

Une équation polynomiale

On cherche à déterminer tous les couples de polynômes $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ vérifiant

$$P(X)^2 + (1 - X^2)Q(X)^2 = 1.$$

① Cas des solutions constantes

- Ⓐ Montrer que si P est constant, alors $Q = 0$.
- Ⓑ En déduire toutes les solutions constantes (P, Q) .

② Étude du cas non constant

On suppose désormais que P n'est pas constant et on note $n = \deg P \geq 1$.

- Ⓐ Montrer que P et Q sont premiers entre eux.
- Ⓑ Dériver l'égalité $P^2 + (1 - X^2)Q^2 = 1$ et établir la relation $PP' - XQ^2 + (1 - X^2)QQ' = 0$.

③ Lien entre P et Q

- Ⓐ Montrer que $Q \mid PP'$, puis que $Q \mid P'$.
- Ⓑ En utilisant des considérations de degré et de coefficient dominant, montrer qu'il existe $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ tel que

$$P' = \varepsilon nQ.$$

④ Équation différentielle satisfaite par P

- Ⓐ En remplaçant Q par $\frac{1}{n}P'$ dans la relation précédente, montrer que P vérifie

$$(1 - X^2)P'' - XP' + n^2P = 0.$$

- Ⓑ Expliquer pourquoi il suffit de résoudre cette équation sur l'intervalle $[-1, 1]$.

⑤ Résolution de l'équation différentielle

- Ⓐ Résoudre l'équation $(1 - t^2)y'' - ty' + n^2y = 0$ par le changement de variable $t = \cos \theta$.
- Ⓑ Montrer que parmi les solutions obtenues, une seule famille correspond à des fonctions polynomiales.
- Ⓒ On note T_n le polynôme de Tchebychev de degré n . Exprimer P et Q en fonction de T_n .

⑥ Conclusion

- Ⓐ En évaluant l'égalité initiale en $X = 1$, déterminer les constantes restantes.
- Ⓑ Conclure que les solutions sont exactement

$$(P, Q) = \left(\pm T_n, \pm \frac{1}{n} T_n' \right), \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

ainsi que les solutions constantes.

- Ⓒ Vérifier directement que ces couples sont bien solutions.