse la condición de que el momento respecto de  $G$  sea nulo:

$$\int_V \vec{GP} \times \vec{h} \gamma dV = 0 \Rightarrow \left( \int_V \vec{GP} \gamma dV \right) \times \vec{h} = 0 \quad (B.1)$$

En donde  $\mathbf{h}$  ha salido de la integral por ser un vector constante. Podríamos usar la ecuación anterior para encontrar un punto  $G$  del eje central, pero queremos plantear algo un poco más exigente: nos preguntamos si habrá un punto  $G$  tal que el eje central del sistema de fuerzas pase por él para cualquier dirección  $\mathbf{h}$  de la gravedad. Si la ecuación anterior ha de satisfacerse para cualquier  $\mathbf{h}$ , la integral entre paréntesis debe anularse (la otra opción sería que ese vector entre paréntesis fuese paralelo a cualquier dirección  $\mathbf{h}$  arbitraria, lo que no es posible garantizar):

$$\int_V \vec{GP} \gamma dV = 0 \Rightarrow \int_V (\vec{GO} + \vec{OP}) \gamma dV = 0 \Rightarrow \vec{OG} \int_V \gamma dV = \int_V \vec{OP} \gamma dV \Rightarrow$$

$$(\text{peso}) \cdot \vec{OG} = \int_V \vec{OP} \gamma dV \quad (B.2)$$

Siendo “peso” el escalar que mide el peso total del sólido, en unidades de fuerza. La ecuación (B.2) nos permite calcular explícitamente la posición del centro de gravedad  $G$ . Es un punto por el que siempre pasará el eje central de las fuerzas de gravedad, independientemente de la orientación de la gravedad respecto del sólido. Por tanto siempre es posible realizar una reduc-

ción de las fuerzas de gravedad que consista en el peso total (la resultante) pasando por el centro de gravedad. Si el sólido tiene un elemento de simetría (lo que debe incluir tanto a la geometría como al peso específico del material), ya sea un punto, una recta, o un plano, el centro de gravedad se encontrará sobre él.

### Centros de Área

El “Centro de Área” de una figura plana se define como el punto que coincidiría con su centro de gravedad si el peso específico fuese constante. Su posición por tanto puede determinarse mediante la particularización de (B.2) al caso de problema bidimensional y peso específico constante, es decir:

$$A \cdot \vec{OG} = \int_A \vec{OP} \cdot dA \tag{B.3}$$

Siendo “A” el área total de la figura en cuestión. La figura B.2 muestra las notaciones adoptadas.

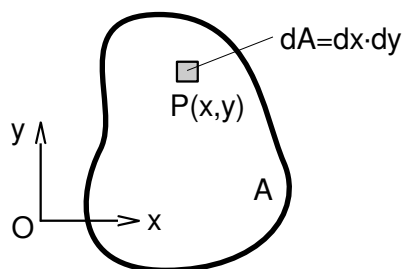


Figura B.2: Figura geométrica plana y diferencial de área en un punto P de la misma.

Conviene recordar que los centros de áreas están siempre sobre los elementos de simetría, si existen, ya sean puntos o rectas. También será útil recordar que el centro de áreas de un triángulo está a 1/3 de cada una de sus alturas, como indica la figura B.3a.

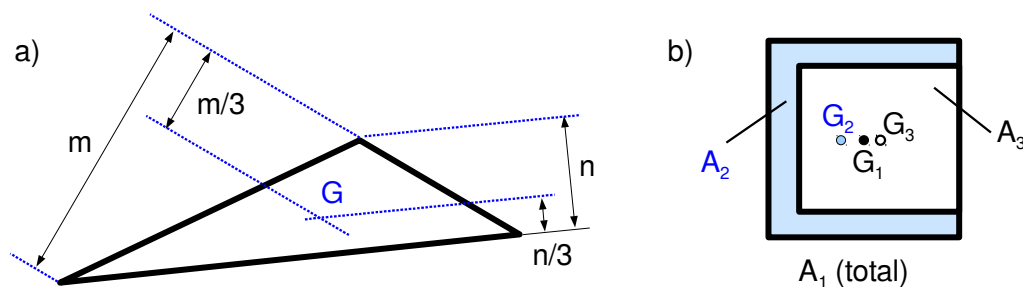


Figura B.3: a) Centro de áreas del triángulo. b) Centro de áreas de una figura compuesta.

Es también útil en ocasiones considerar un área descompuesta en suma de varias. Por ejemplo, la figura B.3b muestra un cuadrado de área A<sub>1</sub>, cuyo área es la de otro cuadrado más pequeño de área A<sub>3</sub>, más un área en forma de “C” (área A<sub>2</sub>). Siendo P un punto genérico donde se encuentra el diferencial de área, y G<sub>1</sub>, G<sub>2</sub>, G<sub>3</sub>, los centros de áreas de las respectivas figuras, podemos plantear:

$$A_1 \cdot \vec{OG}_1 = \int_{A_1} \vec{OP} \cdot dA = \int_{A_2} \vec{OP} \cdot dA + \int_{A_3} \vec{OP} \cdot dA = A_2 \cdot \vec{OG}_2 + A_3 \cdot \vec{OG}_3$$

Lo que permite calcular el centro de áreas de una de las figuras si se conoce el de las otras dos. En este caso probablemente estaríamos interesados en  $G_2$  (del perfil en "C"), que podríamos obtener de:

$$A_2 \cdot \overrightarrow{OG_2} = A_1 \cdot \overrightarrow{OG_1} - A_3 \cdot \overrightarrow{OG_3}$$

## Momentos de Inercia

En el estudio de la flexión de barras rectas aparecen las magnitudes de inercia (momentos y productos de inercia) del área de la sección de la barra respecto de los ejes coordenados. La definición de los momentos y del producto de inercia es la siguiente:

$$I_x = \int_A y^2 dA ; \quad I_y = \int_A x^2 dA ; \quad I_{xy} = \int_A xy dA \quad (B.4)$$

En general, se define el momento de inercia respecto de una recta cualquiera como la integral del diferencial de área multiplicado por el cuadrado de la distancia de éste a la recta.

Algunas de las características más importantes de estas magnitudes de inercia son:

- Los momentos de inercia  $I_x, I_y$ , son siempre positivos.
- El producto de inercia  $I_{xy}$  puede ser positivo, negativo, o nulo.
- Si el origen de ejes  $x, y$ , coincide con el centro de áreas, se llama "centrales" a los momentos de inercia.
- En la resistencia de materiales, casi siempre se usan momentos centrales.
- Existe una orientación de los ejes para la cual el producto de inercia  $I_{xy}$  es nulo: son los ejes principales de inercia.
- De todos los momentos de inercia respecto las infinitas rectas que pasan por un punto, los principales son el menor y el mayor.

Ocasionalmente necesitaremos calcular el momento de inercia respecto de una recta, siendo conocido el momento de inercia respecto de otra recta paralela a la anterior que pasa por el centro de áreas. En la figura B.4, se ha tomado un eje  $x$ , que es perpendicular a las rectas, para que tanto la distancia  $x$  desde la recta  $m$  que pasa por  $G$  hasta el diferencial de área, como la distancia  $b$  entre las rectas, tengan un signo. El momento de inercia respecto de la recta  $m'$  puede escribirse como:

$$I_{m'} = \int_A (x-b)^2 dA = \int_A (x^2 + b^2 - 2xb) dA = \int_A x^2 dA + A \cdot b^2 - 2b \int_A x dA$$

La última integral es nula debido a que la distancia "x" se mide desde la recta "m" que pasa por el centro de gravedad (esa integral, dividida por el área, daría la cota "x" del centro de áreas, que es nula por propia construcción de la figura). Por otra parte, identificamos en la primera integral del último término el momento de inercia respecto a la recta "m". Por tanto:

$$I_{m'} = I_m + A \cdot b^2 \quad (B.5)$$

Ecuación que relaciona los momentos de inercia respecto de ambas rectas, como queríamos. Este resultado es conocido como Teorema de Steiner en la literatura. Como regla mnemotécnica, puede recordarse que el momento de inercia respecto del eje central (el que pasa por el centro de áreas), siempre es menor. El momento de inercia respecto de otra recta paralela siempre será el anterior "más algo".

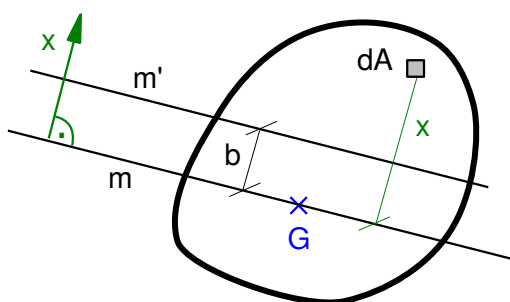


Figura B4: Coordenada “x” para medir distancias con signo.

Finalmente, si queremos calcular el momento de inercia respecto de una recta de orientación cualquiera que pasa por el origen de coordenadas, y son conocidos los momentos de inercia  $I_x$ ,  $I_y$ , respecto de los ejes coordenados, podemos proceder tomando un vector unitario  $\mathbf{e}$  perpendicular a la recta, como indica la figura B.5. Éste vector tendrá de componentes  $(-\text{sen}\theta, \text{cos}\theta)$ . La distancia  $\delta$  del punto  $P(x,y)$  donde se encuentra el diferencial de área puede obtenerse mediante el producto escalar de  $\mathbf{OP}$  por  $\mathbf{e}$ :

$$\delta = \mathbf{OP} \cdot \mathbf{e} = -x \cdot \text{sen}\theta + y \cdot \text{cos}\theta$$

Por tanto el momento de inercia será

$$I_m = \int_A \delta^2 dA = \int_A (x^2 \text{sen}^2\theta + y^2 \text{cos}^2\theta - 2xy \text{sen}\theta \text{cos}\theta) dA \Rightarrow$$

$$I_m = I_y \text{sen}^2\theta + I_x \text{cos}^2\theta - 2I_{xy} \text{sen}\theta \text{cos}\theta \tag{B.6}$$

Que nos proporciona la relación buscada.

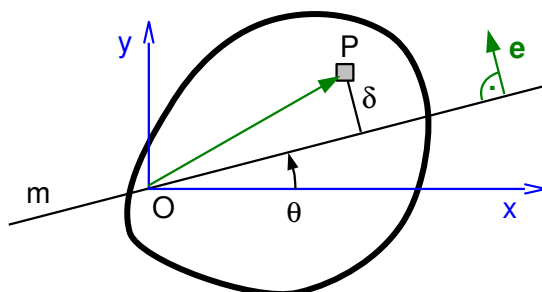


Figura B.5: Vector unitario “e” perpendicular a la recta inclinada “m”.

# Apéndice C.

## Notas sobre el análisis de celosías

### Cálculo gráfico de reacciones

La imposición del equilibrio de un sistema plano usando procedimientos gráficos requiere, al igual que cuando se usa cualquier otro procedimiento, garantizar que la resultante de las fuerzas aplicadas sea nula, y que la suma de momentos respecto de un punto del plano sea también nula. Es indiferente el punto del plano respecto del que tomemos el momento, ya que el campo de momentos será constante por ser la resultante nula.

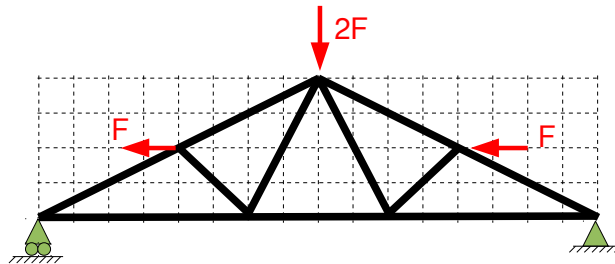


Figura C1: Una armadura isostática.

Podemos imponer las ecuaciones de equilibrio en cualquier orden que nos resulte conveniente. En este caso comenzaremos imponiendo la igualdad a cero del momento. Como paso previo, reducimos todas las fuerzas conocidas a una sola fuerza (la resultante en un punto de momento nulo), como se ha hecho en la figura C2.

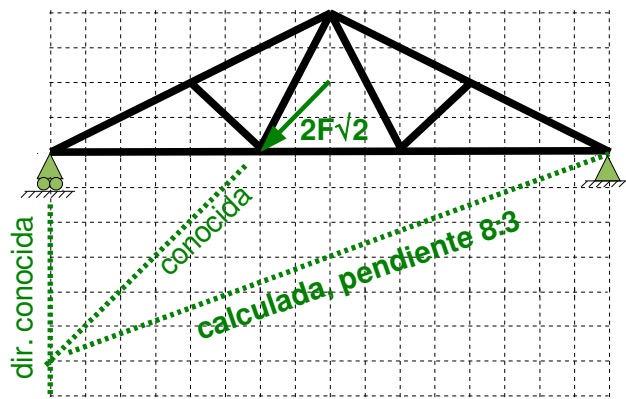


Figura C2: La reacción derecha debe pasar por el punto de corte de las demás fuerzas.

Sabemos que la reacción del apoyo izquierdo será vertical. El punto de esa línea vertical que se corte con la recta de acción de la reducción de las fuerzas conocidas, debe ser también un punto de la recta de acción de la reacción del apoyo derecho, ya que de otra manera el momento resultante respecto de ese punto no sería nulo. Por tanto hemos encontrado la dirección de la reacción del apoyo derecho, que es la que se indica en la figura C2.

Hay que entender que, desde el punto de vista del álgebra, hemos utilizado una de las condiciones de equilibrio (momento nulo) para encontrar una incógnita (la dirección en principio desconocida de una fuerza de reacción). En estos momentos quedan dos incógnitas por calcular (los módulos de ambas fuerzas de reacción), y tenemos aún disponibles dos ecuaciones de equilibrio estático (por ejemplo componente horizontal de la resultante nula, y componente vertical de la resultante nula). Seguidamente podemos proceder al cálculo de dichas incógnitas, que realizaremos asimismo de manera gráfica.

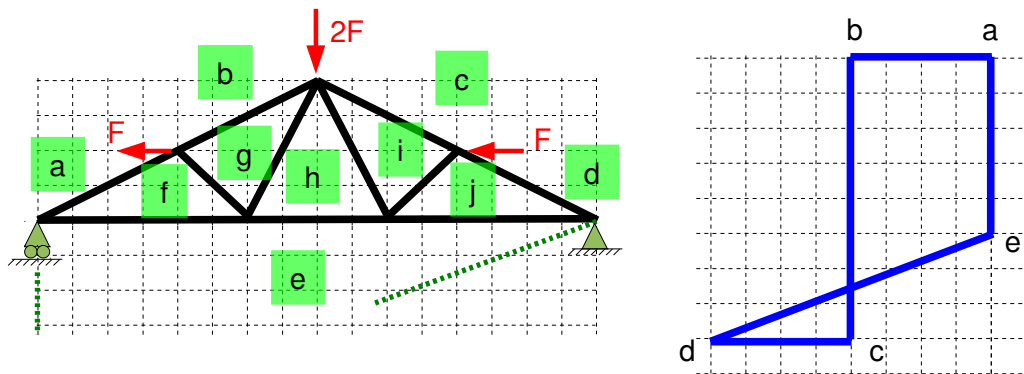


Figura C3: Cálculo de la magnitud de las reacciones mediante el equilibrio gráfico de fuerzas.

Para ello consideramos de nuevo (y para el resto de los razonamientos) las cargas reales del problema. En el cálculo de las reacciones sería posible aún operar con la reducción de las fuerzas conocidas realizada en la figura C.2, pero evidentemente no sería correcto emplear esa reducción para el cálculo de los esfuerzos en las barras. Como más tarde vamos a abordar dicho cálculo, es más conveniente operar desde este momento con las fuerzas actuantes reales.

La figura C3 muestra las áreas entre fuerzas y esfuerzos nombradas del modo que se presentó en el Tema 7. El cálculo de la magnitud de las reacciones se realiza imponiendo que las fuerzas actuantes formen un polígono cerrado. Dicho polígono se muestra junto a la figura. El mismo está trazado comenzando por la fuerza “ab”, lo que se ha elegido para que el trazado de las fuerzas conocidas se realice antes que el de las desconocidas, al ir avanzando en sentido horario en torno a la estructura. Se ha tomado su módulo, “F”, igual a cuatro lados de la cuadrícula de referencia (“unidades” en lo sucesivo), por lo que esa será la escala del polígono de fuerzas. La fuerza “bc” es de módulo 2F y sentido hacia abajo, por lo que se traza con 8 unidades hacia abajo. La fuerza “cd” tiene de módulo F, por lo que se traza con magnitud de 4 unidades, hacia la izquierda.

La fuerza de reacción “de”, cuyo sentido desconocemos en principio, tiene inclinación 8:3, así que trazamos un segmento de recta desde “d” con esa inclinación, sin saber todavía en qué posición de esa recta se encontrará el punto “e”. Finalmente, la fuerza “ea” debe ser vertical. No sabemos dónde está “e”, pero sí dónde está “a”, por lo tanto realizamos un trazo vertical que pase por “a”. El punto “e” debe estar tanto en la recta “de” como en la “ea”, por lo tanto su posición queda determinada en el cruce de los dos trazos que acabamos de realizar.

Haber determinado la posición del punto “e” en el polígono de fuerzas equivale de hecho a haber determinado el valor de las reacciones en los apoyos. En efecto, la reacción en el apoyo derecho es vertical y según hemos obtenido en el trazado, tiene de módulo 5 “unidades”, es decir  $5/4$  de  $F = 1.25F$ , y su sentido viene dado por el vector **ea** del trazado (recuérdese que siempre nombramos las fuerzas con el orden en que encontramos las áreas adyacentes al girar en sentido horario). Es decir tiene sentido hacia arriba.

Por su parte, la reacción “de” tiene el sentido del vector **de** del trazado. Por tanto tiene sentido hacia la derecha y hacia arriba, con inclinación 8:3 como habíamos calculado. Su módulo se obtiene fácilmente del trazado: en “unidades” de cuadrícula es  $\sqrt{8^2+3^2}=8.54$ , que equivale a  $8.54/4 = 2.13F$ . El trazado de las reacciones en una figura de ha pospuesto hasta la figura C5 por claridad de la exposición.

El procedimiento esbozado hasta aquí será de utilidad en la mayoría de los casos en que las incógnitas de reacción estén asociadas a un apoyo fijo y un apoyo móvil. Merece un comentario especial el caso en que todas las fuerzas del problema sean paralelas. Tal es el caso mostrado en la figura C4, en el que se conoce que todas las fuerzas serán verticales (“excepto quizá la del apoyo fijo”, pero el equilibrio de fuerzas horizontales hace evidente que ésta tampoco tendrá componente horizontal).

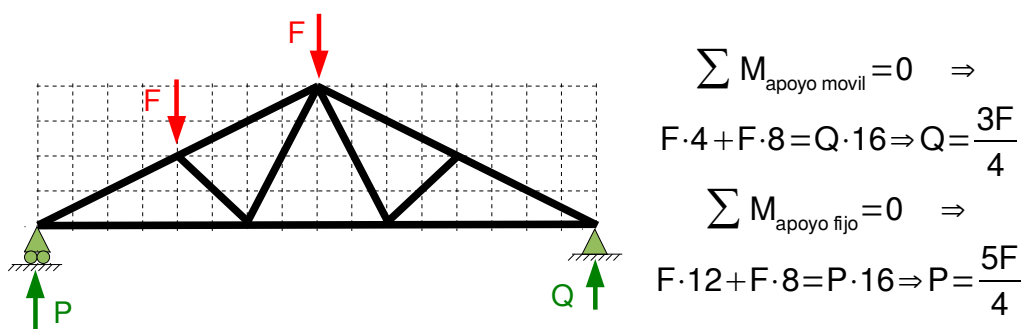


Figura C4: Cálculo de reacciones cuando todas las fuerzas que intervienen son paralelas.

Para estos casos de fuerzas paralelas, el plantear el equilibrio de momentos buscando puntos de corte entre las rectas de acción es, evidentemente, imposible. Aunque existen construcciones gráficas que permiten calcular las incógnitas en estos casos, recomendamos simplemente un cálculo analítico como el mostrado junto a la propia figura C4, ya que suele resultar muy sencillo. En el ejemplo de la figura se han tomado en primer lugar momentos respecto del apoyo móvil (usando unidades de longitud de cuadrícula), para que la reacción correspondiente no aparezca en la ecuación, resultando inmediato despejar la reacción en el otro apoyo. Para calcular la reacción en el apoyo móvil podemos tomar momentos respecto del apoyo fijo como se indica en la figura, o bien podríamos haber usado la ecuación de equilibrio de fuerzas de dirección vertical.

### Cálculo gráfico de esfuerzos en las barras

En el Tema 7 se mostró que para una armadura isostática simple, el equilibrio de los nudos aportaba las ecuaciones necesarias para calcular tanto las reacciones como los esfuerzos en las barras, y que incluir las ecuaciones de equilibrio global era redundante, pero conveniente cuando se opera a mano, para tener elementos de comprobación frente a posibles errores. También se mostró cómo plantear gráficamente el equilibrio de cada nudo mediante un polígono de fuerzas que debe resultar cerrado, siendo dicho polígono equivalente a las dos ecuaciones escalares de equilibrio del nudo.

En este epígrafe simplemente pretendemos mostrar una manera compacta de trazar dichos polígonos de fuerzas en una sola figura, lo que resulta más cómodo y conveniente. Para ello retomamos el ejemplo de la figura C3, en el que ya habíamos calculado las reacciones. Las mismas aparecen dibujadas en la figura C5 (no se representan a escala; en todo caso téngase en cuenta que en la cuadrícula en que representamos la estructura, el lado de los cuadrados



tiene dimensiones de longitud, no de fuerza). Procedemos a equilibrar un nudo en el que sólo tengamos dos incógnitas (esfuerzos desconocidos en sólo dos barras), como por ejemplo el "afe". Junto a la figura C5 se muestra el polígono de fuerzas correspondiente al equilibrio global de la estructura (ya obtenido en la figura C3), y en el mismo trazado el correspondiente a dicho nudo "afe".

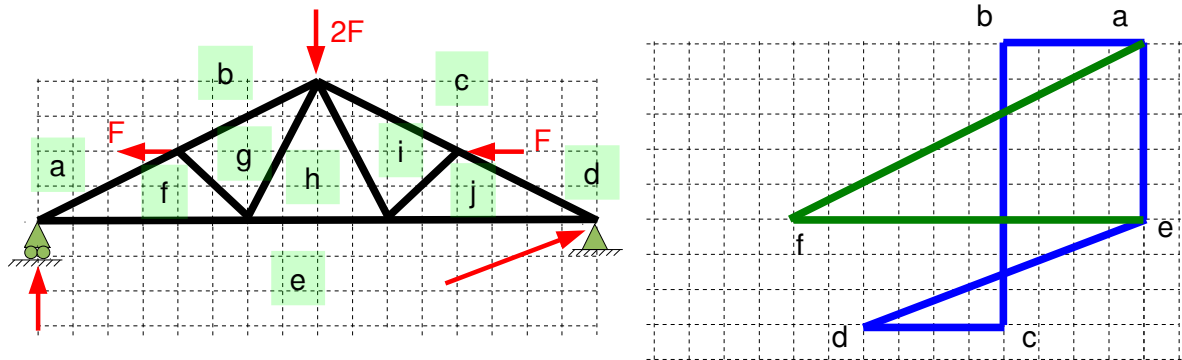


Figura C5: Equilibrio del nudo "afe", trazado a partir del diagrama de equilibrio global.

Como se muestra, se ha obtenido el punto "f" del polígono de fuerzas, que determina los esfuerzos en las barras "af" y "fe" del nudo equilibrado. Como solemos hacer, el polígono se ha trazado comenzando por "e" para que lo primero que tengamos que trazar sea "ea", que ya está trazado (esto puede considerarse una buena práctica para evitar errores, pero es posible comenzar por cualquier área). En realidad, la sencilla idea de aprovechar puntos ya trazados de los diagrama de fuerzas, es todo lo que hace falta para trazar el diagrama compacto que perseguíamos. El mismo acabará por contener los diagramas de equilibrio de todos los nudos, así como el de la estructura completa.

En la figura C6 hemos representado el sentido de las fuerzas ejercidas sobre el nudo recién equilibrado, así como el sentido las fuerzas sobre los nudos en los extremos opuestos de las barras implicadas, tal como acostumbrábamos a operar en el Tema 7. A la vista de esta figura, elegimos otro nudo con solo dos incógnitas, como por ejemplo el "fabg". Las fuerzas "fa" y "ab" están ya trazadas, así que trazamos "bg" a partir de "b", y trazamos "gf" de forma que pase por "f", para que el polígono resulte cerrado. De esta manera determinamos la posición del punto "g", y con el los esfuerzos "bg" y "gf". Obsérvese que el punto "g" no corresponde a un vértice de la cuadrícula. En estos casos es suficiente interpolar "a sentimiento" en la cuadrícula para encontrar la magnitud de los esfuerzos. Ello produce resultados de precisión satisfactoria para las aplicaciones habituales, siendo las incertidumbres asociadas a las cargas y a los errores de montaje (por mencionar algunas) mucho más importantes.

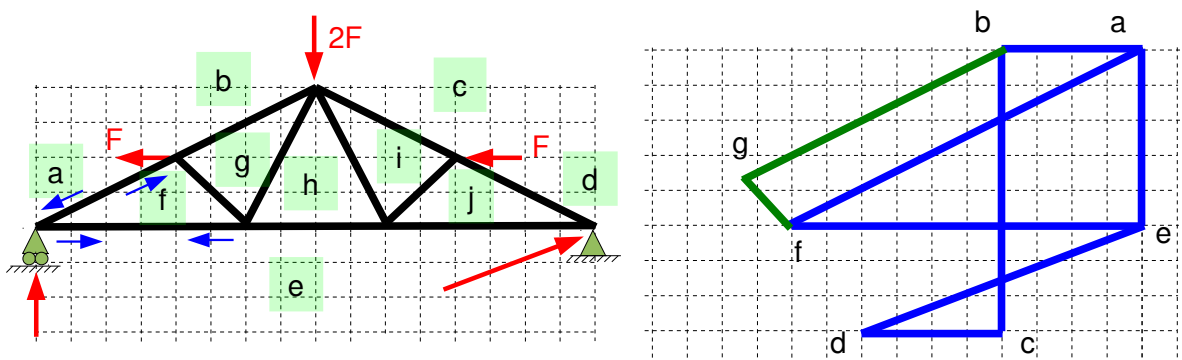


Figura C6: Equilibrio del nudo "fabg", trazado sobre los diagramas obtenidos anteriormente.

La figura C7 incorpora los sentidos de las fuerzas recién calculadas, y permite apreciar que el nudo "efgh" presenta sólo dos incógnitas, por lo que podríamos proceder a equilibrarlo. No obstante, recordemos que en cualquier momento podemos continuar con cualquier nudo que tenga dos incógnitas. El nudo "dej" cumple dicha condición, y procederemos a equilibrarlo ahora sin que haya ningún motivo particular, más allá de ilustrar dicha posibilidad. La figura C7 muestra el equilibrio de este nudo, trazado a partir de la fuerza "de" ya conocida.

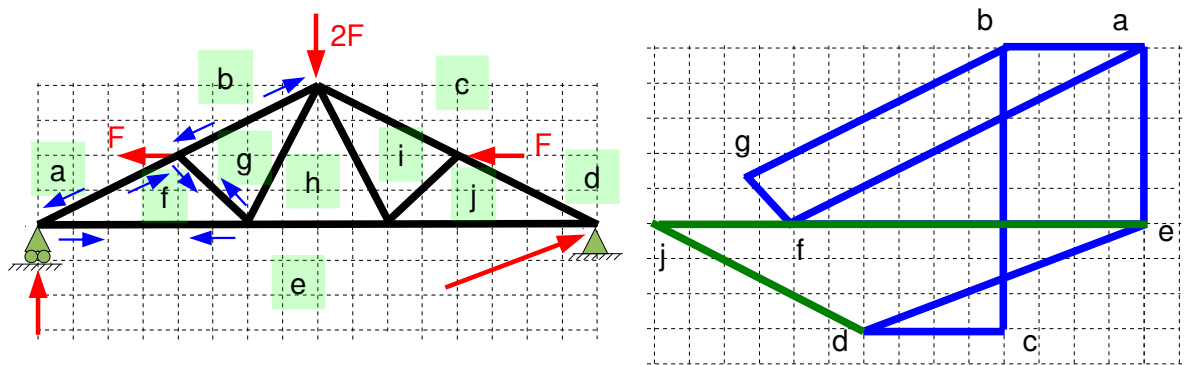


Figura C7: Equilibrio del nudo "dej".

La fuerza "ej" se superpone a la "ef" que ya habíamos trazado. Esta circunstancia es frecuente y no requiere ningún tratamiento especial. Únicamente cabe notar que a pesar de quedar los puntos "j" y "f" unidos por un trazo en el diagrama, dicho trazo no tiene significado físico alguno, ya que no existe una barra "jf".

La figura C8 muestra sobre la estructura los sentidos de las fuerzas recién calculadas, y permite apreciar que el nudo "cdji" tiene sólo dos incógnitas. Procedemos a su cálculo comenzando el polígono de fuerzas por "c", de forma que las fuerzas conocidas "cd" y "dj" se trazan en primer lugar (de hecho están ya trazadas). Encontramos la posición del punto "i" de la manera acostumbrada como se muestra.

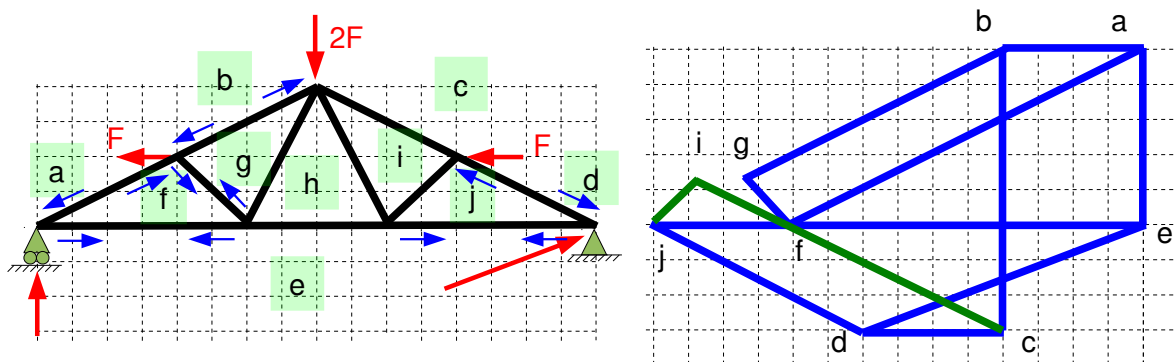


Figura C8: Equilibrio del nudo "cdji".

Análogamente, la figura C9 muestra sobre la estructura el sentido de las fuerzas sobre los nudos calculadas, y nos invita a equilibrar el nudo "ijeh" que solo tiene dos incógnitas. Determinamos el punto "h" imponiendo que las fuerzas "ij", "je" (ya trazadas), "eh" y "hi" formen un polígono cerrado. Se da nuevamente la circunstancia de que "eh" se superpone con otras fuerzas ya trazadas.

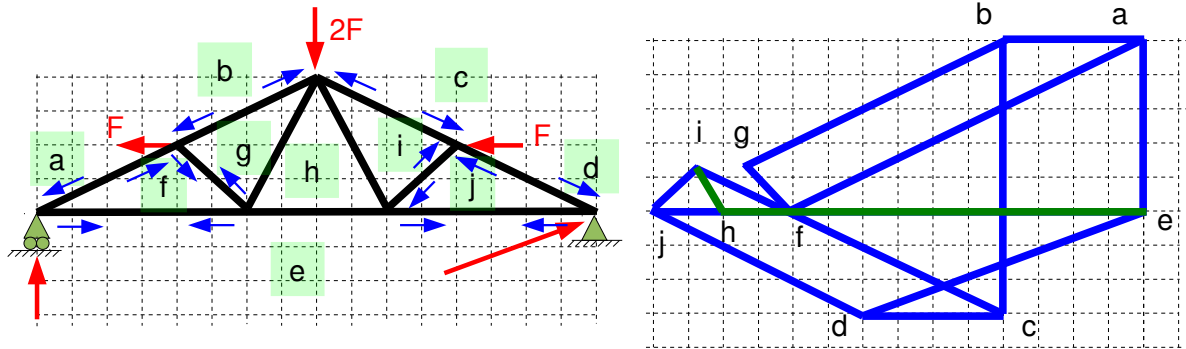


Figura C9: Equilibrio del nudo "ijeh".

Finalmente la figura C10, en la que se han dibujado sobre la estructura los sentidos de las fuerzas calculadas, muestra como única incógnita a calcular el esfuerzo de la barra "gh". Podemos plantear el equilibrio de cualquiera de sus dos nudos, pero lo cierto es que los puntos "g" y "h" ya están localizados en el diagrama. Por supuesto esto ocurre porque hemos utilizado las ecuaciones de equilibrio global además de las de cada nudo. Esta superabundancia de ecuaciones nos permite en este momento apreciar el orden de magnitud de los errores que podemos haber cometido en el trazado. En un trazado cualquiera, ya haya sido realizado con la ayuda de papel cuadrículado o con cartabón y escuadra, podría ocurrir que:

- Los puntos "g" y "h" del diagrama formasen un segmento sensiblemente paralelo a la barra "gh" de la estructura. En este caso podremos dar por bueno el trazado, siendo el error del mismo tanto más pequeño cuanto más se aproxime la dirección del segmento a la de la barra.
- Los puntos "g" y "h" del diagrama formasen un segmento que no es ni siquiera aproximadamente paralelo a la barra. En este caso habríamos cometido algún error de bulto en el trazado, que deberemos corregir.

Afortunadamente nos encontramos en el primer caso. Podemos dar por bueno el trazado y obtener del diagrama las magnitudes de los esfuerzos, en función de F. Esto último puede realizarse sin dificultad, si bien ello se sale del propósito de este Apéndice.

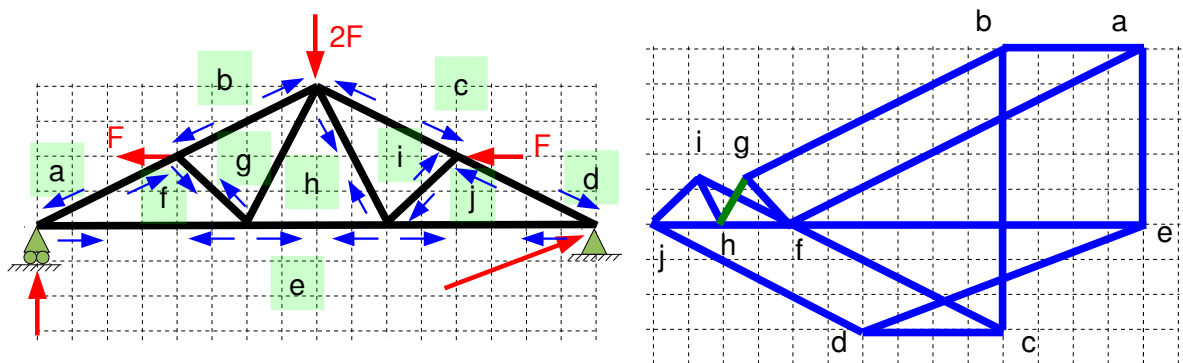


Figura C10: Comprobación de los cálculos: la dirección de la barra "gh" de la estructura y del segmento "gh" del diagrama deben coincidir.

De acuerdo con la regla del sentido horario para denominar las fuerzas, la fuerza que ejerce la barra "gh" sobre el nudo superior será el vector "hg" del diagrama, y la fuerza sobre el nudo inferior será el vector opuesto "gh". La figura C11 incluye el sentido de las fuerzas que esta barra ejerce sobre los nudos a los que está conectada. Como se aprecia, dicha barra trabajará

con un esfuerzo de compresión, pequeño comparado con los esfuerzos de compresión de otras barras (como por ejemplo “af”), y con los de tracción de algunas otras (como “ej”).

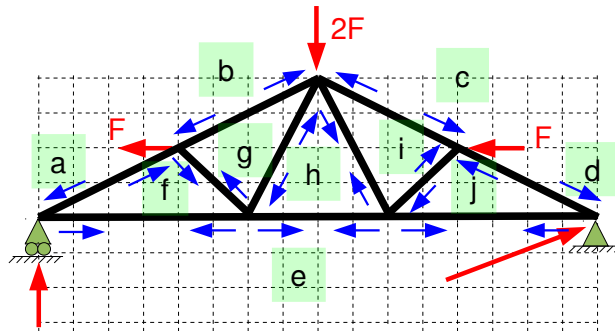


Figura C11: Sentido de las fuerzas ejercidas por la barra "gh".

Como comentario final, y sin pretender completar aquí el análisis de la estructura, cabe apuntar que se observa (fig. C10) que la barra “ej” tiene el mayor esfuerzo, de valor  $3.5F$ . Siendo éste de tracción, probablemente resultaría más preocupante alguna de las barras que trabajan a compresión (debido al posible pandeo). A simple vista puede apreciarse que la mayor compresión la soporta “af”, de valor  $(\sqrt{5^2 + 10^2}/4)F = 2,795F$  (quizá podríamos dudar, a simple vista, si “ci” es mayor; pero puede comprobarse que su valor es  $2,42F$ )

- El tipo de diagrama compacto finalmente obtenido en la figura C10 es conocido como “diagrama de Maxwell-Cremona”. Es frecuente en la literatura la utilización de otros tipos de notación para construir el diagrama, por ejemplo [5], aunque el concepto que subyace es en todo caso el equilibrio de cada uno de los nudos, planteado gráficamente, y de forma ordenada. La notación propuesta aquí también es frecuente en la literatura, y puede encontrarse por ejemplo en [4].

### Cálculo analítico de esfuerzos en las barras

El planteamiento analítico de las ecuaciones de equilibrio de los nudos no presenta ninguna novedad conceptual. Al igual que cuando se resuelve gráficamente, será conveniente elegir un orden de intervención de las ecuaciones que implique la resolución de varios sistemas de ecuaciones pequeños en lugar de uno grande. Como sabemos, esto siempre es posible si se trata de una armadura simple. Utilizaremos el mismo ejemplo del apartado anterior para ilustrar una manera posible (entre otras muchas) de ordenar los cálculos. A continuación se reproduce el mismo problema de la figura C3:

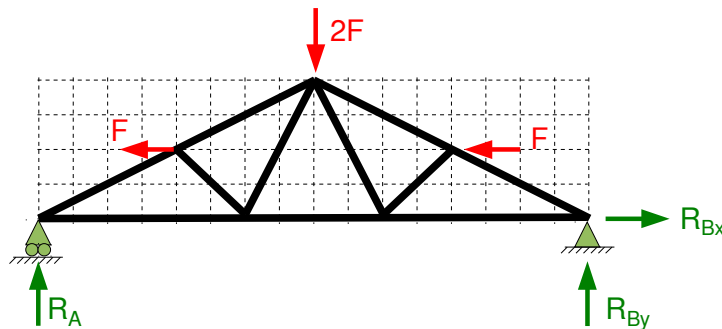


Figura C12: Reproducción del problema del apartado anterior.

Comenzaremos por calcular las reacciones en los apoyos. Para ello planteamos el equilibrio global de la estructura (se toma como unidad de longitud el lado de los cuadrados de referencia):

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow R_A \cdot 16 = F \cdot 2 + F \cdot 2 + 2F \cdot 8 \Rightarrow R_A = 1,25F$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_{Bx} = 2F$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_{By} + 1,25F = 2F \Rightarrow R_{By} = 0,75F$$

Para identificar las incógnitas usaremos en este caso una simple numeración de barras como la mostrada en la figura C13. Cada incógnita será el esfuerzo axial en una barra, que denotaremos por  $N_1, N_2$ , etc. Como método operativo, vamos a suponer inicialmente que todos los esfuerzos son de tracción, y realizaremos las figuras que representan las acciones sobre los nudos de forma acorde. Plantearemos las ecuaciones de equilibrio del nudo observando dichas figuras. Un resultado numérico negativo para un esfuerzo, implicará que la barra trabaja a compresión. Tal resultado será introducido también con signo menos en las subsecuentes ecuaciones de equilibrio de otros nudos en las que deba ser utilizado.

Procedemos al equilibrado de los nudos por turno:

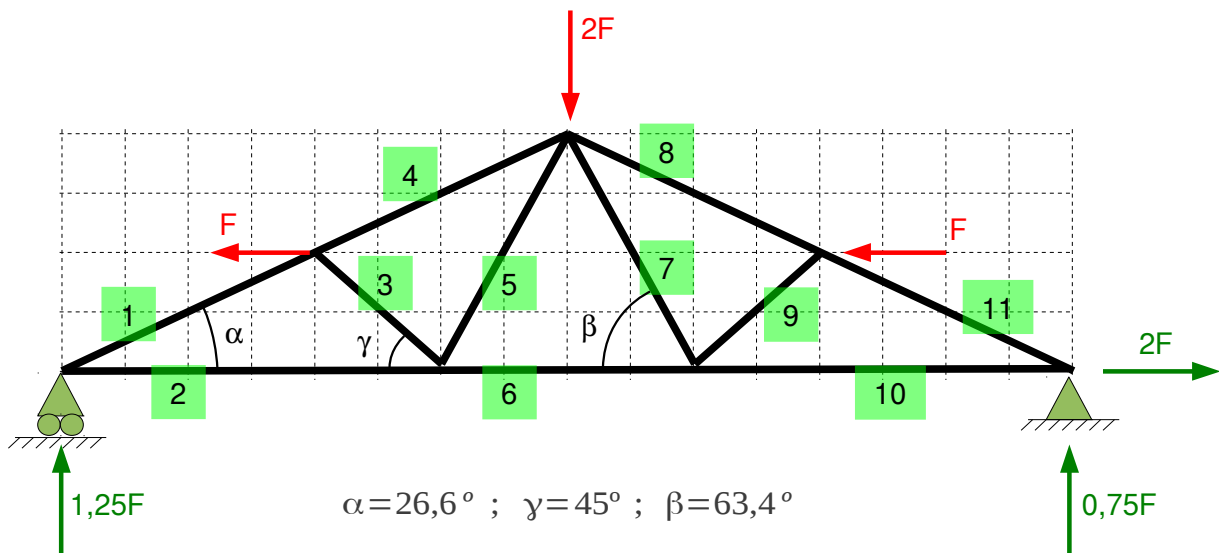
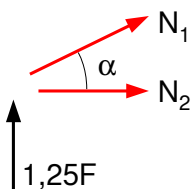


Figura C.13: Reacciones y numeración de las barras

Nudo 1,2

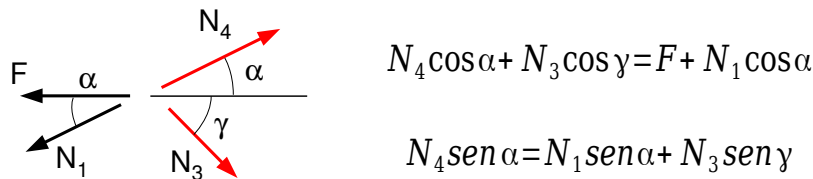


$$N_1 \sin \alpha + 1,25F = 0 \Rightarrow N_1 = -2,795F$$

$$N_1 \cos \alpha + N_2 = 0 \Rightarrow N_2 = 2,5F$$

La primera ecuación expresa el equilibrio de fuerzas en dirección horizontal, y la segunda el equilibrio de fuerzas en dirección vertical. En este nudo hemos obtenido cada incógnita a partir de una sola ecuación, pero en general, cuando planteamos que la suma de fuerzas horizontales y verticales se anulen, esperamos tener que resolver un sistema de dos ecuaciones simultáneas. Tal es el caso del nudo 1,4,3, que equilibramos a continuación (y que elegimos por presentar solamente dos incógnitas):

Nudo 1,4,3



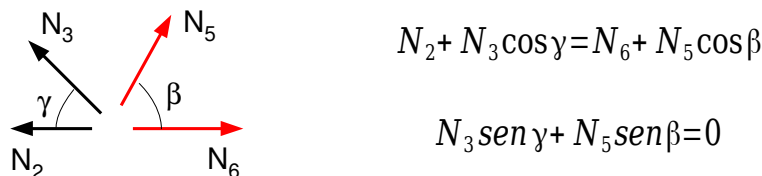
Para resolver el sistema sumamos ambas ecuaciones, con lo que los términos en  $N_3$  se cancelan ( $\sin \gamma = \cos \gamma$ ):  $N_4(\cos \alpha + \sin \alpha) = F + N_1(\cos \alpha + \sin \alpha) \Rightarrow$

$$N_4 = \frac{F}{\cos \alpha + \sin \alpha} + N_1 = 0,745F - 2,795F \Rightarrow N_4 = -2,05F$$

y de la 1ª:  $N_3 = \frac{-N_4 \cos \alpha + F + N_1 \cos \alpha}{\cos \gamma} = \frac{1,833 + 1 - 2,5}{0,707} F \Rightarrow N_3 = 0,471 F$

Podríamos haber evitado resolver un sistema de ecuaciones si hubiésemos considerado el equilibrio de fuerzas en la dirección perpendicular a  $N_4$ , o bien en la dirección perpendicular a  $N_3$  (que no son la horizontal ni la vertical, ni perpendiculares entre sí). Este procedimiento puede aplicarse siempre que se desee en los casos de fuerzas inclinadas, aunque es dudoso si proyectar las fuerzas en direcciones inclinadas supone una simplificación respecto de resolver un sistema de dos incógnitas. En todo caso, se trata de un detalle de preferencia personal.

Nudo 2,3,5,6

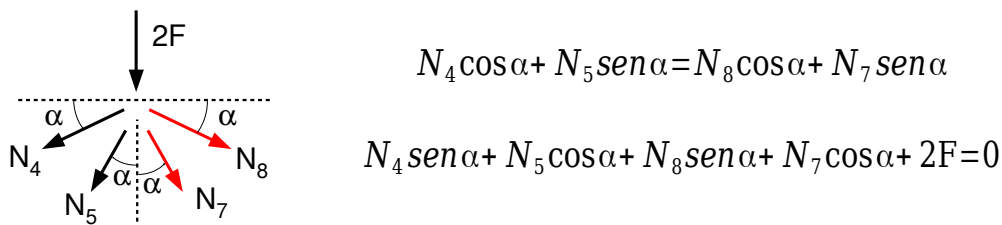


De la segunda ecuación obtenemos directamente  $N_5$ :

$$N_5 = \frac{-0,471 \sin \gamma}{\sin \beta} F = -0,373 F$$

Y de la primera obtenemos  $N_6 = (2,5 + 0,471 \cos \gamma + 0,373 \cos \beta) F = 3F$

Nudo 4,5,7,8



Buscando cancelar los términos en  $N_8$ , multiplicamos a la primera ecuación por  $\sin \alpha / \cos \alpha$  y sumamos el resultado a la segunda ecuación:

$$2 N_4 \sin \alpha + N_5 \left( \cos \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \right) + N_7 \left( \cos \alpha - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \right) + 2F = 0$$

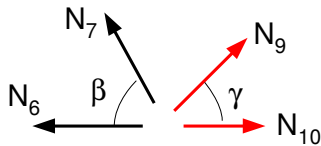
De donde podemos despejar

$$N_7 = \frac{-2N_4 \operatorname{sen} \alpha - 1,118N_5 - 2F}{0,671} = 0,373 F$$

Y con la primera ecuación

$$N_8 = \frac{N_4 \cos \alpha + N_5 \operatorname{sen} \alpha - N_7 \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = -2,423 F$$

Nudo 6,7,9,10



$$N_6 + N_7 \cos \beta = N_9 \cos \gamma + N_{10}$$

$$N_7 \operatorname{sen} \beta + N_9 \operatorname{sen} \gamma = 0$$

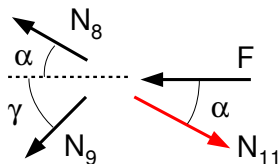
De la segunda obtenemos inmediatamente

$$N_9 = -N_7 \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \gamma} = -0,472 F$$

Y de la primera

$$N_{10} = (3 + 0,373 \cos \beta + 0,472 \cos \gamma) F = 3,5 F$$

Nudo 8,9,11



$$N_8 \cos \alpha + N_9 \cos \gamma + F = N_{11} \cos \alpha$$

$$N_8 \operatorname{sen} \alpha = N_9 \operatorname{sen} \gamma + N_{11} \operatorname{sen} \alpha$$

Solamente queda N11 como incógnita. Podemos despejarla por ejemplo de la primera ecuación:

$$N_{11} = \frac{-2,423 \cos \alpha - 0,472 \cos \gamma + 1}{\cos \alpha} F = -1,677 F$$

La otra ecuación de este nudo puede usarse como comprobación de los cálculos. En efecto:

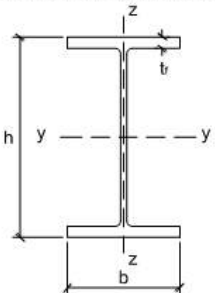
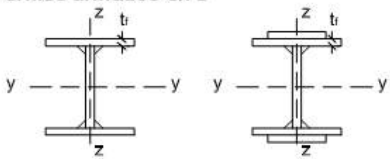

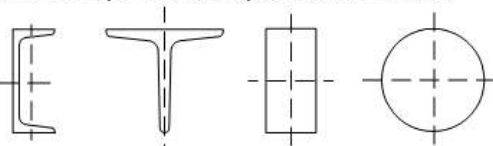
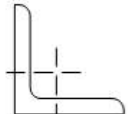
$$N_8 \operatorname{sen} \alpha = N_9 \operatorname{sen} \gamma + N_{11} \operatorname{sen} \alpha \Rightarrow -1,084 = -1,084$$

Las dos ecuaciones de equilibrio del nudo 10,11 serían asimismo redundantes, aunque también útiles como comprobación de los cálculos. Como sabemos, el hecho de que dispongamos de tres ecuaciones escalares de comprobación proviene del hecho de que hemos usado al principio las tres ecuaciones de equilibrio global, que son redundantes respecto del conjunto de ecuaciones de equilibrio de los nudos

- No parece ser sencillo ofrecer una recomendación acerca de si utilizar un procedimiento gráfico o analítico para el cálculo de esfuerzos en celosías (cuando no se utiliza ordenador). Voces igualmente autorizadas manifiestan preferencias diferentes, por lo que cabe asumir que se trata de un asunto de preferencia personal. No obstante, y por referir un caso particular, quien escribe estas líneas realizó en primer lugar la resolución gráfica sin errores, y a continuación la resolución analítica, debiendo corregir en ésta un total de tres errores de cálculo.

# Apéndice D. Tablas y Gráficos

**Tablas para elección de la curva de pandeo.** Tomadas del Código Técnico de la Edificación [6], DB SE-A, 6.3.2.1

Tipo de sección	Tipo de acero Eje de pandeo <sup>(1)</sup>	S235 a S355		S450		
		y	z	y	z	
<b>Perfiles laminados en I</b>						
	$h/b > 1,2$	$t \leq 40$ mm	a	b	$a_0$	$a_0$
		$40 \text{ mm} < t \leq 100$ mm	b	c	a	a
	$h/b \leq 1,2$	$t \leq 100$ mm	b	c	a	a
		$t > 100$ mm	d	d	c	c
<b>Perfiles armados en I</b>						
	$t \leq 40$ mm	b	c	b	c	
	$t > 40$ mm	c	d	c	d	
<b>Agrupación de perfiles laminados soldados</b>						
			c	c	c	c
<b>Perfiles simples U, T, chapa, redondo macizo</b>						
			c	c	c	c
<b>Perfiles L</b>						
			b	b	b	b



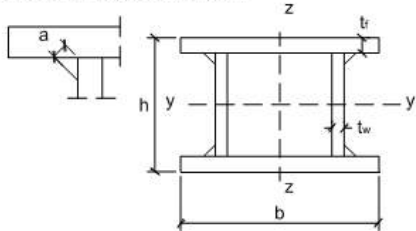
Tubos de chapa simples o agrupados



laminados en caliente      a      a      a<sub>0</sub>      a<sub>0</sub>

conformados en frío      c      c      c      c

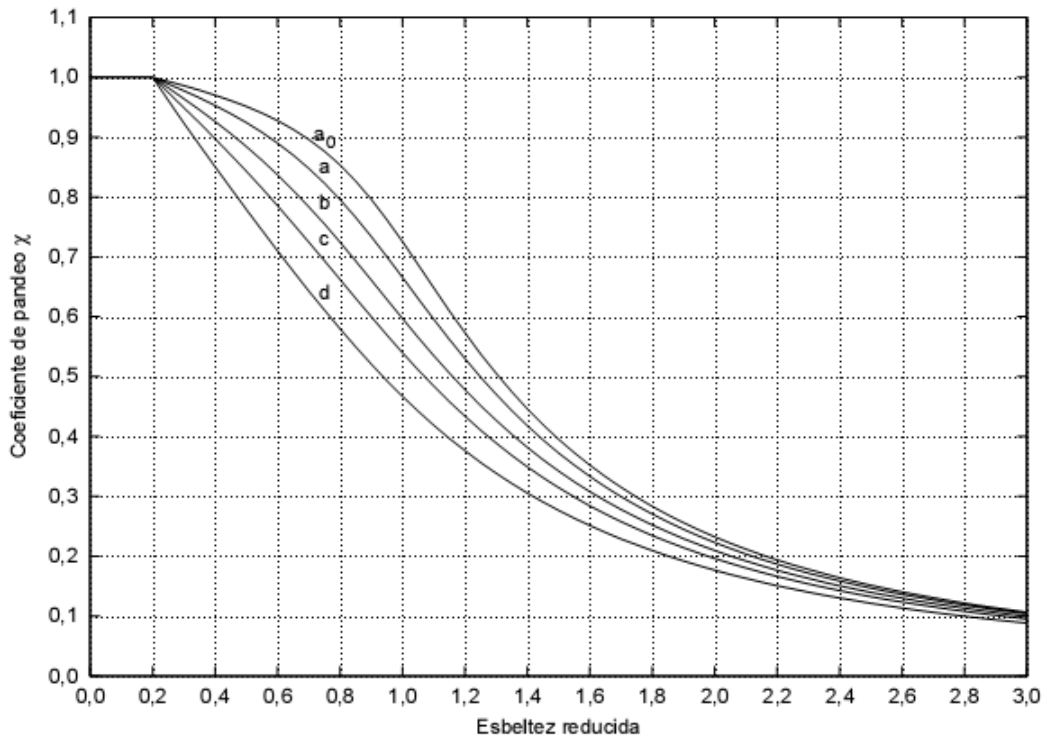
Perfiles armados en cajón <sup>(2)</sup>



soldadura gruesa:  
a/t > 0,5    b/t < 30    h/t<sub>w</sub> < 30

c      c      c      c

en otro caso      b      b      b      b



**Tablas de presión de hundimiento del terreno  $q_h$  (kN/m<sup>2</sup>).**

Válidas para terreno aproximadamente horizontal, de aproximadamente 1800 kp/m<sup>3</sup> de peso específico, con zapatas rectangulares de entre 1m y 3m de ancho, que estén por encima del nivel freático. Tomadas del CTE [6], DB SE-C, 4.3.2.

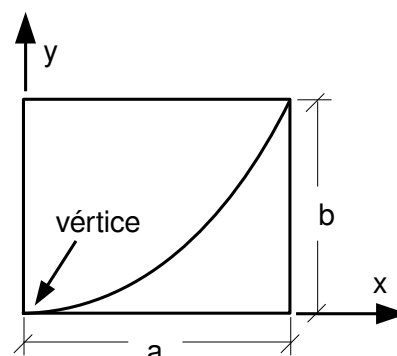
$\phi$ (°)	$c_k$ (kN/m <sup>2</sup> )	$B^*/L^* = 1$			$B^*/L^* = 0,5$			$B^*/L^* = 0,25$			$B^*/L^* = 0$		
		D (m)			D (m)			D (m)			D (m)		
		0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0°	50	310	385	450	280	355	420	270	340	400	255	325	385
	100	615	750	860	565	690	790	540	660	755	515	630	720
	150	925	1120	1265	850	1025	1160	810	980	1110	770	935	1060
15°	10	145	255	375	140	245	360	135	240	355	130	235	350
	20	280	410	545	260	390	520	250	375	510	240	365	495
20°	10	215	385	570	210	375	560	205	370	555	200	365	550
	20	395	595	805	370	570	775	360	555	760	350	540	745
25°	10	335	605	915	330	600	905	330	595	900	330	595	895
	20	580	900	1240	560	870	1205	550	855	1185	535	840	1165
30°	0	190	580	1055	230	620	1095	250	640	1115	270	660	1135
	10	550	1010	1530	560	1015	1530	565	1015	1530	570	1020	1530
35°	0	425	1135	1990	520	1225	2085	565	1270	2130	610	1320	2175

D = profundidad de la base de la zapata respecto de la superficie del terreno circundante.

B / L = relación ancho partido por largo de la zapata.

**Algunas propiedades de funciones polinómicas elementales.**

En el trazado a mano alzada de diagramas de esfuerzos y desplazamientos de las barras, frecuentemente se precisa estimar el área de una función entre dos puntos, o bien estimar la posición de una recta horizontal “de origen” que delimite áreas iguales en una función (habitualmente en la función de giros).

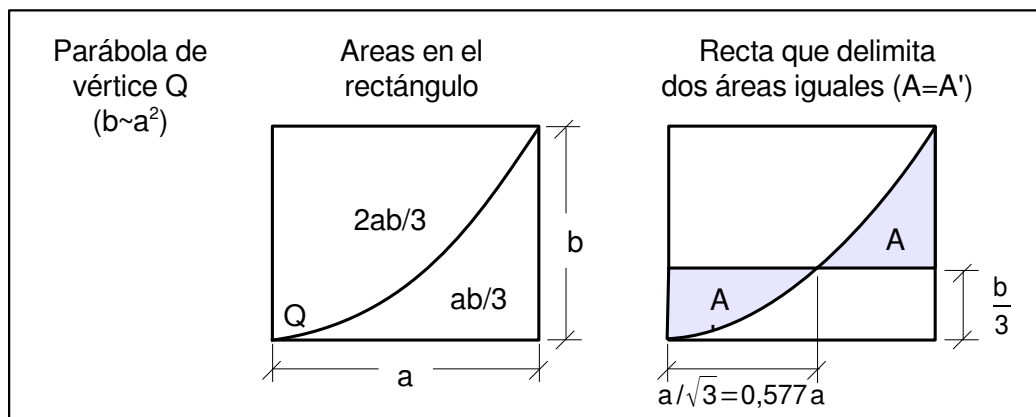


Es frecuente además que las funciones involucradas sean polinomios de bajo orden, y que un vértice de la parábola, o de la cúbica, etc, (entendido como punto de derivada primera nula) se encuentre en un extremo del tramo en que se ha de realizar la estimación. Tal es el caso mostrado en la figura, al cual hacen referencia todos los resultados que se mencionan en este apartado. Dado el rectángulo (a,b) que contiene a la función en la zona de interés, las tres condiciones  $y(0)=0$ ;  $y'(0)=0$ ;  $y(a)=b$ , caracterizan la tipología considerada.

Parábola.-

Una parábola tiene en un caso general la expresión  $y=C_0+C_1x+C_2x^2$ . Las tres condiciones consideradas permitirán determinar las tres constantes  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ . Esto quiere decir que la parábola es única, lo que son buenas noticias en el sentido de que siempre que encontremos una parábola en esas condiciones podremos aplicar los mismos resultados.

Es trivial comprobar que dicha parábola divide en áreas de 1/3 y 2/3 al del rectángulo que la contiene, y que la recta que delimita áreas iguales se encuentra a 1/3 de la altura del rectángulo, medido desde el vértice de la parábola, como indican las figuras siguientes:



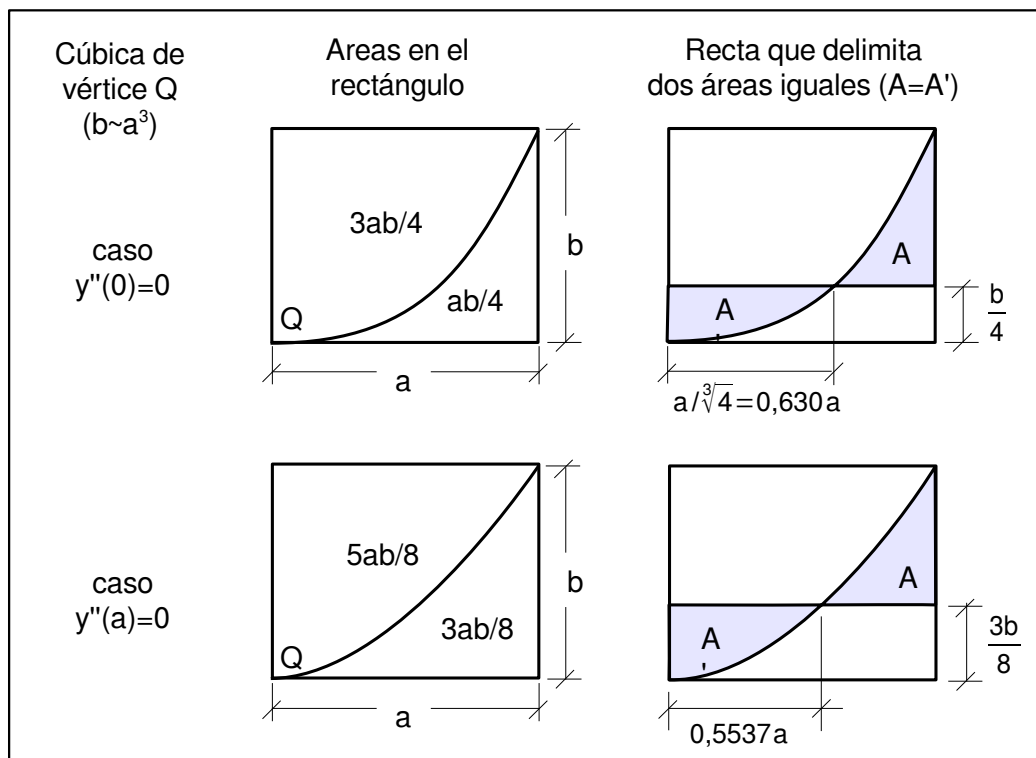
Cúbica.-

Un polinomio cúbico tiene en un caso general la expresión  $y=C_0+C_1x+C_2x^2.+C_3x^3$ . Las tres condiciones a imponer no serán suficientes para determinar las cuatro constantes  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ . Cuando encontremos una cúbica en nuestros trazados, aunque tenga el aspecto considerado, puede corresponder a distintas ecuaciones, no siendo posible ofrecer por tanto una “receta” única. Pero existen dos casos frecuentes que merece la pena considerar:

- que la derivada segunda sea nula en el vértice (caso que ocurre por ejemplo en los giros de la viga empotrada con carga constante)

- que la derivada segunda sea nula en el extremo opuesto al vértice (caso que ocurre por ejemplo en la viga biapoyada con carga constante).

Como tendremos trazadas las derivadas de la función en cuestión (son “las gráficas trazadas”), es fácil identificar si alguna de las dos condiciones es aplicable a nuestro trazado. La figura siguiente resume los resultados para ambas situaciones



La aplicación práctica prevista para todos estos resultados es la estimación razonable de valores cuando se realiza el trazado aproximado (a mano alzada) de los diagramas de vigas. A estos efectos, puede resultar más atractivo realizar las estimaciones sin depender de la consulta de tablas etc, que buscar una exactitud afinada. Si es el caso, se sugiere por ejemplo la posibilidad de recordar al menos los resultados de la parábola, y aplicarlos indiscriminadamente a cúbicas (siempre de la tipología considerada). Así, sólo habrá que recordar la cantidad 1/3, que aparece insistentemente en los resultados de la parábola. Adicionalmente puede tenerse en cuenta que, respecto de la parábola, una cúbica tiene “un poco menos de área” (~25%) si su derivada segunda se anula en el vértice, y “un poco más de área” (~13%) si se anula en el otro extremo.

No tendría especial utilidad especificar aquí resultados para polinomios de orden más elevado, dada la amplia casuística posible y que el objetivo es simplificar los trazados aproximados, y no obtener gran exactitud al precio de complicar el procedimiento (para ello ya tenemos la integración analítica). Para realizar estimaciones sobre polinomios de orden elevado, y siempre de la tipología considerada, pueden tenerse en cuenta las tendencias observadas para las cúbicas cuando las derivadas sucesivas se anulen en alguno de los extremos del intervalo, si ello sucede.

Recuérdese que las indicaciones presentadas se aplican específicamente al caso en que la derivada primera sea nula en un extremo del intervalo. Se ha presentado este caso por ser especialmente difícil de estimar a primera vista. En los demás casos será necesario usar algún procedimiento “natural” de estimación. Por ejemplo, dibujar sobre papel cuadrículado y contar

cuadrados es una manera de estimar áreas que no requiere recordar nada. Otra forma es comparar “a sentimiento” el área a estimar con la del rectángulo o el triángulo que la contiene. Cualquier procedimiento razonable de estimación ofrecerá resultados razonables, al nivel del trazado preliminar de diagramas al que nos estamos refiriendo.

# Bibliografía

## Consulta y Ampliación

- [1] *“Timoshenko Resistencia de Materiales”*. J.M. Gere. / Edit. Thomson
- [2] *“Mecánica de Materiales”*. F.P. Beer, E.R. Johnston, J.T. DeWolf, D.F. Mazurek. / Edit. Mcgraw Hill
- [3] *“Mecánica de Sólidos”*. E.P. Popov. / Edit. Pearson Educación
- [4] *“Teoría de las Estructuras”*. S.P. Timoshenko, D.H. Young. / Edit. Urmo
- [5] *“Cálculo de Estructuras”*. R. Argüelles. / Edit. ETS Ingenieros de Montes - Madrid

## Ampliación

- [6] *“Código Técnico de la Edificación (CTE)”*. Ministerio de la Vivienda. Disponible en <http://www.codigotecnico.org>
- [7] *“Instrucción de Hormigón Estructural (EHE)”*. Ministerio de Fomento. Disponible en [http://www.fomento.gob.es/MFOM/LANG\\_CASTELLANO/ORGANOS\\_COLEGIADO\\_S/CPH/instrucciones/](http://www.fomento.gob.es/MFOM/LANG_CASTELLANO/ORGANOS_COLEGIADO_S/CPH/instrucciones/) o en [http://www.fomento.gob.es/MFOM/LANG\\_CASTELLANO/ORGANOS\\_COLEGIADOS/CPA/INSTRUCCIONES/](http://www.fomento.gob.es/MFOM/LANG_CASTELLANO/ORGANOS_COLEGIADOS/CPA/INSTRUCCIONES/)
- [8] *“Instrucción del Acero Estructural (EAE)”*. Ministerio de Fomento. Disponible en [http://www.fomento.gob.es/NR/rdonlyres/D088E134-9324-4DDD-A131-B8AB1B3B109C/73091/Articulado\\_EAE.pdf](http://www.fomento.gob.es/NR/rdonlyres/D088E134-9324-4DDD-A131-B8AB1B3B109C/73091/Articulado_EAE.pdf)
- [9] *“Elasticidad”*. Luis Ortiz Berrocal. / Edit. McGraw Hill.
- [10] *“Teoría de la Elasticidad”*. Federico París. / ETSII – Sevilla (edita: Grupo de Elasticidad y Resistencia de Materiales; imprime: SAND)
- [11] *“Elasticidad”* Juan C. del Caño. Disponible en [http://www.eis.uva.es/reic/Elas\\_Web](http://www.eis.uva.es/reic/Elas_Web)
- [12] *“Elasticity, Theory and Applications”*. H. Reismann, P.S. Pawlik. / Edit. Wiley Interscience.
- [13] *“Resistencia de Materiales”*. J.A. Garrido, A. Foces. / Edit. Secretariado de Publicaciones e Intercambio Científico, Universidad de Valladolid
- [14] *“Resistencia de Materiales”*. L. Ortiz Berrocal. / Edit. McGraw Hill
- [15] *“Análisis de Estructuras”*. J.C. McCormac. Edit. Marcombo.
- [16] *“Structures, Theory and Analysis”*. M.S. Williams, J.D. Todd. / Edita M.S. Williams (anteriormente publicado por Macmillan Press Ltd.).