

TD

Déterminant

EXERCICES À SAVOIR FAIRE ET À CONNAÎTRE

EXERCICE 1 ■ □ □

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 = -\text{Id}$. Montrer que l'espace E est de dimension paire. ► Indication

► Correction

EXERCICE 2 ■ □ □

Soit A une matrice antisymétrique réelle d'ordre $2n + 1$. Montrer que $\det A = 0$. Ce résultat est-il encore vrai lorsque A est d'ordre pair? ► Indication ► Correction

EXERCICE 3 ■ □ □ Du calcul

Calculer l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 4 ■ □ □ et encore du calcul

Calculer l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 5 ■ □ □ Identité de Lagrange

Calculer de deux façons $\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix}$.

L'identité obtenue est appelée identité de Lagrange.

► Indication ► Correction

EXERCICE 6 ■ ■ □ Un système de Cramer

Soient a, b, c et d des éléments de $\mathbb{K}$. Résoudre sur $\mathbb{K}$
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$$
 avec a, b, c deux à deux distincts. ► Indication ► Correction

EXERCICE 7 ■ □ □

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\det(\text{Com } A) = (\det A)^{n-1}$. ► Indication

► Correction

EXERCICE 8 ■ ■ □

Calculer sous forme factorisée $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 9 ■ ■ □

Calculer sous forme factorisée $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$. ► Indication ► Correction

EXERCICES TECHNIQUES

EXERCICE 10 ■ □ □

Résoudre en fonction de $a \in \mathbb{C}$ le système
$$\begin{cases} x + ay + a^2z = 0, \\ \bar{a}x + y + az = 0, \\ \bar{a}^2x + \bar{a}y + z = 0. \end{cases}$$
 ► Indication

► Correction

EXERCICE 11 ■ ■ □

Calculer sous forme factorisée $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 12 ■ ■ □

Calculer sous forme factorisée $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 13 ■ ■ □

Calculer sous forme factorisée $\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 14 ■ ■ □

Calculer sous forme factorisée $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix}$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 15 ■ □ □

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_n \end{vmatrix}$,

où pour tout $1 \leq k \leq n$ on a $S_k = \sum_{i=1}^k i$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 16 ■ ■ □ **Déterminant tridiagonal**

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer le déterminant de taille n , $D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & & (0) \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & a & a+b \end{vmatrix}$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 17 ■ □ □

Calculer $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 18 ■ ■ □

Calculer $\begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & 1 \end{vmatrix}$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 19 ■ ■ □

Déterminer selon les valeurs de $a \in \mathbb{C}$ le rang de la matrice M_a définie par

$$M_a = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & a \\ a & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

► Indication ► Correction

EXERCICES "COMME EN COLLE"

EXERCICE 20 ■ (A) ■

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, \dots, C_n$.

Calculer le déterminant de la matrice B de colonnes $C_1 - C_2, \dots, C_{n-1} - C_n, C_n - C_1$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 21 ■ ■ □

Soit $V = \{x \mapsto e^x P(x) \mid P \in \mathbb{R}_n[X]\}$.

- ① Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dont on déterminera la dimension.
- ② Montrer que l'application $D : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de V dont on calculera le déterminant.

► Indication ► Correction

EXERCICE 22 ■ ■ □

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varphi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ déterminé par

$$\varphi_A(M) = AM$$

Calculer la trace et le déterminant de φ_A . ► Indication ► Correction

EXERCICE 23 ■ ■ ■ Matrices à diagonale dominante

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\forall i \in \{1, \dots, n\}, |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$.

- ① Montrer que A est inversible.
- ② On suppose en outre $\forall i \in \{1, \dots, n\}, a_{i,i} > 0$. Montrer que $\det A > 0$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 24 ■ ■ ■

Soit $n \geq 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\det(A + X) = \det A + \det X.$$

Montrer que $\det A = 0$ puis $A = 0$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 25 ■ ■ □

Montrer que
$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 2 & 1 & \ddots & & 3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n-1 & & \ddots & 1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)n^{n-1}}{2}.$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 26 ■ ■ ■

Soit $n \geq 2$ et $P \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$. Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} P(1) & P(2) & \dots & P(n) \\ P(2) & P(3) & \dots & P(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P(n) & P(n+1) & \dots & P(2n-1) \end{vmatrix}$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 27 ■ ■ ■

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Montrer que $\det(I_p - AB) = \det(I_q - BA)$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 28 ■ ■ ■

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n-1$. Calculer $\det(P(i+j))_{1 \leq i,j \leq n}$. ► Indication ► Correction

Indications

EXERCICES À SAVOIR FAIRE ET À CONNAÎTRE

INDICATION POUR L'EXERCICE 1

On passe au déterminant dans l'équation.

[↩ retour à l'EXERCICE 1](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 2

Appliquer la définition du déterminant dans la définition d'une matrice antisymétrique. Trouver un contre-exemple en dimension 2 pour la deuxième question.

[↩ retour à l'EXERCICE 2](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 **Du calcul**

Méthode classique.

[↩ retour à l'EXERCICE 3](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 **et encore du calcul**

Méthode classique.

[↩ retour à l'EXERCICE 4](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 **Identité de Lagrange**

On calcule les déterminants directement, puis le produit matriciel et le déterminant de la matrice obtenu.

[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 **Un système de Cramer**

On écrit le système sous forme matricielle, et on utilise les formule de Cramer.

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 7

Pensez à séparer les cas A inversible et non inversible.

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 8

Un calcul direct suffit.

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 9

Essayer de faire apparaître le facteur $(a + b + c)$, en faisant des opérations sur les lignes ou les colonnes.

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

EXERCICES TECHNIQUES

INDICATION POUR L'EXERCICE 10

On passe encore par Cramer.

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 11

Essayer de faire apparaître un déterminant de Vandermonde.

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 12

Des opérations, colonne par colonne, peuvent faire apparaître une ligne de a .

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 13

La somme de chaque ligne semble être la même...

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 14

Il faut factoriser jusqu'au bout, avec les formules de duplication.

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 15

Technique de soustraction colonne par colonne, pour faire apparaître une matrice triangulaire.

[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 16 **Déterminant tridiagonal**

On calcule par développement sur la première colonne ou ligne pour refaire apparaître le "même" déterminant au rang $n - 1$.

On obtient une suite récurrente, que l'on sait résoudre !

[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 17

La somme de chaque ligne semble être la même...

[↩ retour à l'EXERCICE 17](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 18

Essayer de vous ramener au déterminant de l'EXERCICE 17.

[↩ retour à l'EXERCICE 18](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 19

Calculer le déterminant pour savoir quand cette matrice est de rang maximal, puis

[↩ retour à l'EXERCICE 19](#)

EXERCICES "COMME EN COLLE"

INDICATION POUR L'EXERCICE 20

Regarder la somme des colonnes de la matrice obtenue.

[↩ retour à l'EXERCICE 20](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 21

Appliquer les définitions sans avoir peur du problème.

[↩ retour à l'EXERCICE 21](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 22

Ecrire φ_A en fonction des $E_{i,j}$ (base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

Essayer alors d'imaginer la matrice de φ_A , à partir de la matrice A .

[↩ retour à l'EXERCICE 22](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 23 **Matrices à diagonale dominante**

- ① Montrer que la famille des colonnes est libre.
- ② Etudier la fonction $f : x \mapsto \det(A + xI_n)$.

[↩ retour à l'EXERCICE 23](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 24

Prenez des matrices particulières pour X . Après avoir montré $\det A = 0$, utiliser les matrices $J_{m,n,r}$ du cours pour rendre $A + X$ inversible mais pas A et X .

[↩ retour à l'EXERCICE 24](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 25

La somme de chaque ligne semble être la même...

[↩ retour à l'EXERCICE 25](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 26

Montrer que les colonnes sont liées en étudiant la famille $(P(X+1), \dots, P(X+n))$ de $\mathbb{R}[X]$.

[↩ retour à l'EXERCICE 26](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 27

Utiliser les matrices $J_{m,n,r}$ du cours sur A pour calculer les produits AB et BA plus simplement.

[↩ retour à l'EXERCICE 27](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 28

Se ramener à un déterminant de Vandermonde.

[↩ retour à l'EXERCICE 28](#)

Corrections

EXERCICES À SAVOIR FAIRE ET À CONNAÎTRE

Correction de l'EXERCICE 1

Posons $n = \dim E$. Comme $\det(f^2) = \det(-I_n)$ on a $\det(f)^2 = (-1)^n \geq 0$, donc n est pair.

[↩ retour à l'EXERCICE 1](#)

Correction de l'EXERCICE 2

Comme ${}^tA = -A$ on a $\det A = \det {}^tA = \det(-A) = (-1)^{2n+1} \det A = -\det A$.
Donc $\det A = 0$.

La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ fournit un contre-exemple au second problème posé en deuxième question.

[↩ retour à l'EXERCICE 2](#)

Correction de l'EXERCICE 3 Du calcul

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{43} & \frac{11}{43} & \frac{7}{43} \\ \frac{10}{43} & \frac{-4}{43} & \frac{5}{43} \\ \frac{-9}{43} & \frac{-7}{43} & \frac{2}{43} \end{pmatrix}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 3](#)

Correction de l'EXERCICE 4 et encore du calcul

$$\frac{1}{95} \begin{pmatrix} -3 & 1 & -5 & -13 \\ -7 & 2 & -14 & -20 \\ -23 & 9 & -33 & -52 \\ -25 & 10 & -40 & -51 \end{pmatrix}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 4](#)

Correction de l'EXERCICE 5 Identité de Lagrange

D'une part

$$\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix} = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

D'autre part

$$\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ ad + bc & ac - bd \end{vmatrix} = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)

Correction de l'EXERCICE 6 Un système de Cramer

On a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) \neq 0$$

Par les formules de Cramer

$$\begin{cases} x = \frac{(b-d)(c-d)(c-b)}{(b-a)(c-a)(c-b)} \\ y = \frac{(d-a)(c-a)(c-b)}{(d-a)(c-a)(c-b)} \\ z = \frac{(b-a)(d-a)(d-b)}{(b-a)(c-a)(c-b)} \end{cases}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

Correction de l'EXERCICE 7

Si A est inversible, alors la relation $A \operatorname{Com}(A)^T = (\det A) I_n$ donne

$$(\det A) \det(\operatorname{Com} A) = (\det A)^n$$

Comme $\det A \neq 0$, on obtient

$$\det(\operatorname{Com} A) = (\det A)^{n-1}$$

Si A n'est pas inversible, alors $\operatorname{Com}(A)^T$ ne l'est pas non plus. En effet, supposons que $\operatorname{Com}(A)^T$ soit inversible. La relation $A \operatorname{Com}(A)^T = 0$ entraînerait $A = 0$, puis $\operatorname{Com}(A)^T = 0$, ce qui est contradictoire. Donc

$$\det(\operatorname{Com} A) = 0 = (\det A)^{n-1}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

Correction de l'EXERCICE 8

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = -a \begin{vmatrix} a & c \\ b & 0 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{vmatrix} = abc + abc = 2abc$$

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

Correction de l'EXERCICE 9

En sommant les colonnes sur la première et en factorisant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix}$$

En retirant la première ligne aux suivantes et en développant sur la première colonne

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} a-b & b-c \\ c-a & a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca))$$

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

EXERCICES TECHNIQUES

Correction de l'EXERCICE 10

Le déterminant du système est

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ \bar{a} & 1 & a \\ \bar{a}^2 & \bar{a} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1-|a|^2 & a(1-|a|^2) \\ 0 & \bar{a}(1-|a|^2) & 1-|a|^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1-|a|^2 & a(1-|a|^2) \\ 0 & 0 & 1-|a|^2 \end{vmatrix}$$

Si $|a| \neq 1$ alors le système est de Cramer et homogène

$$\mathcal{S} = \{(0, 0, 0)\}$$

Si $|a| = 1$ alors le système équivaut à une seule équation

$$x + ay + a^2z = 0$$

car les deux autres lui sont proportionnelles. On en déduit

$$\mathcal{S} = \{(-ay - a^2z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{C}\}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

Correction de l'EXERCICE 11

En retranchant la première colonne aux suivantes puis en sommant les colonnes sur la première

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a+b & c-a & c-b \\ a^2+b^2 & c^2-a^2 & c^2-b^2 \\ a^3+b^3 & c^3-a^3 & c^3-b^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2c & c-a & c-b \\ 2c^2 & c^2-a^2 & c^2-b^2 \\ 2c^3 & c^3-a^3 & c^3-b^3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

En factorisant par 2 puis en retranchant la première colonne aux suivantes

$$D = 2 \begin{vmatrix} c & -a & -b \\ c^2 & -a^2 & -b^2 \\ c^3 & -a^3 & -b^3 \end{vmatrix}$$

Enfin en factorisant on se ramène à un déterminant de Vandermonde

$$D = 2abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ c^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 2abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-c & b-c \\ 0 & a^2-c^2 & b^2-c^2 \end{vmatrix}$$

Finalement

$$D = 2abc(a-c)(b-c) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+c & b+c \end{vmatrix} = 2abc(a-c)(b-c)(b-a)$$

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

Correction de l'EXERCICE 12

En retranchant à chaque ligne la précédente (en commençant par la dernière)

$$D = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c)$$

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

Correction de l'EXERCICE 13

En sommant toutes les colonnes sur la première et en factorisant

$$D = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+2c & c & c & b \\ a+b+2c & a & b & c \\ a+b+2c & b & a & c \\ a+b+2c & c & c & a \end{vmatrix} = (a+b+2c) \begin{vmatrix} 1 & c & c & b \\ 1 & a & b & c \\ 1 & b & a & c \\ 1 & c & c & a \end{vmatrix}$$

En retranchant la première ligne aux suivantes et en factorisant

$$D = (a+b+2c) \begin{vmatrix} 1 & c & c & b \\ 0 & a-c & b-c & c-b \\ 0 & b-c & a-c & c-b \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

donc

$$D = (a+b+2c)(a-b) \begin{vmatrix} a-c & b-c \\ b-c & a-c \end{vmatrix} = (a+b+2c)(a-b)((a-c)^2 - (b-c)^2)$$

puis

$$D = (a+b+2c)(a-b)^2(a+b-2c)$$

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

Correction de l'EXERCICE 14

En retirant la première colonne aux suivantes

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos a & \cos b - \cos a & \cos c - \cos a \\ \sin a & \sin b - \sin a & \sin c - \sin a \end{vmatrix}$$

Par la formule de factorisation

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$D = -4 \sin \frac{b-a}{2} \sin \frac{c-a}{2} \begin{vmatrix} \sin \frac{b+a}{2} & \sin \frac{c+a}{2} \\ \cos \frac{b+a}{2} & \cos \frac{c+a}{2} \end{vmatrix}$$

puis

$$D = -4 \sin \frac{b-a}{2} \sin \frac{c-a}{2} \sin \frac{b-c}{2}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)

Correction de l'EXERCICE 15

On soustrait colonnes par colonnes, en commençant par la fin.

$$\text{On obtient } \begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ S_1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ S_1 & 2 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix} = n!.$$

[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)

Correction de l'EXERCICE 16 Déterminant tridiagonal

Par développement d'un déterminant tridiagonal,

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$$

La suite (D_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 - (a+b)r + ab = 0$ de racines a et b . Si $a \neq b$ alors on peut écrire $D_n = \lambda a^n + \mu b^n$ et compte tenu des valeurs initiales, on obtient

$$D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$$

Si $a = b$ alors on peut écrire $D_n = (\lambda n + \mu)a^n$ et on parvient cette fois-ci à

$$D_n = (n+1)a^n$$

[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)

Correction de l'EXERCICE 17

En ajoutant à la première colonne les autres colonnes et en factorisant, on obtient

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Puis, en retranchant la première colonne aux autres, on obtient

$$D_n = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (n-1)(-1)^{n-1}$$

puisque le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des termes diagonaux.

[↩ retour à l'EXERCICE 17](#)

Correction de l'EXERCICE 18

Méthode 1. En supprimant les 1 sur la première colonne, grâce à la première ligne, on obtient que le déterminant recherché, est le même que l'exercice 17 en remplaçant les 1 par des -1. Il suffit de factoriser sur chaque ligne par -1 et on obtient $(-1)^n(n-2)(-1)^{n-3} = 2 - n$.

Méthode 2. Commençons par développer cette matrice par rapport à la première ligne

$$\det M = 1 + \sum_{k=2}^n (-1)^{k+1} \det(X, E_1, \dots, E_{k-2}, E_k, \dots, E_{n-1})$$

où $E_1, \dots, E_{n-1}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ et $X \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ est le vecteur colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1. Or, par antisymétrie,

$$\begin{aligned} \det(X, E_1, \dots, E_{k-2}, E_k, \dots, E_{n-1}) &= (-1)^{k-2} \det(E_1, \dots, E_{k-2}, X, E_k, \dots, E_{n-1}) \\ &= (-1)^{k-2} \det I_{n-1} = (-1)^k. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\det M = 1 + \sum_{k=2}^n (-1) = 2 - n$.

[↩ retour à l'EXERCICE 18](#)

Correction de l'EXERCICE 19

Remarquons tout d'abord que le déterminant extrait avec les $n-1$ premières lignes et colonnes vaut 1 (déterminant triangulaire) donc $\text{rg } M_a \geq n-1$.

Par ailleurs, le déterminant de M_a vaut $1 + (-1)^{n+1}a^n$ (en développant par rapport à la première colonne). La matrice M_a est donc inversible si, et seulement si, $(-a)^n \neq 1$ c'est-à-dire $-a \notin \mathbb{U}_n$. En conclusion, si a est l'opposé d'une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité, alors $\text{rg } M_a = n-1$; sinon, $\text{rg } M_a = n$.

[↩ retour à l'EXERCICE 19](#)

EXERCICES "COMME EN COLLE"

Correction de l'EXERCICE 20

La somme des colonnes de A est nulle donc $\det B = 0$.

[↩ retour à l'EXERCICE 20](#)

Correction de l'EXERCICE 21

- ① Il est clair que V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (Montrer le !).
On pose $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_k(x) = x^k e^x$. $\mathcal{B} = (f_0, \dots, f_n)$ forme une base de V , donc $\dim V = n+1$.
- ② Pour $f(x) = P(x)e^x$ on a $D(f)(x) = f'(x) = (P(x) + P'(x))e^x$. D est bien une application de V dans V . De plus la linéarité de D découle de la linéarité de la dérivation et on peut donc conclure $D \in \mathcal{L}(V)$. Puisque $(x^k e^x)' = (x^k + kx^{k-1})e^x$ on a $D(f_k) = f_k + kf_{k-1}$ donc a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(D) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & n \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

Par suite $\det D = 1 \times 1 \times \dots \times 1 = 1$.

[↩ retour à l'EXERCICE 21](#)

Correction de l'EXERCICE 22

Notons $E_{i,j}$ les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On observe

$$\varphi_A(E_{i,j}) = \sum_{k=1}^n a_{k,i} E_{k,j}$$

Par suite dans la base $(E_{1,1}, \dots, E_{n,1}, E_{1,2}, \dots, E_{n,2}, \dots, E_{1,n}, \dots, E_{n,n})$, la matrice de l'endomorphisme φ_A est diagonale par blocs avec n blocs diagonaux tous égaux à A . On en déduit

$$\text{tr } \varphi_A = n \text{tr } A \text{ et } \det \varphi_A = (\det A)^n$$

[↩ retour à l'EXERCICE 22](#)

Correction de l'EXERCICE 23 Matrices à diagonale dominante

- ① Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A et supposons

$$\lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_n C_n = 0$$

Si $m = \max(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|) \neq 0$ alors, puisque pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j a_{i,j} = 0$$

on obtient

$$|\lambda_i| \leq \frac{\sum_{j \neq i} |\lambda_j| |a_{i,j}|}{|a_{i,i}|} \leq m \frac{\sum_{j \neq i} |a_{i,j}|}{|a_{i,i}|} < m$$

ce qui est absurde compte tenu de la définition de m . Par suite, la famille $(C_1, \dots, C_n)$ est libre et donc A inversible.

- ② Considérons l'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \det(A + xI_n)$.

La fonction f est clairement polynomiale de monôme dominant x^n , elle est donc continue et de limite $+\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$. De plus, le résultat précédent s'applique à la matrice $A + xI_n$ pour tout $x \geq 0$ et donc $f(x) \neq 0$ sur $[0; +\infty[$. Par continuité, la fonction f ne peut prendre de valeurs ≤ 0 et donc

$$\forall x \geq 0, f(x) > 0$$

En particulier $\det A = f(0) > 0$.

[↩ retour à l'EXERCICE 23](#)

Correction de l'EXERCICE 24

Notons que pour $n = 1$: la relation $\det(A + X) = \det A + \det X$ est vraie pour tout A et tout X . On suppose dans la suite $n \geq 2$. Pour $X = A$, la relation $\det(A + X) = \det A + \det X$ donne $2^n \det A = 2 \det A$ et donc $\det A = 0$. La matrice A n'est donc par inversible et en posant $r < n$ égal à son rang, on peut écrire $A = QJ_rP$ avec P, Q inversibles et

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & O_{n-r} \end{pmatrix}$$

Posons alors $X = QJ'_rP$ avec

$$J'_r = \begin{pmatrix} O_r & (0) \\ (0) & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

Puisque $A + X = QI_nP = QP$, la matrice $A + X$ est inversible et donc $\det X = \det(A + X) \neq 0$. On en déduit que la matrice J'_r est l'identité et donc $r = 0$ puis $A = O_n$.

[↩ retour à l'EXERCICE 24](#)

Correction de l'EXERCICE 25

En sommant toutes les colonnes sur la première

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & \ddots & & 3 \\ \vdots & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & n \\ 1 & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

En retranchant à chaque ligne la précédente (en commençant par la fin)

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 0 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1-n \end{vmatrix}$$

On développe selon la première colonne et on se ramène à

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} a & (b) \\ & \ddots \\ (b) & a \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

avec $a = 1 - n$ et $b = 1$. La poursuite du calcul donne alors

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2} (-1)^{n-1} n^{n-2}$$

d'où la formule proposée.

[↩ retour à l'EXERCICE 25](#)

Correction de l'EXERCICE 26

La famille de polynômes $(P(X+1), \dots, P(X+n))$ est liée car de cardinal n dans un espace de dimension $n-1$. Ainsi, il existe des scalaires $a_0, \dots, a_{n-1}$ non tous nuls tels que

$$\sum_{k=1}^n a_k P(X+k) = 0$$

En notant $C_1, \dots, C_n$ les colonnes du déterminant précédent, $\sum_{k=1}^n a_k C_k = 0_{n,1}$, donc les colonnes sont liées et le déterminant est nul.

[↩ retour à l'EXERCICE 26](#)

Correction de l'EXERCICE 27

Notons r le rang de A et considérons les matrices $P \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q \in \text{GL}_q(\mathbb{K})$ telles que $A = PJ_r Q$; posons enfin, $B = Q^{-1}CP^{-1}$. Alors, d'une part,

$$\begin{aligned} \det(I_p - AB) &= \det(P) \det(I_p - J_r C) \det(P^{-1}) \\ &= \begin{vmatrix} I_r - C_1 & -C_2 \\ 0 & I_{p-r, q-r} \end{vmatrix} = \det(I_r - C_1), \end{aligned}$$

en décomposant par blocs $C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix}$, avec $C_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ et $C_4 \in \mathcal{M}_{q-r, p-r}(\mathbb{K})$.

D'autre part,

$$\begin{aligned} \det(I_q - BA) &= \det(Q^{-1}) \det(I_q - C J_r) \det(Q) \\ &= \begin{vmatrix} I_r - C_1 & 0 \\ -C_3 & I_{q-r, p-r} \end{vmatrix} = \det(I_r - C_1). \end{aligned}$$

En conclusion, $\det(I_q - BA) = \det(I_p - AB)$.

[↩ retour à l'EXERCICE 27](#)

Correction de l'EXERCICE 28

Commençons par écrire la formule de Taylor

$$\forall i, j \leq n, \quad P(i+j) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{i^k}{k!} P^{(k)}(j).$$

Ainsi,

$$\det(P(i+j)) = \det\left(\frac{i^{j-1}}{(j-1)!}\right) \det(P^{(i-1)}(j))$$

Mais d'une part

$$\det\left(\frac{i^{j-1}}{(j-1)!}\right) = \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} k!} V(1, 2, \dots, n) = 1$$

et d'autre part, en utilisant le caractère n -linéaire alterné et en notant a le coefficient dominant de P ,

$$\begin{aligned} \det(P^{(i-1)}(j)) &= \det\left(a \frac{(n-1)!}{(n-i)!} j^{n-i}\right) = (a(n-1)!)^n \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} k!} \det(j^{n-i}) \\ &= (a(n-1)!)^n \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} k!} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} V(1, 2, \dots, n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (a(n-1)!)^n. \end{aligned}$$

Le déterminant recherché est donc $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (a(n-1)!)^n$.

[↩ retour à l'EXERCICE 28](#)